

Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та
природокористування
Навчально-науковий інститут кібернетики, інформаційних
технологій та інженерії
Кафедра вищої математики

04-02-72М

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

та завдання до практичних занять та самостійного вивчення
навчальної дисципліни **«Вища математика»**
з розділів **«Вступ до математичного аналізу»** та
«Диференціальне числення функцій однієї змінної»
для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня
за освітньо-професійними програмами спеціальностей
274 «Автомобільний транспорт», 208 «Агроінженерія»,
184 «Гірництво», 133 «Галузеве машинобудування»
денної та заочної форм навчання

Рекомендовано
науково-методичною
радою з якості ННМІ
Протокол № 4 від 31.12.2024 р.

Рівне – 2025

Методичні вказівки та завдання до практичних занять та самостійного вивчення навчальної дисципліни **«Вища математика»** з розділів **«Вступ до математичного аналізу»** та **«Диференціальне числення функцій однієї змінної»** для здобувачів вищої освіти бакалаврського рівня за освітньо-професійними програмами спеціальностей

274 «Автомобільний транспорт»,

208 «Агроінженерія»,

184 «Гірництво»

133 «Галузеве машинобудування»

денної та заочної форм навчання. [Електронне видання] / Іващук Я. Г. – Рівне : НУВГП, 2025. – 38 с.

Укладач: Іващук Я. Г., к. ф.-м. н., доцент кафедри вищої математики;

Відповідальний за випуск: Тадеєв П. О., д. пед. н., професор, завідувач кафедри вищої математики.

Керівники груп забезпечення спеціальностей:

274 «Автомобільний транспорт»: Марчук Р. М., к.т.н., доцент;

208 «Агроінженерія»: Бунза О. З., к.т.н., доцент;

184 «Гірництво»: Васильчук О. Ю., к.т.н., доцент.

133 «Галузеве машинобудування»: Тхорук Є. І., к.т.н., доцент.

Голова науково-методичної ради

з якості ННМІ

проф. Марчук М. М.

Попередня версія методичних вказівок 04-02-36

© Я. Г. Іващук, 2025

© НУВГП, 2025

Зміст

<i>Вступ</i>	3
1. Вступ до математичного аналізу	4
1.1. Обчислення границь	6
2. Диференціальне числення функцій однієї змінної	10
2.1. Зразки розв'язання завдань	12
3. Завдання для самостійної роботи	19
3.1. Знайти границю функції	19
3.2. Знайти похідну функції	26
3.3. Обчислити наближено значення функції	34
3.4. Дослідити функцію та побудувати її графік	35
<i>Список рекомендованої літератури</i>	38

Вступ

Вивчення вступу до математичного аналізу і диференціального числення функцій однієї змінної є одним із способів розвитку логічного і алгоритмічного мислення студентів, оволодіння основними методами дослідження та розв'язування математичних задач, вироблення уміння самостійно розширювати свої знання з математики і застосовувати математичний апарат до аналізу та розв'язання практичних задач.

Вища математика спрямована на формування загальнонаукових, інструментальних, загально-професійних та спеціалізовано-професійних компетенцій.

1. Вступ до математичного аналізу

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі X точки x_0 , крім, можливо, самої точки x_0 .

Число A називають границею функції $y = f(x)$ в точці x_0 , якщо для довільної збіжної до x_0 послідовності $\{x_n\}$, де $x_n \in X$, $x_n \neq x_0$, послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$ має границю, яка дорівнює числу A , і записують

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на нескінченному проміжку $(-\infty; +\infty)$.

Число A називають границею функції $y = f(x)$ при $x \rightarrow \infty$ і пишуть $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $M = M(\varepsilon) > 0$, що при $|x| > M$ виконується нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Функція $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ називається нескінченно великою функцією, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

Функція $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ називається нескінченно малою функцією, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

Основні теореми про границі.

Теорема 1. (про границю суми, добутку і частки). Якщо кожна з функцій $f(x)$ і $\varphi(x)$ має скінченну границю в точці x_0 , то в цій точці існують також границі функцій $f(x) \pm \varphi(x)$,

$f(x) \cdot \varphi(x), \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ (остання за умови, що $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \neq 0$) і

справедливі формули

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)}.$$

Наслідки з теореми 1:

H-1.1 $\lim_{x \rightarrow x_0} c f(x) = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad c \in R;$

H-1.2 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^n$, зокрема

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = \lim_{x \rightarrow x_0} x_0^n = x_0^n, \quad n \in N;$$

H-1.3 Якщо $f(x)$ елементарна функція, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right) = f(x_0).$$

Теорема 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

Теорема 3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$

де e - ірраціональне число, наближене значення якого, з точністю до 10^{-15} дорівнює 2,718281828459045.

Наслідки з теореми 3:

H-3.1 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k_1}{x}\right)^{k_2 x} = e^{k_1 k_2}$, де k_1 і k_2 - дійсні числа;

H-3.2 $\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e.$

При обчисленні границь, пов'язаних з числом e , часто застосовують таке твердження: якщо існують границі

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$, то існує також границя

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{\varphi(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)}.$$

2.1. Обчислення границь

Приклад 1.1. Знайти границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^5 + 9x + 7}{3x^6 + x^3 + 1}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 5x + 1}{2x^2 + 3x - 7};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 10}{3x^2 - 5x - 2}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{3 - \sqrt{2x + 1}};$$

Розв'язання. 1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^5 + 9x + 7}{3x^6 + x^3 + 1}.$

Границі чисельника і знаменника існують і границя знаменника не дорівнює нулю, тому можна користуватися теоремою 1:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^5 + 9x + 7}{3x^6 + x^3 + 1} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (4x^5 + 9x + 7)}{\lim_{x \rightarrow 1} (3x^6 + x^3 + 1)} = \\ &= \frac{4 \lim_{x \rightarrow 1} x^5 + 9 \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 7}{3 \lim_{x \rightarrow 1} x^6 + \lim_{x \rightarrow 1} x^3 + \lim_{x \rightarrow 1} 1} = \frac{4 + 9 + 7}{3 + 1 + 1} = 4. \end{aligned}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 5x + 1}{2x^2 + 3x - 7}.$$

При $x \rightarrow \infty$ маємо невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$, тому

поділимо чисельник і знаменник на x^2 , а потім скористаємося відповідними властивостями границь. Матимемо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 5x + 1}{2x^2 + 3x - 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{3}{x} - \frac{7}{x^2}} = \left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x} = 0, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0 \end{array} \right| = \frac{6}{2} = 3.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 10}{3x^2 - 5x - 2}.$$

Тут застосовувати теорему про границю частки не можна, тому що границя чисельника дорівнює нулю і границя знаменника дорівнює нулю, тобто маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$. Розкладемо чисельник і знаменник на лінійні множники, скориставшись формулою: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, де x_1 і x_2 - нулі квадратного тричлена. Отже,

$$2x^2 + x - 10 = 2(x - 2)\left(x + \frac{5}{2}\right) = (x - 2)(2x + 5),$$

$$3x^2 - 5x - 2 = 3(x - 2)\left(x + \frac{1}{3}\right) = (x - 2)(3x + 1).$$

Оскільки при знаходженні границі функцій в точці $x = 2$ розглядаються значення $x \neq 2$, то даний дріб можна скоротити на $x - 2$, тому

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 10}{3x^2 - 5x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(2x + 5)}{(x - 2)(3x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x + 5)}{(3x + 1)} = \frac{9}{7}.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{3 - \sqrt{2x + 1}}.$$

При $x \rightarrow 4$ маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$.

