Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та природокористування
Навчально-науковий інститут кібернетики, інформаційних технологій та інженерії
Кафедра вищої математики

04-02-69М

МЕТОДИЧН І ВКАЗІВКИ

та завдання до практичних занять та самостійного вивчення навчальної дисципліни **«Вища математика»**
з розділу **«Елементи аналітичної геометрії»**
для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня
за освітньо-професійними програмами спеціальностей
274 «Автомобільний транспорт», 208 «Агроінженерія», 184 «Гірництво», 133 «Галузеве машинобудування»
денної та заочної форм навчання

Рекомендовано
науково-методичною
радою з якості ННМІ
Протокол № 4 від 31.12.2024 р.

Рівне – 2025

Методичні вказівки та завдання до практичних занять та самостійного вивчення навчальної дисципліни **«Вища математика»** з розділу **«Елементи аналітичної геометрії»** для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійними програмами спеціальностей **274 «Автомобільний транспорт», 208 «Агроінженерія», 184 «Гірництво»**, **133 «Галузеве машинобудування»** денної та заочної форм навчання [Електронне видання] / Іващук Я. Г. – Рівне : НУВГП, 2025. – 52 с.

Укладач: Іващук Я. Г., к. ф.-м. н., доцент кафедри вищої математики.

Відповідальний за випуск: Тадеєв П. О., д. пед. н., професор, завідувач кафедри вищої математики.

Керівники груп забезпечення спеціальностей:
274 «Автомобільний транспорт»: Марчук Р. М., к. т. н., доцент;
208 «Агроінженерія»: Бунза О. З., к. т. н., доцент;
184 «Гірництво»: Васильчук О. Ю., к. т. н., доцент.
133 «Галузеве машинобудування»: Тхорук Є. І., к. т. н., доцент.

Голова науково-методичної ради
з якості ННМІ — проф. Марчук М. М.

ЗМІСТ

1. Найпростіші задачі аналітичної геометрії 4

2. Пряма лінія на площині, різні види її рівнянь 5

2.1. Кут між двома прямими. Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих 9

2.2. Відстань від точки до прямої 11

2.3. Зразки розв’язання завдань 12

2.4. Індивідуальні завдання 16

3. Криві другого порядку, їхня форма і канонічні рівняння . . 18

3.1. Коло 18

3.2. Еліпс 19

3.3. Гіпербола 20

3.4. Парабола 21

3.5. Зразки розв’язання завдань 25

3.6. Індивідуальні завдання 27

4. Площина і пряма у тривимірному просторі 33

4.1. Площина в просторі, різні види її рівнянь 33

4.2. Кут між двома площинами. Умова паралельності і перпендикулярності двох площин 36

4.3. Відстань від точки до площини 37

4.4. Пряма в просторі, різні види її рівнянь 38

4.5. Кут між двома прямими. Умова паралельності і перпендикулярності двох прямих 40

4.6. Кут між прямою і площиною. Умова паралельності і перпендикулярності прямої і площини 41

4.7. Відстань від точки до прямої 42

4.8. Зразки розв’язання завдань 43

4.9. Індивідуальні завдання 48

Список рекомендованої літератури 52

1. Найпростіші задачі аналітичної геометрії

Задача1. Відстань між двома точками на площині і в просторі

Нехай у двовимірному просторі R_2 , тобто на площині Oxy задано дві точки $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$. Відстань d між цими точками є довжиною вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ і знаходять її за формулою

$$d = M_1M_2 = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\,.$$

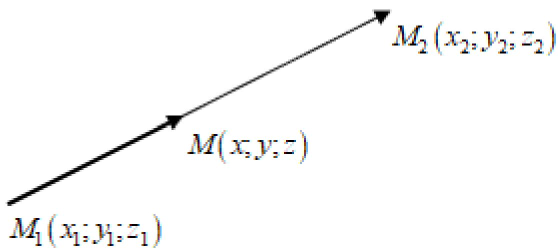


Рис. 1.1

У тривимірному просторі R_3 відстань між точками $M_1(x_1;y_1;z_1)$ і $M_2(x_2;y_2;z_2)$ обчислюється за формулою

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\,.$$

Задача 2. Поділ відрізка у заданому відношенні

Знайдемо на відрізку M_1M_2 таку точку $M(x;y)$, яка ділить цей відрізок у відношенні λ, тобто виконується рівність

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda\cdot\overrightarrow{MM_2}\,.$$

З рівності векторів $\overrightarrow{M_1M} = (x-x_1;y-y_1)$ і $\lambda\cdot\overrightarrow{MM_2} = \lambda\cdot(x_2-x;y_2-y)$ випливають такі рівності:

$$x - x_1 = \lambda \cdot (x_2 - x) \text{ і } y - y_1 = \lambda \cdot (y_2 - y).$$

Звідси отримаємо

$$x + \lambda \cdot x = x_1 + \lambda \cdot x_2 \text{ і } y + \lambda \cdot y = y_1 + \lambda \cdot y_2 .$$

А з останніх рівностей ми отримаємо формули поділу відрізка у заданому відношенні

$$x = \frac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1 + \lambda} \text{ і } y = \frac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1 + \lambda} .$$

При поділі відрізка навпіл, $\lambda = 1$ і формули будуть такими

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ і } y = \frac{y_1 + y_2}{2} .$$

Для тривимірного простору R_3 формули поділу відрізка у заданому відношенні (рис. 1.1) мають вигляд

$$x = \frac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1 + \lambda} ; \quad y = \frac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1 + \lambda} ; \quad z = \frac{z_1 + \lambda \cdot z_2}{1 + \lambda} ,$$

а формули поділу відрізка навпіл є такими:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} ; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} ; \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2} .$$

2. Пряма лінія на площині, різні види її рівнянь

Задача 3. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (A; B)$.

Розв’язання. Візьмемо на прямій довільну (поточну) точку $M(x; y)$ і побудуємо поточний вектор $\overrightarrow{M_0M}$ (рис. 1.2):

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0).$$

За умовою задачі, вектори $\vec{n}$ і $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 .$$

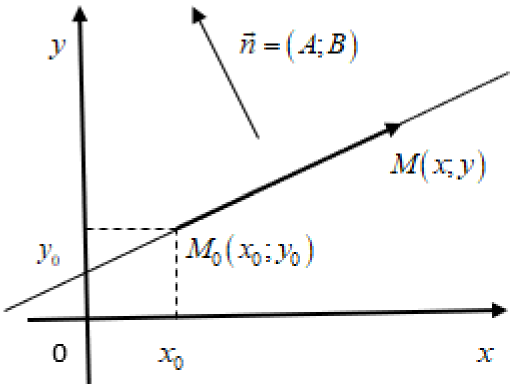


Рис. 1.2

Отримали **рівняння прямої, яка проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора.**

Вектор $\vec{n} = (A; B)$ називається нормальним вектором прямої. Пряма має безліч нормальних векторів. Усі вони паралельні, а їхні відповідні координати пропорційні.

Розкриємо дужки в останньому рівнянні, отримаємо $Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0$.

Позначимо величину $-Ax_0 - By_0$ через C, отримаємо **загальне рівняння прямої**

$$Ax + By + C = 0 .$$

Якщо $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, то загальне рівняння зводиться до **рівняння прямої у відрізках** на осях

$Ax + By = -C, \Rightarrow \dfrac{Ax}{-C} + \dfrac{By}{-C} = 1, \Rightarrow \dfrac{x}{-C/A} + \dfrac{y}{-C/B} = 1$, або

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

де $a = -C/A$, $b = -C/B$.

Задача 4. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ паралельно вектору $\vec{l} = (m; p)$.

