

Міністерство освіти і науки України

Національний університет водного господарства та
природокористування

Кафедра теоретичної механіки, інженерної графіки
та машинознавства

02-05-163М

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять та виконання самостійної роботи
з навчальної дисципліни
«Технічна механіка (розділ «статика», «кінематика»,
«опір матеріалів»)»

для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за
освітньо-професійною програмою «Агроінженерія»
спеціальності 208 «Агроінженерія»
денної й заочної форм навчання

Рекомендовано науково-методичною
радою
з якості ННМІ
Протокол №4 від 31 грудня 2024 р.

Рівне – 2025

Методичні вказівки до практичних занять та виконання самостійної роботи з навчальної дисципліни «Технічна механіка (розділ «статика», «кінематика», «опір матеріалів»)» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою «Агроінженерія» спеціальності 208 «Агроінженерія» денної й заочної форм навчання. [Електронне видання] / Серілко Л. С., Войтович Л. В. – Рівне : НУВГП, 2025. – 63 с.

Укладачі:

Серілко Л. С., к.т.н., доцент кафедри теоретичної механіки, інженерної графіки та машинознавства;

Войтович Л. В., к.т.н., старший викладач кафедри теоретичної механіки, інженерної графіки та машинознавства.

Відповідальний за випуск: Козяр М. М., д.п.н., професор, завідувач кафедри теоретичної механіки, інженерної графіки та машинознавства.

Керівник групи забезпечення спеціальності
208 «Агроінженерія»

Бундза О. З.

Попередня версія методичних вказівок 02-05-136М, 02-05-35

© Л. С. Серілко,
Л. В. Войтович, 2025
© НУВГП, 2025

1. ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

1.1. Технічна механіка вивчає найбільш загальні закономірності, закони механічного руху і механічної взаємодії матеріальних тіл. Вона є загальнотехнічною точною дисципліною – на її основних положеннях базуються такі інженерні дисципліни, як теорія механізмів і машин, деталі машин тощо. Тому глибоке вивчення технічної механіки необхідне для успішного засвоєння і розуміння матеріалу усіх технічних предметів, а також для адекватного сприйняття і наукового тлумачення явищ природи.

1.2. Запорукою успішного засвоєння матеріалу даного розділу дисципліни є самостійне розв’язання практичних задач для самостійної роботи.

1.3. Виконання завдань проводиться індивідуально: номер схеми вибирається відповідно до порядкового номера студента в журналі викладача (на початок семестру) та номера групи на потоці (визначає викладач).

1.4. Самостійні роботи належним чином оформляються. Розв’язок завдання повинен містити назву, умову, розрахункову схему, викладки розв’язання з короткими поясненнями та виділені відповіді.

2. ЗАВДАННЯ

2.1. Завдання 1. Визначення реакцій опор балки

Для зазначеної балки (рис. 2.1) визначити реакції опор та зробити перевірку знайденого розв’язку. Вагою балки знехтувати. Вихідні дані взяти з таблиці 2.1, номер схеми відповідає порядковому номеру в журналі.

2.2. Завдання 2. Визначення реакцій в’язей у складеній конструкції

Для конструкції (рис.2.2), яка складається із двох абсолютно твердих ламаних стержнів, визначити реакції опор та зусилля в шарнірі С і зробити перевірку розв’язку. При розрахунку вагою конструкції знехтувати. Вихідні дані взяти з таблиці 2.2, номер схеми відповідає порядковому номеру в журналі.

2.3. Завдання 3. Дослідження рівноваги тіла під дією довільної просторової системи сил. За умови рівноваги вала (поворотної рами) визначити силу Q (в окремих випадках – інтенсивність навантаження q) та реакції опор. При розв’язанні вал (раму) вважати невагомим.

Вихідні дані взяти з таблиці 2.3. При необхідності прийняти $R=0,5a$, $c = 0,2a$. Номер схеми на рис.2.3 відповідає порядковому номеру в журналі викладача.

2.4. Завдання 4. Кінематика найпростіших рухів твердого тіла.

Вантаж 1 (рис.2.4), рухаючись за законом $x=x(t)$ (додатній напрям відліку – вниз), через наявні ідеальні нитки, що не ковзають по поверхнях барабанів, пасові передачі та зубчасті зачеплення приводить в рух заданий механізм. Для моменту часу t_1 визначити швидкість та прискорення вказаної точки М, зобразивши їх на рисунку.

Дані для розрахунку взяти з табл.2.4. Номер схеми (рис.2.4) відповідає оголошеному викладачем номеру студента в журналі викладача.

2.5. Завдання 5. Кінематика плоского руху твердого тіла

Для відображеного на рис.2.5 положення механізму, яке відповідає деякому заданому моменту часу t_1 , визначити швидкості та прискорення точок В і С, а також кутові швидкості та прискорення усіх ланок механізму. Напрявлені величини відобразити на рисунку; розрахункові дані взяти з табл.2.5.

2.6. Завдання 6. Для балки з завдання 1 побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів по всій довжині балки (пару сил M прикласти до точки балки де вказані розміри). Визначити розміри поперечного перерізу балки в формі двотавра, прямокутника ($h/b=2/1$), круга, прийнявши $[\sigma] = \sigma_{adm} = 160$ МПа. Вказати раціональний переріз.

Таблиця 2.1

Варіант (номер групи)	P , кН	G , кН	M , кН·м	q , кН/м	$\alpha=\beta$, град.	a , м	b , м
1	20	30	10	4	60	3,0	2,0
2	10	20	20	6	45	1,5	2,4

Таблиця 2.2

Варіант (номер групи)	P , кН	G , кН	M , кН·м	q , кН/м	α , град.	a , м	b , м
1	10	30	10	2	30	1,0	2,5
2	15	20	16	4	60	2,0	1,2

Таблиця 2.3

Варіант (номер групи)	P , кН	a , м	b , м	β , град.
1	20	1,0	2,0	30
2	10	2,0	3,0	45

Таблиця 2.4

Варіант (номер групи)	R_3 , м	$x = x(t)$, м	t_1 , с
1	0.10	$1.5t^2$	1
2	0.20	$2t^3 - 1.5t$	2

Таблиця 2.5

Варіант (номер групи)	ω , с ⁻¹	ε , с ⁻²	OA , м
1	2,0	1,0	0,20
2	4,0	2,0	0,40

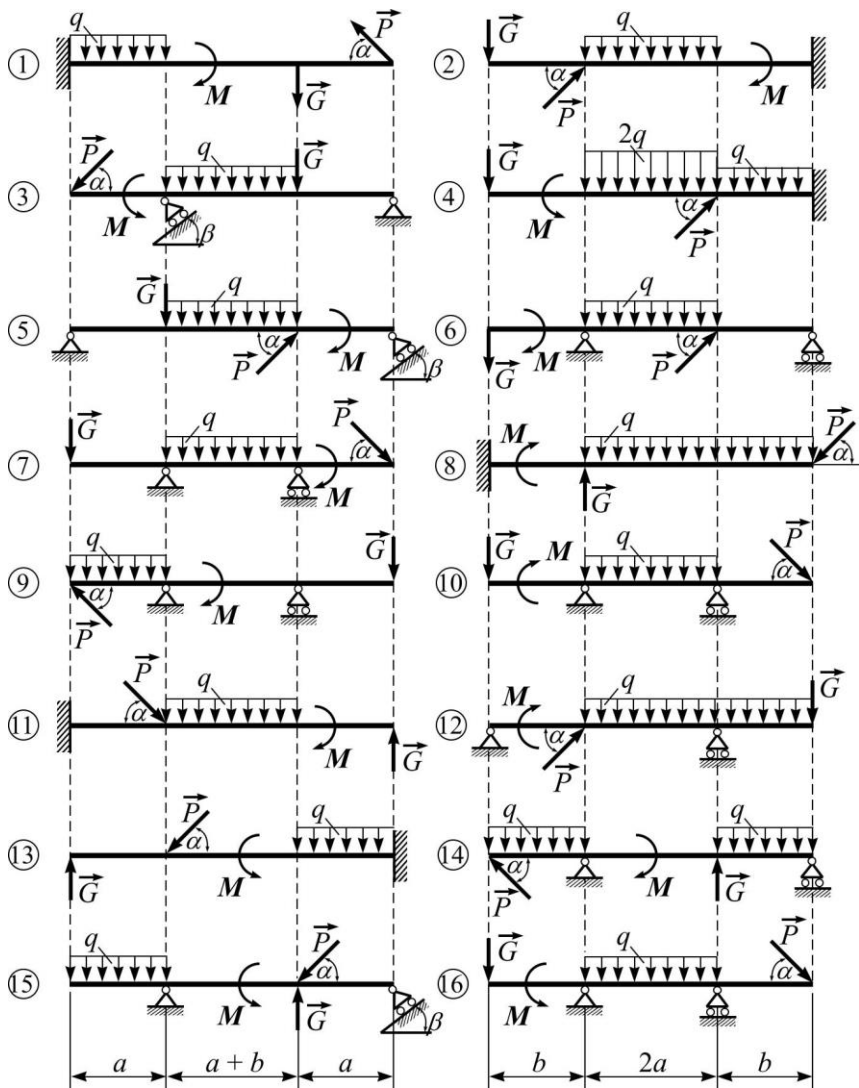


Рис. 2.1

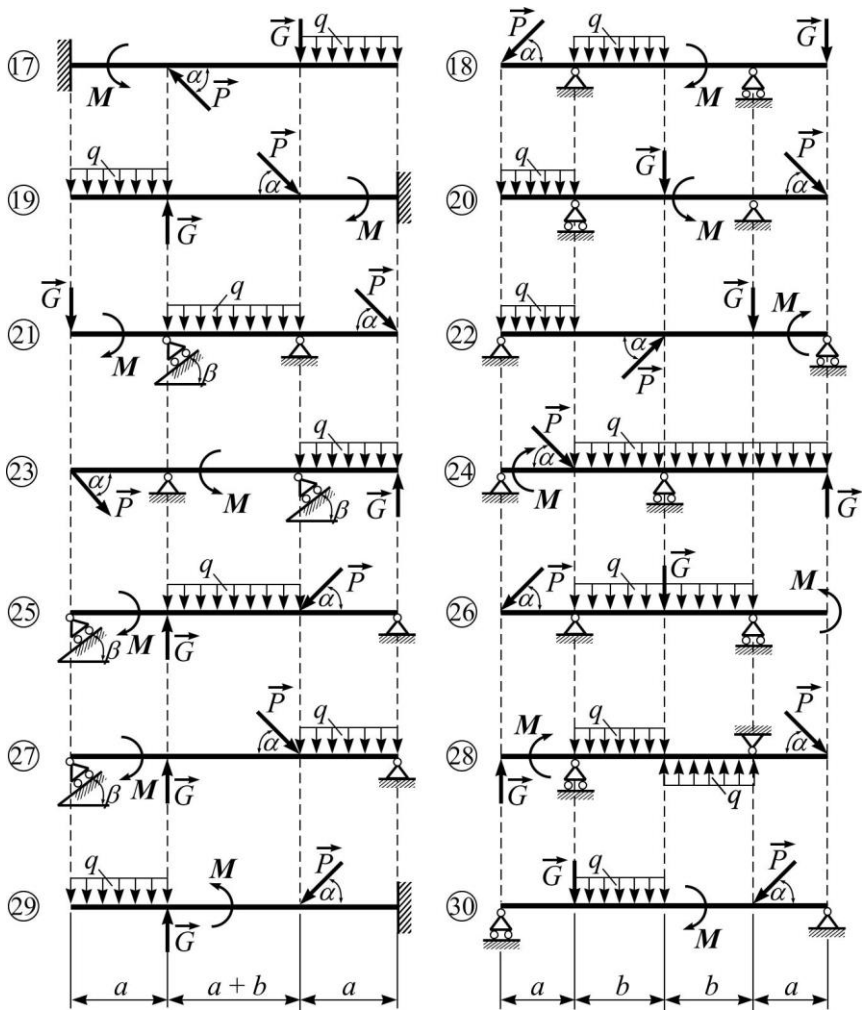


Рис. 2.1 (продовження)

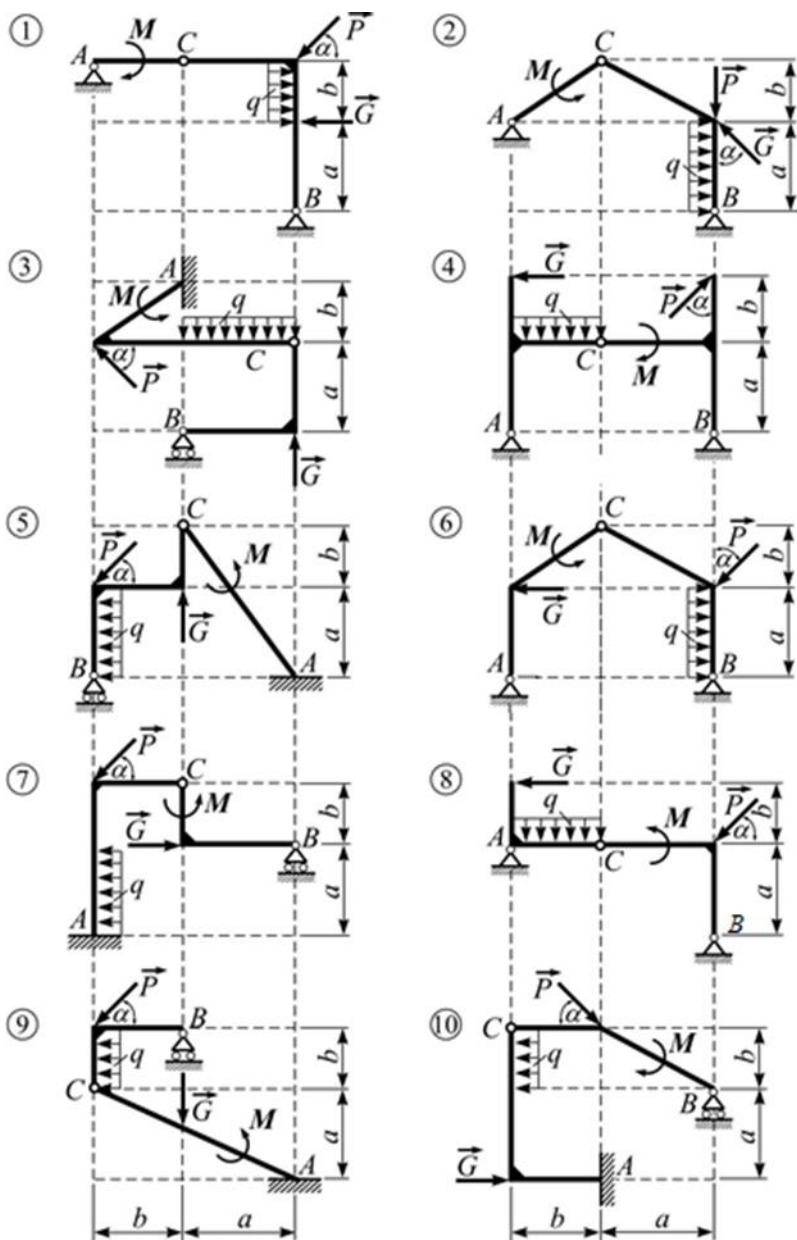


Рис. 2.2

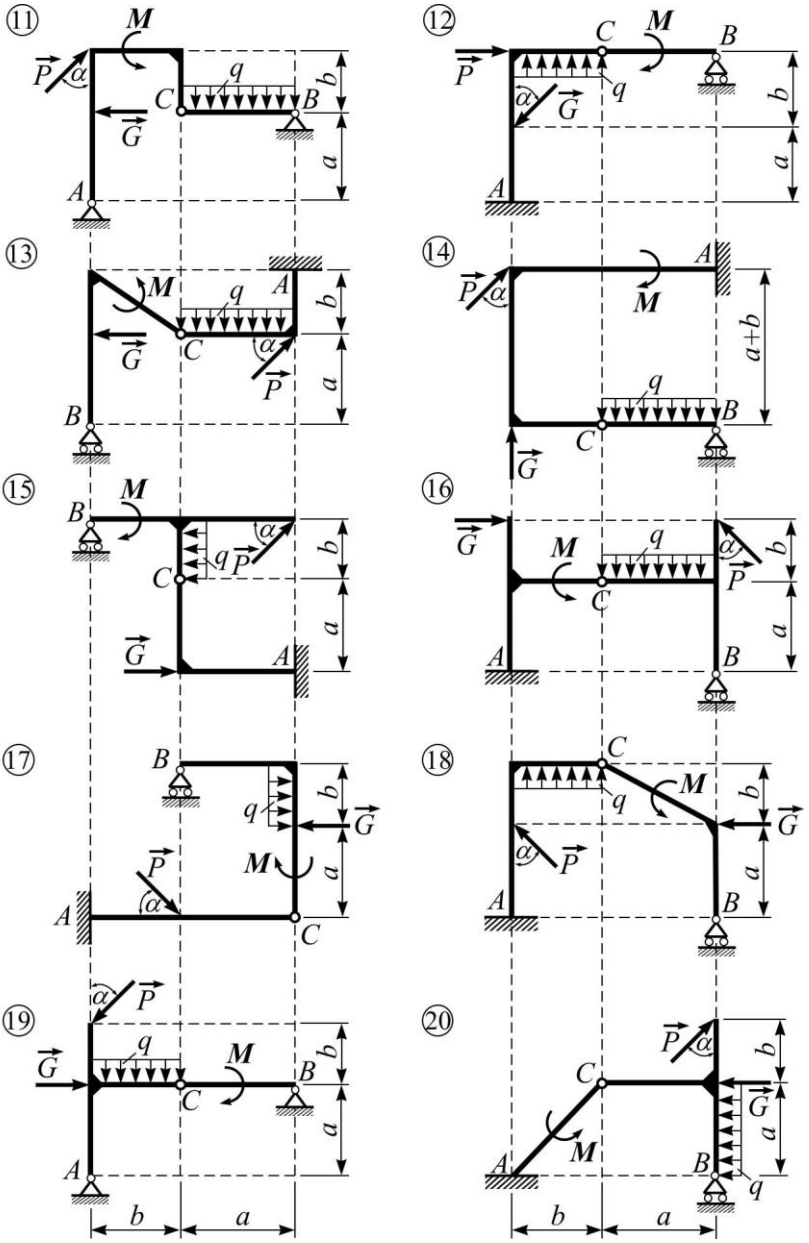


Рис. 2.2 (продовження)