Помноживши чисельник і знаменник на вираз

$(2 + \sqrt{x})(3 + \sqrt{2x+1})$ та скористаємося формулою

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ отримаємо:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{3 - \sqrt{2x+1}} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2 - \sqrt{x})(2 + \sqrt{x})(3 + \sqrt{2x+1})}{(2 + \sqrt{x})(3 + \sqrt{2x+1})(3 - \sqrt{2x+1})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4-x)(3 + \sqrt{2x+1})}{(2 + \sqrt{x})(9 - 2x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4-x)(3 + \sqrt{2x+1})}{(2 + \sqrt{x})(8 - 2x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4-x)(3 + \sqrt{2x+1})}{(2 + \sqrt{x})(8 - 2x)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(3 + \sqrt{2x+1})}{2(2 + \sqrt{x})} = \frac{6}{2 \cdot 4} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Приклад 1.2. Знайти границі:

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3} \right)^{1-5x}; \\ 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{\arctg 2x}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow \infty} (6x+5)(\ln(3x+2) - \ln(3x-1)). \end{aligned}$$

Розв'язання. 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2} &= \left| \frac{0}{0} \right|, 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \Big| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 2x}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8 \sin 2x \sin 2x}{2x \cdot 2x} = 8 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right)^2 = 8 \cdot 1^2 = 8. \end{aligned}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3} \right)^{1-5x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3} \right)^{1-5x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x-1}{2x+3} - 1 \right)^{1-5x} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{2x+3} \right)^{1-5x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{2x+3}{-4}} \right)^{\frac{2x+3}{-4} \cdot \frac{-4}{2x+3} \cdot \frac{1-5x}{1}} = \\
&= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{20x-4}{2x+3}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{20-\frac{4}{x}}{2+\frac{3}{x}}} = e^{10}.
\end{aligned}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{\operatorname{arctg} 2x}.$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{\operatorname{arctg} 2x} &= \left| \begin{array}{l} \operatorname{arctg} 2x = t, \quad 2x = \operatorname{tg} t, \\ x = \frac{1}{2} \operatorname{tg} t, \text{ npu } x \rightarrow 0 \quad t \rightarrow 0 \end{array} \right| = \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{tg} t}{t} = 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t \cos t} = 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\cos t} = 3.
\end{aligned}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} (6x+5)(\ln(3x+2) - \ln(3x-1)).$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow \infty} (6x+5)(\ln(3x+2) - \ln(3x-1)) = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} (6x+5) \ln \frac{3x+2}{3x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3x+2}{3x-1} \right)^{6x+5} = \\
&= \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{3x-1} \right)^{6x+5} = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3x-1}{3}} \right)^{\frac{3x-1}{3} \cdot \frac{3}{3x-1} \cdot (6x+5)} = \\
&= \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{3x-1}{3}} \right) \right)^{\frac{3x-1}{3}} \right)^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{18x+15}{3x-1}} = \ln e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{18x+15}{3x-1}} =
\end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{18x+15}{3x-1} \cdot \ln e = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{18 + \frac{15}{x}}{3 - \frac{1}{x}} = \frac{18}{3} = 6.$$

2. Диференціальне числення функцій однієї змінної

Нехай задано неперервну функцію $y = f(x)$ з областю визначення $D(y)$. Надаємо аргументу x довільного приросту Δx такого, щоб точка $x + \Delta x$ також належала $D(y)$. Знайдемо приріст функції: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Похідною функції $y = f(x)$ в точці x називається границя відношення приросту функції Δy в цій точці до приросту аргументу Δx , коли приріст аргументу прямує до нуля, тобто

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Похідну функції $y = f(x)$ в точці x позначають ще й такими символами: y'_x ; $\frac{dy}{dx}$; $\frac{df}{dx}$; $f'(x)$.

Нехай аргументом функції $f \in \mathcal{F}$ є функція $u = u(x)$, яка має похідну u'_x в точці x . Тоді $y = f(u(x))$ - складена функція з проміжним аргументом u і кінцевим аргументом x .

Похідна складеної функції обчислюється за формулою:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Правила диференціювання:

$$1. C' = 0; \quad 2. (C \cdot u)' = C \cdot u'; \quad 3. (u \pm v)' = u' \pm v';$$

$$4. (uv)' = u'v + uv'; \quad 5. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$$

$$6. y = f(x), \text{ обернена функція } x = \varphi(y), \text{ тоді } y'_x = \frac{1}{x'_y};$$

7. Функція задана параметрично рівняннями: $y = y(t)$,
 $x = x(t)$, тоді

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Таблиця похідних

$$1. (u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'; \quad 2. \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u';$$

$$3. \left(\frac{a}{u}\right)' = -\frac{a}{u^2} \cdot u'; \quad 4. (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u';$$

$$5. (\sin u)' = \cos u \cdot u'; \quad 6. (\cos u)' = -\sin u \cdot u';$$

$$7. (\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'; \quad 8. (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u';$$

$$9. (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$$

$$10. (\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$$

$$11. (\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'; \quad 12. (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u';$$

;

$$13. (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'; \quad 14. (\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u';$$

$$15. (e^u)' = e^u \cdot u'; \quad 16. (a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'.$$

2.1. Зразки розв'язання завдань

Приклад 2.1. Знайти похідні функцій:

а) $y = \sin^3 x$; б) $y = e^x \cdot \operatorname{tg} 2x$; в) $y = \frac{x^5}{2^x}$;

г) $y = \ln \operatorname{ctg} x^4$; д) $x = a \cos t^2$, $y = a \sin t^2$.

Розв'язання. а) $y' = 3 \sin^2 x \cdot \cos x$

б) $y' = (e^x)' \operatorname{tg} 2x + e^x \cdot (\operatorname{tg} 2x)' = e^x \cdot \operatorname{tg} 2x + \frac{2e^x}{\cos^2 2x}$;

в) $y' = \frac{5x^4 \cdot 2^x - x^5 \cdot 2^x \ln 2}{(2^x)^2} = \frac{5x^4 - x^5 \ln 2}{2^x}$;

г) $y' = \frac{1}{\operatorname{ctg} x^4} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x^4} \right) \cdot 4x^3 =$
 $= -\frac{4x^3}{\cos x^4 \sin x^4} = -\frac{8x^3}{\sin 2x^4}$;

д) $y'_x = \frac{(a \cos t^2)'_t}{(a \sin t^2)'_t} = \frac{2at \cos t^2}{-2at \sin t^2} = -\operatorname{ctg} t^2$.

