Міністерство освіти і науки України

Національний університет водного господарства та природокористування

Кафедра теоретичної механіки, інженерної графіки та машинознавства

02-05-164М

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять та виконання самостійної роботи з навчальної дисципліни «Технічна механіка (розділ «динаміка»)»

для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою «Агроінженерія», спеціальності 208 «Агроінженерія», денної й заочної форм навчання

Рекомендовано науково-методичною радою
з якості ННМІ
Протокол № 4 від 31.12.2024 р.

Рівне – 2025

Методичні вказівки до практичних занять та виконання самостійної роботи з навчальної дисципліни «Технічна механіка (розділ «динаміка»)» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою «Агроінженерія», спеціальності 208 «Агроінженерія», денної й заочної форм навчання [Електронне видання] / Серілко Л. С., Войтович Л. В. – Рівне : НУВГП. 2025. – 36 с.

Укладачі:
Серілко Л. С., к.т.н., доцент кафедри теоретичної механіки, інженерної графіки та машинознавства;
Войтович Л. В., к.т.н., старший викладач кафедри теоретичної механіки, інженерної графіки та машинознавства.

Відповідальний за випуск: Козяр М. М., д.п.н., професор, завідувач кафедри теоретичної механіки, інженерної графіки та машинознавства.

Керівник групи забезпечення спеціальності
208 «Агроінженерія» Бундза О. З.

Попередня версія методичних вказівок 02-05-42, 02-05-22

1. ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ВИБІР ВАРІАНТА

Динаміка – це найбільш важливий та складний розділ курсу технічної механіки. Важливість цього розділу полягає в тому, що більша частина практичних інженерних задач відноситься саме до динаміки. В цьому розділі ми знайомимось з основними ідеями та методами механіки, осягаємо суть цієї науки та її роль в вивченні оточуючого нас світу. Вивчення динаміки, як і інших наук про природу, сприяє формуванню правильного світогляду.

Складність вивчення динаміки студентами пояснюється тим, що динаміка ґрунтується на міцних знаннях статики, кінематики, фізики та математики (необхідно вміти визначати похідні й інтеграли, знати частинні похідні та повні диференціали від функцій кількох змінних, вміти інтегрувати диференціальні рівняння другого порядку з відокремлюваними змінними);

- динамічні задачі дуже різноманітні і методи їх розв’язання не підпорядковані єдиному стандарту; тому потрібна навичка, певний інженерний кругозір, вміння аналізувати механічну та математичну суть розглядуваних задач, а це дається не відразу, а лише шляхом самостійного розв’язання великої кількості задач.

Різноманітність схем та вихідних даних забезпечує кожного студента індивідуальним завданням.

Номери завдань, які входять до самостійної роботи з динаміки, повідомляє на початку семестру лектор.

Вибір варіанта (номер схеми та номер рядка) відбувається за допомогою:

- числа N (порядковий номер в журналі викладача на початок семестру);
- числа C: C = N, якщо $N \le 15$;
  C = N – 15, якщо N > 15;
- числа R1, яке визначається за таблицею 1.1.

В умові кожного завдання та відповідній йому таблиці є необхідні вказівки щодо використання N, C, R1.

Наприклад, студент навчається в третій групі і його прізвище Омельченко І. К. в журналі викладача записано числом 19. Маємо N = 19, C = 4 (N >15), R1 = 8.

Таблиця 1.1

Список групи в журналі (число **N**)	1 група	2 група
	ЧИСЛО **R1**	
1, 11, 21	0	8
2, 12, 22	9	7
3, 13, 23	8	6
4, 14, 24	7	5
5, 15, 25	6	4
6, 16, 26	5	3
7, 17, 27	4	2
8, 18, 28	3	1
9, 19, 29	2	0
10, 20, 30	1	9

Самостійні роботи належним чином оформляються. Розв'язок завдання повинен містити назву, умову, розрахункову схему, викладки розв'язання з короткими поясненнями та виділені відповіді.

2. ЗАВДАННЯ

2.1. Завдання 1. **Обернена задача динаміки точки**

Кулька М масою m отримала в точці О початкову швидкість V_0 і рухається по жолобу ОАВ, який вона залишає в точці В зі швидкістю V_B та через T секунд вільного падіння опиняється в точці С (на схемах рис.2.1 показані розрізи в вертикальній площині).

На гладенькій ділянці ОА = S крім власної ваги на кулю діє постійна сила $\boldsymbol{Q}$ та сила опору середовища $\boldsymbol{R}$. Час руху від точки О до точки А – τ секунд, $\alpha = 30^o$.

В точці А куля, не міняючи своєї швидкості, переходить на шорстку ділянку АВ (коефіцієнт тертя ковзання f = 0,2) і продовжує рухається під дією змінної сили F, яка напрямлена в бік руху паралельно осі X_1. Час руху від точки А до точки В – $\tau_1 = 2$ секунди.

Визначити швидкість кулі в точках А,В,С, час Т та h або d (знак „ ? ” в

табл. 2.1). Вихідні дані для розрахунку наведені в табл. 2.1; номер схеми відповідає числу R1.

Таблиця 2.1

Ряддок C	m	V_0	Q	R	F	τ	S	h = ВД	d = СД
	кг	м/с	Н			с	м		
0	2,0	20	5	$0{,}5V^2$	$2t^2 + 4$	–	4,0	?	9
1	3,0	20	8	0,3 V	$e^{2,5t} - 1$	2,0	–	5	?
2	4,0	10	12	$0{,}2\ V^2$	-6 sin(3t)	–	4	?	7
3	3,0	20	8	0,6 V	$4t^2 + 2$	2,0	–	6	?
4	8,0	10	16	$0{,}5\ V^2$	6 sin(3t)	–	4	?	4
5	4,0	24	3	0,2 V	4t + 6	3,5	–	10	?
6	2,0	12	6	$0{,}8\ V^2$	6t + 2	–	1,5	6	?
7	3,0	18	6	0,3 V	$3t^2 - t + 2$	2,0	–	8	?
8	5,0	12	10	$0{,}4\ V^2$	4t + 8	–	3,0	5	?
9	2,0	20	3	0,2 V	2 sin(3t)	2,5	–	8	?
10	3,0	14	10	$0{,}5\ V^2$	$2e^{1,5t} + 1$	–	3,0	?	8
11	1,0	20	6	0,3 V	$3t^2 + 2$	2,0	–	6	?
12	6,0	14	22	$0{,}6\ V^2$	3 cos(4t)	–	5	?	8
13	1,0	18	2	0,3 V	cos(4t)	2,0	–	7	?
14	7,0	10	12	$0{,}7\ V^2$	$16t^2 + 8$	–	4,5	?	5
15	4,0	28	6	0,4 V	2 cos(2t)	3,0	–	8	?

Вказівки: а) розв'язати обернену задачу динаміки точки, для чого послідовно розглянути рух кульки на ділянках ОА, АВ та ВС, кожний раз вибираючи свої осі координат;
б) при обчисленнях cos(kt) або sin(kt) пам'ятати, що аргумент kt вимірюється в радіанах.

Примітка: задачу за вказівкою викладача можна спростити, поклавши нулю силу R (визначити ті самі величини що і в основному завданні) або обмежитись розв'язанням на перших двох ділянках ОА та АВ, визначивши закон руху $X_1 = f(t)$ на ділянці АВ.

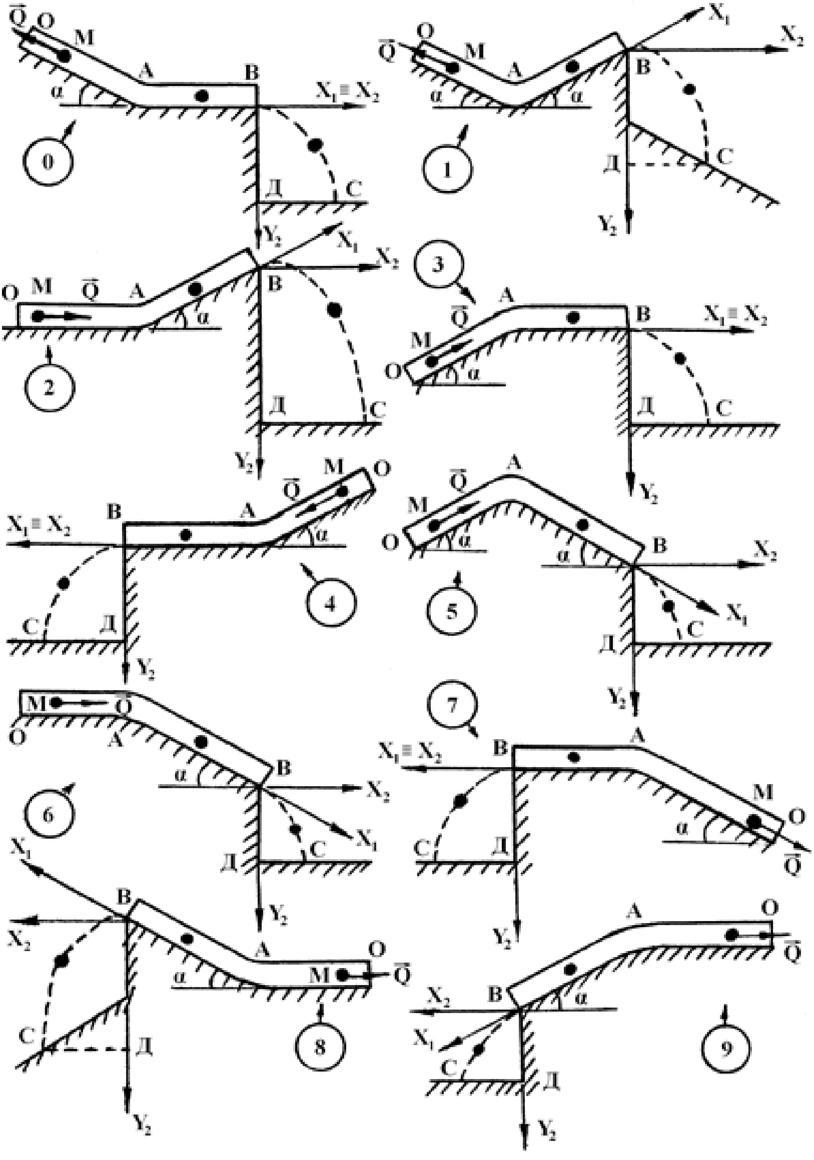

Рис. 2.1

2.2. Завдання 2. **Дослідження руху механічної системи**

Вантажі В та Д одночасно почали рухатись по поверхні нерухомої в по-чатковий момент часу гладенької призми А в напрямках, що вказані на рис.2.2, у відповідності з законом S = S(t). Призма А розташована на гладенькій горизонтальній поверхні. Нехтуючи масою блоків (якщо вони є) та силами опору руху, визначити для моменту часу $t = t_1$ зміщення призми А, її швидкість та силу сумарного тиску призми А на горизонтальну поверхню.