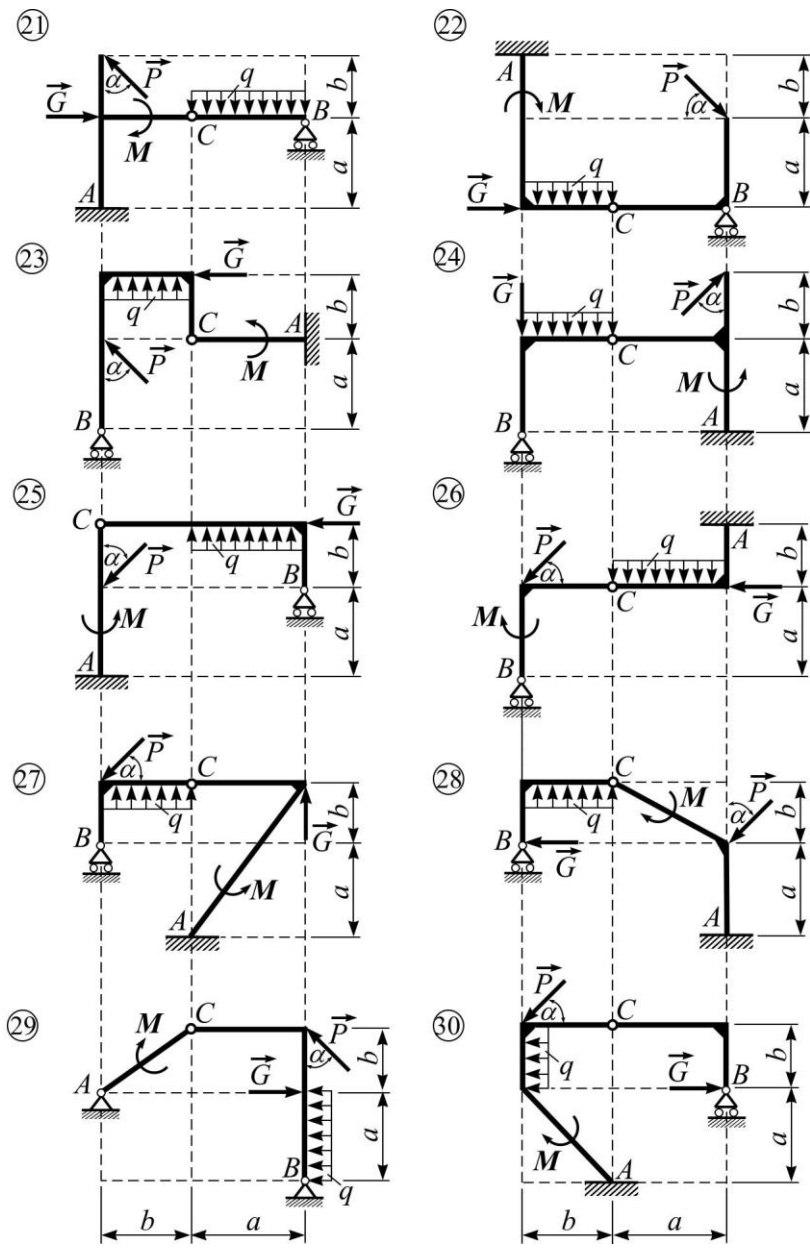


Рис. 2.2 (продовження)

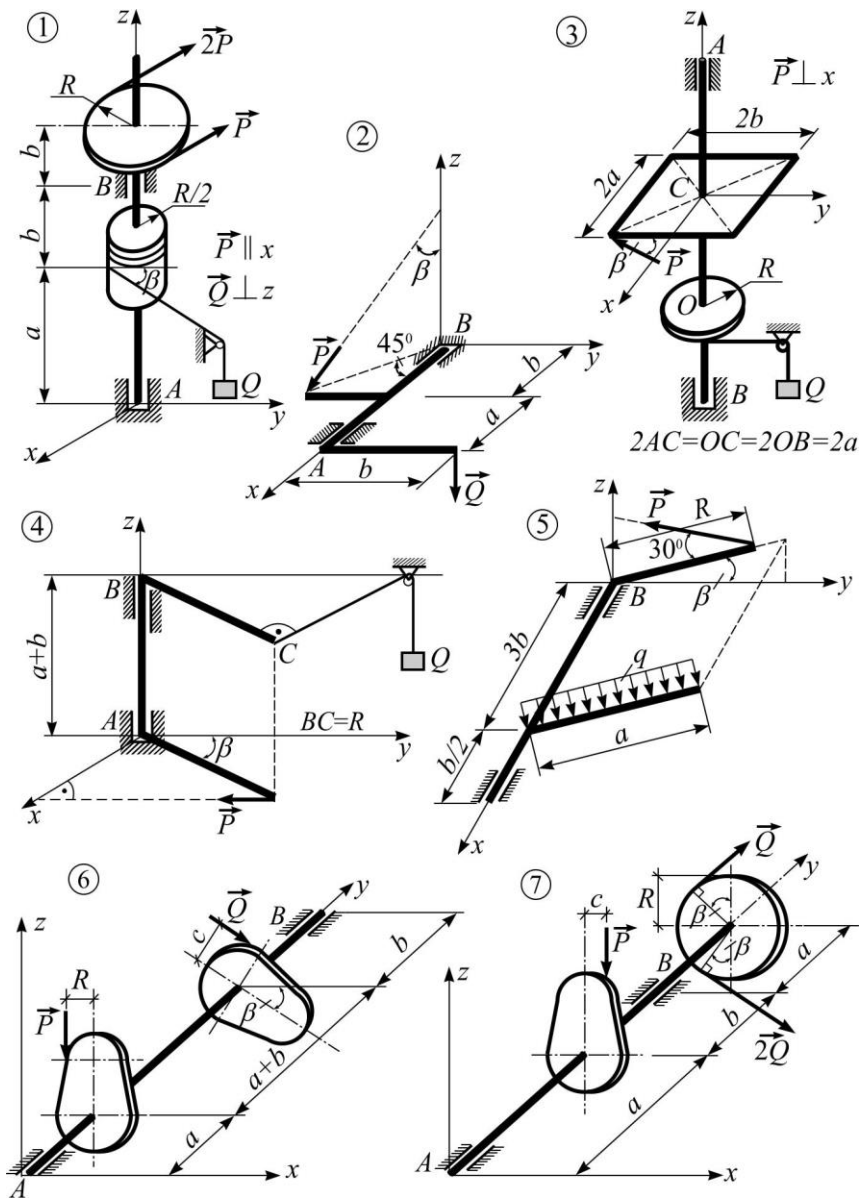


Рис. 2.3

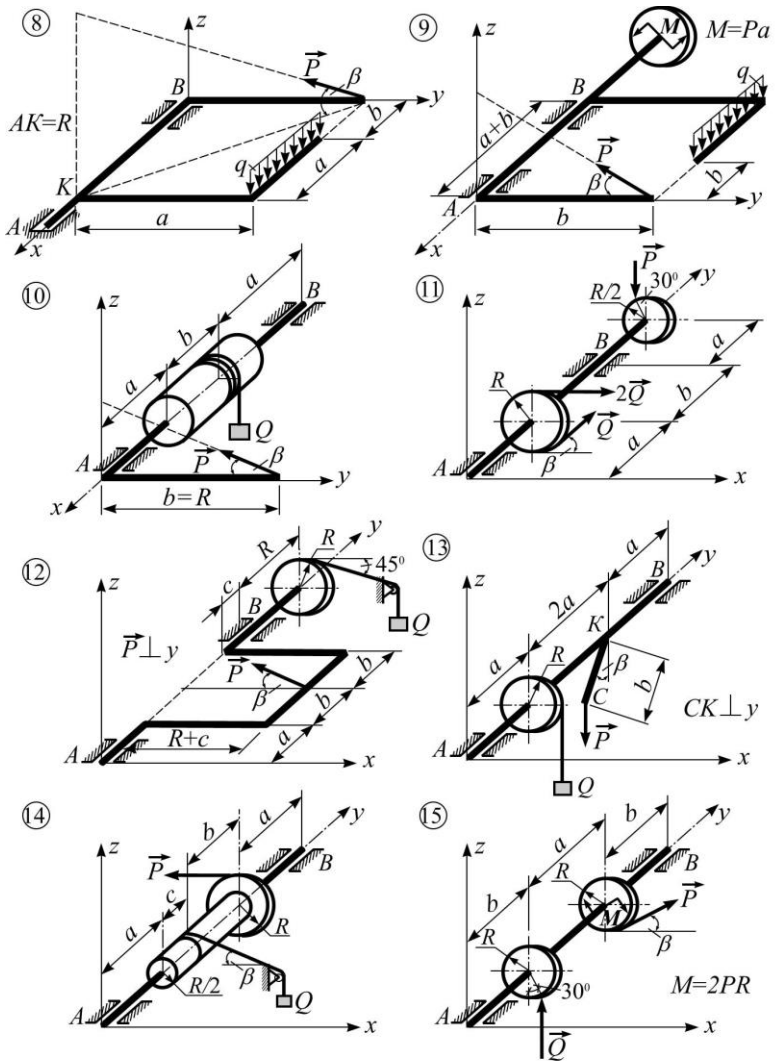


Рис. 2.3 (продовження)

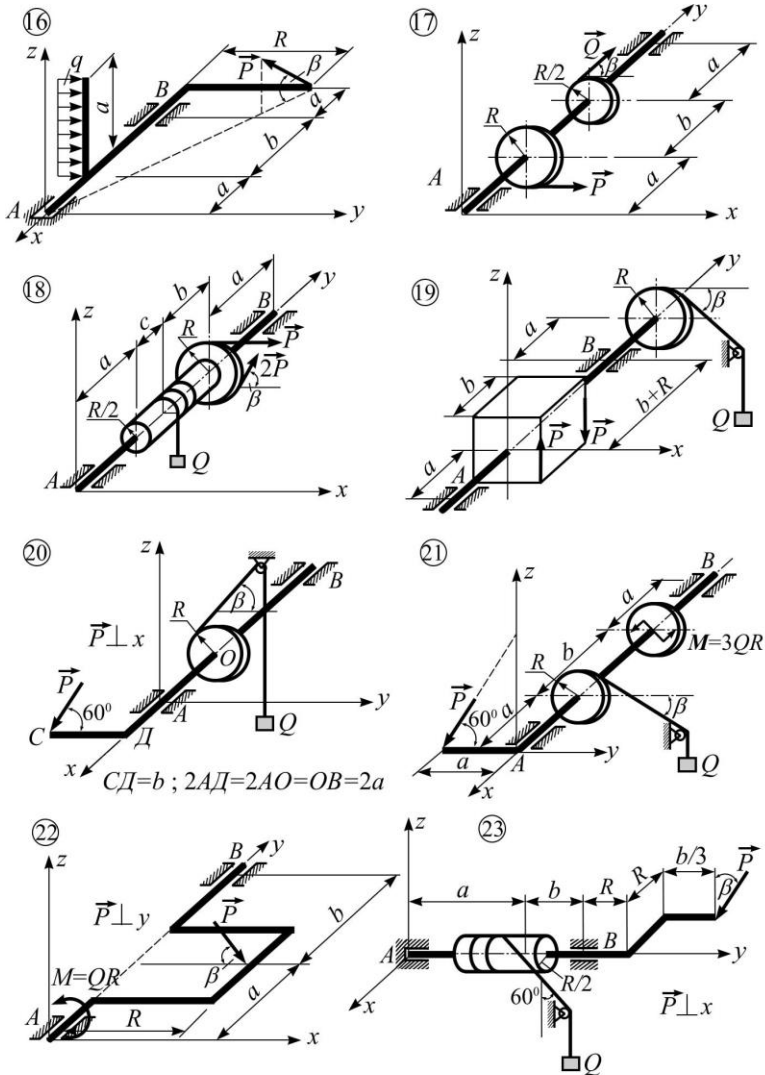


Рис. 2.3 (продовження)

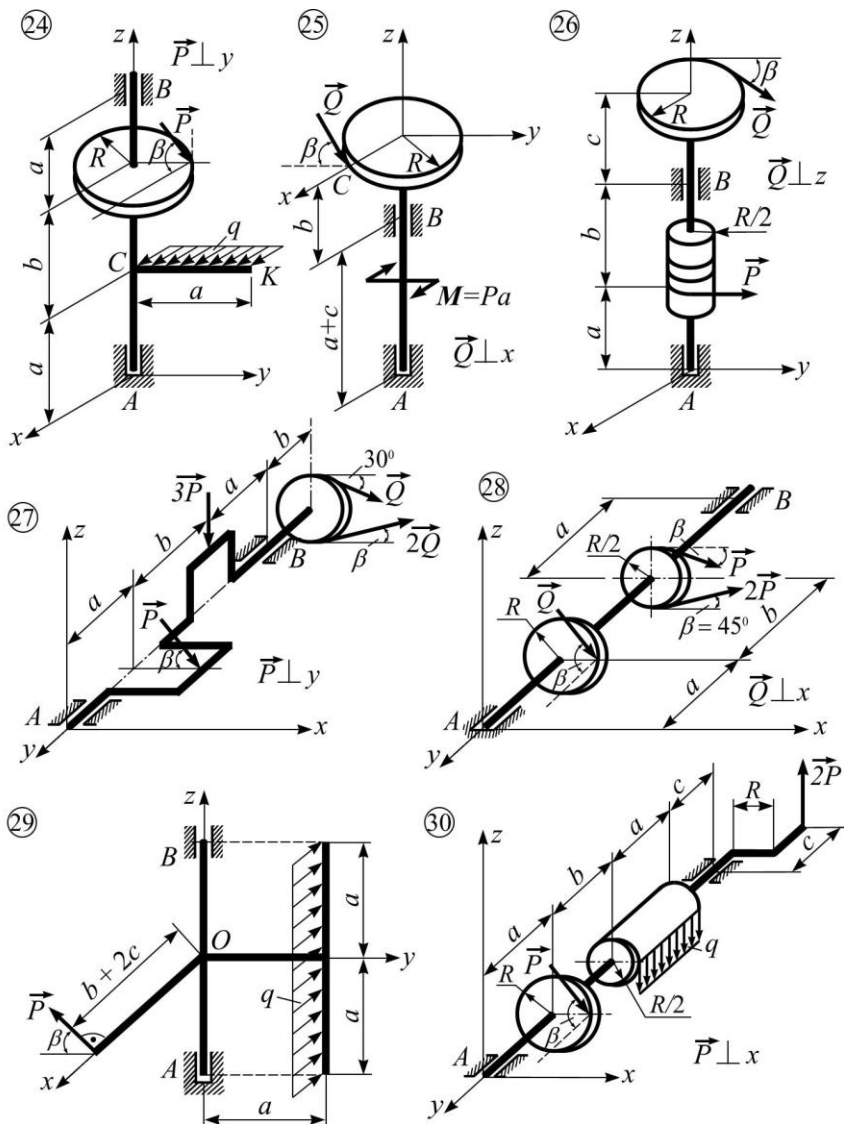


Рис. 2.3 (продовження)

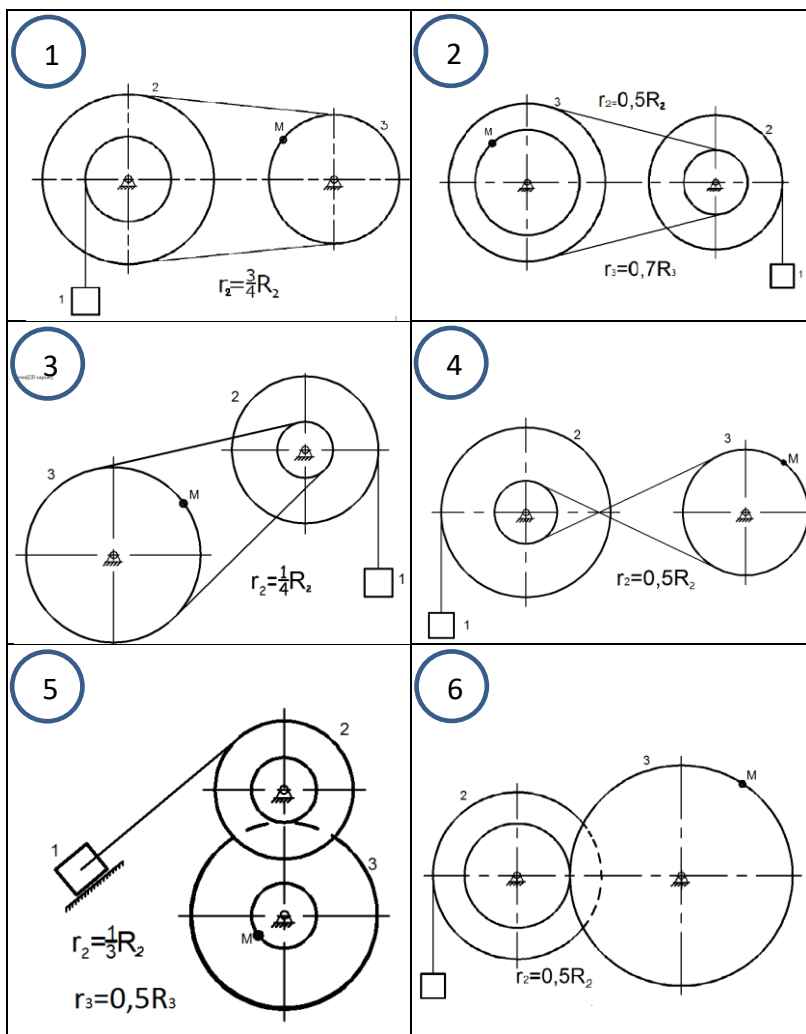


Рис. 2.4

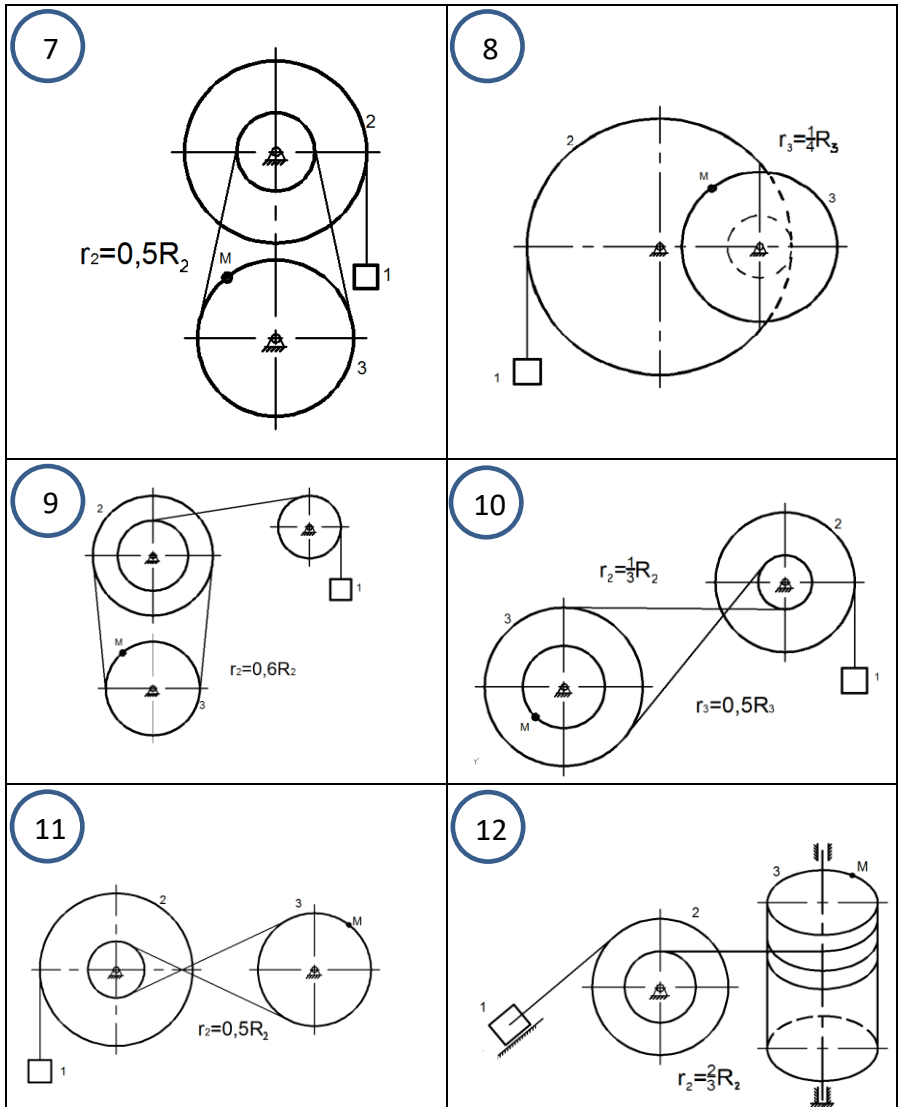


Рис. 2.4 (продовження)