Щоб знайти похідну неявно заданої функції, потрібно взяти похідну по x від обох частин рівності $F(x, y) = 0$, вважаючи, що y є функцією від x , а потім одержане рівняння розв'язати відносно похідної y'_x . Похідна неявно заданої функції виражається через незалежну змінну x і саму функцію y .

Приклад 2.2. Знайти похідну y'_x , якщо

$$x^2 + y^2 - 2y + 3x = 1.$$

Розв'язання. $2x + 2y y' - 2y' + 3 = 0, \Rightarrow$

$$y'(2y-2) = -2x-3, \Rightarrow y' = \frac{-2x-3}{2y-2} = \frac{2x+3}{2-2y}.$$

Похідні вищих порядків знаходять за формулами:

1) якщо функція $y = f(x)$, то

$$y'' = (y'(x))', \quad y''' = (y''(x))' \text{ і т. д.};$$

2) якщо функція задана параметрично, то

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}, \text{ або } y''_{xx} = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt}}{(x'_t)^3}, \quad y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}.$$

З означення похідної $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ і властивостей

нескінченно малих величин випливає рівність:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha(x, \Delta x), \text{ де } \alpha(x, \Delta x) \rightarrow 0 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0, \text{ звідки}$$

$$\Delta y = y' \cdot \Delta x + \alpha(x, \Delta x) \cdot \Delta x.$$

Перший з доданків лінійний відносно Δx , а другий доданок — нескінченно мала вищого порядку, ніж Δx , тому що

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x, \Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(x, \Delta x) = 0.$$

Цей доданок не є лінійним відносно Δx , тобто містить Δx в степені вищому від одиниці. Таким чином, перший доданок є головною частиною приросту функції.

Диференціалом dy функції $y = f(x)$ в точці x

називається головна, лінійна відносно Δx , частина приросту функції f в цій точці:

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x, \text{ або } dy = f'(x) \cdot dx, \text{ оскільки } dx = \Delta x.$$

Для достатньо малих значень Δx приріст $\Delta y \approx dy$.

Дістанемо формулу наближеного обчислення значень функції:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x.$$

Приклад 2.3. Користуючись поняттям диференціала, знайти наближене значення функції

$$y = \sqrt[5]{\frac{2-x}{2+x}} \text{ в точці } x = 0,15.$$

Розв'язання. Щоб скористатися формулою наближеного обчислення візьмемо за $x = 0$, а $\Delta x = 0,15$. Тоді

$$y' = \frac{1}{5} \left(\frac{2-x}{2+x} \right)^{-\frac{4}{5}} \cdot \left(\frac{2-x}{2+x} \right)' = \frac{1}{5} \sqrt[5]{\left(\frac{2+x}{2-x} \right)^4} \cdot \frac{(-4)}{(2+x)^2};$$

$$y'(0) = -\frac{1}{5}, \quad dy = -\frac{1}{5} \cdot 0,15 = -0,03.$$

Остаточно, маємо

$$y(0,15) \approx y(0) + dy = 1 - 0,03 = 0,97.$$

Значення $y(0,15) \approx 0,97039$ з точністю до 10^{-5} .

Бачимо, що ми отримали результат з точністю до 10^{-3} .

Точки локального максимуму і локального мінімуму називаються точками локального екстремуму. Точки, в яких похідна $f'(x)$ дорівнює нулю або не існує, називаються критичними точками.

Необхідна умова екстремуму:

в точках екстремуму похідна $f'(x)$ дорівнює нулю або не існує.

Достатні умови екстремуму функції:

I. Нехай функція f неперервна в деякому околі точки x_0 .

1) якщо при переході через точку x_0 похідна змінює знак з + на —, то в точці x_0 функція досягає максимуму;

2) якщо при переході через точку x_0 похідна змінює знак з — на +, то в точці x_0 функція досягає мінімуму;

3) якщо при переході через точку x_0 похідна не змінює знаку, то екстремуму немає.

II. Нехай в критичній точці x_0 функція f двічі диференційована (це означає, що $f'(x_0) = 0$) і в околі точки x_0 існує друга неперервна похідна, причому $f''(x_0) \neq 0$.

Якщо $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка локального максимуму; якщо $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка локального мінімуму.

Інтервали опуклості і вгнутості знаходять з умови.

Нехай функція $y = f(x)$ є двічі диференційованою на $(a; b)$, тоді:

1) якщо на $(a; b)$ $f''(x) < 0$, то крива $y = f(x)$ там опукла;

2) якщо на $(a; b)$ $f''(x) > 0$, то крива $y = f(x)$ там вгнута.

Якщо $f''(x_0) = 0$, або не існує, але $f'(x_0)$ існує і при цьому, друга похідна $f''(x)$ змінює знак при переході через точку x_0 , то точка $(x_0; f(x_0))$ є точкою перегину кривої.

Точка перегину відділяє опуклу частину кривої від вгнутої, або навпаки.

Пряма лінія називається асимптотою для кривої $y = f(x)$, якщо відстань від точки M , що лежить на кривій, до цієї прямої прямує до нуля при русі точки M вздовж якої-небудь гілки кривої в нескінченність.

Є три види асимптот: вертикальні, горизонтальні і похилі:

1) якщо хоча б одна із односторонніх границь функції f в точці x_0 дорівнює нескінченності, тобто точка x_0 є точкою

розриву першого роду функції, то пряма $x = x_0$ — вертикальна асимптота;

2) якщо $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = A$, то пряма $y = A$ — горизонтальна асимптота (права при $x \rightarrow +\infty$ і ліва при $x \rightarrow -\infty$);

3) якщо існують границі

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k_1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - k_1 x) = b_1,$$

то пряма $y = k_1 x + b_1$ — права похила асимптота.

Якщо існують границі

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = k_2, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - k_2 x) = b_2,$$

то пряма $y = k_2 x + b_2$ — ліва похила асимптота.

Загальне дослідження функцій та побудову їх графіків

зручно виконувати, наприклад, за такою схемою:

- 1) знайти область існування функції;
- 2) дослідити функцію на періодичність, парність і непарність;
- 3) знайти точки розриву та дослідити їх;
- 4) знайти асимптоти графіка функції;
- 5) знайти інтервали монотонності, точки локальних екстремумів та значення функції в цих точках;
- 6) знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину, обчислити значення функції в цих точках;
- 7) знайти точки перетину графіка функції з координатними осями.
- 8) побудувати графік функції, враховуючи дослідження, проведені в п. 1) – 7).

