

Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та
природокористування
Навчально-науковий механічний інститут
Кафедра теоретичної механіки, інженерної графіки
та машинознавства



02-05-162М

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для практичних занять з дисципліни «Теорія механізмів і машин» на тему: «Кінематика простих і складних зубчастих механізмів» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою «Створення та експлуатація машин і обладнання» спеціальності 133 «Галузеве машинобудування» денної та заочної форм навчання



Рекомендовано
науково-методичною
радою з якості ННМІ
Протокол № 4
від 31 грудня 2024 р.

Рівне – 2025

Методичні вказівки для практичних занять з дисципліни «Теорія механізмів і машин» на тему: «Кінематика простих і складних зубчастих механізмів» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою «Створення та експлуатація машин і обладнання» спеціальності 133 «Галузеве машино-будування» денної та заочної форм навчання [Електронне видання] / Стрілець О. Р., Похильчук І. О. – Рівне : НУВГП, 2025. – 12 с.

Укладачі: Стрілець О. Р., кандидат технічних наук, доцент кафедри теоретичної механіки, інженерної графіки та машинознавства; Похильчук І. О., кандидат технічних наук, доцент кафедри теоретичної механіки, інженерної графіки та машинознавства.

Відповідальний за випуск: Козяр М. М., доктор педагогічних наук, доцент, завідувач кафедри теоретичної механіки, інженерної графіки та машинознавства.

Керівник групи забезпечення спеціальності 133 «Галузеве машинобудування»

Тхорук Є. І.

З М І С Т

Вступ.....	3
1. Кінематика простих зубчастих механізмів.....	4
2. Кінематика складних зубчастих механізмів з нерухомими осями.....	5
3. Кінематика планетарних зубчастих механізмів.....	7
4. Визначення передаточного відношення планетарної передачі графічним методом.....	11
Література.....	12

© О. Р. Стрілець,
І. О. Похильчук, 2025
© Національний університет
водного господарства та
природокористування, 2025

ВСТУП

Зубчасті механізми (передачі) призначені для передачі обертового руху від одного вала на інший із заданим відношенням кутових швидкостей. Ці механізми широко застосовуються в якості передавального механізму в машинних агрегатах: транспортних машинах, прокатних станах, автомобілях, металообробних верстатах, сільськогосподарських і меліоративних машинах та ін.

Основною кінематичною характеристикою зубчастих механізмів є передаточне відношення: відношення кутової швидкості ведучої ланки до кутової швидкості веденої ланки. Завдання дисципліни ТММ навчити студентів визначати передаточні відношення простих та складних зубчастих механізмів.

Проста зубчаста передача складається зі стояка та двох зубчастих коліс, менше з двох називається шестерня, більше – зубчасте колесо. Для передачі обертового руху між паралельними валами застосовують циліндричні зубчасті передачі, які бувають із зовнішнім та внутрішнім зачепленням. Між валами, що перетинаються – конічні, а між валами, що перехрещуються – черв'ячні, гіпоідні, гвинтові. Ці передачі здатні задовільняти обмежені відношення кутових швидкостей. Для відтворення більших значень передаточних відношень використовують складні зубчасті механізми.

Складний зубчастий механізм складається зі стояка та трьох і більше зубчастих коліс. За конструкцією вони діляться на зубчасті передачі з нерухомими осями: рядні та ступінчасті та зубчасті передачі з рухомими осями: планетарні та диференціальні.

Дані методичні вказівки дозволяють студентам денної та заочної форм навчання *знати* методи визначення передаточних відношень та *уміти* самостійно визначати передаточні відношення найбільш розповсюджених зубчастих механізмів.

Зміст методичних вказівок повністю відповідає освітньо-професійній програмі «Створення та експлуатація машин і обладнання» за спеціальністю 133 «Галузеве машинобудування».