Вихідні дані для розрахунку взяти з табл.2.2 (рядок R1), номер схеми на рис.2.2 відповідає числу С.

Вказівка: при розв'язанні використати теореми про зміну кількості руху механічної системи та про рух її центра мас або одну з них.

Таблиця 2.2

Рядок R1	m_A	m_B	$m_Д$	α	S = S(t)	t_1
	кг			град	м	с
0	400	90	40	45	e^k, де $k = t^2$	1/3
1	140	80	70	30	$t(t + \pi/2)$	1/2
2	220	100	50	60	$\cos(\pi t/4)$	1
3	150	120	40	30	$\sin(\pi t)$	1/3
4	260	180	30	45	$2t^3$	1/2
5	250	150	55	60	$t^3 + t^2$	1/3
6	240	135	60	30	$e^t + e^{-t}$	1/3
7	200	80	45	30	$2t^2$	1/4
8	190	70	80	60	$tg(t) - 1$	π/4
9	210	110	60	45	$0{,}5\cos(\pi t/4)$	4/3

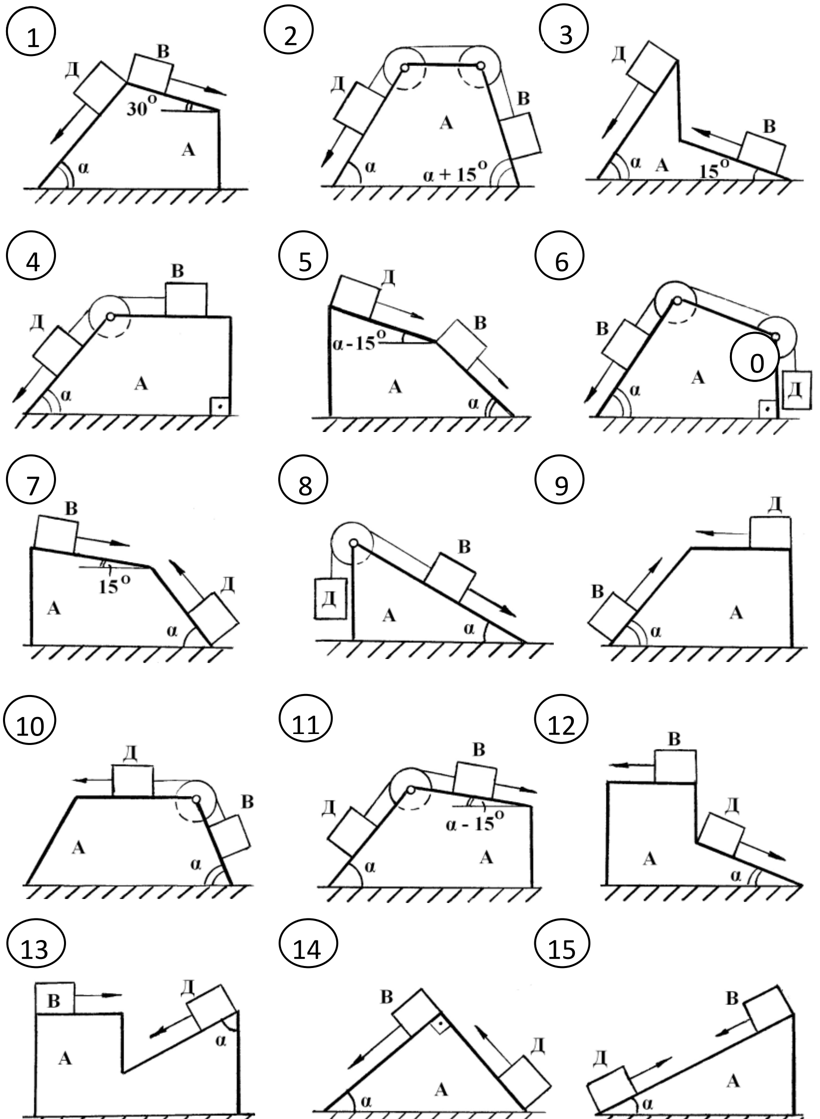
1
Д
В
30°
А
α
2
Д
В
А
α
α + 15°
3
Д
В
α
А
15°
4
В
Д
А
α
5
Д
В
α - 15°
А
α
6
В
0
А
Д
α
7
В
15°
А
Д
α
8
В
Д
А
α
9
Д
В
А
α
10
Д
В
А
α
11
В
Д
α - 15°
А
α
12
В
Д
А
α
13
В
Д
А
α
14
В
Д
А
α
15
В
Д
А
α

Рис. 2.2

2.3. Завдання 3. **Вивчення руху механічної системи за допомогою теореми про зміну кінетичної енергії**

Механічна система (рис.2.3) під дією сили $\boldsymbol{F}$ або пари сил $\boldsymbol{M_1}$ починає рухатись зі стану спокою. Нехтуючи тертям та вважаючи нитки нерозтяжними і невагомими, визначити швидкість та прискорення точки, до якої прикладена сила $\boldsymbol{F}$, в той момент часу, коли ця точка пройде шлях S (для схем 2,20,28 визначити V_A , a_A коли S_A = S).

В табл.2.3 вказані форма тіла В та радіус інерції $i_{ДZ}$ для тіла Д. Для всіх схем, якщо необхідно, покласти $\alpha = 30^o$, $m_A = m$, $r_Д = R$, $M = mgR$, $M_1 = FR$; m та R вважати заданими (m - в кг, R - в метрах).

Дані для розрахунку взяти з табл.2.3 - рядок R1 , а номер схеми на рис. 2.3 відповідає числу N.

Таблиця 2.3

Ряд R1	$\frac{m_B}{m}$	$\frac{m_Д}{m}$	$\frac{R_Д}{R}$	$\frac{R_B}{R}$	$\frac{i_{ДZ}}{R}$	S, м	$\frac{F}{mg}$	Форма тіла B*	Ряд R1	$\frac{m_B}{m}$	$\frac{m_Д}{m}$	$\frac{R_Д}{R}$	$\frac{R_B}{R}$	$\frac{i_{ДZ}}{R}$	S, м	$\frac{F}{mg}$	Форма тіла B*
0	1,5	2	3	2	2	1,5	3,4	диск	5	1,5	2,5	2	1	1	1,8	2,5	цил-р
1	1	3	3	1	1,5	2,0	3	цил-р	6	1	1,5	4	2	3	2,0	3,6	кільце
2	3	1,5	2	1	1	2,5	4	кільце	7	0,8	2	3	1,5	2	2,8	4	диск
3	2	1	3	2	2	2,2	5	диск	8	2	3,5	2	2	1	1,5	3,0	кільце
4	1,5	3	2	2	1,5	2,5	3,2	кільце	9	2	4	3	2	1,5	3,0	3,8	цил-р

* „диск” - тонкий однорідний; „циліндр” - круговий однорідний; „кільце”- маса тіла В рівномірно розподілена по його ободу.

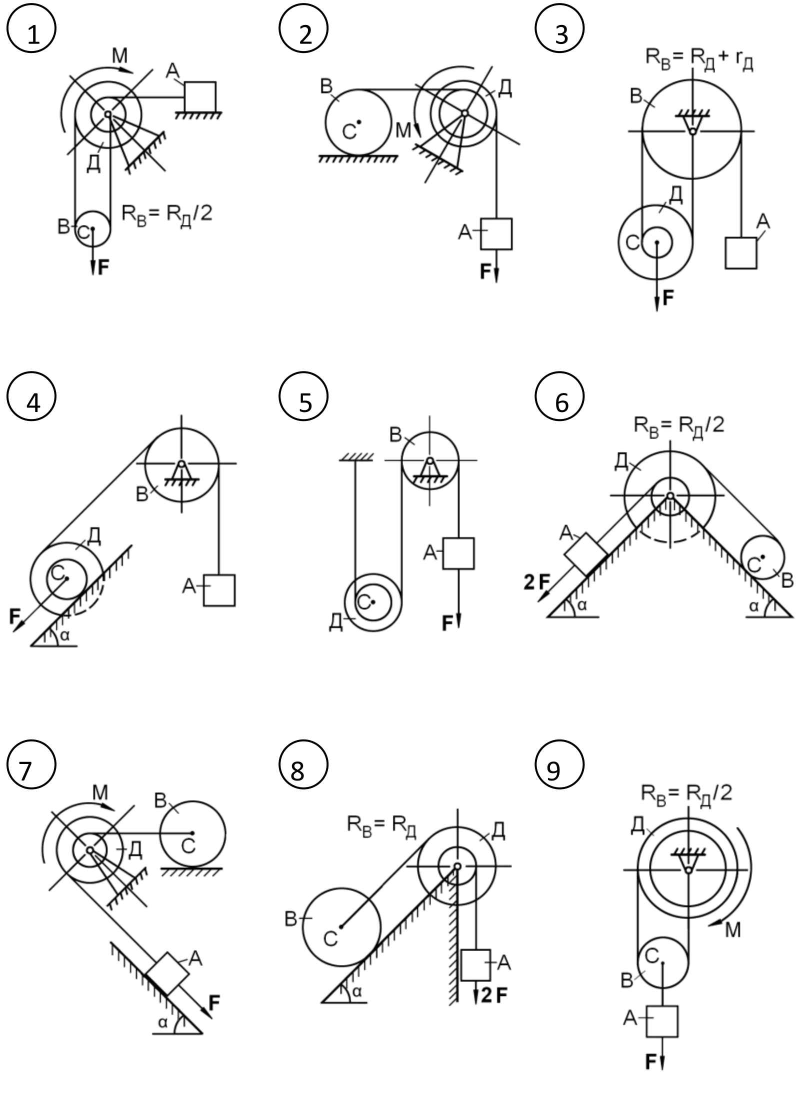
1
M
A
Д
B
C
F
$R_B = R_Д/2$
2
B
C
M
Д
A
F
3
$R_B = R_Д + r_Д$
B
Д
C
A
F
4
B
Д
C
F
α
A
5
B
A
C
Д
F
6
$R_B = R_Д/2$
Д
A
2 F
α
C
B
α
7
M
B
Д
C
A
F
α
8
$R_B = R_Д$
Д
B
C
α
A
2 F
9
$R_B = R_Д/2$
Д
M
C
B
A
F