Приклад 2.4. Дослідити та побудувати графік функції

$$y = \frac{x^3}{1 - x^2}.$$

Розв'язання. 1) Область існування — вся числова вісь, крім точок $x = \pm 1$.

2) Функція не періодична. Оскільки

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{1-(-x)^2} = -\frac{x^3}{1-x^2} = -f(x),$$

то функція непарна, тому досліджуватимемо її лише для $x \geq 0$.

3) Функція в точці $x=1$ має розрив другого роду і

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^3}{1-x^2} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^3}{1-x^2} = +\infty.$$

4) З п. 3) випливає, що пряма $x=1$ – права вертикальна асимптота кривої. Аналогічно, пряма $x=-1$ буде лівою вертикальною асимптотою кривої. Дослідимо криву на наявність похилої асимптоти. Оскільки

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{(1-x^2) \cdot x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x-x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2}-1} = -1, \\ b &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3}{1-x^2} - (-1) \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{1-x^2} = 0, \end{aligned}$$

то при $x \rightarrow \pm\infty$ задана крива має похилу асимптоту $y = -x$

Горизонтальних асимптот немає, оскільки

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{1-x^2} = \pm\infty.$$

5) Похідна $y' = \frac{x^2 \cdot (3-x^2)}{(1-x^2)^2}$ дорівнює нулю при $x=0$ і

$x = \pm\sqrt{3}$ та не існує в точках $x = \pm 1$, але останні не входять в область визначення, тому критичними точками функції є точки $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = +\sqrt{3}$.

На інтервалі $(0; +\infty)$ маємо:

якщо $x \in (0; 1)$, то $f'(x) > 0$ – функція зростає;

якщо $x \in (1; \sqrt{3})$, то $f'(x) > 0$ – функція зростає;

якщо $x \in (\sqrt{3}; +\infty)$, то $f'(x) < 0$ – функція спадає;

в точці $x_3 = +\sqrt{3}$ функція має локальний максимум:

$$y_{\max} = f(\sqrt{3}) \approx -2,6;$$

відповідно в точці $x_1 = -\sqrt{3}$ функція має локальний мінімум:

$$y_{\min} = f(-\sqrt{3}) \approx 2,6.$$

б) Знаходимо другу похідну: $y'' = \frac{2x(x^2 + 3)}{(1 - x^2)^3}$.

Похідна $f''(x) = 0$ при $x = 0$ і не існує при $x = \pm 1$.

Оскільки точки $x = \pm 1$ не входять в область визначення, то $x = 0$ – єдина критична точка. Маємо:

якщо $x \in (-1; 0)$, то $f''(x) < 0$ – крива опукла;

якщо $x \in (0; 1)$, то $f''(x) > 0$ – крива вгнута;

якщо $x \in (1; +\infty)$, то $f''(x) < 0$ – крива опукла;

точка $O(0; 0)$ – точка перегину.

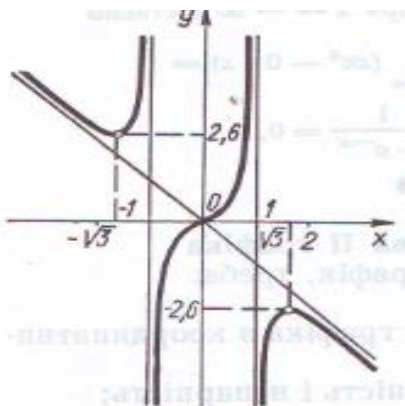


Рис. 1.

7) Якщо $x = 0$, то $y = 0$, тому графік перетинає осі координат в точці $O(0; 0)$.

8) Враховуючи проведенне дослідження і непарність функції, будуємо графік (рис. 1).

3. Завдання для самостійної роботи

Завдання 3.1. Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопітала.

1. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 - 2x}{5x^3 - 3x^2 + xx + 4};$

2. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 - 3x^2 + 5}{3x^5 + 4x^2 - x};$

б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 - 4x - 4};$

б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - x - 6};$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}};$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{7-x} - \sqrt{7+x}}{\sqrt{7} x};$

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2};$

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x + \sin 2x}{6x};$

д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x} \right)^{2x+1}.$

д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{2x}.$

3. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^6 - x + 5}{x^6 + 3x^2 + 1};$

4. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^5 - 4x^2 + x}{2x^5 + 2x - 3};$

б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{3x^2 - 8x - 3};$

б) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 14x - 5}{x^2 - 7x + 10};$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + 1} - 1};$

в) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}};$

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{7x \sin 3x};$

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^2 \sin x};$

$$д) \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \frac{3x-1}{3x+2}.$$

$$д) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+8} \right)^{-3x}.$$

$$5. а) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 2x^2 + 4x}{2x^3 + 1};$$

$$6. а) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^4 + x^2 + x}{x^4 + 3x + 2}$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 + 6x - 16};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 7x + 6}{2x^2 + 5x - 7};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{\sqrt{3x+10} - 4};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 16} - 4}{\sqrt{x^2 + 1} - 1};$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 0} \sin 7x \operatorname{ctg} 5x;$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2(x-1)}{3x^2 - 6x + 3};$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{x^{\frac{5}{2}+2}}.$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 0} (1+2 \sin x)^{\frac{5}{\sin x}}.$$

$$7. а) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^4 + 6x^2 + 5}{4x^4 - 5x^2 + 3x};$$

$$8. а) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{6x^2 + 4x + 1};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 - x - 14}{x^2 + 8x + 12};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{2x^2 - 11x + 5};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{\sqrt{x-1} - 2};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4x-3} - 3}{x^2 - 9};$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{4x \sin x};$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} 3x}{1 - \cos 6x};$$

$$д) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{2x-3}.$$

$$д) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{\frac{3}{\cos x}}.$$

$$9. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 9}{7x^2 + 10x + 5};$$

$$10. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 10x^2 - 3}{2x^5 - x^3 + 8};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 - 7x + 6}};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{3x^2 + 10x + 3}{2x^2 + 5x - 3};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 6} \frac{2x^2 - 72}{x^2 - 7x + 6};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x^2 + 4}}{3x^2};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{3x \sin x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 6x}{3x \sin 6x};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} 3x [\ln(x+4) - \ln x].$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{1+2x} \right)^{-4x}.$$

$$11. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 - 4x^2 + 1}{2x^5 - 5x^2 - x};$$

$$12. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^5 + 1}{3x^5 - 2x + 3};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + x - 2};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 14x - 5}{x^2 - 6x + 5};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x+1} - 4}{x-3};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x+4} - 3}{\sqrt{2x-1} - 1};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 4x}{x \sin 3x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{4x};$$

$$\text{д) (11) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x+3) [\ln(2+4x) - \ln(1+4x)];$$