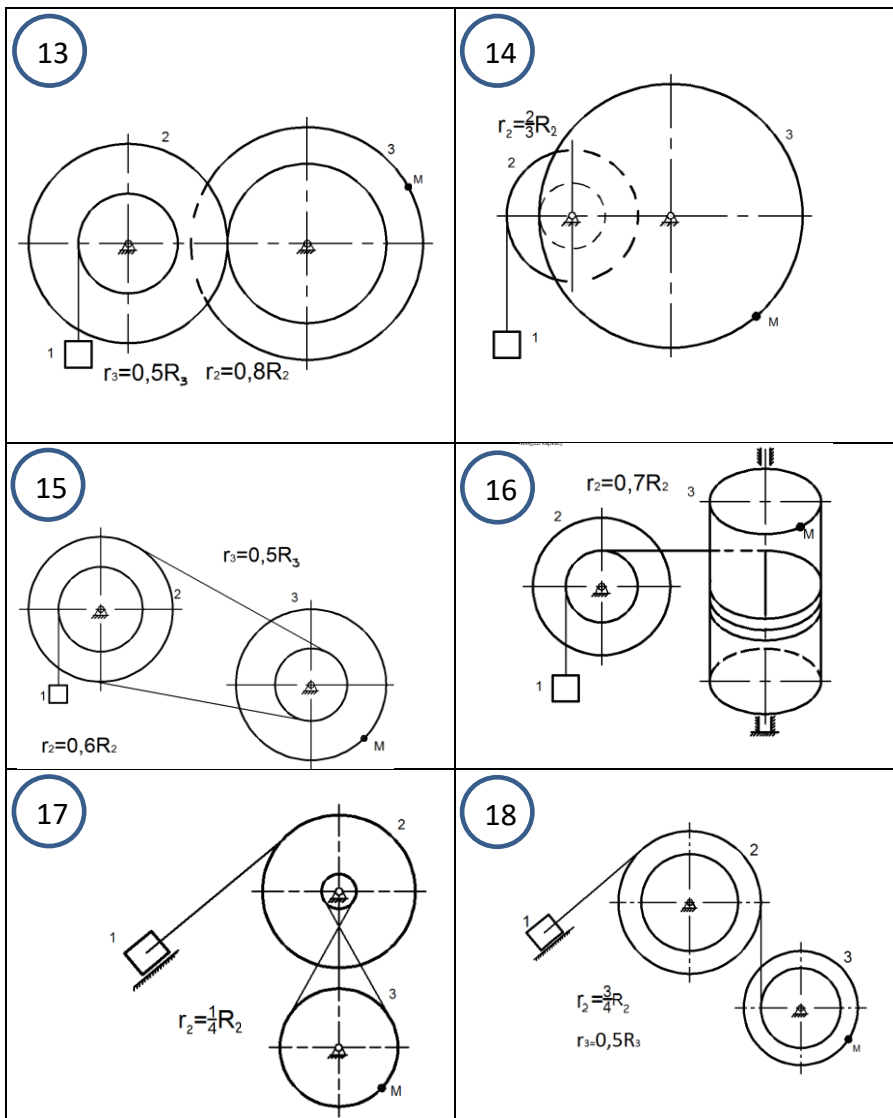


Рис. 2.4 (продовження)

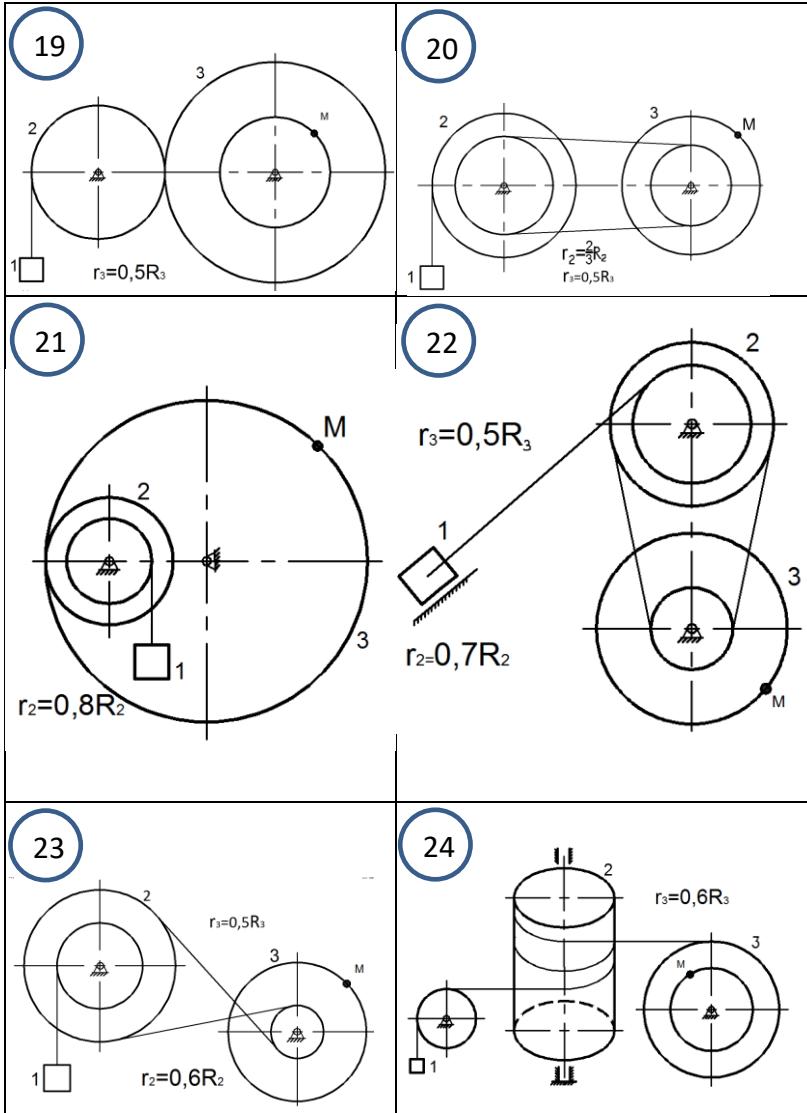


Рис. 2.4 (продовження)

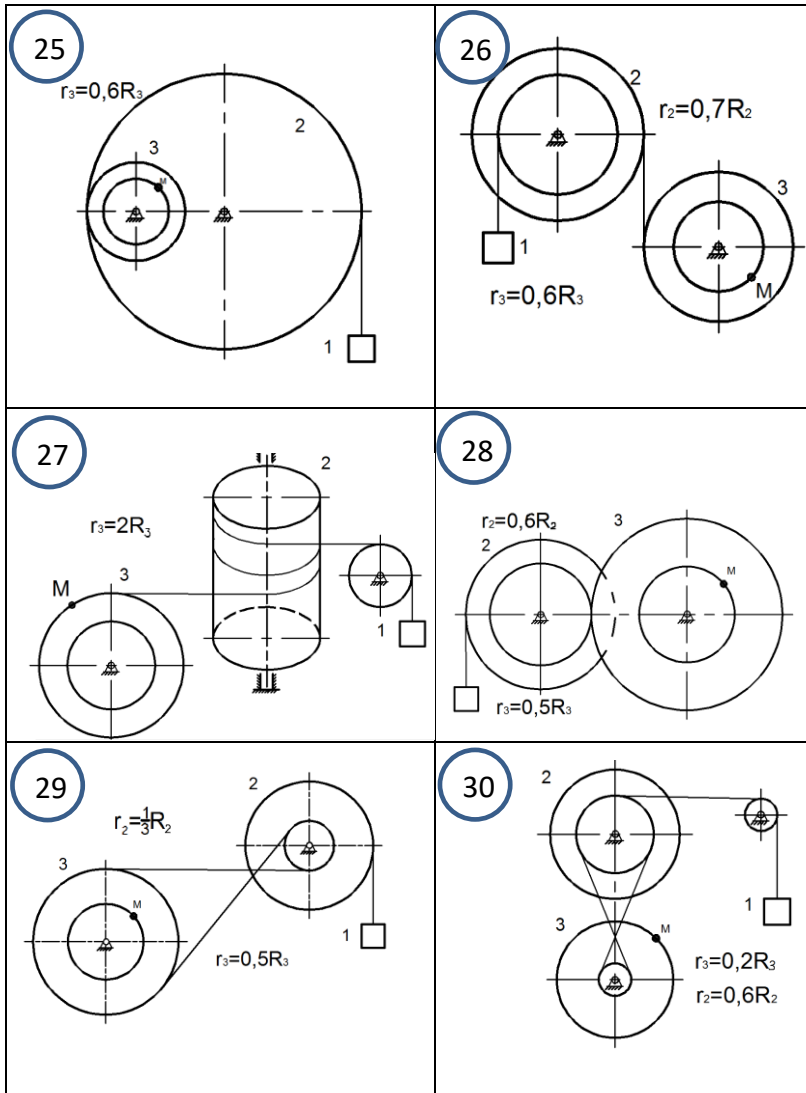


Рис. 2.4 (продовження)

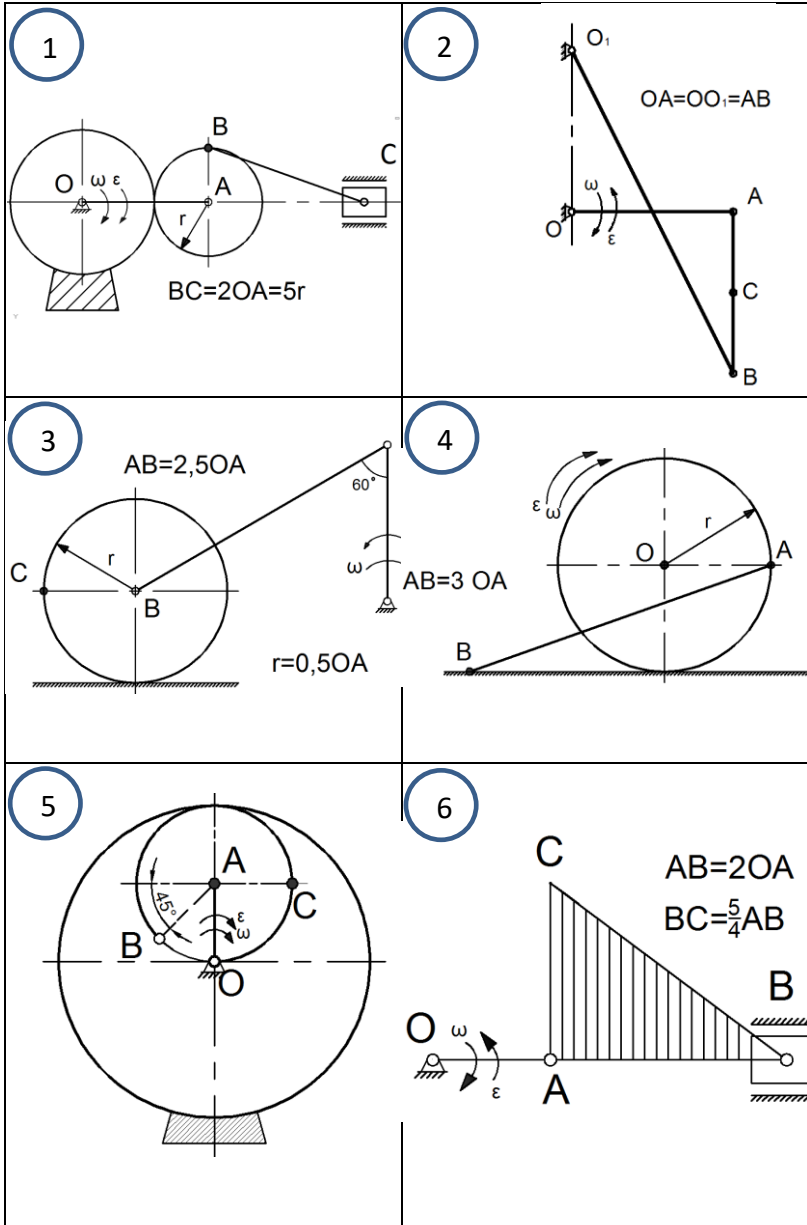


Рис. 2.5

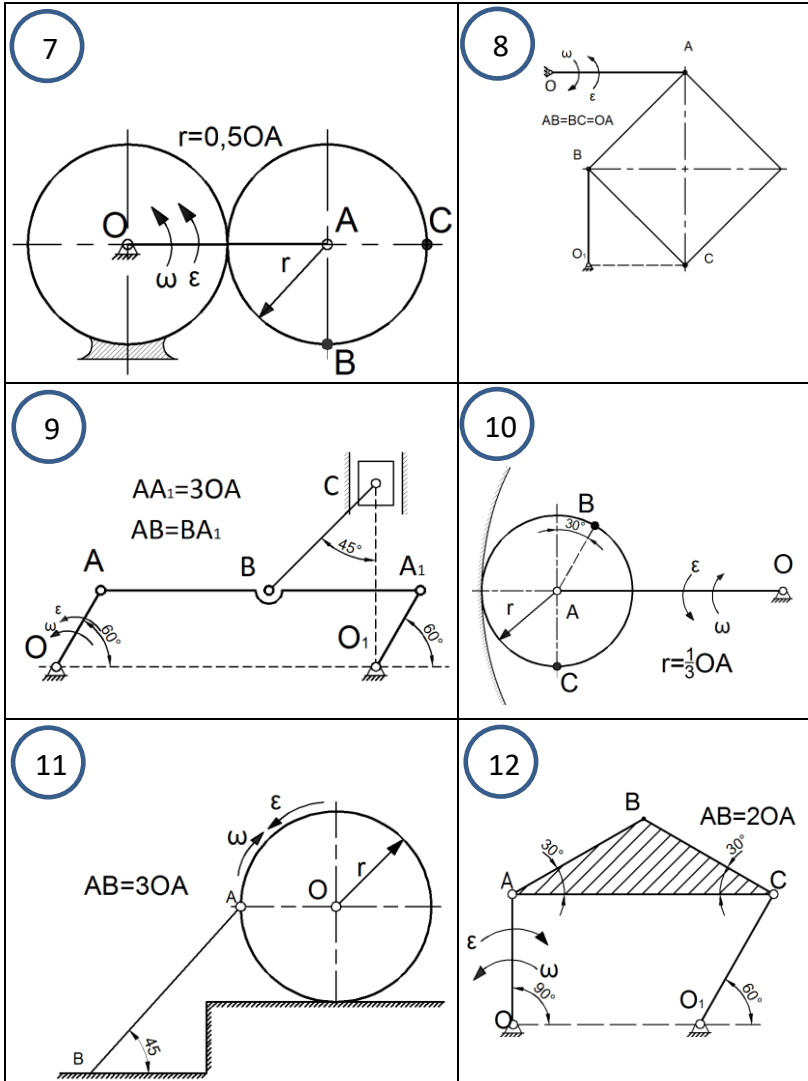


Рис. 2.5 (продовження)

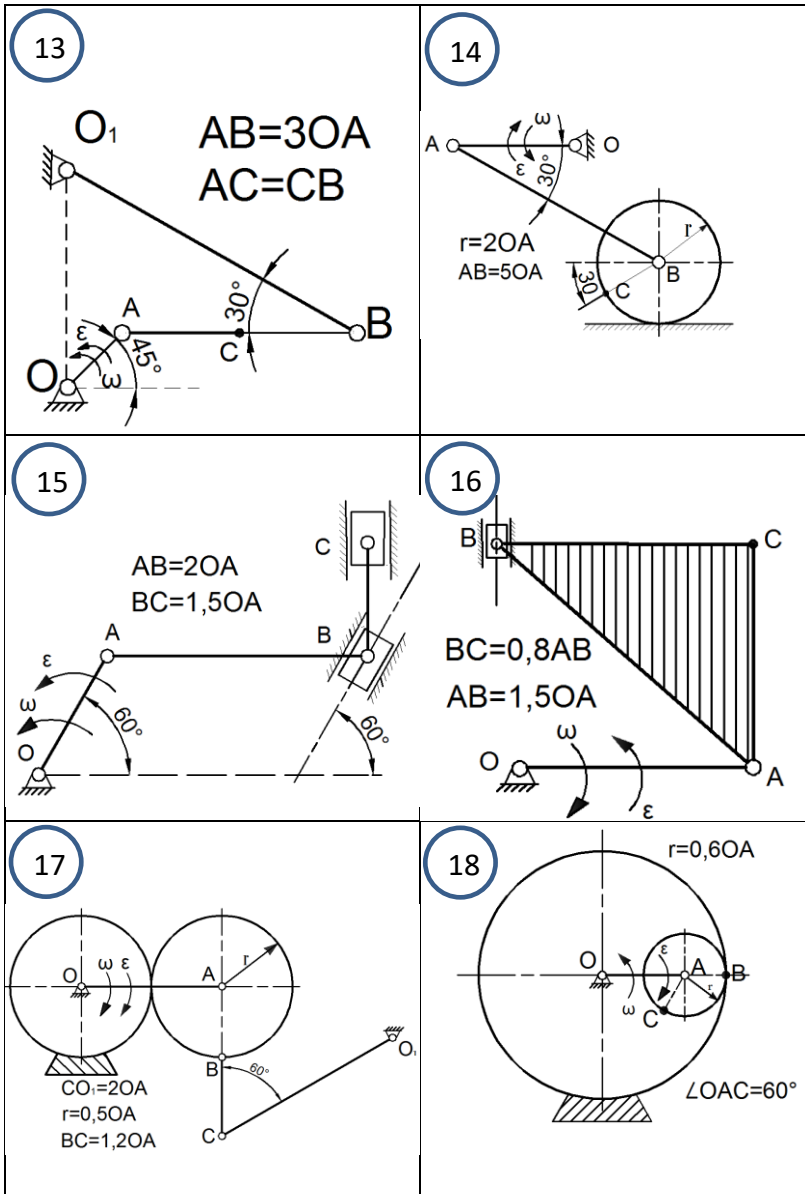


Рис. 2.5 (продовження)

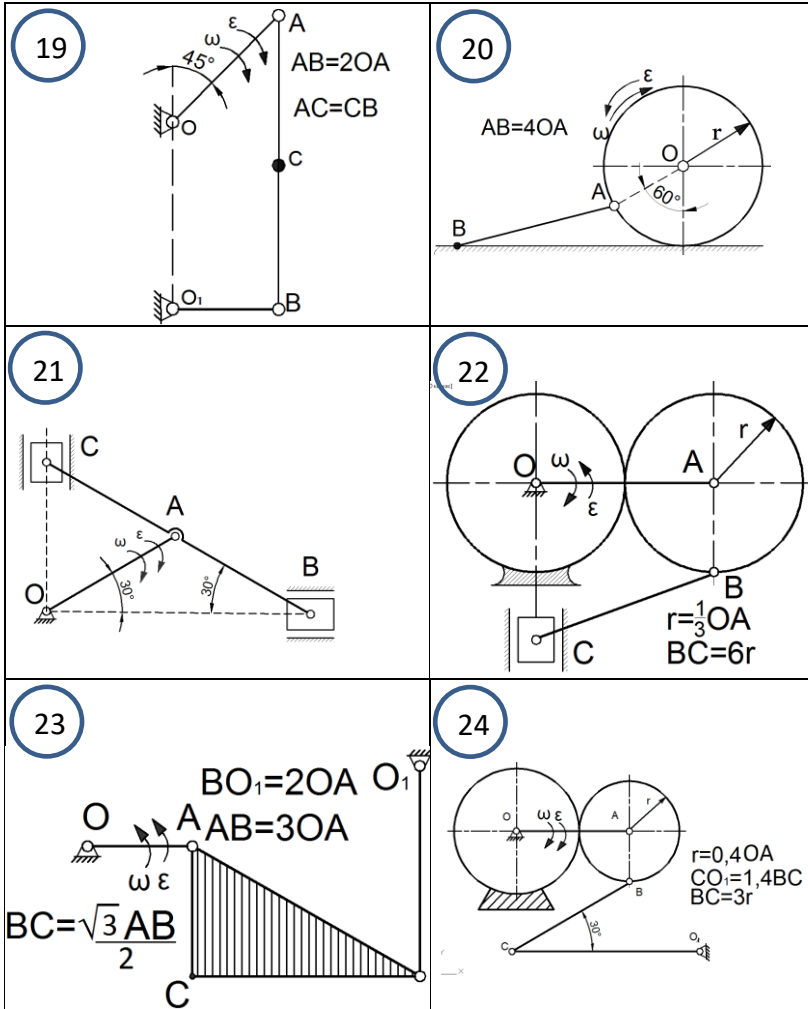


Рис. 2.5 (продовження)