1. КІНЕМАТИКА ПРОСТИХ ЗУБЧАСТИХ МЕХАНІЗМІВ

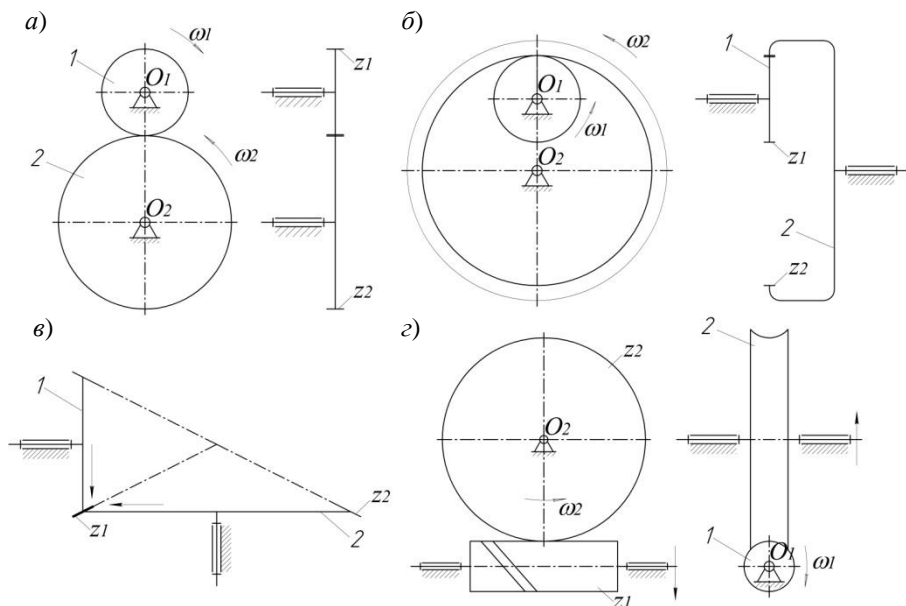


Рис. 1. Одноступінчасті зубчасті передачі:

a – циліндрична з зовнішнім зачепленням; *б* – циліндрична з внутрішнім зачепленням; *в* – конічна; *г* – черв'ячна

Для одноступінчастих зубчастих передач передаточне відношення визначається:

$$u_{12} = \pm \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{z_2}{z_1}, \quad (1)$$

де ω_1 , ω_2 – кутова швидкість ведучої та веденої ланок відповідно, рад/с; z_1 , z_2 – число зубів ведучої та веденої ланок (для черв'ячної передачі z_1 – число заходів черв'яка).

Примітка. Для циліндричної передачі з зовнішнім зачепленням приймається знак «-», для циліндричної передачі з внутрішнім зачепленням – знак «+». Для одноступінчатої конічної та черв'ячної передач передаточне відношення визначається без врахування знаку.

Приклад 1. Для циліндричної зубчатої передачі з зовнішнім зачепленням (рис.1, *a*) визначити передаточне відношення, якщо:

$$\omega_1 = 300 \text{ рад/с}, \quad \omega_2 = 50 \text{ рад/с}.$$

Згідно (1):

$$u_{12} = -\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{300}{50} = -6.$$

Знак «-» означає, що зубчасті колеса обертаються у різні сторони.

Приклад 2. Для циліндричної зубчастої передачі з внутрішнім зачепленням (рис.1, б) визначити передаточне відношення, якщо: $z_1 = 20$, $z_2 = 120$.

Згідно (1):

$$u_{12} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{120}{20} = 6.$$

Знак «+» означає, що зубчасті колеса обертаються в одну сторону.

Приклад 3. Для конічної зубчастої передачі (рис.1, в) визначити кутову швидкість зубчастого колеса, якщо: $z_1 = 20$, $z_2 = 120$, $\omega_1 = 300 \text{ рад/с}$.

Згідно (1):

$$u_{12} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{120}{20} = 6, \text{ тоді } \omega_2 = \frac{\omega_1}{u_{12}} = \frac{300}{6} = 50 \text{ рад/с}.$$

Приклад 4. Для черв'ячної передачі (рис.1, г) визначити число зубів черв'ячного колеса, якщо: $z_1 = 2$, $\omega_1 = 300 \text{ рад/с}$, $\omega_2 = 5 \text{ рад/с}$.

Згідно (1):

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{300}{5} = 60, \text{ тоді } z_2 = u_{12} \cdot z_1 = 60 \cdot 2 = 120.$$

2. КІНЕМАТИКА СКЛАДНИХ ЗУБЧАСТИХ МЕХАНІЗМІВ З НЕРУХОМИМИ ОСЯМИ

Передаточне відношення складного зубчастого механізму з нерухомими осями дорівнює добутку передаточних відношень простих зубчастих механізмів, що входять до його складу.

$$u_{1n} = u_{12} \cdot u_{23} \cdot u_{34} \cdot \dots \cdot u_{(n-1)n}, \quad (2)$$

де n – число рухомих ланок (валів на яких встановлені зубчасті колеса).