$$\text{д) (12) } \lim_{x \rightarrow 2} (7-3x)^{\frac{x}{2x-4}}.$$

$$13. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 - 3x^2 - 2}{2x^6 + 4x + 5};$$

$$14. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 5}{3x^3 + 2x^2 - x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 2x - 3};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2x^2 - 13x - 7}{x^2 - 9x + 14};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{2x + 1} - 3};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{4x + 1} - 3};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} x \sin 2x \cdot \operatorname{ctg}^2 5x;$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 7x;$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5)^{\frac{x^2}{x-2}};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 3} (3x - 8)^{\frac{2}{x-3}}.$$

$$15. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 3x^2 - 1}{2x^3 - 3x + 1};$$

$$16. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{5x^4 - 3x - 2};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 3x + 2};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - 5x + 6};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 + 3x} - \sqrt{4 - 3x}}{7x};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{\sqrt{2x-1} - 3};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \sin 3x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{5x};$$

$$\text{д) (15) } \lim_{x \rightarrow \infty} (2x + 3) [\ln(x + 2) - \ln(x + 3)];$$

$$\text{д) (16) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x + 5) [\ln(2x - 3) - \ln(2x)].$$

$$17. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^5 - 4x^4 + 2}{3x^5 - 2x - 1};$$

$$18. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^3 - 2x^2 - 1};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 11x + 5}{x^2 - 7x + 10};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{2x^2 - 9x - 18}{x^2 - 7x + 6};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - 3}{x^2 + x};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x+10} - 4}{x-2};$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x \operatorname{tg} 2x};$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 0} \sin 5x \cdot \operatorname{ctg} 3x;$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 2} (2x-3)^{\frac{x^2}{x-2}}.$$

$$д) \lim_{x \rightarrow \infty} 3x [\ln(2x) - \ln(2x-3)].$$

$$19. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^5 - 3x^2 + 1}{2x^5 - 2x + 3};$$

$$20. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2}{2x^3 - 5x^2 - x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\operatorname{arctg} 6x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x + 1}{2x^2 + 5x + 3};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{4x-3} - 3};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{4x};$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{3x^2 - 17x - 28}{x^2 - 9x + 14};$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{\sqrt{x-2} - 1};$$

$$д) (19) \lim_{x \rightarrow \infty} (x+2) [\ln(x-1) - \ln(x+1)];$$

$$д) (20) \lim_{x \rightarrow \infty} (2x+1) [\ln(x+3) - \ln(x)].$$

$$21. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^3 - 4x^2 + 1}{6x^3 + 3x + 2};$$

$$22. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 14x^2}{1 + 2x + 7x^2};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 8x - 3}{2x - 6};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 25}{x^2 + 8x + 15};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x-7}{\sqrt{2x+11}-5};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{6x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \sin 2x \cdot \operatorname{ctg} x;$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1-\sqrt{x-3}}{2-\sqrt{x}};$$

$$\text{д) (21) } \lim_{x \rightarrow 1} (3x-2)^{\frac{x}{x-1}};$$

$$\text{д) (22) } \lim_{x \rightarrow \infty} (2x-7) [\ln(x+4) - \ln(x)].$$

$$\text{23. а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+6x-5}{5x^2-x-1};$$

$$\text{24. а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3-2x+1}{5x^3+4x+3};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{7x^2+23x+6}{x^2+8x+15};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2+x}-2}{x-2};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4x}\right)^x;$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{54x}{\operatorname{arctg} x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 5x}{\operatorname{tg}^2 3x};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{1}{x}}.$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2 - x + 1}\right).$$

$$\text{25. а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+1}{2x^3+1};$$

$$\text{26. а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-5x+1}{2x^3+5x^2-x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2+3x+1}{2x^2+5x+3};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2} \right)^x;$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{4x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{\sqrt{x-2} - 1};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1+x^2}}{x^2}.$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} (2x+1) [\ln(x+3) - \ln(x)].$$

$$27. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{5x^2 - x - 1};$$

$$28. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x - 5};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-2} - 2}{\sqrt{2x+5} - 3};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 7x + 10}{2x^2 + 9x + 10};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 14x - 5}{x^2 - 2x - 15};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 5x}{x^2};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{ctg} 2x}{\sin 3x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1 - \sqrt{x-4}}{2 - \sqrt{2x-6}};$$

$$\text{д) (27) } \lim_{x \rightarrow \infty} (3x+2) [\ln(x+1) - \ln(x)];$$

$$\text{д) (28) } \lim_{x \rightarrow \infty} (2x-3) [\ln(x-2) - \ln(x+1)].$$

$$29. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 5x^2 - 3}{5x^4 - 2x^3 - 4x};$$

$$30. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x + 1}{2x^3 + 3x^2 + 1};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 - x - 1};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 7x - 4}{2x^2 - 13x + 20};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^5 x}{x^2};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\arcsin x};$$

$$г) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{5+x}-2};$$

$$г) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3-\sqrt{x+11}}{2-\sqrt{x+6}};$$

$$д) (29) \lim_{x \rightarrow \infty} (x+2) [\ln(2x+1) - \ln(2x-1)];$$

$$д) (30) \lim_{x \rightarrow \infty} (x-5) [\ln(x-3) - \ln x].$$

Завдання 3.2. Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ заданих функцій.

$$1. а) y = \sqrt[3]{x^4 + 5x};$$

$$б) y = \frac{1 + tg x}{1 - tg x};$$

$$в) y = x^{\frac{2}{x}};$$

$$г) y = \arctg \sqrt{x} - \sqrt{x};$$

$$д) x \sin y - y \cos x = 0;$$

$$е) \begin{cases} x = t - \ln t, \\ y = 3t^2 - 2t^3. \end{cases}$$

$$2. а) y = \frac{x}{\sqrt[3]{2+x^3}} - \sqrt{2+x};$$

$$б) y = \sin^3 2x;$$

$$в) y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2};$$

$$г) y = x^{e^x};$$

$$д) e^{xy} - x^2 + y^2 = 0;$$

$$е) \begin{cases} x = t + \ln \cos t, \\ y = t - \ln \sin t. \end{cases}$$

$$3. а) y = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}};$$

$$б) y = e^{1+\ln x};$$

$$\text{в) } y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x};$$

$$\text{г) } y = x^{\operatorname{arcsin} x};$$

$$\text{д) } y \sin x + \cos x = \cos y;$$

$$\text{е) } \begin{cases} x = 2t - \sin 2t, \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$$

$$4. \text{ а) } y = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x}};$$

$$\text{б) } y = \operatorname{tg} \ln \sqrt{x};$$

$$\text{в) } y = 3^{\cos x};$$

$$\text{г) } y = x^{e-x};$$

$$\text{д) } \cos(x-y) - 2x + 4y = 0;$$

$$\text{е) } \begin{cases} x = t + 0,5 \sin 2t, \\ y = \cos^2 t. \end{cases}$$

$$5. \text{ а) } y = x + \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}};$$