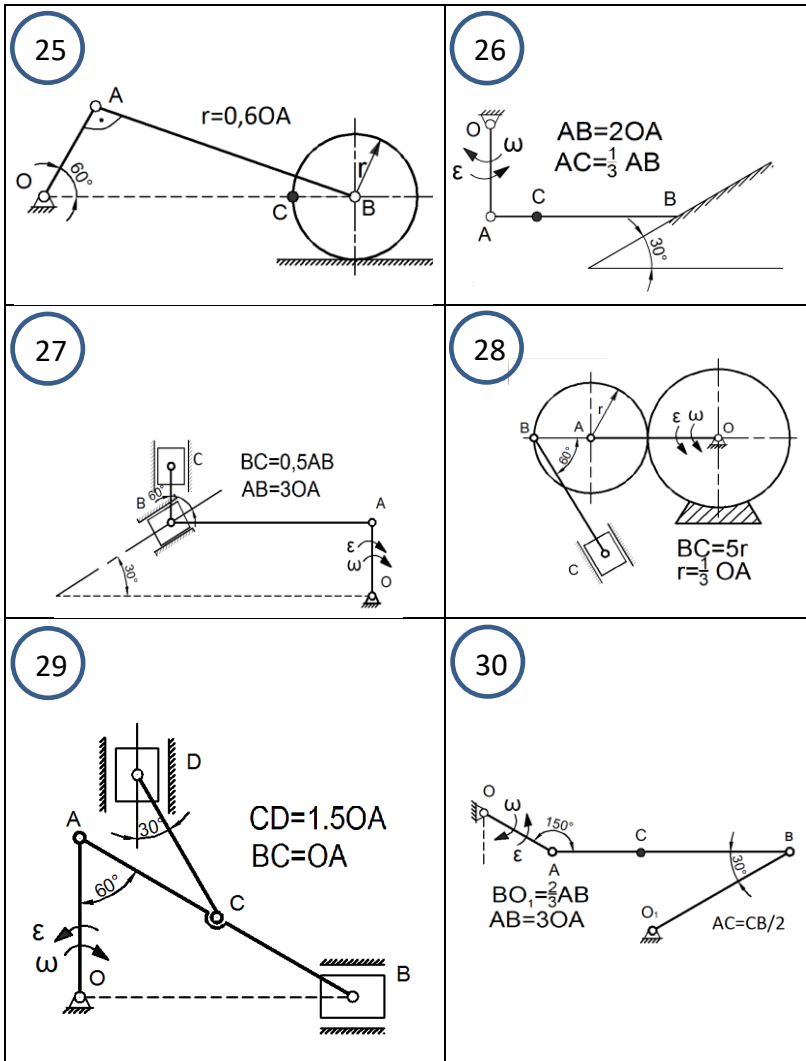


Рис. 2.5 (продовження)

Вказівки до самостійної роботи

Самостійна робота студентів над курсом теоретичної механіки є запорукою успішного його засвоєння та складання екзамену.

Вивчення кожної теми доцільно проводити в такій послідовності: спочатку вивчити теоретичну частину курсу по конспекту та одному з рекомендованих підручників [1-3], пам'ятаючи, що головне – це зрозуміти, а не „завчити”; потім розібратися у розв'язаннях прикладів в конспекті та підручнику, звернувши особливу увагу на методичні вказівки по їх розв'язанню. Якщо виникають труднощі з відповідями, то необхідно знову вернутися до конспекту та підручника й розібратися у відповідному матеріалі.

У випадку труднощів в розумінні якого-небудь питання необхідно звернутися на кафедру за консультацією: відповіді можна отримати лише на конкретні питання як з теорії, так і по розв'язанню задач.

Питання, які розглядаються в статичі, носять переважно геометричний характер, тому для їх застосування треба знати з середньої школи функції синуса та косинуса, розв'язання трикутників за допомогою теорем синуса та косинуса. З курсу нарисної геометрії досить повторити проектування відрізка на площину (вісь), а з курсу вищої математики необхідно знати основи векторної алгебри: правила додавання, віднімання та множення векторів.

Остаточний успіх в розв'язуванні більшості задач кінематики залежить від того, чи правильно студент показав напрями векторів швидкостей та прискорень окремих точок тіл, що рухаються. Тому з перших кроків вивчення кінематики необхідно звернути увагу на правила напрямлення відповідних векторів і докласти зусиль, щоб опанувати цими правилами і вільно користуватись ними.

Слід зазначити, що велику допомогу в розв'язанні задач надають студентам навчальні посібники [4], [5].

3. СТАТИКА НА ПЛОЩИНІ

Система збіжних сил

Сили, лінії дії яких перетинаються в одній точці, називаються *збіжними*. Для того, щоб система збіжних сил перебувала в рівновазі, необхідно і достатньо рівності нулю рівнодійної цієї системи сил:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_k = 0 \quad (3.1)$$

Якщо система сил еквівалентна нулю, то кажуть, що система сил зрівноважена, тобто тіло під її дією знаходиться в рівновазі.

Геометрично це означає, що векторний многокутник збіжних

сил замкнений: кінець останньої сили збігається з початком першої. У випадку рівноваги системи трьох не паралельних сил можна побудувати трикутник сил (*силовий трикутник*).

Якщо зрівноважена система збіжних сил лежить в одній площині, наприклад Oxy , то отримуємо дві умови рівноваги:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

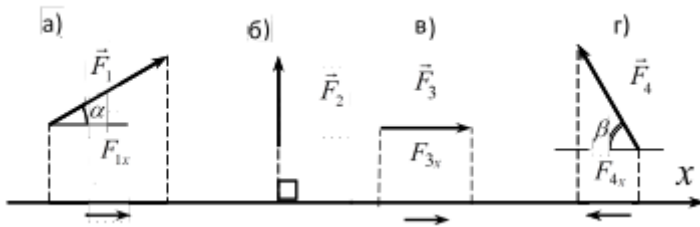


Рис. 3.1

Умови рівноваги (3.2) називають також *рівняннями рівноваги*, з яких шукають невідомі величини під час розв'язання конкретних задач.

При складанні рівнянь рівноваги (3.2) необхідно проектувати сили на осі координат.

Проекцією сили \vec{F} на вісь називають алгебраїчну величину, яка дорівнює добутку модуля сили на косинус кута між додатним напрямом осі та напрямом сили (рис. 3.1):

$$F_{1x} = F_1 \cos \alpha, \quad F_{2x} = 0, \quad F_{3x} = F_3, \\ F_{4x} = F_4 \cos(180^\circ - \beta) = -F_4 \cos \beta.$$

Практично, при обчисленні проекції сили на вісь, її модуль множать на косинус гострого кута між вектором сили та віссю і подумки повертають вектор сили на цей кут: знак проекції вважається додатним, якщо напрями вектора та осі збігаються (рис. 3.1 а) і від'ємним – якщо не збігаються (рис. 3.1 г). *Проекція сили на вісь рівна нулю, якщо сила перпендикулярна до осі* (рис. 3.1 б). *Проекція сили на вісь рівна величині сили, якщо сила паралельна до осі* (рис. 3.1 в).

Вибір напрямку координатних осей, на які проектуються сили, не має принципового значення, але під час розв'язання задач *доцільно осі на-прямяти перпендикулярно невідомим силам*: отримуємо більш прості рівняння, які легше розв'язати з точки зору математики. В цьому і полягає *раціональність вибору осей координат*.

Якщо тверде тіло перебуває в рівновазі під дією трьох непаралельних сил, розмішених на площині, то лінії дії цих сил перетинаються в одній точці (це *теорема про три сили*). Ця вимога необхідна для рівноваги трьох сил, але вона недостатня, бо необхідно також, щоб усі три сили утворили замкнений трикутник.

При розв'язанні будь-якої задачі статички на рівновагу дотримуються наступної послідовності.

1. Необхідно вибрати тіло (або точку), рівновагу якого (якої) будемо розглядати.
2. Прикласти до нього (неї) активні сили.
3. Відкинути в'язі, а їх дію замінити реакціями в'язей.
4. Визначити, яка система сил діє на тіло (точку) та вибрати раціонально систему координат.
5. Скласти необхідну кількість рівнянь рівноваги і розв'язати їх відносно невідомих.
6. Провести аналіз отриманих результатів.

При розв'язанні задач статички про рівновагу кількість невідомих не повинна перевищувати кількості рівнянь рівноваги – це означає, що *задача має бути статично означеною*. Якщо ж невідомих більше кількості рівнянь рівноваги, то таку *статично неозначену задачу неможливо розв'язати методами теоретичної механіки*: ці задачі розв'язують методами опору матеріалів, додаючи до рівнянь рівноваги зі статички рівняння деформацій.

Приклад 1. Визначити аналітичним та графоаналітичним способом реакції в'язей абсолютно твердого тіла (рис. 1), якщо: $a = 2$ м, $b = 3$ м, $F = 4$ кН, $\beta = 30$. При розрахунках власною вагою тіла та його поперечним розміром знехтувати.

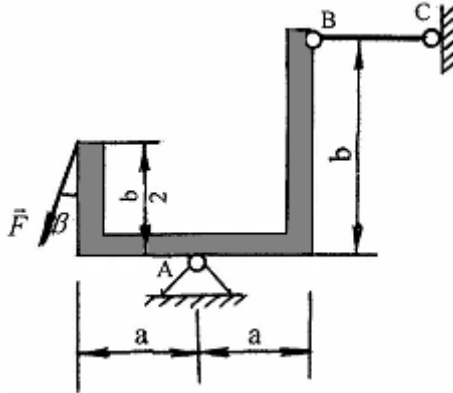


Рис. 1

Розв'язання.

Розглянемо рівновагу абсолютно твердого тіла. На нього діє лише одна активна сила \vec{F} . Ідеальний стержень BC та нерухомий шарнір A є в'язями для цього тіла. Звільняємося від в'язей, замінивши їх дію реакціями в'язей: зусилля \vec{S} у стержні напрямлене уздовж нього, а лінію дії реакції нерухомого шарніра \vec{R} визначаємо за теоремою про три не паралельні сили. Продовжуємо лінії дії сили \vec{F} і реакції \vec{S} стержня BC до перетину в точці D (рис. 2), з'єднуємо точку прикладання

реакції шарніра A з точкою D і отримуємо лінію дії реакції \vec{R} опори A . Щоб визначити дійсний напрям реакцій \vec{R} та \vec{S} будемо силовий трикутник (рис. 2). Його побудову починаємо з активної сили \vec{F} , напрям якої відомий. З довільної точки C проводимо паралельно силі \vec{F} лінію

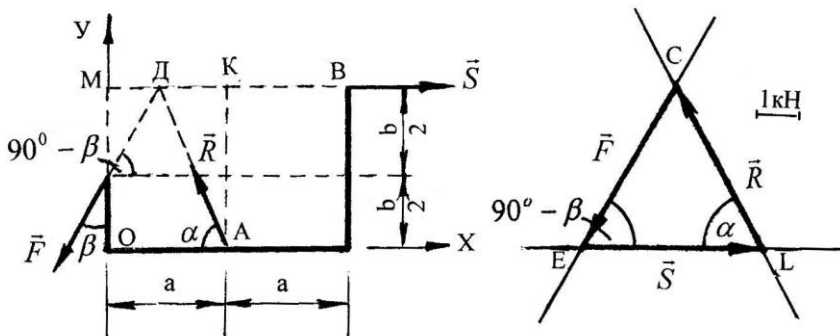


Рис.2

CE довільної довжини, що зображує силу \vec{F} . Через початок C та кінець E вектора \vec{F} проводимо прямі, які паралельні прямим AD (лінія дії реакції \vec{R}) та BM (лінія дії реакції \vec{S} , рис. 2) до їх перетину в точці L . Обходячи трикутник по контуру $CELC$, починаючи з сили \vec{F} , визначаємо дійсні напрямки сил \vec{S} та \vec{R} : початок наступного вектора співпадає з кінцем попереднього. Зображуємо сили \vec{R} та \vec{S} на рис. 2. Вибір осей координат xOy показаний на рис. 2.

При аналітичному способі розв'язання задачі, складаємо рівняння рівноваги плоскої збіжної системи сил (1.2):

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, & -R \cos \alpha + S - F \sin \beta = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, & +R \sin \alpha - F \cos \beta = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи отриману систему рівнянь, визначаємо невідомі величини:

$$R = F \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}, \quad S = F \sin \beta + R \cos \alpha = F \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin \alpha}.$$

Визначимо кут α , який був введений нами для визначення напрямку реакції \vec{R} нерухомого шарніра A . Робимо додаткові побудови на рис. 3.3 і знаходимо:

$$\alpha = \arctg \frac{AK}{DK} = \arctg \frac{b}{a - \frac{1}{2}b \operatorname{tg} \beta} = \arctg \frac{2}{2a/b - \operatorname{tg} \beta}.$$

Обчислюємо:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 2 - \sqrt{3}} = 69.3^\circ,$$
$$R = 4 \cdot \frac{\cos 30^\circ}{\sin 69.3^\circ} \approx 3.70 \text{ кН},$$
$$S = 4 \cdot \frac{\cos(69.3^\circ - 30^\circ)}{\sin 69.3^\circ} \approx 3.31 \text{ кН}.$$

Перевіримо отримані результати графоаналітичним способом. Застосувавши теорему синусів для силового трикутника (рис. 3.3), отримаємо:

$$\frac{R}{\sin(90^\circ - \beta)} = \frac{F}{\sin \alpha} = \frac{S}{\sin(90^\circ - (\alpha - \beta))},$$
$$R = F \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}, \quad S = F \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin \alpha},$$

оскільки,

$$\sin(90^\circ - \varphi) = \cos \varphi.$$

Відповідь:

$$F \approx 4.00 \text{ кН}, \quad S \approx 3.31 \text{ кН}.$$

Довільна система сил на площині

Для рівноваги довільної системи сил на площині необхідно і достатньо, щоб головний вектор \vec{R}^* та головний момент M_O цієї системи відносно довільного центра O одночасно дорівнювали нулю:

$$\vec{R}^* = \sum \vec{F}_k = 0, \quad M_O = \sum m_O(\vec{F}_k) = 0. \quad (3.3)$$

Виходячи з умов (1.3), отримуємо рівняння рівноваги довільної системи сил на площині, які можна записати в трьох альтернативних формах.

Перша форма умов рівноваги: для рівноваги довільної системи сил на площині необхідно та достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій всіх сил на осі системи координат xOy та алгебраїчна сума моментів цих сил відносно довільної точки O дорівнювали нулю:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, \\ \sum m_O(\vec{F}_k) = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Друга форма умов рівноваги (вісь проекцій не $\perp AB$):

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum m_A(\vec{F}_k) = 0, \\ \sum m_B(\vec{F}_k) = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Третя форма умов рівноваги (А, В, С довільні точки, які не лежать на одній прямій):

$$\begin{cases} \sum m_A(\vec{F}_k) = 0, \\ \sum m_B(\vec{F}_k) = 0, \\ \sum m_C(\vec{F}_k) = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Таким чином, незалежних рівнянь рівноваги три, будь-яке інше рівняння використовується для перевірки розв'язку задачі.

Моментом сили \vec{F} відносно деякої точки O називають добуток модуля сили на її плече відносно цієї точки, взятий зі знаком „плюс” або „мінус”:

$$m_O(\vec{F}) = \pm F h. \quad (3.7)$$

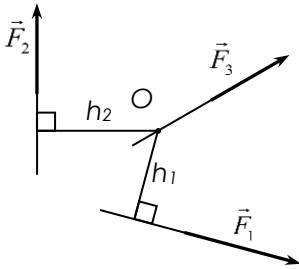


Рис. 3.2

Плечем сили називають найкоротшу відстань від точки до лінії дії сили (довжину перпендикуляра від точки до цієї лінії).

Момент сили вважається *додатним*, якщо сила намагається повернути тіло відносно точки в напрямку *проти* ходу годинникової стрілки (рис. 3.2, сила \vec{F}_1) та *від'ємним* – у протилежному випадку (рис. 3.2, сила \vec{F}_2).

Якщо лінія дії сили проходить через точку – $h = 0$ і момент такої сили відносно точки дорівнює нулю (рис. 3.2, сила \vec{F}_2).

Дві рівні за модулем антипаралельні сили, що не лежать на одній прямій, утворюють *пару сил* (рис. 3.3).

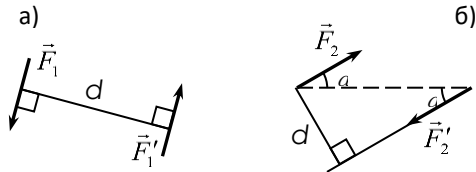


Рис. 3.3

Моментом пари сил називають добуток однієї

із сил пари на найкоротшу віддаль (плече) між силами, що утворюють

пару:

$$M = \pm F d . \quad (3.8)$$

Якщо пара сил намагається повернути тіло проти годинникової стрілки, то момент пари вважається *додатним* (рис. 3.3 а), в протилежному випадку – *від’ємним* (рис. 3.3 б).

Слід пам’ятати, що пара сил не може бути зрівноважена однією силою і що пару сил можна переносити в будь-яке положення в площині її дії; крім того у парі сил можна міняти модулі сил пари так, щоб алгебраїчний момент пари залишався незмінним. Зауважимо також, що алгебраїчна сума проєкцій сил, що утворюють пару, на будь-яку вісь рівна нулю, і таким чином в рівняння проєкцій сил момент пари сил не входить.

При визначенні реакцій в’язей розподілене навантаження замінюють зосередженою силою; на рис 3.4 наведені два основні випадки такої

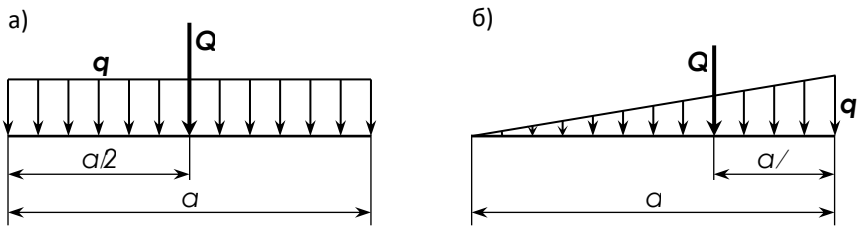


Рис. 3.4

заміни: $Q = qa$ (рис. 3.4 а), $Q = 1/2qa$ (рис. 3.4 б).