Можливі два види з'єднання: послідовне (рис.2, а) та паралельне (рис.2, б). При послідовному з'єднанні (рядні зубчасті механізми) величина передаточного відношення залежить лише від числа зубів ведучої (вхідної) 1 та вихідної 3 ланок. Проміжне (паразитне) зубчасте колесо 2 забезпечує збільшення відстані на яку передається обертовий рух та напрям обертання вхідного 1 і вихідного 3 валів. При паралельному з'єднанні (ступінчасті зубчасті механізми) – величина передаточного відношення залежить від числа зубів усіх ланок.

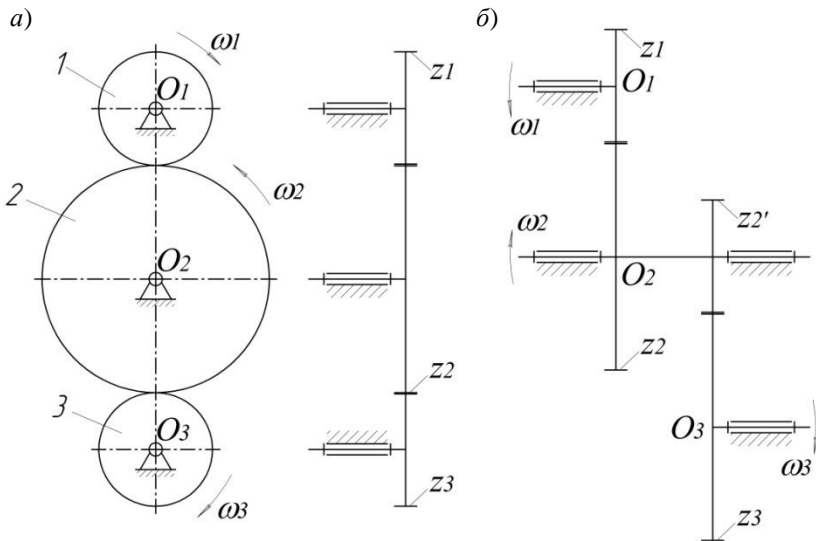


Рис. 2. Складні зубчасті механізми з нерухомими осями:

а – з послідовним з'єднанням (рядні); *б* – з паралельним з'єднанням (ступінчасті)

Приклад 5. Для зубчастого механізму (рис.2, а) визначити загальне передаточне число та відстані між осями зубчастих коліс 1 та 2, 2 та 3, якщо: $z_1 = 20$, $z_2 = 60$, $z_3 = 30$, $m = 5\text{мм}$.

Згідно (2), враховуючи, що зубчасті колеса утворюють зовнішні зачеплення:

$$u_{13} = u_{12} \cdot u_{23} = -\frac{z_2}{z_1} \cdot \left(-\frac{z_3}{z_2}\right) = \frac{z_3}{z_1} = \frac{30}{20} = 1,5.$$

Знак «+» означає, що зубчасті колеса 1 та 3 обертаються в одну сторону.

Відстань між осями зубчастих коліс визначається:

$$a_w = \frac{m}{2}(z_1 + z_2), \quad (3)$$

де m – модуль зубчастих коліс, мм; z_1, z_2 – числа зубів коліс передачі.

тоді

$$a_{o_1o_2} = \frac{m}{2}(z_1 + z_2) = \frac{5}{2}(20 + 60) = 200 \text{ мм},$$

$$a_{o_2o_3} = \frac{m}{2}(z_2 + z_3) = \frac{5}{2}(60 + 30) = 225 \text{ мм}.$$

Приклад 6. Для зубчастого механізму (рис.2, б) визначити загальне передаточне число та відстані між осями 1 та 2, 2 та 3, якщо: $z_1 = 20$, $z_2 = 80$, $z_2' = 30$, $z_3 = 90$, $m = 5 \text{ мм}$.

Згідно (2), враховуючи, що зубчасті колеса утворюють зовнішні зачеплення:

$$u_{13} = u_{12} \cdot u_{23} = -\frac{z_2}{z_1} \cdot \left(-\frac{z_3}{z_2'} \right) = \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2'} = \frac{80 \cdot 90}{20 \cdot 30} = 12.$$

Знак «+» означає, що зубчасті колеса 1 та 3 обертаються в одну сторону.

$$a_{o_1o_2} = \frac{m}{2}(z_1 + z_2) = \frac{5}{2}(20 + 80) = 250 \text{ мм},$$

$$a_{o_2o_3} = \frac{m}{2}(z_2' + z_3) = \frac{5}{2}(30 + 90) = 300 \text{ мм}.$$

3. КІНЕМАТИКА ПЛАНЕТАРНИХ ЗУБЧАСТИХ МЕХАНІЗМІВ

Зубчасті механізми, у яких геометрична вісь хоча б одного зубчастого колеса переміщується у просторі, а ступінь рухомості дорівнює одиниці ($W = 1$), називаються *планетарними*.