$$\text{б) } y = \sin \sqrt{1+x^2};$$

$$\text{в) } y = \ln \operatorname{ctg} \sqrt[3]{x};$$

$$\text{г) } y = x^{\frac{1}{x^2}};$$

$$\text{д) } x e^y + y e^y = x y;$$

$$\text{е) } \begin{cases} x = t^3 + 2t, \\ y = t^2 + 8t - 1. \end{cases}$$

$$6. \text{ а) } y = \frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}};$$

$$\text{б) } y = \cos \ln^2 x;$$

$$\text{в) } y = (e^{\sin x} - 1)^2;$$

$$\text{г) } y = 2x^{\sqrt{x}};$$

$$\text{д) } \cos(xy) = \frac{y}{x};$$

$$\text{е) } \begin{cases} x = 0,25t^4 + 0,5t^2 + t \\ y = 0,5t^2 + \frac{1}{t}. \end{cases}$$

$$7. \text{ а) } y = \frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}} + \frac{5}{\sqrt[4]{(x^3+2)^3}}; \quad \text{б) } y = \cos \ln^2 x;$$

$$\text{в) } y = (e^{\sin x} - 1)^2;$$

$$\text{г) } y = 2x^{\sqrt{x}};$$

$$\text{д) } \cos(xy) = \frac{y}{x};$$

$$\text{е) } \begin{cases} x = \arcsin(t^2 - 1), \\ y = \arccos 2t. \end{cases}$$

$$\mathbf{8.} \text{ а) } y = x \sqrt[3]{\frac{2}{1+x}};$$

$$\text{б) } y = \frac{1 + \sin 3x}{1 - \sin 3x};$$

$$\text{в) } y = 2^{\frac{1-x}{1+x}};$$

$$\text{г) } y = (\ln x)^x;$$

$$\text{д) } xy + \ln y - 2 \ln x = 0;$$

$$\text{е) } \begin{cases} x = t^2 + t + 1, \\ y = t^3 + t. \end{cases}$$

$$\mathbf{9.} \text{ а) } y = \sqrt[3]{1+x}\sqrt{x+3};$$

$$\text{б) } y = \sqrt{1 + \ln^2 x};$$

$$\text{в) } y = e^{\frac{1}{x^2}};$$

$$\text{г) } y = (\sin x)^{\cos x};$$

$$\text{д) } e^{x+y} = \sin \frac{y}{x};$$

$$\text{е) } \begin{cases} x = ctg t, \\ y = \frac{1}{\cos^2 t}. \end{cases}$$

$$\mathbf{10.} \text{ а) } y = \frac{\sqrt{1+3x^2}}{2+3x^2};$$

$$\text{б) } y = e^{x^2} \cos^3(2x+3);$$

$$\text{в) } y = x \arctg^3 5x + \ln tg x; \quad \text{г) } y = (\sin 3x)^{\sqrt{x}};$$

$$\text{д) } y \ln x - x \ln y = x + y; \quad \text{е) } \begin{cases} x = \frac{2-t}{2+t^2}, \\ y = \frac{t^2}{2+t^2} \end{cases}$$

$$11. \text{ a) } y = 2\sqrt{4x+3} - \frac{3}{\sqrt{x^3+x+1}}; \text{ б) } y = (e^{\cos x} + 3)^2;$$

$$\text{в) } y = \ln \sin(2x+5); \quad \text{г) } y = x^{x^x};$$

$$\text{д) } \operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right) = 5x; \quad \text{е) } \begin{cases} x = \cos\left(\frac{t}{2}\right), \\ y = t - \sin t. \end{cases}$$

$$12. \text{ а) } y = x^2 \sqrt{1-x^2}; \quad \text{б) } y = \frac{4 \sin x}{\cos^2 x};$$

$$\text{в) } y = \operatorname{arctg} e^{2x}; \quad \text{г) } y = x^{\frac{1}{x}};$$

$$\text{д) } x - y + \operatorname{arctg} y = 0; \quad \text{е) } \begin{cases} x = t^3 + 8t, \\ y = t^5 + 2t. \end{cases}$$

$$13. \text{ а) } y = x \sqrt{\frac{(1+x^2)}{(1-x)}}; \quad \text{б) } y = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 2x};$$

$$\text{в) } y = \arcsin \sqrt{1-3x}; \quad \text{г) } y = x^{\ln x};$$

$$\text{д) } y \sin x = \cos(x-y); \quad \text{е) } \begin{cases} x = \cos\left(\frac{t}{2}\right), \\ y = t - \sin t. \end{cases}$$

$$14. \text{ а) } y = \frac{(3+6x)}{\sqrt{x+5x^2}}; \quad \text{б) } y = x^2 \cos x;$$

$$\text{в) } y = x^m \ln x; \quad \text{г) } y = x^{-\operatorname{tg} x};$$

$$д) \frac{y}{x} = \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{y} \right);$$

$$е) \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$$

$$15. \text{ а) } y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

$$б) y = \frac{\sin^2 x}{(2 + 3 \cos^2 x)};$$

$$в) y = \frac{(x \ln x)}{x - 1};$$

$$г) y = (\operatorname{arctg} x)^{\ln x};$$

$$д) (e^x - 1)(e^y - 1) - 1 = 0;$$

$$е) \begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = \cos t. \end{cases}$$

$$16. \text{ а) } y = \sqrt[3]{\frac{1+x^2}{1-x^2}};$$

$$б) y = \left(\frac{1}{2} \right) \operatorname{tg}^2 x + \ln \cos x;$$

$$в) y = \operatorname{arctg} \frac{x}{1 + \sqrt{1-x^2}};$$

$$г) y = (x + x^2)^x;$$

$$д) x^3 + y^3 - 3axy = 0;$$

$$е) \begin{cases} x = t + \ln \cos t, \\ y = t - \ln \sin t. \end{cases}$$

$$17. \text{ а) } y = 3 \sqrt[3]{x^5 + 5x^4 - \frac{5}{x}};$$

$$б) y = \ln \sqrt{\frac{(1 - \sin x)}{(1 + \sin x)}};$$

$$в) y = \arccos \frac{1}{x};$$

$$г) y = (\sin x)^{\ln x};$$

$$д) x - y + a \sin y = 0;$$

$$е) \begin{cases} x = \ln x, \\ y = \left(\frac{1}{2} \right) \left(t + \frac{1}{t} \right) \end{cases}$$