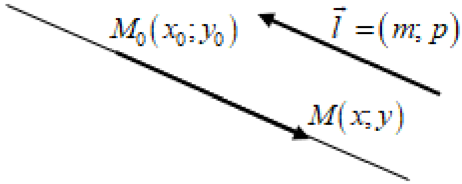


Рис. 1.3

Розв'язання. Міркуючи схоже, як у задачі 3, беремо довільний поточний вектор $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;y-y_0)$. За умовою задачі, вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{l}=(m;p)$ колінеарні, а з умови колінеарності векторів, тобто з пропорційності відповідних координат цих векторів, випливає **канонічне рівняння прямої**

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{p}.$$

Вектор $\vec{l}=(m;p)$ називається напрямним вектором прямої.

З рівностей $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{p}=t$ випливає **параметричне рівняння прямої**

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+pt. \end{cases}$$

Змінна t може набувати довільних дійсних значень і називається параметром.

Задача 5. Складти рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$.

Розв'язання. Вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1)$ є напрямним вектором шуканої прямої. Підставляємо в канонічне рівняння прямої координати напрямного вектора, отримаємо **рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки**

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Задача 6. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0\left(x_0; y_0\right)$ під заданим кутом α до осі Ox.

Розв'язання. Візьмемо на прямій довільну (поточну) точку $M\left(x; y\right)$ і побудуємо поточний вектор $\overrightarrow{M_0M}$ (рис. 1.4): $\overrightarrow{M_0M} = \left(x - x_0; y - y_0\right)$. Цей вектор також утворює з віссю Ox кут α, тобто відношення $\dfrac{y - y_0}{x - x_0} = tg\alpha = k$.

Звідси, отримаємо **рівняння прямої, яка проходить через задану точку $M_0\left(x_0; y_0\right)$ і має заданий кутовий коефіцієнт** k

$$y - y_0 = k\left(x - x_0\right).$$

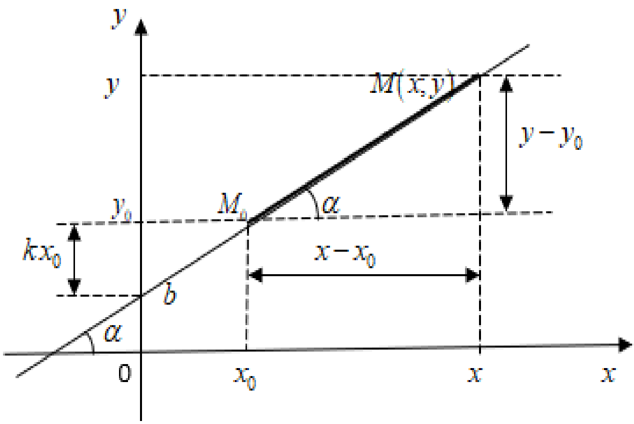


Рис. 1.4

Подамо дане рівняння в іншому вигляді $y = k\,x + \left(y_0 - k\,x_0\right)$. Позначимо величину $y_0 - k\,x_0$ через b, отримаємо **рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом**

$$y = k\,x + b.$$

2.1. Кут між двома прямими. Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих

<u>1-й випадок</u>. Нехай прямі задані загальними рівняннями $A_1x+B_1y+C_1=0$, і $A_2x+B_2y+C_2=0$ з відповідними нормальними векторами $\vec{n}_1=\left(A_1;B_1\right)$ і $\vec{n}_2=\left(A_2;B_2\right)$. Кут φ між прямими дорівнює куту між їх нормальними векторами і його можна обчислити за формулою

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{\left|\vec{n}_1\right|\cdot\left|\vec{n}_2\right|}=\frac{A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Якщо прямі паралельні, то їх нормальні вектори колінеарні, тобто їх відповідні координати пропорційні. Звідси, отримуємо умову паралельності двох прямих

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}.$$

Якщо прямі перпендикулярні, то їх нормальні вектори також перпендикулярні, тобто скалярний добуток дорівнює нулеві. Звідси, отримуємо умову перпендикулярності прямих

$$A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2=0.$$

<u>2-й випадок</u>. Нехай прямі задані канонічними рівняннями $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{p_1}$ і $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{p_2}$ з відповідними напрямними векторами $\vec{l}_1=\left(m_1;p_1\right)$ і $\vec{l}_2=\left(m_2;p_2\right)$**.** Кут φ між прямими дорівнює куту між їх напрямними векторами і його можна обчислити за формулою

$$\cos\varphi=\frac{\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2}{\left|\vec{l}_1\right|\cdot\left|\vec{l}_2\right|}=\frac{m_1\cdot m_2+p_1\cdot p_2}{\sqrt{m_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+p_2^2}}.$$

Прямі паралельні $\Leftrightarrow$ напрямні вектори колінеарні $\Leftrightarrow$

$\frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1}{p_2}$ - умова паралельності двох прямих.

Прямі перпендикулярні $\Leftrightarrow$ напрямні вектори перпендикулярні $\Leftrightarrow$ скалярний добуток напрямних векторів дорівнює нулю, тобто

$m_1 \cdot m_2 + p_1 \cdot p_2 = 0$ - умова перпендикулярності двох прямих, заданих канонічними рівняннями.

<u>3-й випадок.</u> Нехай прямі задані прямими з кутовими коефіцієнтами $y = k_1 x + b_1$ і $y = k_2 x + b_2$ з відповідними кутовими коефіцієнтами $k_1 = tg\,\alpha_1$ і $k_2 = tg\,\alpha_2$. Кут φ між прямими дорівнює різниці кутів $\alpha_2 - \alpha_1$, і його можна обчислити, скориставшись формулою тригонометрії

$$tg\,\varphi = tg\left(\alpha_2 - \alpha_1\right) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2}$$, тобто

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}.$$

Формула визначає кут, на який треба повернути першу пряму проти повороту годинникової стрілки, щоб вона збіглась з другою прямою.

Якщо прямі паралельні, то $\varphi = 0$ і $tg\,\varphi = 0$, тому з формули маємо $k_2 - k_1$=0. Отже, умовою паралельності двох прямих є рівність їхніх кутових коефіцієнтів:

$$k_1 = k_2.$$

Якщо прямі перпендикулярні, то $\varphi = 90^\circ$ і $tg\,90^\circ$ не існує, тому знаменник дробу дорівнює нулю: $1 + k_1 \cdot k_2 = 0$. Таким чином, умова перпендикулярності прямих має вигляд

$$k_1 \cdot k_2 = -1, \text{ або } k_2 = -1/k_1.$$

2.2. Відстань від точки до прямої

Задача 7. Знайти відстань від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$.

Розв'язання. Візьмемо на прямій довільну точку $M(x; y)$ та побудуємо вектор $\overrightarrow{MM_0} = (x_0 - x; y_0 - y)$. Відстань d точки $M_0(x_0; y_0)$ від прямої дорівнює модулю проекції вектора $\overrightarrow{MM_0}$ на напрям нормального вектора $\vec{n} = (A; B)$.

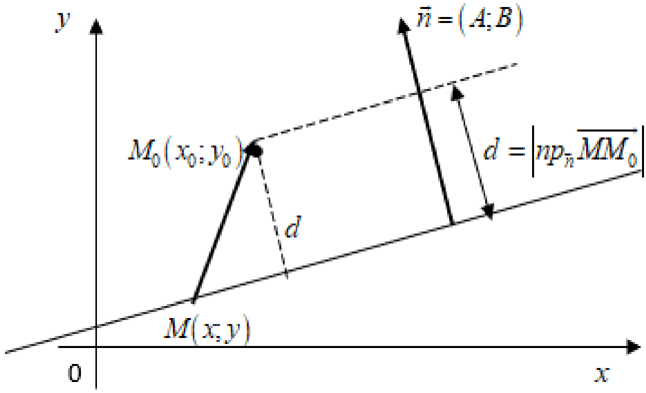


Рис. 1.5

Отже

$$d = \left|np_{\vec{n}}\overrightarrow{MM_0}\right| = \frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{MM_0}\right|}{|\vec{n}|} = \frac{\left|A(x_0 - x) + B(y_0 - y)\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$$

$$= \frac{\left|Ax_0 + By_0 + (-Ax - By)\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

З рівняння прямої бачимо, що $-Ax - By = C$. Тоді

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

2.3. Зразки розв'язання завдань

Приклад 1. Дано точки $A(1;-3)$, $B(5;7)$.Скласти рівняння прямої, яка проходить через середину відрізка АВ, перпендикулярно до цього відрізка.