Силу, яка діє на тіло під деяким кутом α , бажано розкласти на складові, які паралельні координатним осям (рис. 3.5) та потім застосовувати *теорему Вариньйона*: *момент рівнодійної відносно деякої точки дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил відносно цієї ж точки*. Та-

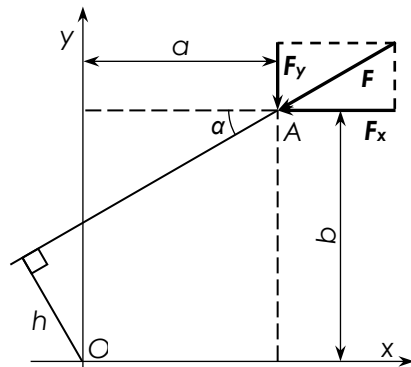


Рис. 3.5

кий підхід спрощує розрахунок, бо не треба шукати плече h , що добре видно для випадку на рис. 3.5: $F_x = F \cos \alpha$, $F_y = F \sin \alpha$.

$$m_A(\vec{F}) = F_x b - F_y a = F(b \cos \alpha - a \sin \alpha).$$

Приклад 2. На консольну балку AC (рис. 3 а) діє сила \vec{F} , пара сил з моментом M та рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю q . Визначити реакції опор A та B , якщо $F = 2 \text{ кН}$, $M = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $q = 3 \text{ кН/м}$, $a = 2 \text{ м}$, $b = 3 \text{ м}$, $c = 1 \text{ м}$.

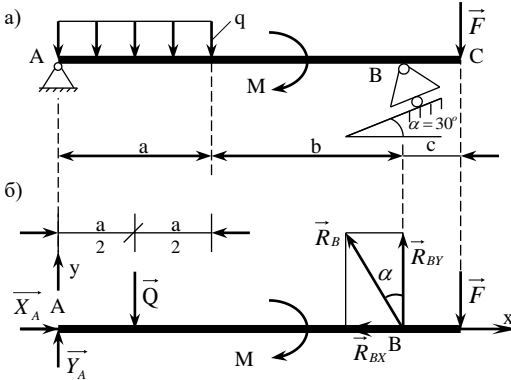


Рис.3.

Розв'язання.

Розглянемо рівновагу балки AC : в'язи для неї є шарнірно-рухома опора B , напрям реакції \vec{R}_B якої відомий (перпендикулярно до площини опори) та шарнірна нерухома опора A , напрям реакції якої заздалегідь невідомий, тому представляємо її у вигляді двох складових \vec{X}_A , \vec{Y}_A .

Відкидаємо в'язі і замінюємо їх дію на балку реакціями в'язей \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{R}_B (рис. 3 б); прикладаємо до балки активні сили \vec{F} , \vec{Q} ($Q = qa = 3 \cdot 2 = 6 \text{ кН}$) та пару сил з моментом M . На рис. 3 б зображена розрахункова схема та вибрана система координат xAy .

На балку діє плоска довільна система сил, незалежних рівнянь рівноваги три, невідомих також три (\vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{R}_B), задача статично означена.

Складаємо рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, & X_A - R_B \sin \alpha = 0, \\ \sum m_A(\vec{F}_k) = 0, & R_B \cos \alpha (a + b) - F(a + b + c) - Qa/2 - M = 0, \\ \sum m_B(\vec{F}_k) = 0, & -Y_A(a + b) + Q(a/2 + b) - Fc - M = 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо отриману систему рівнянь, визначаємо невідомі реакції:

$$\begin{cases} X_A = R_B \sin \alpha, \\ R_B \cdot 5 \cos \alpha = F \cdot 6 + Q \cdot 1 + M, \\ Y_A \cdot 5 = Q \cdot 4 - F \cdot 1 - M, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_A \approx 5.31 \cdot \sin 30^\circ \approx 2.66 \text{ кН}, \\ R_B = (2 \cdot 6 + 6 \cdot 1 + 5) / 5 \cos 30^\circ \approx 5.31 \text{ кН}, \\ Y_A = (6 \cdot 4 - 2 \cdot 1 - 5) / 5 = 3.4 \text{ кН}. \end{cases}$$

Перевіримо отримані результати:

$$\begin{aligned} \sum F_{ky} &= (Y_A + R_B \cos \alpha) - (Q + F) = \\ &= (3.4 + 5.31 \cdot \cos 30^\circ) - (6 + 2) = -0.001 \text{ кН}, \end{aligned}$$

що є достатнім при прийнятій точності обчислень. Реакції опор знайдено правильно. Знаки “плюс” свідчать про те, що реакції \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{R}_B напрямлені на рис. 3, б правильно.

Відповідь: $R_B \approx 5.31 \text{ кН}$, $Y_A = 3.4 \text{ кН}$, $X_A \approx 2.66 \text{ кН}$.

Розрахунок складених конструкцій. Рівновага сил при наявності тертя ковзання

Складеною конструкцією називають сукупність кількох твердих тіл, які вільно спираються одне на одне або з'єднані між собою нежорсткими в'язями (наприклад, шарнірами, гнучкими пасами, тросами тощо).

Якщо система з n тіл перебуває в рівновазі, то кожне з цих тіл також перебуває в рівновазі, тому розрахунок складених конструкцій з n тіл може вестися двома шляхами:

- розглядається окремо рівновага кожного з n тіл окремо;
- розглядається рівновага всієї системи, а потім окремо ще $n - 1$ тіл, що входять до системи.

В обох випадках маємо $3n$ рівнянь рівноваги, розв'язання яких простіше (з точки зору математики) в першому випадку. Зауважимо, що при розгляді рівноваги кожного тіла слід враховувати сили взаємодії між окремими тілами (внутрішні сили). Ці сили відповідно до аксіоми рівності дії та протидії завжди рівні між собою за величиною та протилежні за напрямком.

Визначення рівноваги тіл з врахуванням тертя ковзання зводиться до звичайного розгляду граничного положення рівноваги, коли сила тертя досягає свого найбільшого значення

$$F_{mn} = f N, \quad (3.9)$$

де f – безрозмірний коефіцієнт тертя ковзання, а \vec{N} – сила нормального тиску одного тіла на інше. Сила тертя \vec{F}_{mn} виникає в площині дотику цих тіл і завжди напрямлена в бік протилежний тому, куди діючі

сили намагаються зсунути тіло.

При аналітичному розв'язанні задач реакцію шорсткої поверхні зображають двома складовими \vec{N} та \vec{F}_{mp} , а потім складають звичайні рівняння рівноваги, враховують рівність (3.9) і знаходять невідомі величини.

Приклад 3. Дві рами (рис. 4 а) шарнірно з'єднані між собою в точці С. Ліва рама жорстко защемлена в точці А, а права прикріплена в точці В до шарнірно-рухомої опори. На систему діють сила \vec{F} , пара сил з моментом M та розподілені навантаження на ділянках АД та ВК. Визначити реакції опор А та В і тиск в шарнірі С, якщо $F = 10 \text{ кН}$, $M = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $q = 2 \text{ кН/м}$, $a = 2 \text{ м}$, $b = 3 \text{ м}$, $\alpha = 45^\circ$. Зробити перевірку.

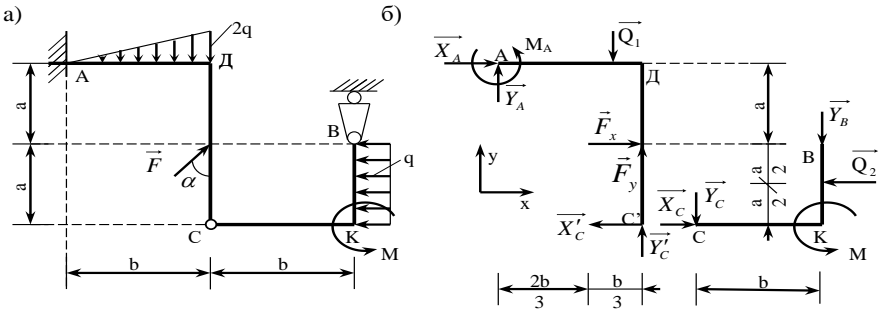


Рис. 4

Розв'язання.

Розрахунок складеної з двох рам конструкції почнемо з розгляду рівноваги правої рами ВКС, для чого роз'єднаємо складену конструкцію на дві частини (рис. 4 б). В точці С зображаємо сили взаємодії між лівою і правою частинами конструкції:

$$\vec{X}'_C = -\vec{X}_C, \quad \vec{Y}'_C = -\vec{Y}_C.$$

На раму ВКС діє активна сила \vec{Q}_2 ($Q_2 = qa = 4 \text{ кН}$) та пара сил з моментом M . Звільняємось від в'язі в точці В (шарнірно-рухома опора) і заміняємо її дію реакцією в'язі \vec{Y}_B . На раму діє плоска довільна система сил, незалежних рівнянь рівноваги три:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, & X_C - Q_2 = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, & -Y_B - Y_C = 0, \\ \sum m_K(\vec{F}_k) = 0, & Y_C b + Q_2 a/2 + M = 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему рівнянь відносно невідомих:

$$X_C = Q_2 = 4 \kappa H,$$

$$Y_B = -Y_C = (M + \frac{1}{2} Q_2 a) / b = (5 + 4) / 3 = 3 \kappa H.$$

Розглянемо рівновагу лівої рами $A_1 D C$ (рис. 4 б).

Відкидаємо жорстке защемлення A і заміняємо дію цієї в'язі трьома складовими $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, M_A$. Активну силу \vec{F} розкладаємо також на складові ($F_x = F \sin \alpha, F_y = F \cos \alpha$), що в подальшому надасть можливість використати теорему Варінійона при обчисленні моменту сили \vec{F} , а навантаження розподілене за лінійним законом заміняємо активною силою \vec{Q}_1 ($Q_1 = qb/2 = 6 \kappa H$), яку прикладаємо на віддалі $2b/3$ від точки A . На раму $A_1 D C$ діє плоска довільна система сил, незалежних рівнянь рівноваги три:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, & X_A - X'_C + F_x = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, & Y_A + Y'_C + F_y - Q_1 = 0, \\ \sum m_A(\vec{F}_k) = 0, & M_A - X'_C \cdot 2a + Y'_C b + F_x a + F_y b - Q_1 \cdot 2b/3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо отриману систему рівнянь, визначаємо невідомі величини:

$$X_A = -F \sin 45^\circ + X_C = -5\sqrt{2} + 4 \approx -3.07 \kappa H,$$

$$Y_A = -F \cos 45^\circ + Q_1 - Y_C = -5\sqrt{2} + 9 \approx 1.93 \kappa H,$$

$$M_A = -F_x a - F_y b + Q_1 \cdot 2b/3 + X_C \cdot 2a - Y_C b =$$

$$= -5\sqrt{2} \cdot (2+3) + 6 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 =$$

$$= 37 - 25\sqrt{2} \approx 1.64 \kappa H \cdot m.$$

Перевіримо ці результати:

$$\begin{aligned} \sum m_C(\vec{F}_k) &= ((M_A - X_A \cdot 2a - Y_A b) - (F_x a - Q_1 b/3)) + (-Y_B b + (Q_2 a/2 + M)) = \\ &= ((37 - 25\sqrt{2} + (5\sqrt{2} - 4) \cdot 4 + (5\sqrt{2} - 9) \cdot 3) - (5\sqrt{2} \cdot 2 - 6 \cdot 1)) + \\ &+ (-3 \cdot 3 + (4 \cdot 1 + 5)) = ((-6 + 10\sqrt{2}) - (10\sqrt{2} - 6)) + (9 - 9) = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Реакції знайдено правильно, знаки „мінус” означають, що складові $\vec{X}_A, \vec{X}_C, \vec{X}'_C$ мають напрямки протилежні до зображених на рис. 4 б.

Відповідь:

$$X_A \approx -3.07 \kappa H, Y_A \approx 1.93 \kappa H, M_A \approx 1.64 \kappa H \cdot m,$$

$$X_C = 4 \kappa H, Y_C = -3 \kappa H, Y_B = 3 \kappa H.$$

Приклад 4. Рама складається з двох частин (рис. 5 а), шарнірно з'єднаних в точці С; кожна з них закріплена в точках А та В шарнірно-нерухомими опорами. На систему діють сила \vec{F} , пара сил з моментом M та рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю q . Визначити реакції опор А, В і тиск в шарнірі С, якщо $F=10\sqrt{2}$ кН, $M=15$ кН·м, $q=2$ кН/м, $a=2$ м, $b=3$ м, $\alpha=45^\circ$. Зробити перевірку.

Розв'язання.

Розглянемо рівновагу кожної частини рами окремо (рис. 6 б). Внутрішні реакції, з якими взаємодіють між собою обидві частини рами в шарнірі С, за аксіомою дії-протидії – $\vec{X}'_C = -\vec{X}_C$, $\vec{Y}'_C = -\vec{Y}_C$. В'язі в точках А та В (шарнірно нерухомі опори) замінимо відповідно складовими реакцій \vec{X}_A, \vec{Y}_A та \vec{X}_B, \vec{Y}_B . Силу \vec{F} розкладаємо на складові $F_x = F \sin \alpha$, $F_y = F \cos \alpha$. Рівномірно розподілене навантаження інтенсивності q замінюємо рівнодійною \vec{Q} ($Q=q \cdot 2b=12$ кН). Розрахункова схема зображена на рис 5,б.

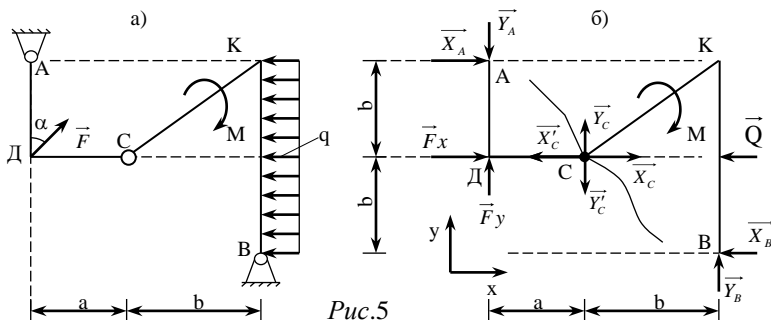


Рис.5

На кожну із частин рами діє плоска довільна система сил, тому для кожної з них складаємо три рівняння рівноваги:

Ліва частина (АДС)

$$\sum F_{kx} = 0, \quad X_A - X'_C + F_x = 0, \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad -Y_A - Y'_C + F_y = 0, \quad (2)$$

$$\sum m_A(\vec{F}_k) = 0, \quad -X'_C b - Y'_C a + F_y b = 0. \quad (3)$$

Права частина (СКВ)

$$\sum F_{kx} = 0, \quad X_C - X_B - Q = 0, \quad (4)$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad Y_C + Y_B = 0, \quad (5)$$

$$\sum m_B(\vec{F}_k) = 0, \quad -X_C b - Y_C b + Qb - M = 0. \quad (6)$$

Зауважимо, що коли дві шарнірно нерухомі опори розташовані на різних рівнях (рис. 6 а), то рівняння моментів слід складати саме відносно точок, в яких розташовані ці опори, що дає можливість легко розв'язати систему шести рівнянь, починаючи з рівнянь (3) та (6): два рівняння і дві невідомих, $X'_C = X_C$, $Y'_C = Y_C$. В нашому випадку досить відняти від третього рівняння шосте:

$$-Y'_C a + Y_C b + F_y b - Qb + M = 0, \Rightarrow Y_C (b - a) = (Q - F_y) b - M,$$

$$Y_C = (12 - 10\sqrt{2} \cos 45^\circ) \cdot 3 - 15 = -9 \text{ кН}.$$

З рівняння (6):

$$X_C = Q - Y_C - M/b = 12 + 9 - 15/3 = 16 \text{ кН}.$$

Решту невідомих величин послідовно визначаємо з рівнянь (1), (2), (4), (5) системи:

$$X_A = -F \sin 45^\circ + X'_C = -10 + 16 = 6 \text{ кН},$$

$$Y_A = F \cos 45^\circ - Y'_C = 10 - (-9) = 19 \text{ кН},$$

$$X_B = -Q + X_C = -12 + 16 = 4 \text{ кН},$$

$$Y_B = -Y_C = 9 \text{ кН}.$$

Перевіримо отриманий розв'язок (складемо рівняння рівноваги для всієї конструкції):

$$\sum m_C(\vec{F}_k) = ((-X_A b + Y_A a) - F \cos \alpha \cdot a) + ((-X_B b + Y_B b) - M) =$$

$$= ((-6 \cdot 3 + 19 \cdot 2) - 10 \cdot 2) + ((-4 + 9) \cdot 3 - 15) = 0 + 0 = 0.$$

Реакції знайдено правильно, складові Y_C , Y'_C , \vec{Y}_C , \vec{Y}'_C мають напрям протилежний зображеному на рис. 5 б.

Відповідь:

$$X_A = 6 \text{ кН}, X_B = 4 \text{ кН}, X_C = 16 \text{ кН},$$

$$Y_A = 19 \text{ кН}, Y_B = 9 \text{ кН}, Y_C = -9 \text{ кН}.$$

4. СТАТИКА В ПРОСТОРИ

Система збіжних сил

Векторній рівності (3.1) відповідають три скалярні рівності:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, \\ \sum F_{kz} = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

які є умовами рівноваги просторової збіжної системи сил в аналітичній формі.

Ці умови називають також *рівняннями рівноваги*, з яких шукають невідомі величини під час розв'язання конкретних задач.

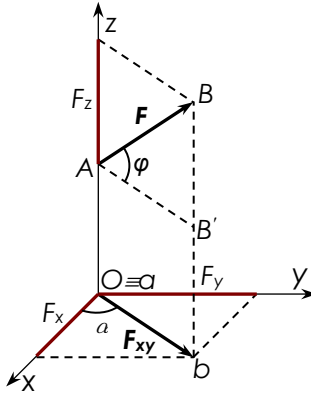


Рис. 4.1

У випадках, коли сила та вісь не лежать в одній площині, при визначенні проєкції на вісь необхідно спочатку знайти її проєкцію на площину, в якій лежить вісь, а потім цю проєкцію спроекувати на вісь. Так, наприклад, для випадку на рис. 4.1 маємо:

$$\begin{cases} F_x = F_{xy} \cos \alpha = F \cos \varphi \cos \alpha, \\ F_y = F_{xy} \sin \alpha = F \cos \varphi \sin \alpha, \\ F_z = F \sin \varphi. \end{cases}$$

Таким чином проєкції вектора \vec{F} на осі Ox та Oy визначені шляхом *подвійного проєктування*.

Довільна система сил в просторі

Як відомо, необхідними і достатніми умовами рівноваги просторової системи сил, яка діє на тверде тіло, є одночасна рівність нулю головного вектора та головного моменту:

$$\vec{R}^* = 0, \quad \vec{M}_O = 0.$$

В проєкціях на осі декартової системи координат маємо:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum F_{kz} = 0, \\ \sum m_x(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum m_y(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum m_z(\vec{F}_k) = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Таким чином, для рівноваги просторової довільної системи сил необхідно і достатньо, щоб сума проєкцій всіх сил на кожну з трьох координатних осей і суми їх моментів відносно цих осей були рівні нулю. Незалежних рівнянь рівноваги в просторі в загальному випадку шість.

Поряд з поняттям моменту сили відносно точки важливим в механіці є поняття моменту сили відносно осі, як алгебраїчної величини, що дорівнює моменту проєкції сили на площину, перпендикулярну до осі, відносно точки перетину осі з цією площиною. Отже, для визначення моменту сили \vec{F} відносно осі, необхідно (один із способів):

силу \vec{F} спроекувати в площину перпендикулярну до осі (рис.

4.2),

обчислити момент отриманої проєкції відносно точки перетину осі з площиною.

Наприклад,
$$m_z(\vec{F}) = F_{xy} h. \quad (4.4)$$

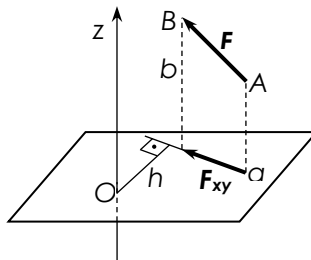


Рис. 4.2

Момент сили відносно осі *додатний*, якщо з кінця осі видно намагання сили обертати тіло відносно осі проти ходу годинникової стрілки та *від'ємний* у протилежному випадку.