$$18. \text{ а) } y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}};$$

$$б) y = \sqrt{1 + \ln^2 x};$$

$$\text{в) } y = \ln \arcsin \sqrt{1-x^2}; \quad \text{г) } y = x^{\arctg x};$$

$$\text{д) } y \sin x + \cos(x-y) = \cos y; \quad \text{е) } \begin{cases} x = \text{tg } t + \text{ctg } t, \\ y = 2 \ln \text{ctg } t. \end{cases}$$

$$\mathbf{19.} \quad \text{а) } y = \sqrt{x^2+1} + \sqrt[3]{x^3+1}; \quad \text{б) } y = \frac{1}{3} \text{tg}^3 x - \text{tg } x + x;$$

$$\text{в) } y = \arctg \sqrt{\frac{3-x}{x-2}}; \quad \text{г) } y = (\ln x)^x;$$

$$\text{д) } x - y + e^y \arctg x = 0; \quad \text{е) } \begin{cases} x = at \cos t, \\ y = at \sin t. \end{cases}$$

$$\mathbf{20.} \quad \text{а) } y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\text{б) } y = \frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}};$$

$$\text{в) } y = \arccos e^x;$$

$$\text{г) } y = x^{\arcsin x};$$

$$\text{д) } \ln y = \arctg \frac{x}{y};$$

$$\text{е) } \begin{cases} x = t^2, \\ y = \frac{1}{3} t^3 - t. \end{cases}$$

$$\mathbf{21.} \quad \text{а) } y = \frac{3x-4}{\sqrt{x^3+3x-2}};$$

$$\text{б) } y = (3^{\sin 2x} - \cos^2 2x)^3;$$

$$\text{в) } y = \ln \arcsin \sqrt{1-x^2};$$

$$\text{г) } y = \ln \sqrt[3]{\frac{2-x^2}{x^3-6x}};$$

$$\text{д) } y = (2x+3)^{\text{tg } x};$$

$$\text{е) } \begin{cases} x = t - \ln t, \\ y = 3t^2 - 2t^3. \end{cases}$$

$$22. \text{ a) } y = \frac{2x}{\sqrt{x^3 - 6x - 9}}; \quad \text{б) } y = (3^{\cos 3x} + \sin^2 3x);$$

$$\text{в) } y = \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{2x-1}; \quad \text{г) } y = \ln \sqrt{\frac{x^2+3}{x^3+9x}};$$

$$\text{д) } y = (x^3 + 2)^{\sin x}; \quad \text{е) } \begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$$

$$23. \text{ a) } y = \frac{3x}{\sqrt{x^3 - 4x^2 + 1}}; \quad \text{б) } y = (2^{\arcsin x} + \arccos x)^4;$$

$$\text{в) } y = \ln \operatorname{arctg} \sqrt{x-1}; \quad \text{г) } y = \ln \sqrt[3]{\frac{2x^2-2}{x^3-3x}};$$

$$\text{д) } y = (x^2 + 1)^{\operatorname{arctg} x}; \quad \text{е) } \begin{cases} x = 2t - \sin 2t, \\ y = 8 \sin^3 t. \end{cases}$$

$$24. \text{ a) } y = \frac{4x+1}{\sqrt{x^2 - 16x - 2}}; \quad \text{б) } y = (4^{\operatorname{tg} \sqrt{x}} + \sqrt{x})^3;$$

$$\text{в) } y = \arcsin \sqrt{1 - 4x^2}; \quad \text{г) } y = \ln \sqrt[3]{\frac{3-x^2}{x^3-9x}};$$

$$\text{д) } y = (x + \sin x)^{x^2}; \quad \text{е) } \begin{cases} x = \operatorname{arctg} 3t, \\ y = \ln(1 + 9t^2). \end{cases}$$

$$25. \text{ a) } y = \frac{2x^3 + 5}{\sqrt{x^4 + 2}}; \quad \text{б) } y = (4^{\arccos 2x} - \sqrt{1 - 4x^2})^3;$$

$$\text{в) } y = \ln \sqrt{\frac{1-x^2}{x^3-3x}}; \quad \text{г) } y = \ln \arcsin \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$\text{д) } y = (\operatorname{ctg} x)^{\sec x}; \quad \text{е) } \begin{cases} x = a(\sin t - t \cos t), \\ y = a(\cos t + t \sin t). \end{cases}$$

$$26. \text{ а) } y = \frac{3x-4}{\sqrt{x^2+9x-6}}; \quad \text{б) } y = (5^{\sin^2 x} - \cos 2x)^3;$$

$$\text{в) } y = \ln \cos e^{-4x}; \quad \text{г) } y = \ln \sqrt[3]{\frac{3x^2-2}{3x^2+2}}$$

$$\text{д) } y = (1-x^2)^{\arcsin x}; \quad \text{е) } \begin{cases} x = a \operatorname{tg} t, \\ y = b \operatorname{sect} t. \end{cases}$$

$$27. \text{ а) } y = \frac{x^3-10}{\sqrt{x^4-8x}}; \quad \text{б) } y = (6^{\operatorname{arctg} 3x} + \operatorname{arctg} 3x);$$

$$\text{в) } y = \ln \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{x}}; \quad \text{г) } y = \ln \sqrt[3]{\frac{10-3x^2}{x^3-10x}}$$

$$\text{д) } y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}; \quad \text{е) } \begin{cases} x = \operatorname{ctg} t, \\ y = \sec^2 t. \end{cases}$$

$$28. \text{ а) } y = \frac{5x}{\sqrt{x^2+5x-1}}; \quad \text{б) } y = (3^{\cos 2x} + \cos^2 x)^4;$$

$$\text{в) } y = e^{\operatorname{arctg} \sqrt{x-1}}; \quad \text{г) } y = \ln \sqrt{\frac{5-4x}{x^2+6x-10}};$$

$$д) y = (\arcsin \sqrt{x})^{2\sqrt{x}};$$

$$е) \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

$$29. а) y = \frac{2x+1}{\sqrt[3]{x^3+6x+1}};$$

$$б) y = (5^{tg^2 x} + \sec^2 x)^3;$$

$$в) y = e^{\arccos \sqrt{1-x}};$$

$$г) y = \ln \sqrt[3]{\frac{3x+1}{3x-1}};$$

$$д) y = (\cos 2x)^{tg^2 x};$$

$$е) \begin{cases} x = a \cos^2 t, \\ y = b \sin^3 t. \end{cases}$$

$$30. а) y = \frac{5x-6}{\sqrt[3]{x^3+5x-2}};$$

$$б) y = (3^{ctg^2 x} + \ln \sin x)^3;$$

$$в) y = e^{\operatorname{arctg} \sqrt{4x-1}};$$

$$г) y = \ln \sqrt[3]{\frac{2x^3+1}{2x^3-1}}$$

;

$$д) y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^x;$$

$$е) \begin{cases} x = t^2 + \ln t, \\ y = 2t^3 + 3t. \end{cases}$$

Завдання 3.3. Обчислити наближено за допомогою диференціала значення функції $y = f(x)$ у точці x .