Рис. 2.3

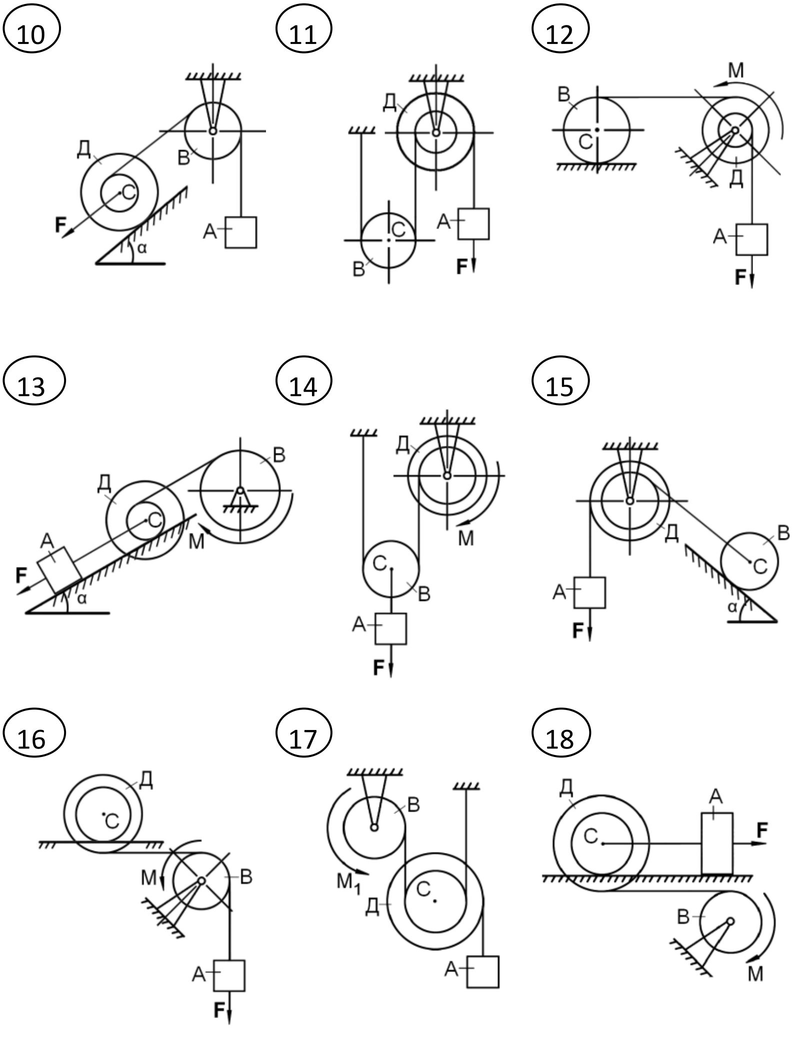

Рис. 2.3 (продовження)

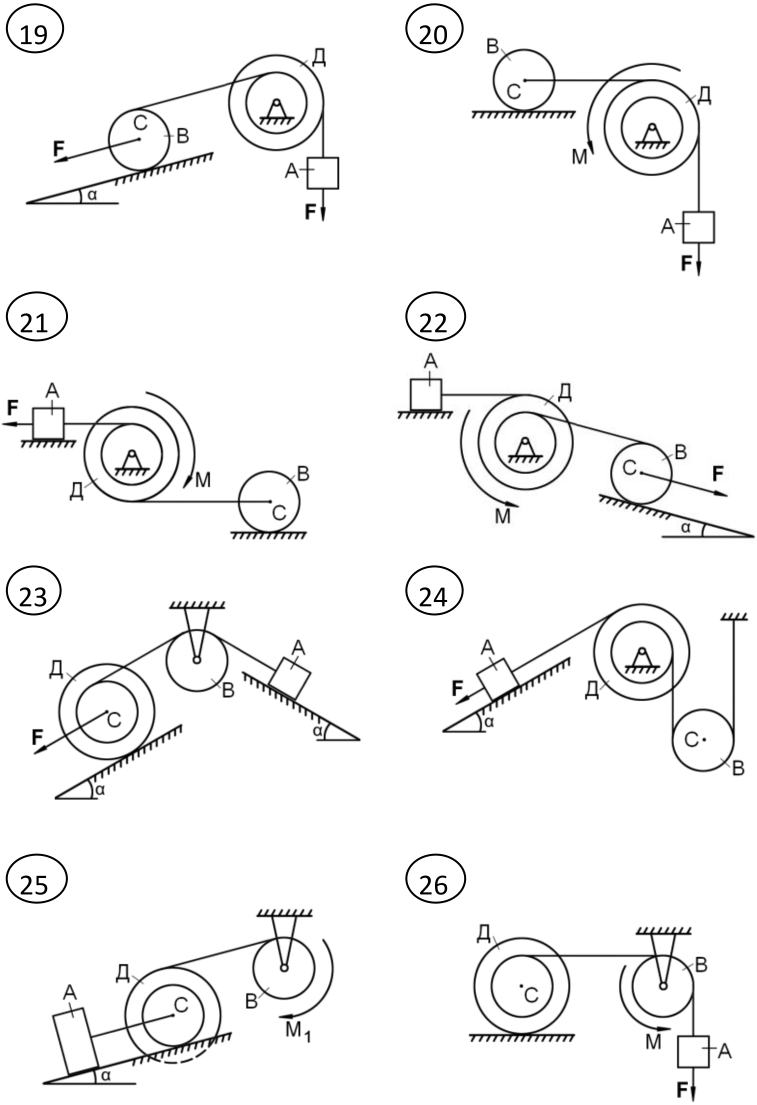

Рис. 2.3 (продовження)

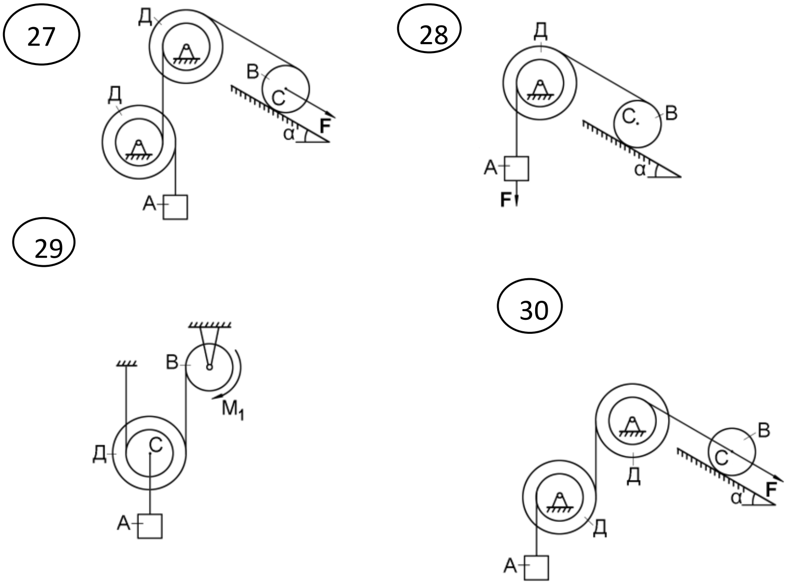

Рис. 2.3 (продовження)

2.4. Завдання 4. **Дослідження руху механічної системи за допомогою загального рівняння динаміки та принципа Даламбера**

Використовуючи загальне рівняння динаміки, перевірити розв’язок завдання № 3. Визначити також натяги двох ниток системи.

Примітка: можна замість загального рівняння динаміки використати принцип Даламбера для механічної системи.

Вказівки до самостійної роботи

Вивчення кожної теми доцільно проводити в такій послідовності: спочатку вивчити теоретичну частину курсу по конспекту та одному з рекомендованих підручників [1-2], пам’ятаючи, що головне – це зрозуміти, а не „завчити”; потім розібратися у розв’язаннях прикладів в конспекті та підручнику, звернувши особливу увагу на методичні вказівки по їх розв’язанню. Якщо виникають труднощі з відповідями, то необхідно знову вернутися до конспекту та підручника й розібратися у відповідному матеріалі.

У випадку труднощів в розумінні якого-небудь питання необхідно звернутися на кафедру за консультацією: відповіді можна отримати лише на конкретні питання як з теорії, так і по розв’язанню задач.

Слід зазначити, що велику допомогу в розв’язанні задач нададуть студентам навчальні посібники [3].

3. ДВІ ОСНОВНІ ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ ТОЧКИ

Перш ніж виконати завдання 1 на цю тему, необхідно ознайомитись [1,2] з основними поняттями, визначеннями та законами динаміки, чітко з’ясувати постановку та шляхи розв’язання двох основних (прямої та оберненої) задач динаміки точки за допомогою диференціальних рівнянь руху вільної матеріальної точки в декартових (3.1) або натуральних (3.2) координатах:

$$m\ddot{x}=\sum F_{kx},\quad m\ddot{y}=\sum F_{ky},\quad m\ddot{z}=\sum F_{kz}, \tag{3.1}$$

$$m\frac{dV}{dt}=\sum F_{k\tau},\quad m\frac{V^2}{\rho}=\sum F_{kn},\quad 0=\sum F_{kb}. \tag{3.2}$$

Рівняннями (3.2) зручно користуватись, коли точка рухається по кривій, наприклад, по колу.