Таким чином момент сили відносно осі (4.4) є скалярною величиною, яка дорівнює моменту проекції сили на площину, перпендикулярну до даної осі, відносно точки перетину осі з площиною, взятою з відповідним знаком.

Момент сили відносно осі (4.4), дорівнює нулю, якщо:

лінія дії сили паралельна осі ($F_{xy} = 0$),

лінія дії сили перетинає вісь ($h = 0$).

Якщо сила \vec{F} не паралельна жодній з координатних осей, то для спрощення обчислення моментів цієї сили відносно координатних осей (крім випадку коли лінія дії сили перетинає вісь, відносно якої обчислюємо момент) необхідно силу розкласти на складові, які паралельні осям, та скористатися теоремою Варіньйона: *момент рівнодійної відносно будь-якої осі дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил відносно тієї ж осі.*

Приклад 5. З умов рівноваги колінчастого вала визначити зусилля Q та реакції опор, якщо $P = 12 \text{ кН}$, $AC = CB = 2 \text{ м}$, $CD = 1.5 \text{ м}$, $BK = 1 \text{ м}$, $\beta = 60^\circ$. Вагою вала ABK (рис. 4.4) знехтувати.

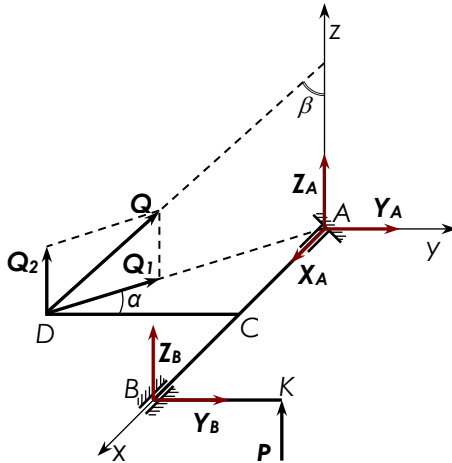


Рис. 6

Розв'язання. Розглянемо рівновагу вала ABK , враховуючи, що

консоль CD жорстко прикріплена до нього. На вал діють дві активні сили \vec{P} та \vec{Q} . Реакції циліндричного підшипника A та підп'ятника B розкладаємо на відповідні складові: $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$ та \vec{Y}_B, \vec{Z}_B .

Вибір осей координат зображено на рис. 11. Розкладаємо силу \vec{Q} на складові (рис. 6):

$$Q_1 = Q \sin \beta, \quad Q_2 = Q \cos \beta.$$

Отже, маємо довільну просторову сил, складаємо шість рівнянь рівноваги (2.3):

$$\sum F_{kx} = 0, \quad X_A - Q_1 \sin \alpha = 0, \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad Y_A + Y_B + Q_1 \cos \alpha = 0, \quad (2)$$

$$\sum F_{kz} = 0, \quad Z_A + Z_B + Q_2 + P = 0, \quad (3)$$

$$\sum m_x(\vec{F}_k) = 0, \quad -Q_2 \cdot CD + P \cdot BK = 0, \quad (4)$$

$$\sum m_y(\vec{F}_k) = 0, \quad -Z_B \cdot AB - Q_2 \cdot AC - P \cdot AB = 0, \quad (5)$$

$$\sum m_z(\vec{F}_k) = 0, \quad Y_B \cdot AB = 0. \quad (6)$$

Розв'язуємо систему рівнянь (1) – (6), визначаємо невідомі величини; попередньо визначимо кут α :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AC}{CD} = \frac{4}{3}, \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5} = 0.8, \quad \cos \alpha = \frac{3}{5} = 0.6,$$

$$Y_B = 0, \quad Q_2 = P \cdot (BK/CD) = 12 \cdot 1/1.5 = 8 \text{ кН},$$

$$Q = Q_2 / \cos 60^\circ = 8 \cdot 2 = 16 \text{ кН}, \quad Q_1 = Q \sin 60^\circ = 8\sqrt{3} \text{ кН},$$

$$Z_B = -(Q_2(AC/AB) + P) = -(8/2 + 12) = -16 \text{ кН},$$

$$X_A = Q_1 \sin \alpha = 8\sqrt{3} \cdot 0.8 = 11.1 \text{ кН},$$

$$Y_A = -(Y_B + Q_1 \cos \alpha) = -8\sqrt{3} \cdot 0.6 = -8.31 \text{ кН},$$

$$Z_A = -(Z_B + Q_2 + P) = -(-16 + 8 + 12) = -4 \text{ кН}.$$

Напрямки складових $\vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{Z}_B$ протилежні напрямкам, які були для них вибрані на початку.

Відповідь: $X_A = 11.1 \text{ кН}, Y_A = -8.31 \text{ кН}, Z_A = -4 \text{ кН},$
 $Y_B = 0, Z_B = -16 \text{ кН}, Q = 16 \text{ кН}.$

5. КІНЕМАТИКА

Найпростіші рухи твердого тіла

У кінематиці будемо розглядати всі тверді тіла як абсолютно тверді. *Абсолютно твердим тілом* називається таке матеріальне тіло, відстань між двома довільними точками якого весь час залишається незмінною.

В задачах кінематики твердого тіла визначають кінематичні характеристики тіла в цілому і окремих його точок.

До найпростіших рухів твердого тіла відносяться поступальний рух та обертальний рух навколо нерухомої осі, на які, як відомо [1, 2], розкладається будь-який рух твердого тіла.

5.1. Поступальним називається такий рух твердого тіла, під час якого довільна пряма, що проведена в тілі, залишається паралельною самій собі.

Під час поступального руху тіла всі його точки рухаються по однакових траєкторіях (при накладанні вони збігаються) і мають в кожний момент часу однакові за величиною і напрямом швидкості та прискорення. Висновок: вивчення поступального руху твердого тіла зводиться до вивчення руху однієї його будь-якої точки. Таким чином все викладене для кінематики точки поширюється на випадок поступального руху тіла [1, 2].

Зауважимо, що тільки в разі поступального руху тіла можна говорити про траєкторію, швидкість та прискорення тіла. В усіх інших випадках ці поняття не мають фізичного змісту

5.2. Надзвичайно поширеним у техніці, а тому практично дуже важливим рухом тіла є обертальний рух тіла навколо нерухомої осі.

Обертанням тіла навколо нерухомої осі називається такий його рух, при якому дві точки тіла весь час залишаються нерухомими. Пряма, що проходить через зазначені дві нерухомі точки, називається *віссю обертання*.

це рівняння визначає положення тіла в будь-який момент часу. Характеристики обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі зведені у табл. 5.1.

Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі характеризується кутовою швидкістю ω та кутовим прискоренням ε : це фізичні величини, які відповідно характеризують зміни кута повороту φ тіла та його кутової швидкості ω з часом і обчислюються за формулами (5.2) та (5.3).

Таблиця 5.1

Закон обертального руху	$\varphi = \varphi(t)$ (5.1)
Кутова швидкість тіла	$\omega = d\varphi / dt(c^{-1})$ (5.2)
Кутове прискорення тіла	$\varepsilon = d\omega / dt(c^{-2})$ (5.3)
Лінійна швидкість точки тіла	$V = \omega r$ (м/с) (5.4)
Лінійне прискорення точки тіла	$a = r\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$ (м/с ²) (5.5)
Нормальне прискорення точки	$a_n = \omega^2 r$ (5.6)
Тангенціальне прискорення точки	$a_\tau = \varepsilon r$ (5.7)
Шлях точки по колу	$S = r\varphi$ (5.8)
Рівномірне обертання ($\omega = const$) /порівняй (1.22)/	$\varphi = \omega t$ (5.9)
Рівнозмінне обертання ($\varepsilon = const$)	$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon t^2 / 2$ (5.10)
	$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$ (5.11)
Прискорене обертання	$\omega > 0, \varepsilon > 0$ або $\omega < 0, \varepsilon < 0$
Сповільнене обертання	$\omega > 0, \varepsilon < 0$ або $\omega < 0, \varepsilon > 0$
Зв'язок між кутом повороту φ і числом обертів N :	$\varphi = 2\pi N$ (5.12)
Зв'язок між частотою обертання n (об/хв) та ω :	$\omega = 2\pi n / 60$ (5.13)

Зауважимо, що кутову швидкість ω можна зобразити вектором $\vec{\omega}$, який напрямляється вздовж осі обертання таким чином, що з кінця вектора видно поворот тіла проти годинникової стрілки. Аналогічно напрямляється вектор $\vec{\varepsilon}$: в той же бік що і $\vec{\omega}$, якщо обертання прискоро-

рене, і в протилежний бік – якщо обертання сповільнене *Лінійні швидкості \vec{V} і прискорення \vec{a} мають різні значення в різних точках тіла, тому їх треба визначати окремо для кожної точки за формулами (5.4)...(5.7).*

Всі особливості обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі наведені у табл. 5.1.

В задачах, де мова йде про передавання обертання від одного твердого тіла до іншого, слід враховувати спосіб передавання обертального руху: при внутрішньому зачепленні зубчастих коліс та при прямій пасовій передачі напрямком обертання обох коліс збігається; при зовнішньому зачепленні та перехресній пасовій передачі напрямки обертання коліс протилежні.

Величини швидкостей на ободі зубчастих коліс, які перебувають в зачепленні, однакові. Однакові за величиною і швидкості на ободі шківів пасової передачі, якщо нехтувати ковзанням паса. Кутові швидкості коліс обернено пропорційні їх радіусам, або діаметрам, або числу зубців:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (5.14)$$

Приклад 6. Під час обертання рукоятки O_1A домкрата (рис. 7) його шестірні починають обертатися і приводять в рух зубчасту рейку BC , яка рухається відповідно до закону $x = 0,1t^2$ м (t - в секундах). Знайти швидкість та прискорення кінця A рукоятки в момент часу $t_1 = 2$ с, якщо $O_1A = 0,2$ м, $r_5 = 0,1$ м, а шестірні мають відповідну кількість зубців: $z_1 = 6$, $z_2 = 24$, $z_3 = 8$, $z_4 = 32$.

Розв'язання починаємо з кінематичного аналізу руху ланок механізму: рукоятка O_1A обертається навколо осі, що проходить через точку O_1 , разом з нею обертається шестірня 1 ($\omega_1 = \omega_{O_1A}$), бо в рукоятки O_1A і шестірні 1 спільна вісь обертання. Шестірні 1 і 2 знаходяться у зовнішньому зачепленні, як і шестірні 3 та 4. Зауважимо, що шестірні 2 та 3 мають спільну вісь обертання O_3 ($\omega_2 = \omega_3$), як і шестірні 4 та 5 ($\omega_4 = \omega_5$). Рейка BC рухається поступально, тобто $V = V_K$.

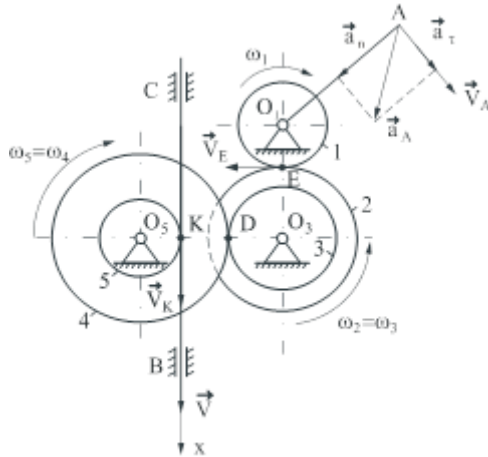


Рис. 7

Точка A обертається разом з рукояткою O_1A , тому відповідно (5.4) та (5.5) маємо:

$$V_A = \omega_1 \cdot AO_1, \quad a_A = AO_1 \sqrt{\omega_1^4 + \varepsilon_1^2}.$$

Розв'язання по суті звелось до визначення $\omega_1 = \omega_{OA}$ через V . Маємо $\omega_4 = \omega_5 = V_K/r_5 = V/r_5$. Тоді $V_D = \omega_4 r_4 = V r_4/r_5$, але точка D належить також шестірні 3, тому $\omega_3 = V_D/r_3 = V r_4/r_3 r_5$ і маємо, що $V_E = \omega_2 r_2 = \omega_3 r_2 = V r_2 r_4/r_3 r_5$. З іншого боку, $V_E = \omega_1 r_1$, тому $\omega_1 = V r_2 r_4/r_1 r_3 r_5$, де $V = dx/dt = 0,2t$. Крім того, має місце (5.14), тому $\omega_1 = 0,2t \cdot z_2 z_4 / (z_1 z_3 \times \times 0,1) = 32t \text{ (с}^{-1}\text{)}$, $\varepsilon_1 = d\omega_1/dt = 32 \text{ (с}^{-2}\text{)}$. Остаточно маємо при $t = t_1 = 2 \text{ с}$:

$$\omega_1 = 64 \text{ с}^{-1}; \quad V_A = \omega_1 \cdot AO_1 = 64 \cdot 0,2 = 12,8 \text{ м/с};$$

$$\varepsilon_1 = 32 \text{ с}^{-2}; \quad a_A = AO_1 \sqrt{\omega_1^4 + \varepsilon_1^2} = 0,2 \sqrt{64^4 + 32^2} = 819,2 \text{ м/с}^2.$$

Відповідь: через 2 секунди після початку обертання рукоятки O_1A її кінець A має швидкість $V_A = 12,8 \text{ м/с}$ та прискорення $a_A = 819,2 \text{ м/с}^2$.

Приклад 7. В механізмі (рис. 8) рух від колеса 1 передається шківу 2, а від нього за допомогою нескінченного паса ступінчастому барабану 3, за допомогою якого піднімають вантаж A . Визначити швидкість та прискорення вантажу A через 1 секунду після початку руху механізму

і висоту підйому вантажу A за цей час, якщо $\varphi_1 = 3t - t^2$ рад,
 $R_1 = 0,25$ м, $R_3/r_3 = 2$, $r_3 = 0,5$ м; крім того, визначити швидкість та
 прискорення точки B в цей момент часу і зобразити їх на рисунку.

Розв'язання задачі починається з кінематичного аналізу руху елементів механізму: колесо 1, шків 2 та барабан 3 обертаються відповідно навколо осей, що проходять через точки O_1, O_2, O_3 , а вантаж A рухається поступально.

Визначимо кутову швидкість обертання колеса 1:

$$\omega_1 = d\varphi_1/dt = 3 - 2t \quad (\text{с}^{-1}).$$

Очевидно, що $V_K = \omega_1 R_1 = V_L$, бо $O_2K = O_2L$. Пас EL рухається поступально, тому $V_E = V_L = V_K = \omega_1 R_1$, але точка E належить також барабану 3 і маємо $V_E = \omega_3 r_3$, звідки $\omega_3 = V_E/r_3 = \omega_1 R_1/r_3 = (3 - 2t) \times 0,25/0,5 = 1,5 - t \text{ с}^{-1}$. Знаючи ω_3 , знаходимо кутове прискорення барабана та його кут повороту:

$$\varepsilon_3 = d\omega_3/dt = -1 \quad (\text{с}^{-2}), \quad \varphi_3 = \varphi_1 R_1/r_3, \quad \text{бо } \omega_3 = \omega_1 R_1/r_3.$$

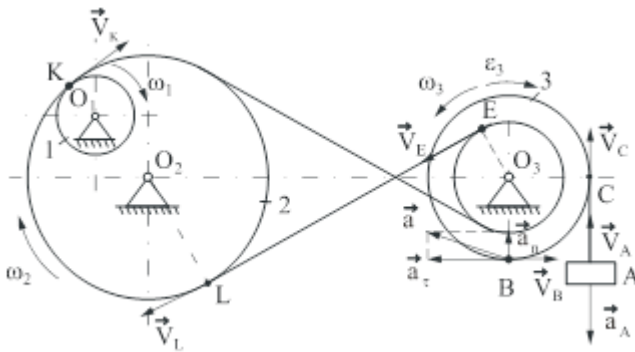


Рис.8

Маємо при $t = t_1 = 1$ с:

$$\omega_3 = 0,5 \text{ с}^{-1}, \quad \varepsilon_3 = -1 \text{ с}^{-2}, \quad \varphi_3 = \varphi_1/2 = (3t_1 - t_1^2)/2 = 1 \text{ рад},$$

$$V_A = V_C = V_B = \omega_3 R_3 = 0,5 \cdot 1 = 0,5 \text{ м/с},$$

$$a_A = a_B^tau = a_C^tau = \varepsilon_3 R_3 = -1 \text{ м/с}^2,$$

$$a_B^n = \omega_3^2 \cdot R_3 = 0,25 \text{ м/с}^2,$$

$$a_B = \sqrt{(a_B^n)^2 + (a_B^r)^2} = \sqrt{0,25^2 + (-1)^2} = 1,03 \text{ м/с}^2.$$

Визначимо висоту підйому вантажу A , враховуючи що $V_A = ds/dt$, звідки $ds = V_A dt$ або

$$\int_0^h ds = \int_0^{t_1} (1,5 - t) R_3 dt.$$

Маємо $h = h_A = R_3(1,5t_1 - t_1^2/2) = 1(1,5 - 0,5) = 1$ м. Цей же результат можна отримати як $h = h_A = \varphi_3 \cdot R_3$, де $\varphi_3 = 1$ рад при $t = t_1 = 1$ с і $R = 1$ м.

Відповідь: через 1 секунду після початку руху механізму маємо $V_A = V_B = 0,5$ м/с, $a_B = 1,03$ м/с², $a_A = -1$ м/с² і вантаж A піднявся на висоту $h = 1$ м.

5.3. Вивчення плоскопаралельного (плоского) руху твердого тіла має велике практичне значення, бо більшість деталей будівельних і меліоративних машин та механізмів виконують саме цей рух, знайомство з яким слід починати з його визначення [1, 2]: **плоским або плоскопаралельним** рухом називається такий рух тіла, при якому всі його точки рухаються паралельно деякій нерухомій площині. З'ясувавши, що вивчення плоского руху зводиться до вивчення руху плоскої фігури (перерізу S тіла площиною, паралельного цій нерухомій площині), приходимо до висновку (рис. 3.1), що плоский рух можна розглядати як синтез двох найпростіших рухів (див. розділ 2): поступального разом з полюсом A ($\varphi = \text{const}$) та обертального навколо нього ($X_A = \text{const}$, $Y_A = \text{const}$). Слід зауважити, що характеристики поступальної частини плоского руху залежать від вибору полюса, а обертальної – ні. Отже, рух плоскої фігури на площині можна визначити такими рівняннями:

$$X_A = X_A(t), Y_A = Y_A(t), \varphi = \varphi(t). \quad (5.15)$$

Швидкість будь-якої точки B тіла при його плоскому русі дорівнює геометричній сумі швидкостей полюса A та обертальної швидкості точки B навколо полюса A :

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}. \quad (5.16)$$

Під час розв'язування практичних задач користуються теоремою про проекції швидкостей двох точок тіла на пряму, що з'єднує їх

$$V_B \cos \beta = V_A \cos \alpha \quad (5.17)$$

. Під час визначення швидкостей точок плоскої фігури крім двох теорем застосовують спосіб, який базується на понятті *миттєвого центру швидкостей* (МЦШ) - це точка P , швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю ($V_P = 0$). Зауважимо, що МЦШ P не завжди належить тілу, але завжди лежить в рухомій площині, яка рухається разом з тілом. Можна показати, що така точка завжди існує і вона є єдиною.