Передаточне відношення планетарного зубчастого механізму визначається як одиниця мінус передаточне число оберненого механізму. Оберненим називається механізм, який утворюється із

планетарного, після того як в ньому умовно зупиняється водило згідно методу Вілліса.

Для редуктора Джеймса (рис.3, а) передаточне відношення визначається:

$$u_{1H}^3 = 1 - u_{13}^H = 1 - \left(-\frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2} \right) = 1 + \frac{z_3}{z_1}. \quad (3)$$

Для редуктора Давида (рис.3, б):

$$u_{1H}^3 = 1 - u_{13}^H = 1 - \left(-\frac{z_2}{z_1} \cdot \left(-\frac{z_3}{z_2} \right) \right) = 1 - \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2}. \quad (4)$$

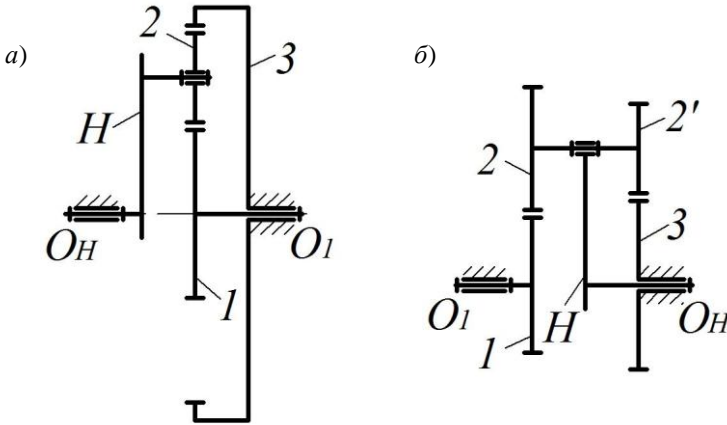


Рис. 3. Зубчасті механізми з рухомими осями (планетарні зубчасті механізми):

а – редуктор Джеймса; б – редуктор Давида

Приклад 7. Для редуктора Джеймса (рис.3, а) визначити кутову швидкість водила та сателіта, якщо: $z_1 = 40$, $z_2 = 20$, $z_3 = 120$, $\omega_1 = 120 \text{ рад/с}$.

Згідно (3), визначаємо загальне передаточне відношення:

$$u_{1H}^3 = 1 - u_{13}^H = 1 - \left(-\frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2} \right) = 1 + \frac{z_3}{z_1} = 1 + \frac{120}{40} = 1 + 3 = 4.$$

Визначаємо кутову швидкість водила:

$$u_{1H}^3 = \frac{\omega_1}{\omega_H} \Rightarrow \omega_H = \frac{\omega_1}{u_{1H}^3} = \frac{120}{4} = 30 \text{ рад/с}.$$

Кутову швидкість сателіта визначаємо враховуючи, що

$$u_{2H}^3 = 1 - u_{23}^H = 1 - \frac{z_3}{z_2} = 1 - \frac{120}{20} = -5.$$

Тоді,

$$u_{2H}^3 = \frac{\omega_2}{\omega_H} \Rightarrow \omega_2 = \omega_H \cdot u_{2H}^3 = 30 \cdot (-5) = -150 \text{ рад/с}.$$

Приклад 8. Для редуктора Давида (рис.3, б) визначити кутову швидкість водила та сателіта, якщо: $z_1 = 40$, $z_2 = 30$, $z_2' = 20$, $z_3 = 60$, $\omega_1 = 120 \text{ рад/с}$.