При дослідженні руху невільної матеріальної точки ми повинні будемо в число діючих сил включити також і реакції в’язей.

Для розв’язування другої (оберненої) задачі динаміки точки необхідно повторити з вищої математики розв’язання диференціальних рівнянь другого порядку. Кожне з рівнянь (3.1) при необхідності можна замінити двома рівняннями першого порядку:

$$m\dot{V}_x=\sum F_{kx},\quad V_x=\dot{x},\quad (x\to y\to z). \tag{3.3}$$

В тих випадках, коли при розв’язанні задачі треба шукати залежність швидкості від координати, наприклад x, а не часу t (або коли самі сили залежать від x), то рівняння (3.3) перетворюють заміною $\frac{dV_x}{dt} = \frac{dV_x}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = V_x \frac{dV_x}{dx}$ до змінної x:

$$mV_x \frac{dV_x}{dx} = \sum F_{kx} . \tag{3.4}$$

Розв’язання оберненої задачі динаміки точки в загальному випадку зводиться до того, щоб з рівнянь (3.1), знаючи сили, знайти закон руху точки. Для цього необхідно проінтегрувати двічі кожне з рівнянь, а сталі інтегрування (в кожне з рівнянь ввійде їх по дві) знайти з початкових умов руху:

при t □ t_0 $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ (положення точки),

$\dot{x} = \dot{x}_0$, $\dot{y} = \dot{y}_0$, $\dot{z} = \dot{z}_0$ (швидкість точки).

Якщо рух точки відбувається в площині, то рівнянь (3.1) треба розглядати два; якщо ж точка рухається по прямій, то досить розглянути одне з рівнянь (3.1).

Обернена задача динаміки матеріальної точки розв’язується за певною методикою, етапи якої можна сформулювати так:

- ✓ виділяємо матеріальну точку, рух якої вивчається;
- ✓ задаємо спосіб визначення руху точки (координатний або натуральний), вибираємо систему координат;
- ✓ зображаємо точку в поточний момент часу;
- ✓ показуємо сили, що діють на неї;
- ✓ складаємо диференціальні рівняння руху точки (при потребі робимо відповідні заміни (3.3) або (3.4));
- ✓ інтегруємо кожне з рівнянь;
- ✓ з’ясовуємо початкові умови руху точки (3.5), (3.6) з умови задачі та схеми і записуємо їх: кількість початкових умов повинна дорівнювати кількості сталих інтегрування;
- ✓ визначаємо сталі інтегрування з початкових умов руху та підставляємо їх в рівняння;
- ✓ розв’язуємо рівняння і досліджуємо отриманий результат.

Методичні вказівки до виконання завдання 1. Через те, що на окремих ділянках руху точки на неї діють різні сили, то для кожної ділянки складаються свої диференціальні рівняння руху, *початковими умовами для кожної ділянки є кінцеве положення та кінцева швидкість точки на попередній ділянці*. Таким чином послідовно розглядаємо рух на ділянках *OA*, *AB* та *BC*, кожний раз вибираючи свої осі координат та складаючи свої диференціальні рівняння руху точки.

Приклад 1.1. Тіло, падаючи в басейн з деякої висоти, досягає його поверхні зі швидкістю V_0. При русі в воді сила опору руху тіла дорівнює $R = 0.2mV^2$, де m – маса тіла, V – його швидкість. Визначити V_0, якщо тіло досягає дна басейну зі швидкістю $V_A = 8 м/с$, глибина якого $h = 5 м$.

Розв'язання. Приймемо тіло за матеріальну точку і розглянемо її рух уздовж вертикалі (рис.1.1). За початок координат приймемо початкове положення тіла на поверхні води, вісь x напрямляємо в бік його руху. Зображаємо точку в поточний момент часу (рис. 1.1) і показуємо сили, що діють на неї під час руху: силу тяжіння $\boldsymbol{P}$ та силу опору $\boldsymbol{R}$. Записуємо диференціальне рівняння руху точки:

$$m\ddot{x} = P - R.$$

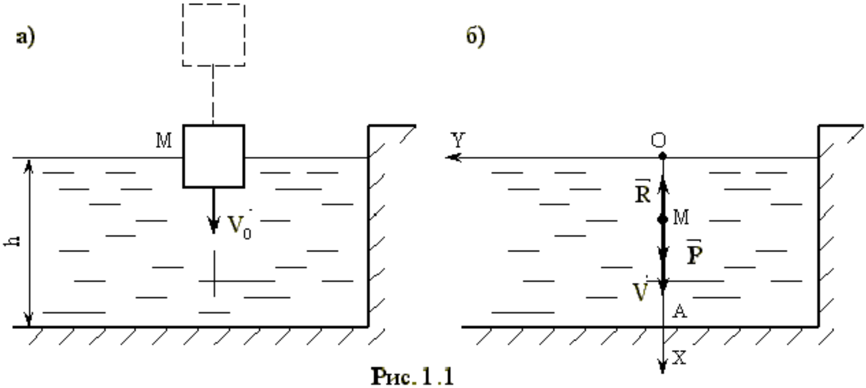

Рис. 1.1

В зв'язку з тим, що ми шукаємо швидкість тіла, коли воно досягає дна басейну, глибина якого відома, робимо заміну змінної t на x (1.4):

$$mV\frac{dV}{dx} = m\left(g - 0.2V^2\right), \Rightarrow V\frac{dV}{dx} = -0.2\left(V^2 - 5g\right).$$

Розділяємо змінні та інтегруємо отримане рівняння:

$$\frac{VdV}{V^2 - 5g} = -0.2dx, \Rightarrow \int \frac{2VdV}{V^2 - 5g} = -\int 0.4dx.$$

Звідки:

$$\ln\left(V^2 - 5g\right) = -0.4x + C.$$

Сталу інтегрування C визначаємо з початкових умов руху (в даному випадку відомі положення і швидкість тіла на дні басейну):

при $x = h$, $V = V_A$, тоді $C = 0.4h + \ln\left(V_A^2 - 5g\right)$.

Рівняння руху точки (1.9) приймає вид:

$$\ln\left(V^2-5g\right)-\ln\left(V_A^2-5g\right)=0.4(h-x),\Rightarrow \ln\frac{V^2-5g}{V_A^2-5g}=0.4(h-x),$$

або
$$\frac{V^2-5g}{V_A^2-5g}=e^{0.4(h-x)},\Rightarrow V^2=5g+\left(V_A^2-5g\right)e^{0.4(h-x)}.$$

Коли тіло досягає поверхні води (x = 0, V = V_0), для V_0 отримуємо:

$$V_0=\sqrt{5g+\left(V_A^2-5g\right)e^{0.4h}}=$$
$$=\sqrt{5\cdot 9.81+\left(8^2-5\cdot 9.81\right)\cdot e^2}=12.6\ м/с.$$

Відповідь: тіло занурюється у воду зі швидкістю V_0 = 12.6 *м/с*.

Приклад 1.2. Автомобіль масою 1000 *кг* рухається вниз по прямолінійній ділянці шляху нахиленій до горизонту під кутом $\alpha = 10°$ і в деякий момент часу досяг швидкості 72 *км/год*. В цей момент двигун авто вимкнули і надали йому можливість рухатись по інерції. Яку швидкість матиме автомобіль через 10 *с* і яку віддаль він пройде за цей час, якщо опір руху щосекунди зростає на 180 *Н* (R = 180*t*) та коефіцієнт *f* постійного тертя ковзання дорівнює 0,05?

Розв'язання. Оскільки рух автомобіля поступальний, то розглядаємо його як матеріальну точку, зосередивши всю його масу в центрі ваги. Зображаємо точку в поточний момент часу (рис. 1.2). На неї діють сила ваги ***P***, нормальна реакція ***N*** поверхні, по якій рухається точка, сила тертя $\boldsymbol{F_{тр}}$ та сила опору ***R***.

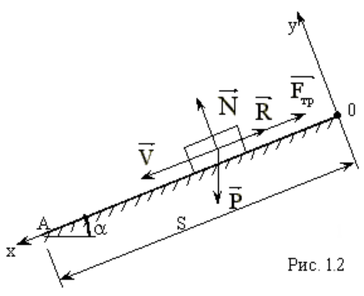

Рис. 1.2

Напрямляємо вісь *Ox* уздовж поверхні руху в бік руху. Запишемо одне диференціальне рівняння руху точки (1.1) уздовж осі X:

$$m\ddot{x}=P\sin\alpha-F_{TP}-R$$ або

$$m\ddot{x}=-0.5mg-180t+mg\ \sin\alpha \qquad (1.12)$$

Поділимо обидві частини рівняння на m і отримаємо

$$\ddot{x}=-0{,}18t+0{,}124g. \qquad (1.13)$$

Проінтегруємо двічі рівняння (1.13)

$$\dot{x}=-0{,}09t^2+0{,}124gdt+C_1, \qquad (1.14)$$

$$x = -0{,}03t3 + 0{,}062gt2 + C_1t + C_2 . \qquad (1.15)$$

Для визначення постійних інтегрування запишемо початкові умови задачі:

П.У. при $t = 0 \quad x = x_0 = 0$, $\dot{x} = V_x = V_0 = 72 км/год = 20 м/с$. (1.16)

Підставляючи в рівняння (1.14, 1.15) значення **t = 0** і порівнюючи з (1.16), отримаємо, що $C_1 = V_0$, $C_2 = 0$. Підставляємо ці значення в (1.14, 1.15) і маємо для будь-якого моменту часу

$$\dot{x} = -0{,}09t^2 + 0{,}124gt + V_0 , \qquad (1.17)$$

$$x = -0{,}03t3 + 0{,}062gt2 + V_0t . \qquad (1.18)$$

Для отримання відповіді підставимо в рівняння (1.17, 1.18) t = T = 10с , тоді $x = S$, $\dot{x} = V_A$:

$V_A = -0{,}09T2 + 0{,}124gT + V_0 = -0{,}09 . 100 + 0{,}124 . 9{,}8 . 10 + 20 = 23{,}15$ (м/с);

$S = -0{,}03T3 + 0{,}062gT2 + V_0T = -0{,}03 . 1000 + 0{,}062 . 9{,}8 . 100 + 20 . 10 = 176{,}08$(м).