Якщо за полнос взяти в даний момент часу МЦШ P , то плоский рух можна розглянути як обертальний рух навколо нього:

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \dots = \frac{V_K}{KP}. \quad (5.18)$$

Щоб знайти МЦШ в загальному випадку, досить знати лише напрямки швидкостей двох точок плоскої фігури: МЦШ лежить на перетині перпендикулярів, які проведені через точки прикладання швидкостей цих точок до їх напрямів. Для визначення швидкості довільної точки необхідно додатково знати величину однієї з двох швидкостей і використати співвідношення (3.4). Таким чином, кутова швидкість тіла при плоскому русі дорівнює в кожний момент часу відношенню швидкості будь-якої точки до її віддалі до МЦШ:

$$\omega = V_K / KP. \quad (5.19)$$

Приклад 8. Для заданого положення механізму, яке визначається кутами $\alpha, \beta, \gamma, \varphi$ (рис. 9), визначити швидкості точок B, C, K та кутові швидкості всіх його ланок, якщо прямокутний трикутник OAD (один з кутів якого 30°) обертається за годинниковою стрілкою зі сталою кутовою швидкістю $\omega = 6 \text{ с}^{-1}$ і приводить в рух решту ланок механізму. Розрахунки провести для $OA = 0,8 \text{ м}$, $l_1 = 1 \text{ м}$, $l_2 = 1,5 \text{ м}$, $R = 0,5 \text{ м}$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 60^\circ$, $\varphi = 90^\circ$.

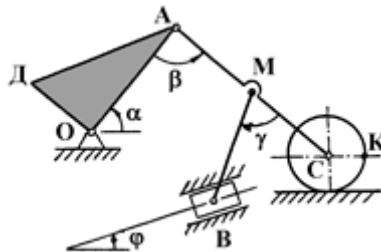


Рис.9

Побудову механізму починають з ланки, напрям якої визначається кутом α ; кути відкладають в напрямках зазначених на схемі.

Розв'язання починаємо з побудови заданого положення механізму (рис. 9а) у відповідності з умовою задачі. Після цього робимо кінематичний аналіз руху окремих ланок механізму: трикутник OAD обертається навколо осі, що проходить через точку O ; ланки AC , MB та колесо рухаються плоскопаралельно і кожна в даний момент часу має свій миттєвий центр швидкостей (МЦШ); повзун B рухається поступально.

Виходячи з умови задачі, знаходимо швидкість точки A , враховуючи (5.4):

$$V_A = \omega \cdot OA = 6 \cdot 0,8 = 4,8 \text{ (м/с)}.$$

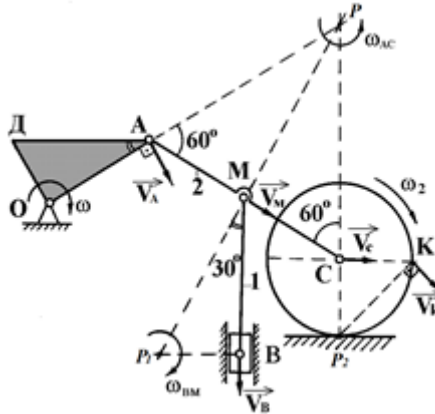


Рис.9а

Вектор швидкості \vec{V}_A напрямлений перпендикулярно до OA в бік обертання (рис. 9).

Для знаходження МЦШ P для ланки AC необхідно показати напрям швидкості точки C : віддалі від центра колеса до горизонтальної поверхні стала і точка C рухається праворуч по прямій (рис. 9а). Проводимо перпендикуляри до \vec{V}_A та \vec{V}_C через точки їх прикладання і знаходимо МЦШ P ; маємо (5.4):

$$\omega_{AC} = V_A / AP = V_M / MP = V_C / CP,$$

де $AP = CP = AC = 1,5 \text{ м}$, бо $\triangle APC$ рівносторонній,
 $MP = AP \sin 60^\circ = 1,5 \cdot 0,866 = 1,299 \text{ (м)}$.

Тепер знаходимо :

$$\begin{aligned}\omega_{AC} &= V_A/AP = 4,8 / 1,5 = 3,2 \text{ (c}^{-1}\text{)}; \\ V_C &= V_A = 4,8 \text{ м/с, бо } CP = AP; \\ V_M &= \omega_{AC} \cdot MP = 3,2 \cdot 1,299 = 4,16 \text{ (м/с)}.\end{aligned}$$

Напрямаємо ω_{AC} : стаємо в МЦШ P , дивимось на \vec{V}_A і бачимо, що миттєве обертання ланки AC навколо P відбувається проти годинникової стрілки. Вектор $\vec{V}_M \perp MP$ і направлений в бік ω_{AC} .

Аналогічно розглядаємо рух ланки MB : напрям швидкості повзуна B обумовлений вертикальними напрямними і МЦШ P_1 для ланки MB лежить на перетині перпендикулярів до \vec{V}_M та \vec{V}_B (рис. 9а). Маємо (5.4) :

$$\begin{aligned}\omega_{BM} &= V_M / MP_1 = V_B / BP_1, \\ \text{де } BP_1 &= MB \operatorname{tg} 30^\circ = 1 \cdot 0,577 = 0,577 \text{ (м)}, \\ MP_1 &= BP_1 / \sin 30^\circ = 0,577 / 0,5 = 1,154 \text{ (м)}. \text{ Обчислимо :}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_{BM} &= V_M / MP_1 = 4,16 / 1,154 = 3,60 \text{ (c}^{-1}\text{)} \\ V_B &= \omega_{BM} \cdot BP_1 = 3,60 \cdot 0,577 = 2,08 \text{ (м/с)}.\end{aligned}$$

Розглянемо плоский рух колеса. Точка дотику P_2 колеса до нерухомої поверхні є МЦШ для колеса. Через те, що МЦШ P_2 є миттєвим центром обертання для колеса, маємо (5.4) :

$$\begin{aligned}\omega_2 &= V_C / CP_2 = V_K / KP_2, \\ \text{але } CP_2 &= R, \text{ тому } \omega_2 = 4,8 / 0,4 = 12 \text{ (c}^{-1}\text{)} \text{ і} \\ V_K &= \omega_2 \cdot KP_2 = \omega_2 \cdot R \sqrt{2} = 12 \cdot 0,4 \sqrt{2} = 6,79 \text{ (м/с)}; \\ \vec{V}_K &\perp KP_2 \text{ і направлений в бік } \omega_2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Відповідь : } V_B &= 2,08 \text{ м/с}; V_C = 4,8 \text{ м/с}; V_K = 6,79 \text{ м/с}; \\ \omega_{AC} &= 3,2 \text{ c}^{-1}; \omega_{BM} = 3,6 \text{ c}^{-1}; \omega_2 = 12 \text{ c}^{-1}.\end{aligned}$$

Під час визначення прискорень плоскої фігури виходять із закону розподілу прискорень при плоскому русі [1, 2]:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau, \quad (5.20)$$

де A - полюс; $a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB$, $a_{BA}^\tau = \varepsilon_{AB} AB$; вектор \vec{a}_{BA}^n направлений від B до A , вектор \vec{a}_{BA}^τ перпендикулярний до \vec{a}_{BA}^n і направлений в бік ε_{AB} . Якщо полюс A рухається непрямолінійно, то $\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau$; нарешті, коли точка B рухається по кривій, то $\vec{a}_B = \vec{a}_B^n + \vec{a}_B^\tau$ в (5.20).

Для знаходження невідомих прискорень векторну рівність (5.20) проєктують на осі координат X , Y і розв'язують отриману систему рівнянь відносно невідомих.

Основні випадки обчислення кутового прискорення при плоскому русі твердого тіла розглянемо на конкретних прикладах.

Приклад 9. Кривошип OA кривошипно-шатунного механізму (рис. 10 а) обертається навколо осі, що проходить через точку O , з кутовою швидкістю, яка змінюється за законом $\omega = 2 - t \text{ c}^{-1}$. Через $t_1 = 1 \text{ с}$ механізм займає положення, яке зображене на рис. 3.5, а. Визначити для цього положення швидкість і прискорення повзуна B та кутову швидкість і кутове прискорення шатуна AB , якщо $OA = 0,5 \text{ м}$, $\alpha = 30^\circ$.

Розв'язання. Проводимо кінематичний аналіз руху окремих ланок механізму: кривошип OA обертається навколо осі, що проходить через точку O ; повзун B рухається поступально в вертикальних напрямках; шатун AB рухається плоскопаралельно.

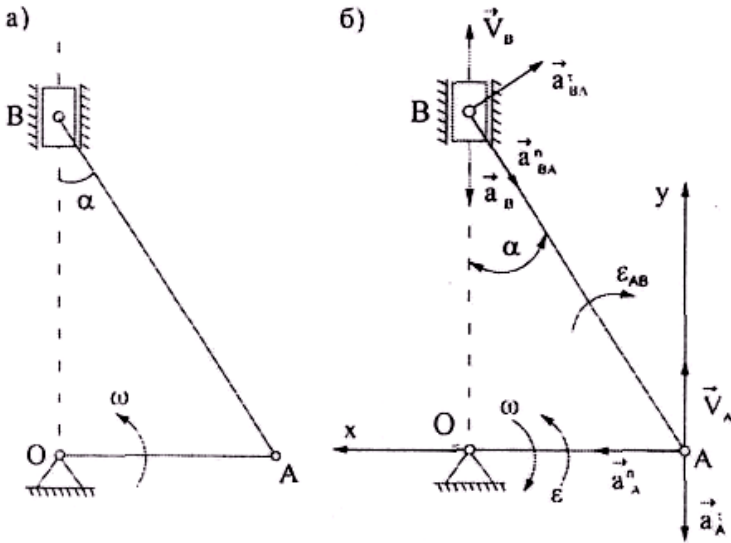


Рис.10

Визначаємо кутову швидкість та кутове прискорення кривошипа OA для заданого положення механізму ($t = t_1 = 1 \text{ с}$): $\omega_{OA} = \omega = 1 \text{ c}^{-1}$,

$\varepsilon_{OA} = \varepsilon = d\omega / dt = -1 \text{ c}^{-2}$, тобто кривошип у даний момент часу обертається сповільнено.

Знаходимо швидкість пальця A ($V_A = \omega \cdot OA = 0,5 \text{ м/с}$) і напрямляємо її перпендикулярно до радіуса обертання OA в бік обертання (рис. 10 б). Напрямок швидкості повзуна B обумовлений вертикальними напрямними, тому $\vec{V}_B \parallel \vec{V}_A$ і МЦШ для шатуна AB лежить у нескінченності і маємо (5.5):

$$\omega_{AB} = V_A / AP = V_A / \infty = 0, \quad V_B = V_A = 0,5 \text{ м/с}.$$

Таким чином, шатун AB у даний момент часу рухається миттєво поступально; миттєва рівність нулю кутової швидкості ω_{AB} не дає права зробити хибний висновок, що і $\varepsilon_{AB} = 0$ в цей момент часу, що підтвердимо подальшим розв'язанням.

Визначимо прискорення повзуна B за формулою (5.20) і врахуємо, що палець A , який прийнято за полюс, обертається разом з кривошипом:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau, \quad (5.21)$$

$$\text{де } a_A^n = \omega^2 \cdot OA = 0,5 \text{ м/с}^2; \quad a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 0;$$

$$a_A^\tau = \varepsilon \cdot OA = -0,5 \text{ м/с}^2; \quad a_{BA}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AB = ?$$

Вектор \vec{a}_A^n напрямлений від A до центра обертання O , вектор \vec{a}_A^τ лежить на одній прямій зі швидкістю \vec{V}_A , протилежно їй напрямлений ($\omega_{OA} > 0$, $\varepsilon_{OA} < 0$) і перпендикулярний до \vec{a}_A^n . Вектор \vec{a}_{BA}^n (рис. 10 б) зобразимо формально ($\vec{a}_{BA}^n = 0$), бо вектор \vec{a}_{BA}^τ завжди перпендикулярний до \vec{a}_{BA}^n . Величина і напрям \vec{a}_{BA}^τ невідомі, тому зображуємо його перпендикулярно до \vec{a}_{BA}^n в будь-який бік: знак відповіді підтвердить (+) або спростує (-) вибір напрямку \vec{a}_{BA}^τ . Вектор \vec{a}_B лежить на одній прямій зі швидкістю \vec{V}_B , зобразимо його протилежно до \vec{V}_B , а відповідь підтвердить чи спростує наш вибір.

Вибираємо осі координат XAY (рис. 10 б) і проектуємо рівність (3.7) на ці осі:

$$0 = -a_{BA}^\tau \cos 30^\circ + a_A^n,$$

$$-a_B = a_{BA}^\tau \sin 30^\circ - a_A^\tau,$$

$$\text{звідси } a_{BA}^\tau = a_A^n / \cos 30^\circ = 0,5 / 0,866 = 0,577 \text{ (м/с}^2\text{)},$$

$$a_B = a_A^\tau - a_{BA}^\tau \sin 30^\circ = 0,5 - 0,577 \cdot 0,5 = 0,212 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Знаки "+" вказують на те, що вектори \vec{a}_B та \vec{a}_{BA}^r напрямлені на рис. 10 б правильно. Вектор \vec{a}_{BA}^r визначає напрям кутового прискорення ε_{AB} : треба стати в точку A і подивитись на \vec{a}_{BA}^r (рис. 10 б). Визначаємо величину ε_{AB} :

$$\varepsilon_{AB} = a_{BA}^r / AB = a_{BA}^r / 2 \cdot AO = 0,577 \text{ c}^{-2}$$

Відповідь: для заданого положення механізму (рис. 10 а) повзун B рухається сповільнено і має швидкість $V_B = 0,5 \text{ м/с}$ та прискорення $a_B = 0,212 \text{ м/с}^2$; шатун AB в цей момент часу має кутову швидкість $\omega_{AB} = 0$ та кутове прискорення $\varepsilon_{AB} = 0,577 \text{ c}^{-2}$.

6. ОПР МАТЕРІАЛІВ

Основною метою розрахунку конструкції є забезпечення її міцності в умовах довготривалої експлуатації в поєднанні з питаннями економічності. Для вирішення цих проблем є метод розрахунку на міцність за допустимими напруженнями.

Суть методу розрахунку за допустимими напруженнями зводиться до вимоги, щоб дійсне напруження в точках будь-якого поперечного перерізу елемента конструкції не перевищувало допустимого напруження для певного матеріалу

$$\sigma \leq \sigma_{adm} \quad (6.1)$$

6.1. Деформація розтягу (стиску) часто зустрічається в елементах конструкцій агротехнічного обладнання.

Осьовий розтяг (стиск) прямого бруса це деформація при якій всі його волокна, що розташовані вздовж осі, отримують однакові подовження (укорочення).

Закон розподілу нормальних напружень по перерізу бруса, що розтягує(стискається) встановлюється на основі гіпотези плоских перерізів: відповідно до означення осьового розтягу (стиску) можна вважати, що нормальні напруження розподіляються рівномірно по всьому поперечному перерізу бруса, тому

$$\sigma = N/A, \quad (6.2)$$

де A - площа поперечного перерізу.

При дії на брус декількох зовнішніх сил $F_1, F_2 \dots F_n$, прикладених в різних точках до його осі, корисно будувати графіки зміни повздовжніх сил та нормальних напружень уздовж осі бруса. Ці графіки носять назву *епюри*.

Досліди на розтяг (стиск) брусів показують, що поки навантаження на нього не сягає певної границі, то деформація бруса зростає прямо пропорційно навантаженню F і обернено пропорційно площі A поперечного перерізу. Крім того доведено, що величина деформації залежить від матеріалу, з якого брус виготовлено. Всі ці властивості об'єднані законом Гука

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} \quad (6.3)$$

де l - довжина бруса, Δl - його абсолютна деформація; E - модуль по-
вздожньої пружності, який характеризує ступінь опору матеріалу пружній деформації; EA - жорсткість перерізу бруса при розтязі (стиску).
Наведемо різновид запису закону Гука

$$\sigma = \varepsilon E, \quad (6.4)$$

де $\varepsilon = \Delta l / l$ - відносна поєздожжня деформація.

Розрахунки на міцність за допустимими напруженнями

При розтязі (стиску); умова (3.1) з врахуванням (4.1) набуває вигляду:

$$\sigma = N/A \leq \sigma_{adm}' \quad (6.5)$$

Застосування умови (4.4) дозволяє робити практичні розрахунки на розтяг (стиск), які зводяться до розв'язання наступних задач:

1) **перевірочний розрахунок** - відомі зовнішнє навантаження на конструкцію та її поперечні розміри, обчислюємо найбільше напруження σ_{max} і порівнюємо його з допустимим для заданого матеріалу: якщо $\sigma > \sigma_{adm}$, то необхідно або збільшити площу поперечного перерізу, або, якщо це можливо, зменшити навантаження;

2) **проектувальний розрахунок** (підбір перерізу конструкції) – найбільш відповідальний і розповсюджений при розрахунках конструкцій:

$$A \geq N_{max} / \sigma_{adm} \quad (6.6)$$

3) визначення несучої здатності конструкції:

$$N_{adm} \leq \sigma_{adm} A \quad (6.7)$$

Тобто визначають значення допустимої поєздожньої сили.

Приклад 10. Вантаж вагою $P=250\text{кН}$ необхідно підвісити до вертикального стержня, поперечний переріз якого має площу $A=20\text{см}^2$. (рис.4.2). Перевірити міцність стержня, якщо його виготовлено зі сталі Ст.3 ($\sigma_{adm} = 160 \text{ МН/м}^2$).

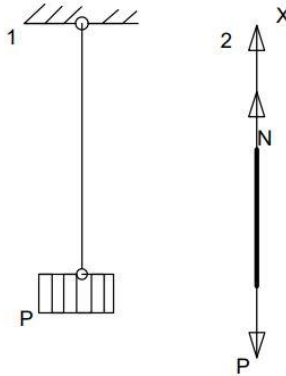


Рис. 11

Розв'язання. Зробимо довільний переріз стержня, відкинемо верхню його частину, дію якої на нижню частину замінимо реакцією N (ідеальний стержень). Будемо вважати, що стержень розтягується, тому N напрямлено від стержня. З умови рівноваги нижньої частини стержня

$$\sum F_{jx}=0; N-P=0$$

знаходимо, що $N=P$. Обчислюємо σ за формулою (4.1):

$$\sigma=N/A=50\text{кН}/20\text{см}^2=250\text{кН}/20\cdot 10^{-4}\text{м}^2=12.5\cdot 10^4\text{кПа}=125\text{МПа}.$$

Очевидно (4.4), що $\sigma < \sigma_{adm}$. З'ясуємо наскільки економічно вигідно в даному разі використовувати стержень, поперечний переріз якого $A=20\text{см}^2$:

$$\delta=\frac{\sigma_{max}-\sigma_{adm}}{\sigma_{adm}}\cdot 100\%=\frac{125-160}{160}\cdot 100\%=-21,9\%$$

Перевірочний розрахунок показав, що перевитрати матеріалу складають близько 22%, що економічно невигідно. Очевидно, що досить було б взяти стержень з поперечним перерізом $A=16\text{см}^2$ ($\sigma = N/A = 156.25\text{МПа}$, $\delta = -2,34\%$).

6.2. Розповсюджений вид деформації елементів агротехнічних конструкцій є згин. Прямий брус, що працює на згин, називають балкою. Якщо в поперечних перерізах балки виникає лише згинальний момент, то маємо чистий згин. В більшості випадків разом зі згинальним моментом діє поперечна сила і відповідно згин називається поперечним.

Розрахунок двохопорних балок починають з визначення опорних реакцій. Щоб уникнути помилок при подальших розрахунках обов'язково необхідно зробити перевірку правильності визначення значень

опорних реакцій, складаючи рівняння рівноваги, яке не було використане при їх визначенні.