Розв'язання. Знайдемо координати точки $M_0(x_0;y_0)$, яка є серединою відрізка АВ:

$$x_0 = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+5}{2} = 3,\ y_0 = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-3+7}{2} = 2.$$

Обчислимо координати нормального вектора прямої $\overrightarrow{AB} = \vec{n} = (5-1;7+3) = (4;10)$. Отже, маємо точку $M_0(3;2)$ і нормальний вектор $\vec{n} = (4;10)$. Тоді шукане рівняння прямої матиме вигляд

$4(x-3)+10(y-2)=0$, або $4x+10y-32=0$.

Скоротимо на 2, отримаємо загальне рівняння прямої

$$2x+5y-16=0.$$

Приклад 2. При якому значенні параметра λ пряма $\lambda x-2y+9=0$ буде паралельною до прямої $y=4-3x$?

Розв'язання. Перша пряма задана загальним рівнянням, а друга – рівнянням з кутовим коефіцієнтом. Запишемо для другої прямої її загальне рівняння: $3x+y-4=0$.

Тепер бачимо, що перша пряма має нормальний вектор $\vec{n}_1 = (\lambda;-2)$, а друга - $\vec{n}_2 = (3;1)$. Якщо прямі паралельні, то їх нормальні вектори колінеарні $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$, тобто, їхні відповідні координати пропорційні. З умови колінеарності двох векторів, отримаємо співвідношення $\frac{\lambda}{3} = \frac{-2}{1}$. Звідси

$$\lambda = \frac{3\cdot(-2)}{1} = -6.$$

Приклад 3. Обчислити відстань між паралельними прямими $5x-12y+26=0$ і $5x-12y-13=0$.

Розв'язання. Знайдемо яку-небудь точку на першій прямій. Нехай, наприклад, $x=2$, тоді $5\cdot 2-12y+26=0$. Звідси $12y=36$, $\Rightarrow y=3$. Отже, точка $M_0\left(2;3\right)$ належить першій прямій.

Знайдемо відстань між паралельними прямими, як відстань від точки M_0 до другої прямої за формулою

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{\left|5\cdot 2-12\cdot 3-13\right|}{\sqrt{5^2+12^2}}=\frac{39}{13}=3.$$

Приклад 4. Обчислити площу трикутника, обмеженого прямою $3x+4y-12=0$ і осями координат.

Розв'язання. Перетворимо рівняння прямої в рівняння прямої у відрізках $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$:

$$3x+4y=12\Rightarrow\frac{3x}{12}+\frac{4y}{12}=\frac{12}{12}\quad\Rightarrow\ \frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1.$$

Тепер площу трикутника обчислимо за формулою:

$S_{\triangle}=\dfrac{|a|\cdot|b|}{2}=\dfrac{4\cdot 3}{2}=6$ (кв. од.).

Приклад 5. Скласти канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку перетину прямих $2x+y-1=0$ і $4x-3y-17=0$ паралельно вектору $\vec{a}=\left(3;-4\right)$.

Розв'язання. Знайдемо точку перетину прямих із системи

$$\begin{cases}2x+y-1=0,\\4x-3y-17=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+y=1,\\4x-3y=17.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6x+3y=3,\\4x-3y=17.\end{cases}$$

.

Застосуємо метод виключення змінних, додавши два рівняння, отримаємо:

$$\begin{cases} 10x = 20, \\ y = 1 - 2x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 1 - 2 \cdot 2 = -3. \end{cases}.$$

Отже, точкою перетину прямих є точка $M_0(2;-3)$.

Тоді канонічне рівняння прямої $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{p}$ матиме вигляд:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{-4}.$$

Приклад 6. Знайти точку K симетричну до точки $D(4;5)$ відносно прямої, що проходить через точки $A(-2;3)$ і $B(6;-1)$ (Рис. 1.6).

Розв'язання. Складемо рівняння прямої AB, як рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $\dfrac{x - x_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y - y_A}{y_B - y_A}$:

$$\frac{x+2}{6+2} = \frac{y-3}{-1-3} \Rightarrow \frac{x+2}{8} = \frac{y-3}{-4} \Rightarrow \frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{-1}.$$

Переведемо канонічне рівняння прямої AB у загальне рівняння $x + 2y - 4 = 0$. Симетричні точки K і $D(4;5)$ будуть лежати на прямій, що проходить через точку $D(4;5)$ перпендикулярно до прямої AB. Складемо загальне рівняння прямої KD, де за нормальний вектор прямої KD візьмемо напрямний вектор прямої AB: $\vec{n} = (A;B) = \vec{l} = (2;-1)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

$$2(x-4) - 1 \cdot (y-5) = 0 \Rightarrow 2x - y = 3.$$

Знайдемо точку перетину $M_0(x_0, y_0)$ прямих AB і KD із системи рівнянь:

$$\begin{cases} x+2y=4, \\ 2x-y=3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=4, \\ 4x-2y=6. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x=10, \\ y=2x-3. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0=2, \\ y_0=2\cdot 2-3=1. \end{cases} \Rightarrow M_0(2;1).$$

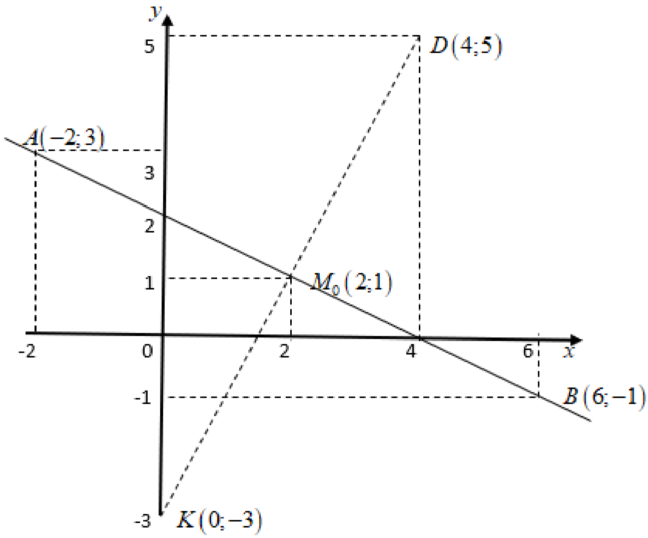


Рис. 1.6

Точка $M_0(2;1)$ лежить посередині між точками $K(x_k;y_k)$ і $D(4;5)$. Скористаємося формулами поділу відрізка KD пополам:

$$x_{M_0}=\frac{x_K+x_D}{2} \quad \text{і} \quad y_{M_0}=\frac{y_K+y_D}{2}.$$

Підставляємо у формули координати відомих вже точок:

$$x_{M_0}=\frac{x_K+4}{2}=2, \quad y_{M_0}=\frac{y_K+5}{2}=1.$$

З останніх рівнянь отримуємо координати точки $K(x_k; y_k)$:

$$x_K = 2\cdot 2 - 4 = 0 \quad y_K = 2\cdot 1 - 5 = -3$$

Отже, симетричною до точки $D(4;5)$ відносно прямої AB є точка $K(0;-3)$.

2.4. Індивідуальні завдання

Задані координати вершин трикутника АВС. Знайти:

1) довжину сторони АВ;

2) загальне рівняння прямої АВ;

3) рівняння висоти СД, опущеної з вершини С на сторону АВ;

4) довжину висоти СД ;

5) площу трикутника АВС;

6) координати точки Д;

7) координати точки К, розміщеної симетрично до точки Д відносно прямої АВ;

8) рівняння медіани АЕ;

9) рівняння прямої, що проходить через точку Е перпендикулярно до сторони ВС;

Результати проілюструвати графічно.