Згідно (3), визначаємо загальне передаточне відношення:

$$u_{1H}^3 = 1 - u_{13}^H = 1 - \left(-\frac{z_2}{z_1} \cdot \left(-\frac{z_3}{z_2'} \right) \right) = 1 - \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2'} = 1 - \frac{30 \cdot 60}{40 \cdot 20} = 1 - \frac{9}{5} = -0,8.$$

Визначаємо кутову швидкість водила:

$$u_{1H}^3 = \frac{\omega_1}{\omega_H} \Rightarrow \omega_H = \frac{\omega_1}{u_{1H}^3} = \frac{120}{(-0,8)} = 150 \text{ рад/с}.$$

Кутову швидкість сателіта визначаємо враховуючи, що

$$u_{2H}^3 = 1 - u_{23}^H = 1 - \left(-\frac{z_3}{z_2'} \right) = 1 + \frac{60}{20} = 4.$$

Тоді,

$$u_{2H}^3 = \frac{\omega_2}{\omega_H} \Rightarrow \omega_2 = \omega_H \cdot u_{2H}^3 = 150 \cdot 4 = 600 \text{ рад/с}.$$

Приклад 9. Для зубчастого механізму (рис.4, а) визначити загальне передаточне відношення, якщо: $z_1 = z_2 = 70$, $z_3 = 45$, $z_3' = 48$, $z_4 = 72$, $z_5 = 75$.

Загальне передаточне відношення буде дорівнювати добутку передаточного відношення простої зубчастої передачі та планетарної передачі:

$$u_{14} = u_{12} \cdot u_{24},$$

$$\text{де } u_{12} = -\frac{z_2}{z_1} = -\frac{70}{70} = -1,$$

$$u_{24} = u_{H4}^5 = \frac{1}{u_{4H}^5} = \frac{1}{1 - u_{45}^H} = \frac{1}{1 - \left(-\frac{z_3'}{z_4} \cdot \left(-\frac{z_5}{z_3} \right) \right)} = \frac{1}{1 - \frac{z_3' \cdot z_5}{z_4 \cdot z_3}} = \frac{1}{1 - \frac{48 \cdot 75}{72 \cdot 45}} = -9.$$

Тоді,

$$u_{14} = (-1) \cdot (-9) = 9.$$

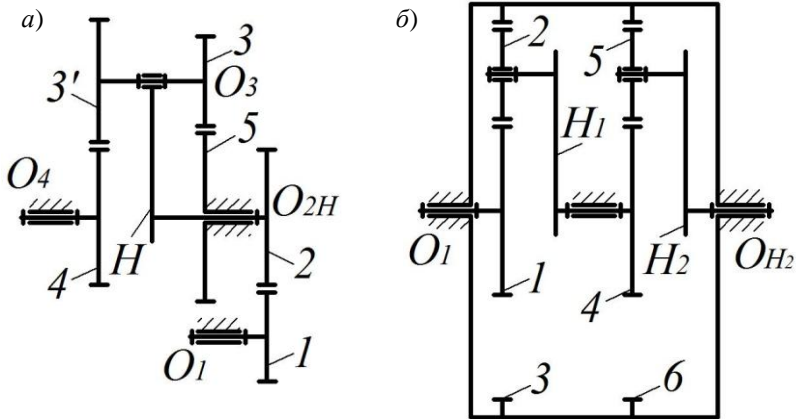


Рис. 4. Схеми складних двохступінчастих зубчастих механізмів:

а – одна ступінь проста, інша планетарна; *б* – обидві ступені планетарні

Приклад 10. Для зубчастого механізму (рис.4, б) визначити загальне передаточне відношення, якщо: $z_1 = 12$, $z_2 = 15$, $z_3 = 41$, $z_4 = 10$, $z_5 = 14$, $z_6 = 38$.

Загальне передаточне відношення буде дорівнювати добутку передаточного відношення окремих планетарних передач, що входять до складу механізму:

$$u_{1H_2} = u_{1H_1}^3 \cdot u_{4H_2}^6 = (1 - u_{13}^{H_1}) \cdot (1 - u_{46}^{H_2}) = \left(1 + \frac{z_3}{z_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{z_6}{z_4}\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{41}{12}\right) \cdot \left(1 + \frac{38}{10}\right) = 21,2.$$

4. ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕДАТОЧНОГО ВІДНОШЕННЯ ПЛАНЕТАРНОЇ ПЕРЕДАЧІ ГРАФІЧНИМ МЕТОДОМ

Передачне відношення планетарної передачі можна визначити графічним методом професора Смирнова. Суть цього методу полягає у побудові плану швидкостей зубчастого механізму. Для прикладу, побудуємо план швидкостей для редуктора Джеймса (рис.3, а). Для цього побудуємо редуктор у масштабі в іншій проекції (рис.5, а).