1. $y = \sqrt[3]{x}$; $x = 7,76$. **2.** $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 5}$; $x = 0,97$.

3. $y = \frac{1}{2}(x + \sqrt{5-x^2})$; $x = 0,98$.

4. $y = \sqrt{x^2 + x + 3}$; $x = 1,97$.

5. $y = \arcsin x$; $x = 0,08$. **6.** $y = \sqrt[3]{x}$; $x = 1,21$.

7. $y = \sqrt[3]{x}$; $x = 26,46$. **8.** $y = \sqrt[3]{x^2}$; $x = 1,03$.

9. $y = x^{11}$; $x = 1,021$. **10.** $y = \sqrt[3]{x}$; $x = 8,24$.

11. $y = x^{21}$; $x = 0,998$. **12.** $y = \sqrt[3]{x}$; $x = 7,64$.

13. $y = x^6$; $x = 2,01$. **14.** $y = x^5$; $x = 2,007$.

15. $y = \frac{1}{\sqrt{2x^2 + x + 1}}$; $x = 1,016$.

16. $y = x^7$; $x = 1,996$. **17.** $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; $x = 4,16$.

18. $y = \sqrt{4x+1}$; $x = 2,06$. **19.** $y = \sqrt{4x-3}$; $x = 1,08$.

20. $y = \sqrt[3]{x}$; $x = 8,36$.

21. $y = x^7$; $x = 2,002$. **22.** $y = x^6$; $x = 0,999$.

23. $y = \sqrt{x^3}$; $x = 0,98$. **24.** $y = \sqrt{1+x+\sin x}$; $x = 0,01$

25. $y = \sqrt[5]{x^2}$; $x = 1,03$. **26.** $y = \sqrt[3]{3x+\cos x}$; $x = 0,01$.

27. $y = \sqrt[3]{x^3+7x}$; $x = 1,012$. **28.** $y = \sqrt{x^2+5}$; $x = 1,97$.

29. $y = \sqrt{x^3}$; $x = 27,54$. **30.** $y = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$; $x = 1,41$.

Завдання 3.4. Дослідити функції та побудувати їхні графіки.

1. а) $y = \frac{x}{x^2+1}$;

б) $y = \frac{e^x}{x}$.

2. а) $y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$;

б) $y = \ln(2x^2+3)$.

$$3. \text{ a) } y = \frac{x}{(x-1)^3};$$

$$6) y = x^3 e^{-x}.$$

$$4. \text{ a) } y = \frac{2x-1}{(x-1)^2};$$

$$6) y = \frac{1}{e^x - 1}.$$

$$5. \text{ a) } y = \frac{x^2}{x^2 - 1};$$

$$6) y = x - \ln(x+1).$$

$$6. \text{ a) } y = \frac{x^3}{2(x+1)^2};$$

$$6) y = e^{\frac{1}{x+2}}.$$

$$7. \text{ a) } y = \frac{x^2 + 16}{x};$$

$$6) y = \frac{1}{e^{2x} - 1}.$$

$$8. \text{ a) } y = \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2;$$

$$6) y = x^2 \ln x.$$

$$9. \text{ a) } y = \frac{x^3 - 1}{4x^2};$$

$$6) y = \ln \frac{x+1}{x+2}.$$

$$10. \text{ a) } y = \frac{2}{x^2 + x + 1};$$

$$6) y = x - \ln x.$$

$$11. \text{ a) } y = \frac{x^2 + 1}{x};$$

$$6) y = \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

$$12. \text{ a) } y = \frac{1}{1+x^2};$$

$$6) y = x e^{-x}.$$

$$13. \text{ a) } y = \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1};$$

$$6) y = e^{\frac{1}{x}}.$$

$$14. \text{ a) } y = \frac{x^3 + 1}{x^2};$$

$$6) y = \frac{\ln x}{x}.$$

$$15. \text{ a) } y = \frac{x}{3-x^2};$$

$$6) y = x \ln x.$$

$$16. \text{ a) } y = \frac{1}{1-x^2};$$

$$6) y = \ln(x^2 - 4).$$

$$17. \text{ a) } y = \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^2;$$

$$6) y = x^2 - 2 \ln x.$$

$$18. \text{ a) } y = \frac{x}{(x-1)^2};$$

$$6) y = (x-1) \cdot e^{3x+1}.$$

$$19. \text{ a) } y = \frac{x^3}{x^2+1};$$

$$6) y = (2+x^2)e^{-x^2}.$$

$$20. \text{ a) } y = \frac{x^3}{2(x+1)^2};$$

$$6) y = x + \ln(x^2 - 1).$$

$$21. \text{ a) } y = \frac{4x}{4+x^2};$$

$$6) y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

$$22. \text{ a) } y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1};$$

$$6) y = \frac{x^2}{x-1}.$$

$$23. \text{ a) } y = \frac{x^3}{x^2 + 1};$$

$$6) y = \frac{4x^3 + 5}{x}.$$

$$24. \text{ a) } y = \frac{x^2 - 5}{x - 3};$$

$$6) y = \frac{x^4}{x^3 - 1}.$$

$$25. \text{ a) } y = \frac{4x^3}{x^3 - 1};$$

$$6) y = \frac{2 - 4x^2}{1 - 4x^2}.$$

$$26. \text{ a) } y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}};$$

$$6) y = xe^{-x^2}.$$

$$27. \text{ a) } y = e^{2x-x^2};$$

$$6) y = x^2 - 2 \ln x.$$

$$28. \text{ a) } y = \ln(x^2 - 4);$$

$$6) y = e^{\frac{1}{2-x}}.$$

$$29. \text{ a) } y = \ln(x^2 + 1);$$

$$6) y = (2 + x^2)e^{-x^2}.$$

30. а) $y = \ln(9 - x^2)$; б) $y = (x - 1)e^{3x+1}$.

Список рекомендованої літератури

1. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика : навч. посібник К. : А.С.К., 2006. 648 с.

2. Шкіль М. І., Колесник Т. В., Котлова В. М. Вища математика : підручник: у 3-х кн., Кн. 1.: Аналітична геометрія з елементами алгебри. Вступ до математичного аналізу. К. : Либідь, 1994. 280 с.

3. Пасічник Я. А. Вища математика : підручник. Острог : Видавництво Національного університету «Острозька академія», 2021. 432 с.

4. Пак В., Носенко Ю. Вища математика : підручник. К. : Либідь, 1996. 440 с.

5. Збірник задач з математичного аналізу. Част. 1 / Рудавський Ю. К. та ін. Львів : Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2008. 352 с.

6. Ярмуш Я. І., Самолюк І. В. Вища математика. Практикум : навч. посіб. Рівне : НУВГП, 2015. 148 с. URL: <http://ep3.nuwm.edu.ua/id/eprint/5632>