1. $A(-6;-4)$, $B(-10;-1)$, $C(6;1)$.

2. $A(12;0)$, $B(18;8)$, $C(0;5)$.

3. $A(-2;-6)$, $B(-6;-3)$, $C(10;-1)$.

4. $A(8;2)$, $B(14;10)$, $C(-4;7)$.

5. $A(2;-4)$, $B(-2;-1)$, $C(14;1)$.

6. $A(-9;6)$, $B(3;-3)$, $C(7;19)$.

7. $A(5;-3)$, $B(1;0)$, $C(17;2)$.

8. $A(14;-6)$, $B(20;2)$, $C(2;-1)$.

9. $A(3;4)$, $B(-1;7)$, $C(15;9)$.

10. $A(1;-2)$, $B(7;6)$, $C(-11;3)$.

11. $A(-2;-3)$, $B(0;7)$, $C(8;3)$.

12. $A(1;2)$, $B(3;12)$, $C(11;8)$.

13. $A(-4;-1)$, $B(-2;9)$, $C(6;5)$.

14. $A(4;1)$, $B(6;11)$, $C(14;7)$.

15. $A(-3;-2)$, $B(-1;8)$, $C(7;4)$.

16. $A(2;-5)$, $B(4;5)$, $C(12;1)$.

17. $A(3;0)$, $B(5;10)$, $C(13;6)$.

18. $A(0;3)$, $B(2;13)$, $C(10;9)$.

19. $A(-1;5)$, $B(1;15)$, $C(9;11)$.

20. $A(5;4)$, $B(7;14)$, $C(15;10)$.

21. $A(3;1)$, $B(-13;-11)$, $C(-6;13)$.

22. $A(-6;5)$, $B(2;-3)$, $C(0;7)$.

23. $A(-2;3)$, $B(10;-1)$, $C(6;5)$.

24. $A(-4;-4)$, $B(8;2)$, $C(4;6)$.

25. $A(8;-1)$, $B(-8;11)$, $C(-2;-13)$.

26. $A(-11;-4)$, $B(7;-2)$, $C(3;8)$.

27. $A(9;-3)$, $B(-7;-15)$, $C(0;9)$.

28. $A(-8;3)$, $B(6;-1)$, $C(2;9)$.

29. $A(7;4)$, $B(-9;-8)$, $C(-2;16)$.

30. $A(-5;2)$, $B(3;-4)$, $C(1;10)$.

3. Криві другого порядку, їхня форма і канонічні рівняння

Пряма – це алгебраїчна лінія першого порядку. Загальне рівняння лінії другого порядку має такий вигляд

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

де A, B, C, D, E, F - дійсні числа, причому хоча б одне з чисел A, B, C не дорівнює нулю.

До алгебраїчних ліній другого порядку відносяться коло, еліпс, гіпербола, парабола.

3.1. Коло

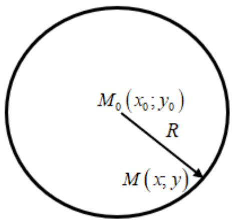


Рис. 3.1

Колом називають множину точок площини, відстані яких від заданої точки $M_0\left(x_0; y_0\right)$ (центра кола) дорівнюють сталому числу R (радіусу).

Візьмемо на колі поточну точку $M\left(x; y\right)$ і побудуємо поточний вектор $\overrightarrow{M_0M} = \left(x - x_0; y - y_0\right)$ (Рис. 3.1). Де б не знаходилася точка $M\left(x; y\right)$ на колі, за означенням маємо

$$\left|\overrightarrow{M_0M}\right| = \sqrt{\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2} = R, \text{ або}$$

$\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 = R^2$ - **канонічне рівняння кола**.

Якщо точка $M_0\left(x_0; y_0\right)$ співпадає з початком координат $M_0\left(0;0\right)$, то рівняння кола буде таким:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

3.2. Еліпс

Еліпсом називається геометричне місце точок площини, сума відстаней яких до двох даних точок цієї площини, що називаються фокусами є величиною сталою, більшою за відстань між фокусами (рис. 3.2).

Нехай $F_1(-c;0)$ і $F_2(c;0)$ - фокуси еліпса, $F_1F_2=2c$, а $M(x;y)$ його довільна точка. Суму відстаней будь-якої точки еліпса до фокусів позначимо через $2a$.

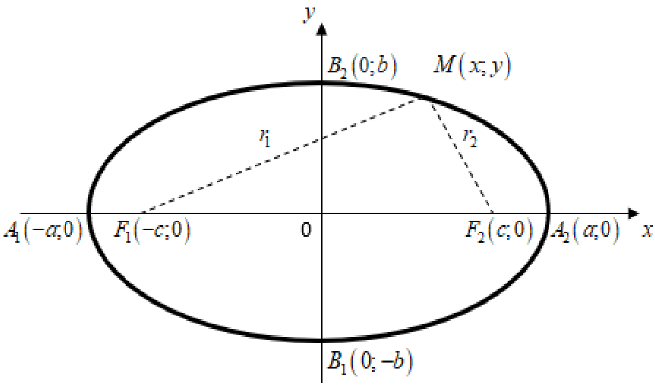


Рис. 3.2

Відрізки $r_1=\left|\overrightarrow{F_1M}\right|$ і $r_2=\left|\overrightarrow{F_2M}\right|$ називаються фокальними радіусами точки M . За означенням маємо: $r_1+r_2=2a$ (рис. 3.2),

$$r_1=\left|\overrightarrow{F_1M}\right|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\,,\ r_2=\left|\overrightarrow{F_2M}\right|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\ .$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a\ .$$

Це і є рівнянням еліпса. Зведемо його до простішого (канонічного) вигляду, звільнившись від радикалів та врахувавши рівність $a^2-c^2=b^2$, отримаємо **канонічне рівняння еліпса:**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Точки перетину еліпса з осями координат називаються вершинами еліпса. Відрізки $A_1A_2 = 2a$ і $B_1B_2 = 2b$, що з'єднують протилежні вершини еліпса називаються відповідно великою (фокальною) і малою осями еліпса. Параметри a і b дорівнюють його півосям. Відношення $\frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \varepsilon$ називається **ексцентриситетом** еліпса. Ексцентриситет характеризує форму еліпса (міру його стиску). Для еліпса $0 < \varepsilon < 1$. Чим сильніше стиснено еліпс, тим більший його ексцентриситет. При малих значеннях ексцентриситету еліпс дуже мало відрізняється від кола. При $\varepsilon = 0$ еліпс перетворюється в коло.

3.3. Гіпербола

Гіперболою називають множину точок площини, модуль різниці відстаней яких від двох фіксованих точок цієї площини, які називаються фокусами, є величиною сталою, меншою за відстань між фокусами.

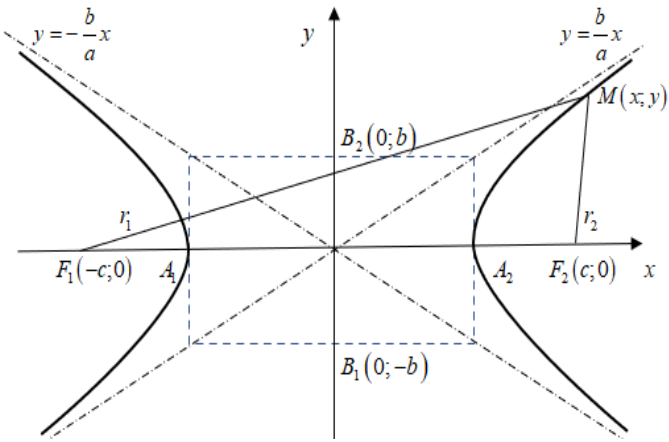


Рис. 3.3

Позначивши через $2c = F_1F_2$ відстань між фокусами F_1 та F_2, і через $2a$ вказане в означенні абсолютне значення різниці відстані, дістанемо умову існування гіперболи: $a < c$.