Відповідь: через 10 сек швидкість машини збільшиться з 20 м/с до 23,15 м/с і за цей час машина подолає відстань в 176,08 метра.

Приклад 1.3. З сопла дощувальної установки струмінь води б’є під кутом $\alpha = 37°$ до горизонту зі швидкістю $V_0 = 27$*м/с*. Визначити, на якій висоті *H* розташоване сопло над землею і дальність польоту краплин води, якщо вони знаходиться в повітрі 3.35 *с* (опором повітря знехтувати). Визначити також швидкість краплин біля поверхні землі.

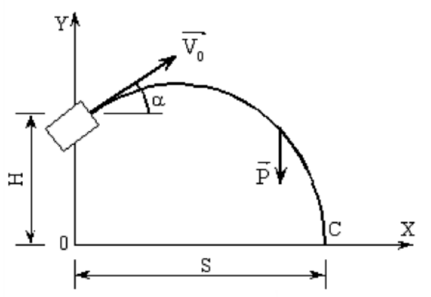

Рис. 1.3

Розв’язання. Розглянемо рух краплі води, яку приймемо за матеріальну точку. На краплю діє лише постійна сила тяжіння $\vec{P}$ (опором повітря нехтуємо).

Вибір осей координат показано на рис.1.3. Для визначення шуканої величини складаємо два диференціальних рівняння з (3.1), бо рух відбувається в площині XOY:

$$m\ddot{x} = \sum F_{jx}\text{, де } \sum F_{jx} = 0\text{ ,}$$
$$m\ddot{y} = \sum F_{jy}\text{, де } \sum F_{jy} = -P = -mg$$

або

$$dV_X/dt = 0\text{ , } V_X = dx/dt\text{ ,}$$
$$dV_Y/dt = -g\text{ , } V_Y = dy/dt. \qquad (1.19)$$

Проінтегруємо отримані рівняння (1.19), кожний раз попередньо відокремлюючи змінні:

$$V_X = C_1\text{ , } V_Y = -gt + C_3\text{ ,}$$
$$x = C_1 t + C_2\text{ , } y = -gt2/2 + C_3 t + C_4\text{ .} \qquad (1.20)$$

Для визначення постійних інтегрування C_1, C_2, C_3 та C_4 запишемо початкові умови задачі, керуючись текстом задачі та рис. 1.3:

П.У. при $t = 0$: $\dot{x} = V_{X0} = V_0\cos\alpha$, $x = x_0 = 0$,

$$\dot{y} = V_{Y0} = V_0\sin\alpha\text{ , } y = y_0 = H\text{ .} \qquad (1.21)$$

Підставляючи в рівняння (1.20) t = 0 і враховуючи П.У. (1.21), маємо:

$$C_1 = V_0\cos\alpha\text{, } C_2 = 0\text{ , } C_3 = V_0\sin\alpha\text{ , } C_4 = H\text{ .}$$

Тепер рівняння (1.20) набувають остаточного вигляду:

$$V_X = V_0\cos\alpha\text{ , } V_Y = -gt + V_0\sin\alpha\text{ ,} \qquad (1.22)$$
$$x = V_0 t\cos\alpha\text{ , } y = -gt2/2 + V_0 t\sin\alpha + H\text{ .} \qquad (1.23)$$

В той момент, коли крапля води досягає точки **C** (рис. 1.3), маємо:

$$t = T\text{ , } x = S\text{ , } y = 0\text{ .}$$

Враховуючи це, з (1.23) отримуємо:

$$S = V_0 T\cos\alpha\text{ , } 0 = -gT2/2 + V_0 T\sin\alpha + H\text{ ,}$$

звідси знаходимо дальність польоту краплі води

$$S = V_0\cos\alpha\,.T = 27\,.\,0{,}8\,.\,3{,}35 = 72{,}36\text{ (м)}$$

та висоту розташування сопла

$$H = gT2/2 - V_0 T\sin\alpha = 4{,}9\,.\,3{,}352 - 27\,.\,0{,}60\,.\,3{,}35 = 0{,}73$$
(м) .

Для визначення швидкості в точці **C** (рис. 1.3) використаємо рівняння (1.22) при t=T=3,35c:

$$V_C = \sqrt{V_{CX}{}^2 + V_{CY}{}^2} = \sqrt{(V_0\cos\alpha)^2 + (-gT + V_0\sin\alpha)^2} = 27{,}26$$
(м/с).

Відповідь: $S = 72{,}36$ м, $H = 0{,}73$ м, $V_C = 27{,}26$ м/с.

4.ТЕОРЕМИ ПРО ЗМІНУ КІЛЬКОСТІ РУХУ ТА ПРО РУХ ЦЕНТРА МАС МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

Для виконання завдання 2 необхідно з'ясувати, що називають механічною системою; які дві класифікації сил, що діють на неї, використовують в курсі теоретичної механіки; що називають центром мас і кількістю руху системи; потім вивчають теореми про рух центра мас системи (4.1) та про зміну кількості руху системи (4.2):

$$M\overrightarrow{a_C} = \sum \overrightarrow{F_j^e} \qquad (4.1); \qquad\qquad d\vec{K}/dt = \sum \overrightarrow{F_j^e} \qquad (4.2)$$

Особливо треба звернути увагу на те, що це є по суті дві сторони однієї і тієї ж теореми ($\vec{K} = M\overrightarrow{V_C}$), що в обох теоремах враховуються дії тільки зовнішніх сил $\overrightarrow{F_j^e}$ (дуже важливий факт при розв'язанні задач) і що при $\sum \overrightarrow{F_j^e} = 0$ мають місце закони збереження для кожної теореми відповідно: $\overrightarrow{V_C} = \text{const}$ для (4.1) та $\vec{K} = \text{const}$ для (4.2).

Розв'язання задач за допомогою теорем про рух центра мас (4.1) або про зміну кількості руху системи (4.2) рекомендується вести в такій послідовності:

- ✓ визначити, які тіла входять в систему, рух якої вивчається;
- ✓ вибрати умовно нерухому систему координат і зобразити систему в поточний момент часу;
- ✓ показати зовнішні сили, що діють на систему;
- ✓ записати теорему (4.1) або (4.2) в проекціях на осі координат;
- ✓ проінтегрувати отримані диференціальні рівняння;
- ✓ скласти початкові умови задачі;
- ✓ визначити сталі інтегрування у відповідності з початковими умовами і підставити їх в результат інтегрування;
- ✓ з отриманих рівнянь отримати невідомі величини.

Приклад 2.1. На горизонтальній платформі *А* встановлено похилу площину, яка утворює з горизонтом кут $\alpha = 60°$ (рис. 4.1). По цій похилій площині за допомогою лебідки піднімається вантаж В масою 50 кг. Маса платформи і лебідки 200 кг. Після включення лебідки її барабан (R=0,25 м) обертається з кутовою швидкістю $\omega = 2t$ c-1. В початковий момент часу вся система знаходилась в стані покою.

Визначити швидкість з якою буде рухатись платформа **А** через 2 секунди після початку руху, величину переміщення її на цей момент часу та сумарний тиск платформи на рейки. Опором руху знехтувати.

Розв'язання. Для визначення швидкості руху платформи **А** запишемо теорему про зміну кількості руху механічної системи в проекції на вісь **X**:

$$dK_X/dt = \Sigma F_{jx}e \; . \qquad (2.3)$$

Вважаємо, що платформа рухається праворуч. В нашому випадку система складається з платформи **А**, лебідки та вантажу **В**; зовнішніми силами, прикладеними до цієї системи є вага платформи $\overrightarrow{P_A}$, вага вантажу $\overrightarrow{P_B}$ та нормальні реакції $\overrightarrow{N_1}$ та $\overrightarrow{N_2}$ рейок. З рис. 2.1 видно, що всі зовнішні сили перпендикулярні осі X, тобто $\Sigma F_{jx}e = 0$, тоді з (2.3) отримуємо закон збереження проекції кількості руху системи $K_X = const$, тобто $K_{X0} = K_X$.

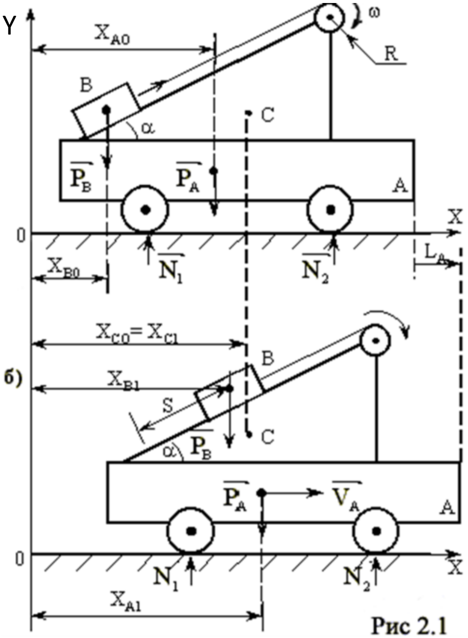

Рис 2.1

В початковий момент часу система знаходилась в стані спокою, тому $K_{X0} = 0$. Обчислимо K_X:

$K_X = m_A V_{AX} + m_B V_{BX}$,

де $V_{AX} = V_A$ (див. рис. 2.1б) та $V_{BX} = V_{BX}e + V_{BX}r$, бо тіло **В** виконує складний рух, де переносним є рух платформи ($V_{BX}e = V_A$), а відносним є рух вантажу **В** по нахиленій площині ($V_Br = V_K = \omega R$) . Маємо:

$$K_X = m_A V_A + m_B(V_A + \omega R\cos\alpha\ ) .$$

Враховуючи, що $K_{XO} = K_X$, отримуємо

$$0 = (m_A + m_B)V_A + m_B R\cos\alpha ,$$

звідси $V_A = - 0{,}5 m_B \omega R/(m_A + m_B) = - 25 \,.\, 2t \,.\, 0{,}25/250 = - 0{,}05t.$

При t =2c $V_A = - 0{,}1$ м/с . Знак "-" вказує, що платформа рухається не праворуч, як ми вважали, а ліворуч. Враховуючи, що платформа рухається поступально ($V_A = V_C$), легко знайти її переміщення L_A :

$$V_A = V_C = dx_C/dt ,$$

звідси

$$\int_0^{L_A} dx_C = \int_o^t V_A dt$$

або

$$L_A = -\int_0^2 0{,}05tdt = -0{,}05t^2 \Big|_0^2 = -0{,}1\ (\text{м}) .$$

Для знаходження сумарного тиску $\vec{N} = \sum \vec{N_j}$ платформи на рейки спроектуємо (2.2) на вісь **Y**:

$$dK_Y/dt = \Sigma F_{jy}^e \text{ або } dK_Y/dt = N - P_A - P_B . \quad (2.4)$$

Обчислимо K_Y: $K_Y = m_A V_{AY} + m_B V_{BY}$, де $V_{AY} = 0$, $V_{BY} = V_{BY}^e + V_{BY}^r = = V_{AY} + V_B^r \sin\alpha = \omega R\sin\alpha$.