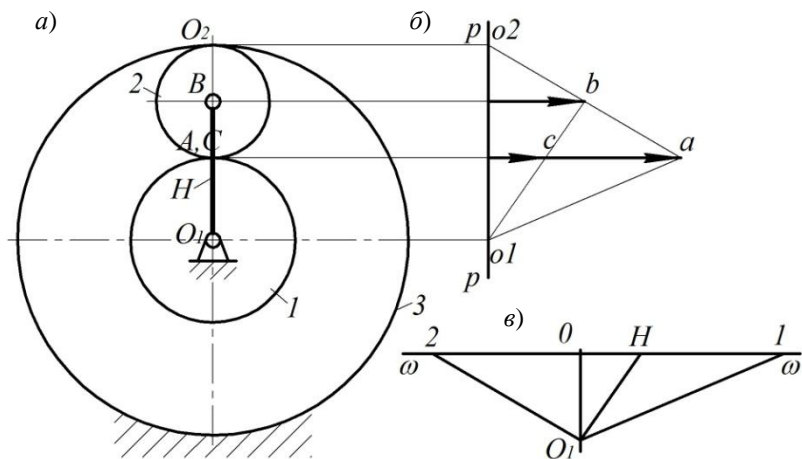


Рис. 5. Визначення передаточного відношення графічним методом:
 а – редуктор Джеймса, вид з боку; б – план швидкостей; в – план обертів (кутових швидкостей)

На деякій відстані від схеми редуктора проводимо полюсну лінію $p-p$. Від неї відкладаємо відрізок pa , який відповідає швидкості т. А, що належить колесу 1 ($v_A = \omega_1 r_1$, де ω_1 – кутова швидкість, r_1 – радіус

початкового кола). Сполучивши точку a з точкою $o1$ на полюсній лінії, отримаємо закон розподілу швидкостей колеса 1 . Точка A також належить сателіту 2 , миттєвим центром швидкостей для якої є т. O_2 . Таким чином лінія $ao2$ буде відображати закон розподілу швидкостей сателіта 2 .

Провівши через т. B горизонталь до перетину із лінією $ao2$, отримаємо швидкість т. B (відрізок pb). Ця точка також належить водилу, тому сполучивши точку b з точкою $o1$ на полюсній лінії, отримаємо закон розподілу швидкостей водила.

Вибравши на водилі т. C на відстані рівній r_1 , можемо записати

$$\text{співвідношення: } \frac{pa}{pc} = \frac{v_A}{v_C} = \frac{\omega_1 r_1}{\omega_H r_1} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = u_{1H}. \text{ Вектори швидкостей } v_A$$

та v_C на плані направлені в одну сторону, це означає, що водило обертається в ту саму сторону, що і колесо 1 .

Лінії $ao1$, $ao2$ та $bo1$ є законами розподілу швидкостей відповідних ланок, тому вони пропорційні кутовим швидкостям цих ланок. Побудуємо план обертів (кутових швидкостей) (рис. 5, в). Проведемо лінію $\omega-\omega$, на довільній відстані від неї вибираємо точку O_1 і проведемо з неї лінії паралельні відповідно відріzkам $ao1$, $ao2$ та $bo1$. На лінії $\omega-\omega$ знайдемо точки 1 , 2 і H . Відрізки $O1$, $O2$ та OH будуть пропорційні кутовим швидкостям колеса 1 , сателіта 2 та водила. Отже, можна визначити передаточні відношення між ланками механізму.

$$u_{1H} = \frac{O1}{OH}, u_{2H} = \frac{O2}{OH}, u_{12} = \frac{O1}{O2}.$$

Література

1. Практикум з курсу «Теорія механізмів і машин» / В. М.Стрілець, Б. І.Червоний, І. Т.Шинкаренко, І. О.Похильчук. Рівне : НУВГП, 2006. 107 с.
2. Червоний Б. І. Теорія механізмів і машин. ІКНМЗ. Рівне: НУВГП, 2006. 160 с.
3. Теорія механізмів і машин. Розв'язання задач : навч. посібн. / Бабенко Є. М., Корнієнко А. О., Башта О. В., Крижановський А. С. Київ : Вид-во Нац. авіац. ун-ту «НАУ-друку», 2010. 120 с.
4. Основи теорії механізмів і машин. Курс лекцій : підручник / Бурлака В. В., Кучеренко С. І., Мазоренко Д. І., Тищенко Л. М. Харків, 2009. 340 с.