Згідно означення $\left|F_1M - F_2M\right| = 2a$ (Рис. 3.3).

Величини

$$r_1 = \left|\overline{F_1M}\right| = \sqrt{\left(x+c\right)^2 + y^2}\,,\ r_2 = \left|\overline{F_2M}\right| = \sqrt{\left(x-c\right)^2 + y^2}$$

називаються фокальними радіусами точки $M\left(x;y\right)$ гіперболи.

Підставляючи в попереднє рівняння ($\left|r_1 - r_2\right| = 2a$), значення фокальних радіусів і звільняючись від радикалів отримаємо **канонічне рівняння гіперболи**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

де $c^2 = a^2 + b^2$.

$A_1A_2 = 2a$ - дійсна вісь гіперболи.

$B_1B_2 = 2b$ - уявна вісь гіперболи.

Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = \dfrac{c}{a} > 1$.

Прямі $y = \dfrac{b}{a}x$ і $y = -\dfrac{b}{a}x$ називаються асимптотами гіперболи.

3.4. Парабола

Параболою називається геометричне місце точок площини, рівновіддалених від даної точки F, що називається фокусом, і від даної прямої, що називається директрисою.

Відстань від фокуса параболи до директриси називається параметром параболи і позначається через p.

Відстань $FM = r$ від довільної точки $M\left(x;y\right)$ параболи до фокуса F називається фокальним радіусом точки M.

$$r = \left|\overrightarrow{FM}\right| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}\ .$$

Відстань від довільної точки $M(x;y)$ до директриси позначимо через d :

$$d = \left|FM\right| = x + \frac{p}{2}.$$

За означенням параболи маємо: $r = d$. **Перший випадок:** нехай гілки параболи напрямлені вправо (Рис. 3.4).

Нехай фокус лежить в точці $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, а директриса є перпендикулярною до осі Ox і має рівняння $x = -\frac{p}{2}$, то з рівності $r = d$ отримаємо рівність

$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$, а звідси отримаємо **канонічне рівняння параболи**, яке матиме вигляд (рис. 3.4)

$$y^2 = 2p\,x\ .$$

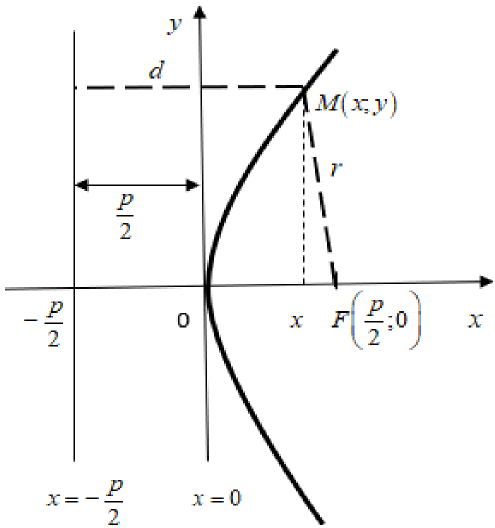
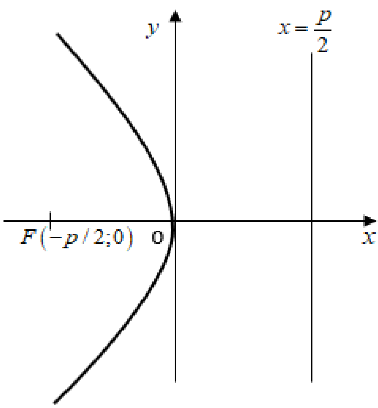


Рис. 3.4

Вісь симетрії параболи називається віссю параболи. Точка перетину параболи з віссю симетрії називається вершиною параболи.

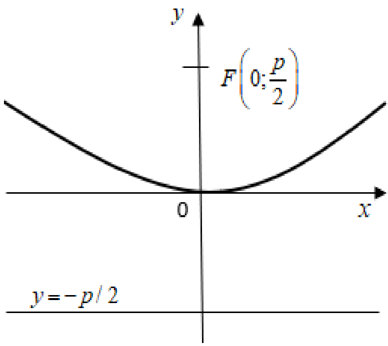
Фокальний радіус r довільної точки $M(x;y)$ параболи може бути обчислений за формулою $r=|FM|=x+\dfrac{p}{2}$.



Другий випадок: якщо фокус параболи лежить в точці $F\left(-\dfrac{p}{2};0\right)$, а директриса має рівняння $x=\dfrac{p}{2}$ (рис. 3.5), то канонічне рівняння такої параболи має вигляд

$$y^2=-2px.$$

Рис. 3.5



Третій випадок: фокус лежить в точці $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$, рівняння директриси $y=-\frac{p}{2}$ (рис.3.6) . Гілки параболи напрямлені вгору і її канонічне рівняння має вигляд

$$x^2 = 2py\,.$$

Рис. 3.6

Четвертий випадок: фокус лежить в точці $F\left(0;-\frac{p}{2}\right)$, рівняння директриси $y=\frac{p}{2}$ (рис. 3.7). Гілки параболи напрямлені донизу і її канонічне рівняння має вигляд

$$x^2 = -2py\,.$$

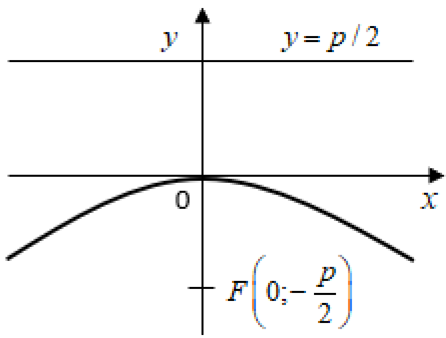


Рис. 3.7

3.5. Зразки розв’язання завдань

Приклад 1. Звести до канонічного вигляду рівняння лінії 2-го порядку $x^2+y^2-4x+2y-4=0$.

Розв’язання. В рівнянні виділимо повні квадрати:

$$x^2-4x+4-4+y^2+2y+1-1-4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x-2\right)^2+\left(y+1\right)^2=9.$$

Бачимо, що задана лінія є колом із центром в точці $M_0\left(2;-1\right)$ та радіусом $R=3$.

Приклад 2. Скласти канонічне рівняння еліпса, центр симетрії якого співпадає з початком координат, мала піввісь якого, дорівнює 3, а правий фокус лежить в точці $F_2\left(4;0\right)$.

Розв’язання. Мала піввісь $b=3$, а відстань від центра симетрії до правого фокуса $c=4$. Для еліпса, величини a,b,c пов’язані співвідношенням $a^2-c^2=b^2$. Звідси $a^2=c^2+b^2=4^2+3^2=25$. Тоді, канонічне рівняння еліпса матиме вигляд $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

Приклад 3. Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, екцентриситет $\varepsilon=\dfrac{12}{13}$, а мала вісь $2b=10$.

Розв’язання. Піввісь такого еліпса $b=5$. З означення ексцентриситета отримуємо рівність: $\dfrac{c}{a}=\dfrac{12}{13}$. Звідси $c=\dfrac{12}{13}a$.

Підставляємо у співвідношення $a^2-c^2=b^2$ значення величин b і c, отримаємо лінійне рівняння відносно невідомого a^2:

$$a^2-\left(\frac{12}{13}a\right)^2=25, \Rightarrow \left(1-\frac{144}{169}\right)\cdot a^2=25, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{25}{169}a^2=25, \Rightarrow a^2=169.$$

Тоді канонічне рівняння еліпса матиме вигляд

$$\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1.$$

Приклад 4. Скласти канонічне рівняння гіперболи , фокуси якої лежать на осі Ох , відстань між ними дорівнює $10\sqrt{2}$, а рівняння асимптот $y=\pm 0,75x$.