Таким чином $K_Y = m_B \omega R\sin\alpha$ і з (2.4) маємо

$N = P_A + P_B + dK_Y/dt = g(m_A + m_B) + m_B \omega R\sin\alpha = 9{,}81 \,.\, 250 + 50 \,.\, 2 \,.\, 0{,}25 \,.\, .0{,}866 = 2474$(Н),

де $$\dot{\omega} = d\omega/dt = \varepsilon = d(2t)/dt = 2(c^{-2}) = \text{const} . \quad (2.5)$$

Перевіримо отримані результати за допомогою теореми про рух центра мас (2.1), яку запишемо в проекції на вісь **X**:

$$M\ddot{x}_C = \sum F_{jx}^e$$

але раніше ми довели, що права частина дорівнює нулю, тому $\dot{x}_C = dV_C/dt = \text{const}$, звідки $V_C = dx_C/dt = \text{const}$, але $V_{C0} = 0$ згідно умови задачі і маємо $dx_C/dt = 0$. Остаточно отримаємо $x_C = \text{const}$ тобто $x_{C0} = x_{C1}$ або [1,2]

$$\frac{m_A x_{A0} + m_B x_{B0}}{m_A + m_B} = \frac{m_A x_{A1} + m_B x_{B1}}{m_A + m_B},$$

звідси $$m_A x_{A0} + m_B x_{B0} = m_A x_{A1} + m_B x_{B1}. \quad (2.6)$$

Визначимо абсциси кінцевого положення x_{j1} (рис.2.1, б) через абсциси початкового положення x_{j0} (рис.2.1, а) :

$$x_{A1} = x_{A0} + L_A, \quad x_{B1} = x_{B0} + L_A + S\cos\alpha,$$

де **S** - переміщення вантажу **B** по поверхні нахиленої площини. Враховуючи, що барабан лебідки обертається рівноприскорено (ε = const - див.(2.5)), маємо при $\omega_0 = 0$:

$$S = S_0 + \omega_0 Rt + \varepsilon Rt2/2 = 0 + 0 + 2 \,.\, 0{,}25t2/2 = 0{,}25t2 \text{ (м)}.$$

На основі (2.6) отримаємо:

$$m_A x_{A0} + m_B x_{B0} = m_A x_{A0} + m_A L_A + m_B x_{B0} + m_B L_A + m_B t2\cos\alpha$$

або $$0 = (m_A + m_B)L_A + m_B t2\cos\alpha,$$

звідси $$L_A = -\,0{,}25m_B t2\cos\alpha/(m_A + m_B) = -\,0{,}025t2 \text{ (м)}. \quad (2.7)$$

Рух платформи поступальний, тому з врахуванням (2.7) маємо:

$$V_A = dL_A/dt = d(-\,0{,}025t2)/dt = -\,0{,}05t \text{ (м/с)}.$$

При t=2c L_A=-0,1 м, V_A=-0,1 м/с. Результати повністю збіглися з тими, що ми отримали за допомогою теореми про зміну кількості руху механічної системи (2.2).

Для знаходження **N** досить скористуватись теоремою (2.1) в проекції на вісь **Y**, що залишаємо читачу на самостійну роботу.

Відповідь: платформа **A** за 2 секунди переміститься ліворуч на L_A = 0,1м і матиме в цей момент швидкість V_A = 0,1 м/с; сумарний тиск платформи на рейки N = 2474 Н .

5.ТЕОРЕМА ПРО ЗМІНУ КІНЕТИЧНОЇ ЕНЕРГІЇ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

Теорему про зміну кінетичної енергії системи

$$T - T_O = \Sigma A_j^e + \Sigma A_j^i \quad (j=1,2,..n) \qquad (5.1)$$

застосовують у тих випадках, коли до числа даних та шуканих величин входять: інерційні характеристики (маси і моменти інерції) і швидкості (лінійні і кутові); сили, моменти сил і пар сил; переміщення (лінійні і кутові). Зазначимо, що три величини з чотирьох перелічених мають бути відомі. Необхідно пам'ятати, що застосування цієї теореми нейефективніше тоді, коли сили і моменти сил та пар сталі або залежать від координат точок системи.

Зауважимо, що це єдина теорема динаміки, яка враховує дію внутрішніх сил системи.

При обчисленні кінетичної енергії механічної системи, яка складається з твердих тіл, слід пам'ятати, що $T = \Sigma T_j$; де T_j - кінетична енергія кожного тіла, що входить до системи: вона обчислюється в залежності від того який рух виконує тіло:

$$T_{ПОСТ} = MV_C2 /2 ; \quad (5.2)$$

$$T_{ОБЕРТ} = I_{ZO}\omega 2 /2 \quad (5.3)$$

$$T_{ПЛОСК} = MV_C2 /2 + I_{ZC}\, \omega 2/2 \quad (5.4)$$

Перед обчисленням робіт сил в правій частині (5.1) необхідно повторити [1,2], що таке робота сили взагалі і як вона обчислюється в окремих випадках зокрема: робота сили ваги, сили пружності, сили тертя, внутрішніх сил системи, пари сил тощо. Слід пам'ятати, що $\Sigma A_j^i = 0$ у випадку руху незмінної системи [1,2], окремим випадком якої є абсолютно тверде тіло.

З формул (5.3-5.4) видно, що необхідно добре розібратися з обчисленням моментів інерції для часто уживаних на практиці однорідних тіл: стержень, диск, круговий циліндр, кільце; при необхідності треба користуватися теоремою про паралельний перенос (5.2), за якою визначають моменти інерції тіл відносно паралельних осей, або поняттям про радіус інерції i_Z (в цьому випадку $I_Z = M\, i_Z2$).

Остаточний успіх розв'язання задач за теоремою (5.1) залежить від правильного встановлення співвідношень кінематики між окремими точками та тілами, що входять до системи. Найчастіше роблять помилки при обчисленні кутової швидкості тіла, що рухається плоскопаралельно: $\omega = V_K/KP$, де К - довільна точка тіла, К*Р* - її віддаль до миттєвого центра швидкостей *Р*. Перш ніж розв'язувати задачу, рекомендується повторити поступальний, обертальний та плоский рухи твердого тіла [1,2].

Алгоритм розв'язування задач за допомогою теореми (5.1) такий:

- визначають, які тіла або точки відносяться до системи, рух якої вивчається;

- дослідити, який рух виконує кожне з твердих тіл, що входять до системи;

- обчислити кінетичну енергію системи в початковому та кінцевому її положеннях; при цьому лінійні швидкості окремих точок системи треба, користуючись співвідношеннями кінематики, виражати як функції швидкості однієї точки;

- розглянути систему сил, як зовнішніх, так і внутрішніх, що діють на точки системи;

- дослідити чи виконують внутрішні сили роботу, чи ні;

- обчислити суму робіт усіх зовнішніх та внутрішніх сил на переміщеннях точок системи;

- скласти рівняння, що відповідає теоремі (5.1), і визначити невідому величину.

Приклад 3.1. Механічна система (рис. 4.1) під дією сили $\vec{F}$ починає рухатись зі стану спокою. Нехтуючи тертям, іншими силами опору руху та масою гнучких нерозтяжних ниток, визначити швидкість та прискорення точки, до якої прикладена сила $\vec{F}$, в той момент часу коли ця точка пройде шлях S. При розрахунках вважати, що маса тіла В рівномірно розподілена по його ободу, а саме тіло В котиться по правій нитці без ковзання; крім того відомо, що $m_A = m$, $m_B = 2m$, $m_D = 8m$, $F = 8mg$, $M = mgR$, $r_D = R$, $R_D = 3R$, $i_{DZ} = 2R$, $R_B = R$, $\alpha = 30^o$, $S = 1{,}1м$ (m – в кг; R, i_{DZ} – в метрах)..

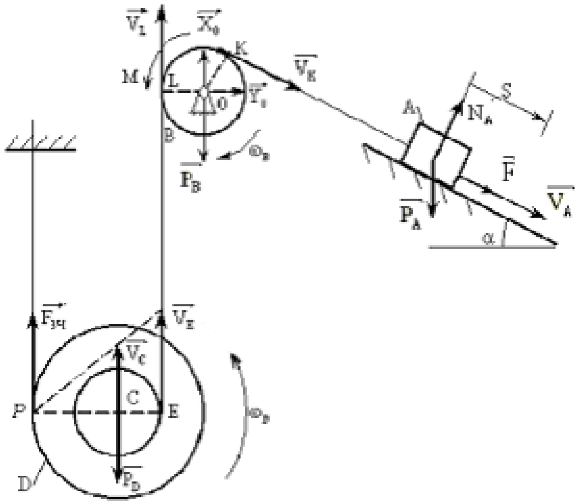

Рис.3.1

Розв'язання.

Прикладемо до системи активні сили: $\overrightarrow{P_A}, \overrightarrow{P_B}, \overrightarrow{P_D}, \overrightarrow{F}$. Реакції в'язей: $\overrightarrow{X_O}, \overrightarrow{Y_O}, \overrightarrow{N_A}, \overrightarrow{F_{зч}}$,*M*. (рис. 3.1). Задачу розв'яжемо за допомогою теореми про зміну кінетичної енергії механічної системи :

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e + \sum_{k=1}^{n} A_k^i$$

T_0 = *0*, бо в початковий момент часу система перебувала в стані спокою (V_0=*0*);

$\sum_{k=1}^{n} A_k^i = 0$, бо система незмінна: тіла A,B,D тверді, нитки нерозтяжні . Тоді: $T = \sum_{k=1}^{n} A_k^e$.