Після знаходження опорних реакцій переходять до визначення внутрішніх сил в поперечних перерізах балки. Для цього застосовують метод перерізів, подумки розрізають балку на довільній відстані x від лівої опори. Відкидаємо одну з частин і розглядаємо рівновагу іншої: дію відкинутої частини заміняємо невідомими внутрішніми силами Q_y та M_z . Для визначення Q_y та M_z , статика дає два рівняння рівноваги.

Таким чином *поперечна сила в довільному перерізі балки чисельно дорівнює алгебраїчній сумі всіх зовнішніх сил, які діють з одного боку від цього перерізу, а згинальний момент алгебраїчній сумі моментів цих же сил відносно його центра ваги.*

Правило знаків обох внутрішніх зусиль зручно встановлювати виходячи з напрямку зовнішніх сил. Якщо зовнішня сила намагається повернути розглядувану частину балки за годинниковою стрілкою відносно зробленого перерізу, то вона викликає додатну поперечну силу Q_y і навпаки.

Зовнішня сила (момент), яка деформує балку так, що розтягуються нижні волокна, викликає в зробленому перерізі балки додатний згинальний момент M_z і навпаки (рис.6.1). Це правило є еквівалент введення в розглядуваному перерізі защемлення (рис.6.2) після звільнення балки від опор. Тоді балка розпадається на дві консолі і шуканий згинальний момент визначається як реактивний момент в уявному защемленні.

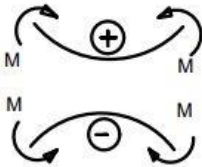


Рис. 6.1

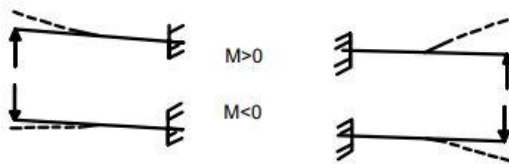


Рис. 6.2

Питання про міцність звантаженої балки розглядається після побудови і аналізу епюр внутрішніх сил $Q(x)$ та $M(x)$. Для цього встановлюють закони їх зміни вздовж осі балки на кожній ділянці балки як функції від абсциси x . Роблячи обчислення для різних значень x , будують графіки зміни цих функцій вздовж осі балки, тобто епюри поперечних сил Q та згинальних моментів M .

Для побудови епюр використаємо характерні точки на балці де прикладаються силові фактори і правила, що викладені нижче.

- якщо ділянка балки не завантажена, то епюра Q є пряма яка паралельна до осі балки, а епюра M - нахилена пряма;

- якщо $q = \text{const}$, то епюра Q - нахилена пряма, епюра M - квадратна парабола, яка напрямлена опуклістю в бік дії навантаження q ;

- якщо на ділянці балки поперечна сила додатна, то згинальний момент зростає (зліва на право), а на ділянці балки де Q від'ємна, то M - зменшуються;

- якщо на ділянці $Q=0$, то $M = \text{const}$ і маємо на цій ділянці чистий згин;

- якщо $Q=0$ (епюра перетинає базисну лінію), то $M = M_{\text{екстр}}$ (M_{max} або M_{min});

- в перерізі під зосередженою силою епюра Q має стрибок, який дорівнює цій силі, а епюра M - злам, вістря якого напрямлено в бік дії сили;

- в перерізі, де прикладено зосереджений момент, епюра M має стрибок, який дорівнює цьому моменту, на епюру Q це не впливає.

Всі ці правила дають змогу будувати епюри Q , M за характерними точками (перерізами) без складання законів зміни Q , M в залежності від x

Приклад 11. Побудувати епюру поперечних сил та епюру згинальних моментів для балки, яка защемлена лівим кінцем (рис. 12а). Балка завдовжки 6 м навантажена рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивності $q=10\text{кН/м}$, зосередженою силою $F=20\text{кН}$ та парою сил з моментом $M=40\text{кНм}$.

Розв'язання. В даному випадку опорні реакції визначати не обов'язково, тоді розрахунки треба вести йдучи від вільного кінця і враховуючи навантаження, що діє між вільним кінцем і відповідним перерізом.

Аналізуючи задану схему (рис. 12,а), робимо висновок, що для заданої балки треба зробити шість характерних перерізів 1,2,...,6, які відповідають початку і кінцю кожної з трьох ділянок. Для поперечної сили маємо: $Q_1=0$;

$Q_2 = q \cdot l = 10(\text{кН})$ навантаження q хоче повернути балку А-2 відносно перерізу 2 за годинниковою стрілкою, тому знак плюс;

$Q_3 = q \cdot l - F = 10 - 20 = -10(\text{кН})$ - перед F поставили знак мінус, бо ця сила хоче повернути балку А-3 відносно перерізу 3 проти годинникової стрілки,

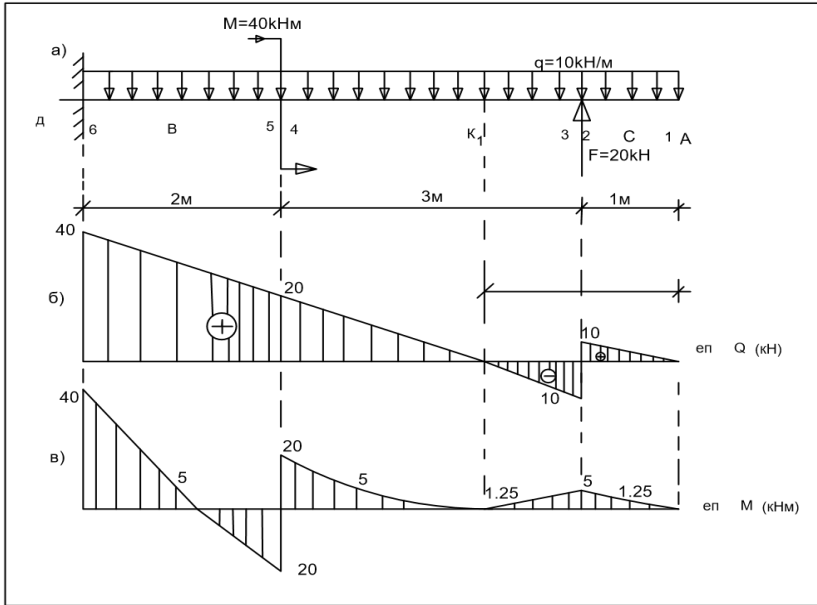


Рис. 12

$$Q_4 = q \cdot 4 - F = 40 - 20 = 20 \text{ кН};$$

$$Q_5 = Q_4 = 20 \text{ кН (пара сил з моментом } M \text{ на епюру не впливає);}$$

$$Q_6 = q \cdot 6 - F = 60 - 20 = 40 \text{ кН.}$$

Через те, що на другій ділянці поперечна сила змінює знак, то визначаємо відстань до екстремального перерізу К з умови $Q_K = 0$. Отже:

$$Q_K = q x_K - F = 0, \text{ звідси } x_K = F/q = 20/10 = 2 \text{ (м).}$$

Обчислимо величину згинального моменту у кожному характернім перерізі:

$$M_1 = 0; M_C = -q \cdot 0,5 \cdot 0,25 = -1,25 \text{ (кНм);}$$

$$M_2 = -q \cdot 1 \cdot 0,5 = -5 \text{ (кНм)} = M_3;$$

$$M_K = -q \cdot 2 \cdot 1 + F \cdot 1 = -20 + 20 = 0;$$

$$M_4 = -q \cdot 4 \cdot 2 + F \cdot 3 = -80 + 60 = -20 \text{ (кНм),}$$

$$M_5 = -q \cdot 4 \cdot 2 + F \cdot 3 + M = -80 + 60 + 40 = 20 \text{ (кНм);}$$

$$M_B = -q \cdot 5 \cdot 2,5 + F \cdot 4 + M = -125 + 80 + 40 = -5 \text{ (кНм),}$$

$$M_6 = -q \cdot 6 \cdot 3 + F \cdot 5 + M = -180 + 100 + 40 = -40 \text{ (кНм).}$$

Зауважимо, що M_C та M_B обчислено посередині першої та третьої ділянки (рухаємось від вільного кінця А до защемлення Д), бо на цих ділянках епюра М окреслена по квадратній параболі, на другій ділянці третім значенням є M_K (екстремальний переріз). Знаки в виразах для

М. взято у відповідності з рис 6.1, а (праворуч) для F та М, для q- з рис.6.2.

За отриманими значеннями будуюмо епюри Q (рис. 12б) та М (рис. 12 в) у відповідності з правилами знаків та керуючись контролем правильності побудови епюр.

Розрахунок на міцність за нормальними напруженнями

При прямому поперечному згині в поперечних перерізах балки виникають два силові фактори: згинальний момент M_z , та поперечна сила O_y . Як відомо [3] від дії M_z , виникають нормальні напруження

$$\sigma = M_z y / J_z \quad (6.8)$$

де у-віддаль від розглядуваного волокна балки до нейтральної осі (її рівняння $\sigma = 0$), а J_z -момент інерції перерізу відносно цієї осі. З (6.8) випливає, що найбільшого значення нормальні напруження досягають коли $M_z = M_{\max}$, $y = y_{\max}$:

$$\sigma_{\max} = M_{\max} / W_{\text{net}}, \quad (6.9)$$

де $W_{\text{net}} = J_z / y_{\max}$ - осьовий момент опору перерізу нетто (з врахуванням вирізів) відносно нейтральної осі.

Виходячи з умови (6.1), отримуємо умову міцності при прямому згині допустимими напруженнями

$$\sigma_{\max} = M_{\max} / W_{\text{net}} \leq \sigma_{\text{adm}}, \quad (6.10)$$

а умова (6.2) дає змогу робити розрахунки на міцність за граничними станами

$$\sigma_{\max} = M_{\max} / W_{\text{net}} \leq mR, \quad (6.11)$$

де R розрахунковий опір матеріалу балки розтягу (стиску) при згині, - коефіцієнт умови роботи балки. Умова (6.10) або (6.11) дає можливість проводити перевіірочний розрахунок, проектувальний розрахунок та визначати несучу здатність конструкції при згині.

Приклад 12. Для сталеві балки (рис. 12.а) визначити діаметр круглого перерізу, якщо $\sigma_{\text{adm}} = 160 \text{ МПа}$; діаметр заокруглити до стандартного (20,25,30.... 110мм).

Розв'язання. Через те, що епюра згинальних моментів М для балки побудована (рис.12,в), то скористаємося умовою міцності при згині за допустимими напруженнями (6.10). З епюри М знаходимо максимальне значення згинального моменту (по модулю) $M_{\max} = 40 \text{ кНм}$ і маємо:

$$W_{\text{net}} = \frac{M_{\text{max}}}{\sigma_{\text{adm}}} = \frac{40 \text{кНм}}{160 \text{МПа}} = \frac{40 \cdot 10^{-3} \text{МНм}}{160 \text{МПа}} = 0,25 \cdot 10^{-3} \text{м}^3 = 250 \text{см}^3$$

Для круга $W = \pi d^3 / 32$ тому $d = \sqrt[3]{32W / \pi} = \sqrt[3]{32 \cdot 250 / 3,14} = 13,66 \text{ (см)}$.

Таким чином $d = 140 \text{ мм}$, але це більше стандартного значення, тому зменшимо осьовий момент удвічі ($W_1 = W/2 = 125 \text{ см}^3$), тобто вважаємо що стержнів треба взяти два:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32W_1}{\pi}} = \sqrt[3]{32 \cdot 125 / 3,14} = 10,84 \text{ (см)}$$

остаточно $d = 110 \text{ мм}$. Таким чином балку треба виготовити з двох однакових сталевих стержнів ($d = 110 \text{ мм}$) розташованих поруч.

Відповідь: щоб забезпечити міцність балки (рис. 12) за напруженнями необхідно взяти два однакових сталевих стержні круглого перерізу діаметром по 110 мм.

Приклад 13. Для сталеві балки (рис. 13,а) необхідно:

- побудувати епюри Q , M та з умови міцності за нормальними напруженнями ($R = 210 \text{ МПа}$), підібрати розміри прямокутного поперечного перерізу ($h = 1,5$) і двотавра;

- з'ясувати шляхом порівняння площ цих перерізів який з них є раціональним. Розрахунок провести для нормативних навантажень $F^H = 33,33 \text{ кН}$, $M^H = 16,67 \text{ кНм}$, $q^H = 20 \text{ кН/м}$, якщо коефіцієнт перенавантаження $n = 1,2$, а коефіцієнт умов роботи балки $m = 1$.

Розв'язання. Перш за все визначимо розрахункове навантаження, що діє на балку: $F = F^H \cdot n = 33,33 \cdot 1,2 = 40 \text{ (кН)}$, $M = M^H \cdot n = 16,67 \cdot 1,2 = 20 \text{ (кНм)}$,

$q = q^H \cdot n = 20 \cdot 1,2 = 24 \text{ (кН/м)}$. Тепер визначимо опорні реакції. На балку діє тільки вертикальне навантаження, тому в опорах виникають лише вертикальні реакції V та R . Складемо рівняння рівноваги :

$$\Sigma m_A = 0; -M - F \cdot 1 - q \cdot 3(1,5 + 1) + R \cdot 4 = 0, \text{ звідси}$$

$$R = (M + F + 7,5 \cdot q) / 4 = (20 + 40 + 7,5 \cdot 24) / 4 = 60 \text{ (кН)};$$

$$\Sigma m_B = 0; -M + F \cdot 3 - q \cdot 3 \cdot 1,5 - V \cdot 4 = 0, \text{ звідси}$$

$$V = (-M + 3F + 4,5 \cdot q) / 4 = (-20 + 3 \cdot 40 + 4,5 \cdot 24) / 4 = 52 \text{ (кН)}.$$

$$\text{Перевірка: } \Sigma F_{jy} = V - F - q \cdot 3 + R = 52 - 40 - 72 + 60 = 0.$$

Реакції знайдено правильно.

Епюри Q та M побудуємо за характерними точками (перерізами), використовуючи контроль правильності побудови епюр. Ділимо балку на ділянки, їх три: консоль ліворуч, від опори A до місця прикладання сили F і від цієї сили до опори B . Для побудови епюри Q досить знайти два її значення на кожній ділянці:

$$Q_1 = Q_2 = 0; Q_3 = Q_4 - V = 52 \text{ кН} - \text{ починаємо від лівого кінця};$$

$$Q_5 = -R = -60 \text{ кН}; Q_6 = -R + q \cdot 3 = -60 + 72 = 12 \text{ кН} - \text{ починаємо від опори}$$

В.

На останній ділянці поперечна сила Q міняє знак з мінуса на плюс, тобто є переріз в якому $Q=0$:

$$Q = -R + qx = 0, \text{ звідси } x = R/q = 60/24 = 2.5(\text{м}).$$

В цьому перерізі згинальний момент M досягає екстремального значення.

Для побудови епюри M досить знати два значення згинального моменту на кожній ділянці, де відсутнє рівномірно розподілене навантаження q , і три його значення в разі наявності q :

$$M_1 = M_2 = M_3 = M = 20 \text{ кНм (розтягуються нижні волокна),}$$

$$M_4 = M + V \cdot 1 = 20 + 52 = 72 \text{ кНм (розтягуються нижні волокна),}$$

$$M_5 = 0 \text{- на опорі В не прикладено пари сил з моментом М;}$$

$$M_c = R \cdot 1.5 - q \cdot 1.5 \cdot 0.75 = 60 \cdot 1.5 - 24 \cdot 1.5 \cdot 0.75 = 63 \text{ кНм (розтягуються нижні волокна),}$$

$$M_6 = R \cdot 3 - q \cdot 3 \cdot 1.5 = 60 \cdot 3 - 24 \cdot 1.5 \cdot 3 = 72 \text{ кНм (розтягуються нижні волокна)}$$

$$M_K = R \cdot x - q \cdot x^2 / 2 = 60 \cdot 2.5 - 24 \cdot 2.5^2 / 2 = 75 \text{ кНм.}$$

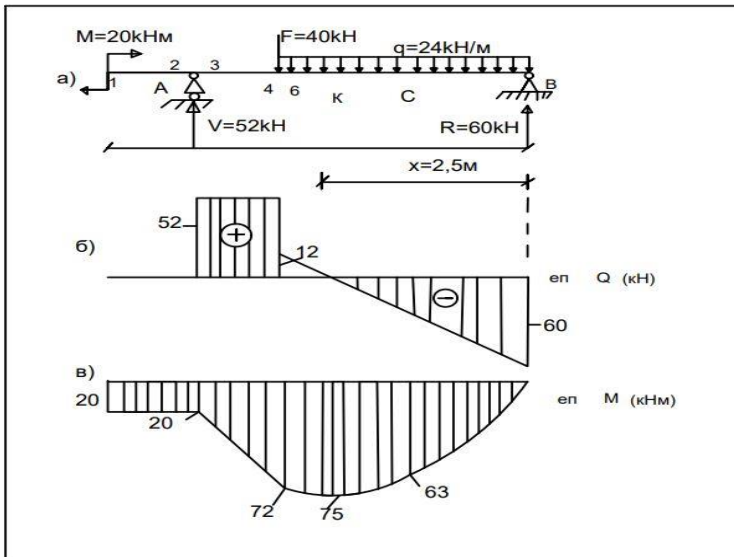


Рис. 13

Відповідно до розрахунків будемо епюру поперечних сил Q (рис. 13б) та епюру згинальних моментів M (рис. 13в).

Через те, що задано розрахунковий опір матеріалу R , то зробимо розрахунок на міцність за граничним станом, де $M_{\text{max}} = 75 \text{ кНм}$

(епюра М (рис. 13,в)). Тоді:

$$W_z = \frac{M_{max}}{mR} = \frac{75 \cdot 10^{-3} \text{ МНм}}{1 \cdot 210 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}} = 0,357 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 357 \text{ см}^3.$$

Ми обчислили величину необхідного осьового моменту опору перерізу, що дає змогу з таблиць сортаменту для двотавра вибрати двотавр №27, для якого $W=371 \text{ см}^3$.

З тих же таблиць з'ясуємо, що площа поперечного перерізу двотавра №27 дорівнює $40,2 \text{ см}^2$.

Визначаємо розміри прямокутника при $h/v=1,5$:

$$W_z = \frac{S_z}{\gamma_{max}} = \frac{bh^3}{12 \cdot h/2} = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(1.5b)^2}{6} = 0,375b^3 \text{ тоді}$$

$$b = \sqrt[3]{W_z/0,375} = \sqrt[3]{357/0,375} = 9,84 \text{ (см);}$$

$$h = 1,5b = 14,76 \text{ см; } A = bh = 9,84 \cdot 14,76 = 145,2 \text{ см}^2$$

Як бачимо площа прямокутного перерізу набагато більша ($145,2 > 40,2$) площі двотавра при однакових умовах роботи балки, тому раціональним є двотавровий переріз: сталі для виготовлення балки буде використано менше, що економічно вигідно.

3. Література

1. Павловський М. А. Теоретична механіка. К. : Техніка, 2002 512 с.
2. Цасюк В. В. Теоретична механіка : навчальний посібник. Київ : Центр навчальної літератури, 2004. 402 с.
3. Стрілець В. М., Войтович Л. В., Стрілець О. Р. Технічна механіка : навч. посібник. Рівне : НУВГП, 2015. 363 с.
4. Практикум з теоретичної механіки Частина 1 «Статика. Кінематика» : навч. посіб. / Багнюк Г. А., Галанзовська М. Р., Наконечний В.В., Серілко Л.С. Рівне : НУВГП, 2014. 162 с.
5. Хижняков О. В. Основи теоретичної механіки в прикладах та задачах. Кінематика. Статика : навч. посібник. Рівне : НУВГП, 2005. 284 с.