Розв'язання. З умови задачі, маємо: $2c=10\sqrt{2}$. Звідси $c=5\sqrt{2}$. З рівнянь асимптот випливає, що відношення $\frac{b}{a}=0,75=\frac{3}{4}$. Звідси $b=\frac{3}{4}a$. Для гіперболи, величини a,b,c пов'язані співвідношенням $c^2=a^2+b^2$. Підставляємо у це співвідношення відомі величини, отримаємо: $a^2+\frac{9}{16}a^2=\left(5\sqrt{2}\right)^2$. Звідси $\frac{25}{16}a^2=50$, або $a^2=32$. Тоді $b^2=\frac{9}{16}a^2=\frac{9}{16}\cdot 32=18$.

Остаточно, отримали таке канонічне рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{18}=1.$$

Приклад 5. Скласти канонічне рівняння параболи, вершина якої, лежить у початку координат, віссю симетрії є вісь Ox , і парабола проходить через точку $M_0\left(-3;-4\right)$ **.**

Розв'язання. Точка лежить у третій чверті, а віссю симетрії є вісь Ox , тому канонічне рівняння параболи (другий випадок) шукатимемо у вигляді $y^2=-2p\,x$ (рис. 3.5). Раз парабола проходить через точку $M_0\left(-3;-4\right)$, то координати точки задовольняють рівняння параболи:

$$\left(-4\right)^2=-2p\left(-3\right), \Rightarrow 6p=16 \Rightarrow$$

$p=\frac{16}{6}=\frac{8}{3}$ - параметр параболи.

$y^2=-2\cdot\frac{8}{3}\cdot x=-\frac{16}{3}x$ - канонічне рівняння параболи.

Додатково знайдемо координати фокуса параболи:

$F\left(-\frac{p}{2};0\right)=F\left(-\frac{4}{3};0\right)$ і рівняння її директриси:

$$x=\frac{p}{2}=\frac{4}{3}.$$

Приклад 6. Дано канонічне рівняння параболи $x^2=-20y$. Знайти координати фокуса і рівняння директриси цієї параболи.

Розв'язання. З рівняння параболи (четвертий випадок, рис. 3.7) видно, що $2p=20$.

Звідси $p=10$, $\Rightarrow$ $p/2=5$.

Фокус лежить в точці $F\left(0;-p/2\right)=F\left(0;-5\right)$, а

директриса має рівняння $y=\frac{p}{2}=5$.

3.6. Індивідуальні завдання

Завдання 3.6.1. Скласти канонічне рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, якщо задана одна з його вершин та один із фокусів. Виконати схематичний рисунок і на ньому показати всі чотири вершини та обидва фокуси.

1. $A_2\left(5;0\right)$, $F_2\left(4;0\right)$; **2.** $A_1\left(-5;0\right)$, $F_2\left(4;0\right)$;

3. $A_2\left(5;0\right)$, $F_1\left(-4;0\right)$; **4.** $A_1\left(-5;0\right)$, $F_1\left(-4;0\right)$;

5. $B_1\left(0;-3\right)$, $F_1\left(-4;0\right)$; **6.** $B_1\left(0;-3\right)$, $F_2\left(4;0\right)$;

7. $B_1(0;3)$, $F_2(4;0)$; **8.** $B_2(0;3)$, $F_1(-4;0)$;

9. $A_2(5;0)$, $F_2(3;0)$; **10.** $A_2(5;0)$, $F_1(-3;0)$;

11. $A_1(-5;0)$, $F_2(3;0)$; **12.** $A_1(-5;0)$, $F_1(-3;0)$;

13. $B_2(0;4)$, $F_1(-3;0)$; **14.** $B_1(0;-4)$, $F_1(-3;0)$;

15. $B_1(0;-4)$, $F_2(3;0)$; **16.** $B_2(0;4)$, $F_2(3;0)$;

17. $A_2(10;0)$, $F_2(8;0)$; **18.** $A_1(-10;0)$, $F_2(8;0)$;

19. $A_2(10;0)$, $F_1(-8;0)$; **20.** $A_1(-10;0)$, $F_1(-8;0)$;

21. $B_1(0;-6)$, $F_1(-8;0)$; **22.** $B_1(0;-6)$, $F_2(8;0)$;

23. $B_2(0;6)$, $F_2(8;0)$; **24.** $B_2(0;6)$, $F_1(-8;0)$;

25. $A_2(10;0)$, $F_2(6;0)$; **26.** $A_2(10;0)$, $F_1(-6;0)$;

27. $A_1(-10;0)$, $F_2(6;0)$; **28.** $A_1(-10;0)$, $F_1(-6;0)$;

29. $B_2(0;8)$, $F_1(-6;0)$; **30.** $B_1(0;-8)$, $F_1(-6;0)$.

Завдання 3.6.2. Скласти канонічне рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Виконати схематичний рисунок і на ньому показати всі чотири вершини та обидва фокуси, якщо дано:

1) $b=15$, $F(-10;0)$; **2)** $b=2$, $F(\sqrt{2};0)$;

3) $A(3;0)$, $B\left(2;\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)$; **4)** $e=\dfrac{\sqrt{21}}{5}$, $A(-5;0)$;

5) $a=11$, $e=\dfrac{\sqrt{57}}{11}$; **6)** $b=\sqrt{15}$, $e=\dfrac{\sqrt{10}}{25}$;

7) $a=4$, $F(3;0)$; **8)** $b=4$, $F(9;0)$;

9) $A(0;\sqrt{3})$, $B\left(\sqrt{\dfrac{14}{3}};1\right)$; **10)** $e=\dfrac{7}{8}$, $A(8;0)$;

11) $a=12$, $e=\dfrac{\sqrt{22}}{6}$; **12)** $b=2$, $e=\dfrac{5\sqrt{29}}{29}$;

13) $a=6$, $F(-4;0)$; **14)** $b=7$, $F(5;0)$;

15) $A\left(-\sqrt{\dfrac{17}{3}};\dfrac{1}{3}\right)$, $B\left(\dfrac{\sqrt{21}}{2};\dfrac{1}{2}\right)$; **16)** $e=\dfrac{3}{5}$, $A(0;8)$;

17) $a=11$, $e=\dfrac{10}{11}$; **18)** $b=5$, $e=\dfrac{12}{13}$;

19) $a=9$, $F(7;0)$; **20)** $b=5$, $F(-10;0)$;

21) $A(0;-2)$, $B\left(\dfrac{\sqrt{15}}{2};1\right)$; **22)** $e=\dfrac{2}{3}$, $A(-6;0)$;

23) $a=25$, $e=\dfrac{3}{5}$; **24)** $b=2\sqrt{15}$, $e=\dfrac{7}{8}$;

25) $a=13$, $F(-5;0)$; **26)** $b=7$, $F(13;0)$;

27) $A(-3;0)$, $B\left(1;\frac{\sqrt{40}}{3}\right)$; **28)** $e=\frac{5}{6}$, $A\left(0;-\sqrt{11}\right)$;

29) $a=15$, $e=\frac{14}{15}$; **30)** $b=2\sqrt{2}$, $e=\frac{7}{9}$.