Визначимо кінетичну енергію системи в кінцевому її положенні:

$$T = T_A + T_B + T_D.$$

Вантаж A рухається поступально; блок B обертається навколо осі Oz,; ступінчастий коток D рухається плоскопаралельно. Тому кінетичну енергію тіл визначимо за формулами (5.2), (5.3) та (5.4).

$$T_A = \frac{m_A V_A^2}{2} = 0.5 m V_A^2,$$

$$T_B = \frac{I_{zB}\omega_B^2}{2} = \frac{2mR^2 V_A^2}{2R^2} = mV_A^2.$$

Момент інерції однорідного тонкого кільця (маса тіла B рівномірно розподілена по його ободу) відносно осі Oz;

$$I_{zB} = m_B R_B^2 = 2mR^2,$$

Кутова швидкість блока B:

$$\omega_B = \frac{V_K}{KO} = \frac{V_A}{R_B} = \frac{V_A}{R}.$$

$$T_D = \frac{m_D V_C^2}{2} + \frac{I_{Cz}\omega_D^2}{2} = 3.25 m V_A^2 .$$

Кутова швидкість обертання котка D:

$$\omega_D = \frac{V_E}{EP} = \frac{V_A}{4R}.$$

Швидкість центра мас C тіла D :

$$V_C = \omega_D CP = \frac{3V_A}{4}.$$

Момент інерції тіла D відносно осі Z, яка проходить через центр мас:

$$I_{Cz} = m_D i_{DZ}^2 = 32mR^2.$$

Кінетична енергія системи:

$$T = 0.5mV_A^2 + mV_A^2 + 3.25mV_A^2 = 4.75mV_A^2.$$

Визначимо суму робіт всіх зовнішніх сил, що діють на систему, на заданому переміщенні S цієї системи:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^e = A_{\vec{F}} + A_{\vec{P_A}} + A_{\vec{P_B}} + A_{\vec{P_D}} + A_M + A_{\vec{X_O}} + A_{\vec{Y_O}} + A_{\vec{N_A}} + A_{\vec{F_{зч}}}$$

$$A_{\vec{F}} = Fs = 8mgs.$$

$$A_{\vec{P_A}} = P_A h_A = m_A gs \cdot \sin\alpha = 0.5mgs\,.$$

$$A_{\vec{P_B}} = A_{\vec{X_O}} = A_{\vec{Y_O}} = A_{\vec{F_{зч}}} = 0$$

$$A_{\vec{P_D}} = -P_D h_C = -m_D g h_C = -8mg3s/4 = -6mgs\,.$$

$h_C = \dfrac{3s}{4}$, бо $V_C = \omega_D CP = \dfrac{3V_A}{4}$.

$$A_M = -M\varphi_B = -\frac{Ms}{R} = -mgs\,.$$

Сума робіт всіх зовнішніх сил:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^e = 8mgs + 0.5mgs - 6mgs - mgs = 1.5mgs\,.$$

Тоді:

$$4.75mV_A^2 = 1.5mgs \qquad \text{(a)}$$

Звідки а

$V_A = \sqrt{\dfrac{1.5mgs}{4.75m}} = 1.85$ (м/с).

Для знаходження прискорення тіла А a_A візьмемо похідну від виразу (а) по часу t.

$$4.75 \cdot 2V_A \frac{dV_A}{dt} = 1.5g\frac{ds}{dt}\,.$$

Тут: $\dfrac{dV_A}{dt} = a_A$, $\dfrac{ds}{dt} = V_A$.

Тоді: $a_A = \dfrac{1{,}5g}{9.5} = 1.55$ *(м/с²).*

Відповідь: $V_A = 1.85$ *м/с*, $a_A = 1.55$ *м/с²*,

6. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА ДЛЯ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

Принцип Даламбера для системи матеріальних точок можна сформулювати так: при русі системи матеріальних точок всі прикладені до системи сили (активні сили і реакції в`язей), а також сили інерції всіх точок системи (якщо умовно вважати їх прикладеними до самих точок) в кожний момент часу є формально зрівноваженою системою сил.

На цій підставі головний вектор і головний момент відносно довільної точки О вказаних сил дорівнюють нулю. Звідси одержуємо два векторних рівняння

$$\sum \overrightarrow{F_j} + \sum \overrightarrow{R_j} + \sum \overrightarrow{\Phi_j} = 0$$

$$\sum M_O\left(\overrightarrow{F_j}\right) + \sum M_O\left(\overrightarrow{R_j}\right) + \sum M_O\left(\overrightarrow{\Phi_j}\right) = 0, \qquad (6.1)$$

де $\overrightarrow{F_j}$ - рівнодійна заданих сил, що діють на і-ту точку системи;

$\overrightarrow{R_j}$ - рівнодійна реакцій в`язей, що діють на і-ту точку системи;

$\overrightarrow{\Phi_j} = -m_j \overrightarrow{a_j}$ - сила інерції і-тої точки системи (m_j-маса точки, $\overrightarrow{a_j}$ - її прискорення).

Значення цього принципу полягає в тому , що при його застосуванні рівняння руху точки та системи складаються у формі рівнянь рівноваги , чим і досягається суттєве спрощення процесу розв`язання деяких задач динаміки. Принцип Даламбера (5.1) дає можливість складати диференціальні рівняння руху системи та визначати прискорення тіл.

За допомогою принципа просто і наочно розв`язуються задачі, в яких по заданому руху системи необхідно визначити реакції накладених на неї зовнішніх в`язей.

З теорії відомо [1,2], що сили інерції точок $\overrightarrow{\Phi_j}$ напрямлені протилежно до її прискорень $\overrightarrow{a_j}$, а для твердого тіла сили інерції зводяться до головного вектора $\vec{\Phi} = -M\overrightarrow{a_C}$, якщо тіло рухається поступально, і до головного момента $M_Z^{\Phi} = -I_Z \varepsilon$, якщо тіло обертається навколо осі Z, яка проходить через його центр мас С. Якщо тіло рухається плоскопаралельно, то його сили інерції зводяться до $\vec{\Phi}$ та M_Z^{Φ} одночасно.

При розв’язанні задач за допомогою принципа Даламбера (6.1) слід дотимуватись такої послідовності дій:

- зобразити механічну систему і показати на ній задані сили та реакції в’язей;
- зобразити на схемі прискорення тіла, рух якого задано або шукається, і в залежності від його напрямку показати прискорення (лінійні та кутові) решти тіл системи;
- прикласти до всіх тіл системи головні вектори та головні моменти сил інерці , знайти їх значення через задане або шукане прискорення;
- вибрати систему координат;
- скласти рівняння “рівноваги” отриманої системи сил;
- розв’язати отриману систему рівнянь відносно невідомих.

Осі координат та точки, відносно яких беремо моменти сил, вибирають так, щоб ті невідомі, які не підлягають визначенню, не входили в рівняння “рівноваги”. Якщо з отриманих рівнянь для всієї системи неможливо визначити шукані величини, то розглядають “рівновагу” окремих складових системи, застосовуючи щоразу рівняння (6.1).

Приклад 4.1. Визначити натяги ниток для схеми приклада 3.1.

Розв’язання. Згадаємо, що система складається з трьох тіл (рис. 4.1, б), які рухаються: тіло A - поступально, тіло B - обертається навколо осі Oz, тіло D - плоскопаралельно. Таким чином сили інерції зводяться до головного вектора $\vec{\Phi} = -m_A \vec{a_A}$ для тіла A, до головного момента

$M_B\Phi = -I_{ZO}\varepsilon_B$ для тіла B та до головного вектора

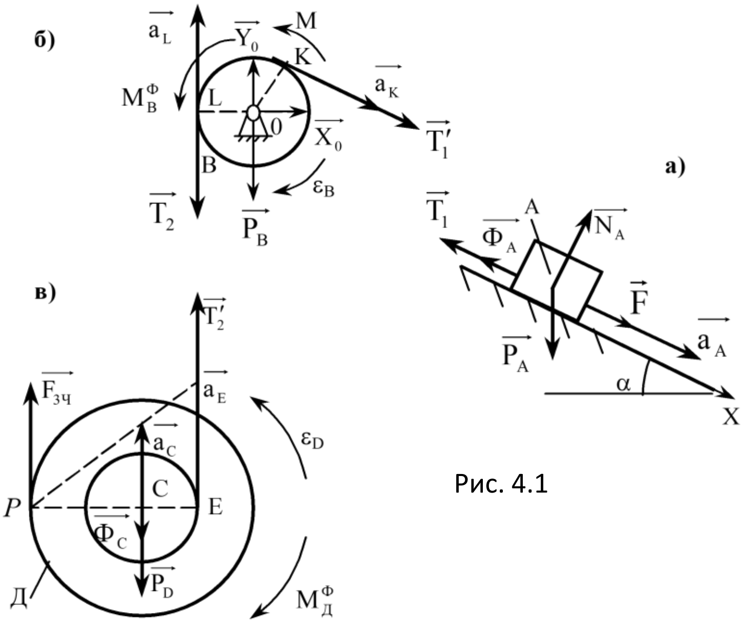

Рис. 4.1

$\overline{\Phi_D} = \overline{\Phi_C} = -m_D \overline{a_C}$ і головного моменту $M_D\Phi = -I_{ZC}\varepsilon_D$ для тіла D. Знак “-” вказує на протилежні напрямки $\overrightarrow{\Phi_j}$ та $M_j\Phi$ відповідно до прискорення $\overrightarrow{a_j}$ та кутового прискорення ε_j. Розглянемо окремо “рівновагу” тіла A (рис.5.1), замінивши дію гнучкої в’язі, що підтримує це тіло, її реакцією $\overrightarrow{T_1}$ - це і є натяг нитки, що підтримує тіло A. Спроектуємо всі сили на вісь X:

$$\Sigma X = F + P_A \sin\alpha - \Phi_A - T_1 = 0,$$

де $\Phi_A = m_A a_A = 1{,}55m$(Н), бо $a_A = 1{,}55$м/с2.