Завдання 3.6.3. Скласти канонічне рівняння гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ та побудувати її схематичний рисунок на якому показати асимптоти, вершини, фокуси, якщо задано:

1) $a=13$, $e=\frac{14}{13}$; **2)** $a=7$, $e=\frac{\sqrt{85}}{7}$;

3) $y=\pm\frac{3}{4}x$, $F(10;0)$; **4)** $y=\pm\frac{\sqrt{21}}{10}x$, $F(11;0)$;

5) $y=\pm\frac{2}{3}x$, $c=5\sqrt{13}$; **6)** $y=\pm\frac{3}{4}x$, $a=8$;

7) $b=2\sqrt{10}$, $F(-11;0)$; **8)** $a=5$, $e=\frac{7}{5}$;

9) $A\left(\sqrt{80};3\right)$, $B\left(4\sqrt{6};3\sqrt{2}\right)$; **10)** $y=\pm\frac{1}{2}x$, $c=2\sqrt{5}$;

11) $y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\,x$, $c=5$; **12)** $y=\pm\frac{12}{13}x$, $a=13$;

13) $b=3$, $F(7;0)$; **14)** $a=11$, $e=\frac{12}{11}$;

15) $A\left(3;-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$, $B\left(\sqrt{\frac{13}{5}};6\right)$; **16)** $y=\pm\frac{1}{3}x$, $a=3$;

17) $y=\pm\frac{\sqrt{11}}{5}x$, $c=6$; **18)** $A\left(\sqrt{6};0\right)$, $B\left(-2\sqrt{2};1\right)$;

19) $b=6$, $F\left(12;0\right)$; **20)** $a=9$, $e=\frac{4}{3}$;

21) $y=\pm\frac{2\sqrt{10}}{9}x$, $F\left(11;0\right)$; **22)** $y=\pm\frac{5}{6}x$, $a=12$;

23) $y=\pm\frac{\sqrt{29}}{14}x$; $c=15$; **24)** $A\left(\sqrt{8};0\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{20}}{3};2\right)$;

25) $b=4$, $F\left(-7;0\right)$; **26)** $b=4$, $F\left(-11;0\right)$;

27) $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x$, $c=25$; **28)** $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$, $a=6$;

29) $y=\pm\frac{\sqrt{17}}{8}x$, $c=9$; **30)** $A\left(\sqrt{\frac{32}{3}};1\right)$, $B\left(\sqrt{8};0\right)$.

Завдання 3.6.4. Скласти канонічне рівняння параболи та побудувати її графік, директрису і фокус, якщо її:

1) рівняння директриси $x=-2$;

2) рівняння директриси $x=4$;

3) рівняння директриси $y=-2$;

4) рівняння директриси $y=5$;

5) вісь симетрії Ox і $A\left(27;9\right)$;

6) вісь симетрії Ох і $A(4;-8)$;

7) рівняння директриси $x=-4$;

8) рівняння директриси $x=2$;

9) рівняння директриси $y=2$;

10) рівняння директриси $y=4$;

11) вісь симетрії Ох і $A(-7;-7)$;

12) вісь симетрії Ох і $A(-5;15)$;

13) рівняння директриси $x=3$;

14) рівняння директриси $x=6$;

15) рівняння директриси $y=-4$;

16) рівняння директриси $y=3$;

17) вісь симетрії Ох і $A(-7;5)$;

18) вісь симетрії Оу і $A(-9;6)$;

19) рівняння директриси $x=8$;

20) рівняння директриси $x=-8$;

21) рівняння директриси $y=-3$;

22) рівняння директриси $y=-5$;

23) вісь симетрії Оу і $A(4;1)$;

24) вісь симетрії Оу і $A\left(-2;3\sqrt{2}\right)$;

25) рівняння директриси $x=-6$;

26) рівняння директриси $y=6$;

27) рівняння директриси $y=-6$;

28) рівняння директриси $x=10$;

29) вісь симетрії Oy і $A(4;-10)$;

30) вісь симетрії Oy і $A(-45;15)$.

4. Площина і пряма у тривимірному просторі

Рівняння від трьох змінних $F(x;y;z)=0$ описує в просторі деяку поверхню, де $F(x;y;z)$ означає деякий вираз від змінних x, y, z. Якщо вираз $F(x;y;z)$ є алгебраїчним виразом, то рівняння називається алгебраїчним.

4.1. Площина, різні види її рівнянь

Алгебраїчне рівняння першого степеня $Ax+By+Cz+D=0$ є рівнянням площини.

Задача 1. Скласти рівняння площини П, яка проходить через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}=(A;B;C)$.

Розв'язання. Виконаємо схематичний рисунок.

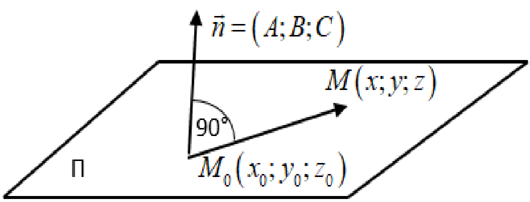


Рис. 4.1

Візьмемо на шуканій площині будь-яку поточну точку $M\left(x; y; z\right)$. Тоді, за умовою задачі, вектори $\vec{n} = \left(A; B; C\right)$ і $\overrightarrow{M_0M} = \left(x - x_0; y - y_0; z - z_0\right)$, будуть перпендикулярними. Їх скалярний добуток $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$. Звідси

$$A\left(x - x_0\right) + B\left(y - y_0\right) + C\left(z - z_0\right) = 0,$$

маємо рівняння площини, яка проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора. Розкриємо дужки:

$$Ax + By + Cz + \left(-Ax_0 - By_0 - Cz_0\right) = 0.$$

Вираз, що стоїть в дужках, позначимо через D, тобто $-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$, отримаємо **загальне рівняння площини**

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Як розміщена площина відносно системи координат залежить від значень A, B, C, D. Наприклад:

1) якщо $D = 0$, то площина П проходить через початок координат перпендикулярно до вектора $\vec{n} = \left(A; B; C\right)$;

2) якщо $A = B = D = 0$, то площина $Cz = 0$, або $z = 0$ збігається з площиною Oxy;

3) якщо $C = 0$, то площина $Ax + By + D = 0$ паралельна до осі Oz, та перетинає площину Oxy по прямій, що задана тим самим рівнянням $Ax + By + D = 0$.

Задача 2. Скласти рівняння площини, що проходить через три задані точки, які не лежать на одній прямій $M_1\left(x_1; y_1; z_1\right)$, $M_2\left(x_2; y_2; z_2\right)$, $M_3\left(x_3; y_3; z_3\right)$.

Розв'язання. Візьмемо на площині будь-яку поточну точку $M\left(x; y; z\right)$, та побудуємо вектори $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$:
$\overrightarrow{M_1M} = \left(x - x_1; y - y_1; z - z_1\right)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = \left(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\right)$, $\overrightarrow{M_1M_3} = \left(x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\right)$.

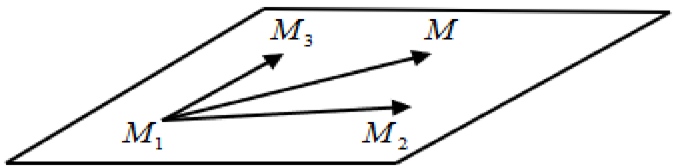


Рис. 4.2

Всі три вектори лежать в одній площині, тобто вони компланарні. Для компланарних векторів мішаний добуток трьох векторів дорівнює нулеві:

$$\overrightarrow{M_1M}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\overrightarrow{M_1M_3}=0$$ - векторне рівняння площини.

Або $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$ - **рівняння площини, що проходить через три задані точки.**

Задача 3. Скласти рівняння площини, що проходить через три задані точки $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$.

Розв'язання. Виконаємо схематичний рисунок.

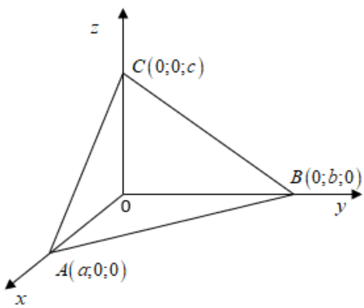


Рис. 4.3.

Підставляємо координати трьох точок у попереднє рівняння, отримаємо: $\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$.