Маємо:

$$T_1 = F + P_A \sin\alpha - \Phi_A = 8mg + 0{,}5mg - 1{,}55m = 81{,}83m(\text{Н}).$$

Тепер розглянемо “рівновагу” тіла В (рис.3.6, б). Реакції $\overrightarrow{X_O}$, $\overrightarrow{Y_O}$ нас не цікавлять, тому

$$\Sigma M_O = 0; \quad T'_1\,KO - T_2LO - M - M_B\Phi = 0, \quad (5.3)$$

де $M_B\Phi = I_{ZO}\varepsilon_B = 2mR2a_A/R = 2mRa_A$, бо I_{ZO} обчислено раніше (4.8), $\varepsilon_B = a_K/KO = a_A/R$; KO = LO = R_B = R. З (5.3) маємо:

$$T_2 = (T'_1R - M - M_B\Phi)/R = 81{,}83m - mg - 2mRa_A = 68{,}92m\ (Н).$$

Якщо прискорення a_j відоме, то реакції в’язей визначаються досить просто.

Якщо прискорення a_j невідоме, то його можливо знайти, розглянувши “рівновагу” всіх тіл, що входять в систему. Для приклада 4.1 досить до рівнянь (5.2) та (5.3) добавити рівняння рівноваги для тіла D (рис.5.1, в):

$$\Sigma M_P = 0\ ; \quad P_DCP - T'_2EP + \Phi_CCP + M_D\Phi = 0.$$

Розв’язавши систему рівнянь відносно $T_1 = T'_1$, $T_2 = T'_2$ і a_A (воно входитиме в вирази для Φ_A, M_B^{Φ}, Φ_C та M_D^{Φ}) знайдемо величину a_A та натяги ниток T_1 і T_2 . Таким чином можна перевірити розв’язок приклада 3.1.

7. ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ДИНАМІКИ

Як відомо [1,2], принцип Даламбера дозволяє записувати динамічні рівняння руху у вигляді рівнянь рівноваги. Але якщо система зрівноважена, то до неї можна застосувати принцип можливих переміщень. Після послідовного застосування цих принципів до системи, що рухається, отримують загальне рівняння динаміки:

$$\sum(\vec{F}_j + \vec{\Phi}_j)\delta\vec{S}_j = 0 \qquad (7.1)$$

Назва вказує на універсальність рівняння (7.1), яке дає найбільш загальний метод розв'язування задач динаміки руху невільної матеріальної системи. Всі обмеження та зауваження, що відносяться до обох принципів повністю залишаються і для загального рівняння динаміки (7.1).

Методика застосування загального рівняння динаміки (7.1) відрізняється від методики застосування принципу можливих переміщень тільки тим, що додатково доводиться вивчати роботи сил інерції мас системи. Крім того слід мати на увазі,що при визначенні співвідношень між залежними можливими переміщеннями в (7.1) слід користуватися міркуваннями кінематики.

Приклад 4.2 Перевірити розв'язок приклада 3.1 за допомогою загального рівняння динаміки.

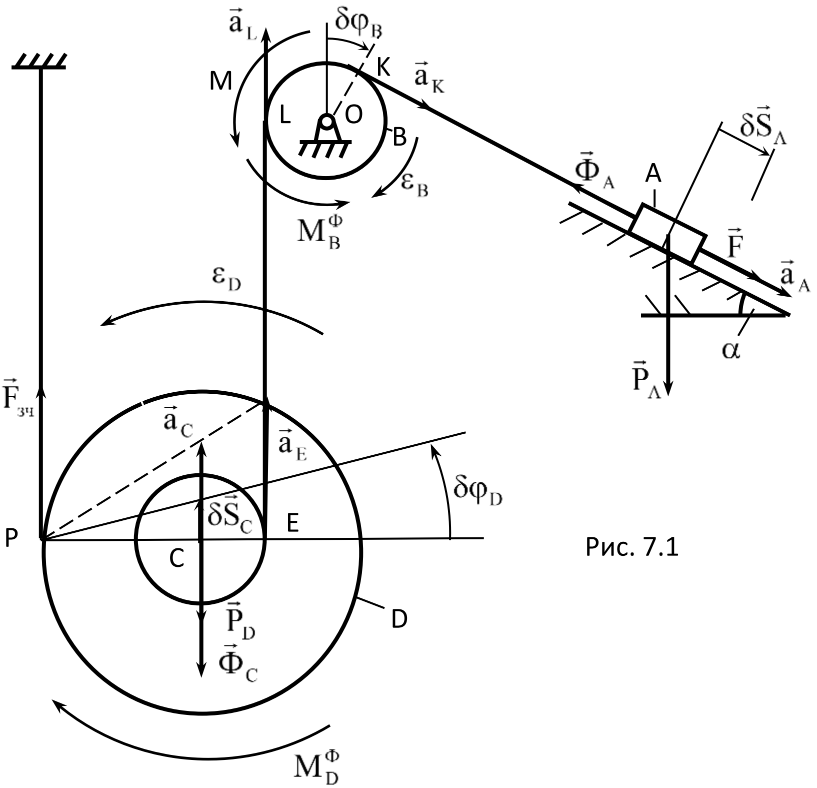

Рис. 7.1

Розв'язання. Зображаємо на рис. 7.1 задані сили та пару сил ($\vec{F}, \vec{P}_A, \vec{P}_B, \vec{P}_D$ та M), а також сили інерції $\vec{\Phi}_A$, $\vec{\Phi}_C$.їх зображено протилежно до прискорень $\vec{a}_A$ та $\vec{a}_C$ відповідно; аналогічно напрямляємо моменти сил інерції M_B^Φ та M_D^Φ відповідно до ε_B та ε_D .

Система має один ступінь вільності. Надаємо системі можливе переміщення і складаємо загальне рівняння динаміки (7.1) в натуральній формі:

$$F\delta S_A + P_A \sin\alpha\,\delta S_A - \Phi_A \delta S_A - M\delta\varphi_B - M_B^{\Phi}\delta\varphi_B - P_D\delta S_C - \Phi_C\delta S_C - M_D^{\Phi}\delta\varphi_D = 0$$
(7.2)

Визначимо залежності між можливими переміщеннями δS_A, $\delta\varphi_B$, δS_C ,та $\delta\varphi_D$: $\delta\varphi_B = \delta S_K / KO = \delta S_A / R$ -порівняйте з ω_B (прикл. 3.1);

$\delta S_E = \delta S_L = \delta S_K = \delta S_A$ - з рис. 7.1; $\delta S_C = 2\delta S_A / 3$, бо $V_C = 2V_A / 3$ - див. (7.1); $\delta\varphi_D = \delta S_E / EP = \delta S_A / (R_D + r_D) = \delta S_A / 3R$ - порівняйте з ω_D (прикл. 4.1). Підставляємо отримані залежності в (7.2) і виносимо δS_A за дужку:

$$\delta S_A (F + P_A \sin\alpha - \Phi_A - M/R - M_B^{\Phi}/R - 2P_D/3 - 2\Phi_C/3 - M_D/3R) = 0$$
,

але $\delta S_A \neq 0$, тому вираз в дужках дорівнює нулю:

$$F + P_A \sin\alpha - \Phi_A - M/R - M_B^{\Phi}/R - 2P_D/3 - 2\Phi_C/3 - M_D/3R = 0.$$
(7.3)

Обчислимо сили інерції та моменти сил інерції, виражаючи їх через невідоме a_A:

$\Phi_A = m_A a_A = m a_A$;

$\Phi_C = m_D a_C = 9m \cdot 2a_A / 3 = 6m a_A (a_C = 2a_A / 3$, бо $V_C = 2V_A / 3$ - див. (3.40)); $M_B^{\Phi} = I_{ZC}\varepsilon_B = 2mRa_A$, бо $I_{ZO} = 2mR^2$ (3.38) ,а $\varepsilon_B = a_A / R$, бо $\delta\varphi_B = \delta S_A / R$; $M_D^{\Phi} = I_{ZC}\varepsilon_D = 12mRa_A$, бо $I_{ZC} = 36mR^2$ (3.41), а $\varepsilon_D = a_A / 3R$, бо $\delta\varphi_D = \delta S_A / 3R$.

Підставимо значення всіх зусиль в (7.3) і зведемо подібні члени:

$$mg(8 + 0{,}5 - 1 - 2\cdot 9/3) = m a_A (1 + 2 + 2\cdot 6/3 + 12/3),$$

звідки $1{,}5g = 11a_A$ і остаточно $a_A = 1{,}5g/11 = 1.5\cdot 9{,}81/11 =$ 1,34 (м/с^2).

Знайдемо швидкість тіла А , коли воно пройде шлях S:

$$a_A = dV_A / dt = dVA / dS \cdot dS / dt = V_A dV_A / dS = 0{,}5d(V_A^2) / dS$$

, звідки $d(V_A^2) = 2a_A dS$. Інтегруємо останню рівність:

$$V_A^2 = 2a_A S + C \cdot$$

Для знаходження С врахуємо, що при $\mathrm{t} = 0$ $\mathrm{V_A} = \mathrm{V_0} = 0$, $\mathrm{S} = \mathrm{S_0} = 0$.Тому $\mathrm{C} = 0$ і маємо:

$$V_A = \sqrt{2a_A S} = \sqrt{2 \cdot 1{,}34 \cdot 1{,}1} = 1{,}34(м / с^2)$$

Результати розв"язання повністю збігаються з розв'язком приклада 4.1(4.16). Якщо a_A знайдено, то натяги ниток легко визначаються (див. приклад 5.1).

Відповідь: $\mathrm{V_A}$=1,72м/с , a_A = 1,34м/с^2.

Література

1. 1. Цасюк В. В. Теоретична механіка : навчальний посібник. Київ : Центр навчальної літератури, 2004. 402 с.
2. 2. Павловський М. А. Теоретична механіка. К. : Техніка, 2002 512 с.
3. Войтович Л. В., Галанзовська М. Р., Серілко Л. С., Щурик В. О. П69 Практикум з теоретичної механіки. Частина 2: Динаміка : навчальний посібник Рівне : НУВГП, 2018. 141 с.