Розкриємо визначник за елементами першого рядка, скориставшись формулою Лапласа:

$$bc(x-a)+acy+abz=0, \Rightarrow bcx+acy+abz=abc.$$

Поділимо обидві частини рівності на добуток abc, отримаємо **рівняння площини у відрізках:**

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Числа a,b,c визначають, які відрізки відтинає площина на осях координат від початку (рис. 4.3).

4.2. Кут між двома площинами. Умова паралельності і перпендикулярності двох площин

Нехай дві площини задані своїми загальними рівняннями:

($П_1$): $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ з $\vec{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$;

($П_2$): $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ з $\vec{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$.

Двогранний кут між площинами вимірюється лінійним кутом між нормальними векторами $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ і обчислюється за формулою:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Площини $П_1$ і $П_2$ будуть перпендикулярними, якщо перпендикулярними будуть їх нормальні вектори $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$. Звідси, $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0 \Rightarrow$

$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ - **умова перпендикулярності двох площин.**

Площини $П_1$ і $П_2$ будуть паралельними, тоді і тільки тоді, коли їх нормальні вектори будуть колінеарними: $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$. Звідси, випливає **умова паралельності двох площин**:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Площини $П_1$ і $П_2$ збігаються, якщо виконується умова

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

4.3. Відстань від точки до площини

Задача 4. Нехай площина П задана загальним рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$, а точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ не лежить на площині. Знайдемо відстань d від точки M_0 до площини П.

Розв'язання. Відстань d (рис. 4.4) точки M_0 від площини П дорівнює модулю проекції вектора $\overrightarrow{MM_0}$ на напрям нормального вектора $\vec{n} = (A; B; C)$, де $M(x; y; z)$ − довільна (поточна) точка площини П. Отже,

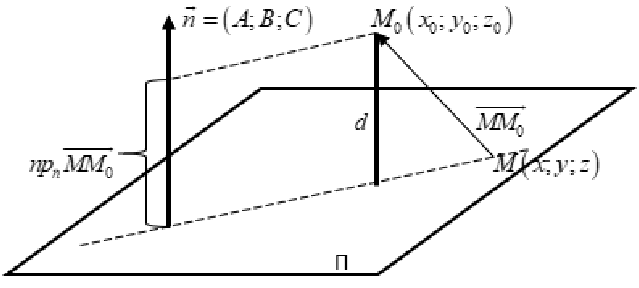


Рис. 4.4

$$d = \left| np_{\vec{n}} \overrightarrow{MM_0} \right| = \frac{\left| \vec{n} \cdot \overrightarrow{MM_0} \right|}{|\vec{n}|} = \frac{\left| A(x_0 - x) + B(y_0 - y) + C(z_0 - z) \right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

$$= \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + \left(-Ax - By - Cz\right)\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

З рівняння площини маємо: $-Ax - By - Cz = D$, тому

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

4.4. Пряма лінія в просторі, різні види її рівнянь

Задача 5. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0\left(x_0; y_0; z_0\right)$ паралельно до вектора $\vec{l} = \left(m; n; p\right)$**.**

Розв'язання. За умовою задачі вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{l}$ колінеарні, тобто їх координати пропорційні. Звідси, отримуємо **канонічне рівняння прямої в просторі:**

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

де $\vec{l} = \left(m; n; p\right)$ – напрямний вектор прямої.

Кожне із співвідношень канонічного рівняння прямої позначимо буквою t, отримаємо:

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{m} = t, \\ \dfrac{y - y_0}{n} = t, \\ \dfrac{z - z_0}{p} = t. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$ - **параметричні рівняння прямої в просторі в координатній формі.**

Інший підхід: умову колінеарності векторів $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{l}$ можна подати так: $\overrightarrow{M_0M} = t \cdot \vec{l}$. Звідси

$x - x_0 = mt$, $y - y_0 = nt$, $z - z_0 = pt$ - **параметричні рівняння прямої в просторі.**

З канонічного рівняння прямої дістанемо рівняння прямої в просторі, яка проходить через дві точки $M_1\left(x_1;y_1;z_1\right)$ і $M_2\left(x_2;y_2;z_2\right)$: за напрямний вектор прямої $\vec{l}$ беремо вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=\left(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\right)$, а за точку, через яку проходить пряма, беремо, наприклад, точку $M_1\left(x_1;y_1;z_1\right)$.

Отримаємо **рівняння прямої в просторі, що проходить через дві задані точки**:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Пряма в просторі ще задається перетином двох площин, якщо площини непаралельні, то вони перетинаються по прямій записаній у вигляді системи двох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{cases}$$

Маємо **загальне рівняння прямої в просторі**.

Щоб перейти від загального рівняння прямої до канонічного треба знайти точку $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ на прямій і напрямний вектор $\vec{l}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$, де $\vec{n}_1=\left(A_1;B_1;C_1\right)$ - нормальний вектор першої площини, а $\vec{n}_2=\left(A_2;B_2;C_2\right)$ - нормальний вектор другої площини.

Для знаходження точки $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ одну із координат беруть довільною, наприклад $z=z_0$, а дві інші визначають із системи

$$\begin{cases}A_1x+B_1y=-C_1z_0-D_1,\\A_2x+B_2y=-C_2z_0-D_2.\end{cases}$$

4.5. Кут між двома прямими

Нехай прямі $\left(L_1\right)$ і $\left(L_2\right)$ задані рівняннями:

$$\left(L_1\right): \ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1};$$

$$\left(L_2\right): \ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

Кут між цими прямими дорівнює куту φ між їхніми напрямними векторами $\vec{l}_1=\left(m_1;n_1;p_1\right)$ і $\vec{l}_2=\left(m_2;n_2;p_2\right)$, навіть, якщо ці прямі мимобіжні за формулою:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2}{\left|\vec{l}_1\right|\cdot\left|\vec{l}_2\right|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

Умова паралельності двох прямих : $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$.

Умова перпендикулярності двох прямих:

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0.$$

4.6. Кут між прямою і площиною. Умова паралельності і перпендикулярності прямої і площини

Нехай задано площина (П): $Ax + By + Cz + D = 0$ з нормальним вектором $\vec{n} = (A; B; C)$ і пряма (L):

$\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$ з напрямним вектором $\vec{l} = (m; n; p)$.

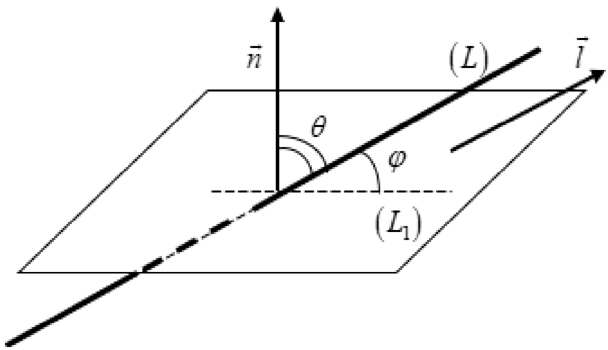


Рис. 4.5.

Кут φ (рис. 4.5) між прямою (L) і площиною (П) за означенням є кутом між прямою (L) і її проекцією (L_1) на площину (П) і обчислюється він за формулою:

$$\sin\varphi = \frac{\left|\vec{n} \cdot \vec{l}\right|}{|\vec{n}| \cdot |l|} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} .$$

Пряма (L) паралельна до площини (П), якщо

$$Am + Bn + Cp = 0 .$$

Пряма (L) перпендикулярна до площини (П), якщо

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p} .$$

4.7. Відстань від точки до прямої

Задача 6. Нехай в просторі задано пряма (L):

$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ з напрямним вектором $\vec{l}=(m;n;p)$ і точка $M_1(x_1;y_1;z_1)$, що не лежить на ній. Знайдемо відстань d від точки M_1 до прямої (L).

Розв'язання. Візьмемо на прямій (L) будь-яку точку M_0. Побудуємо і знайдемо вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$. Побудуємо на векторах $\vec{l}$ і $\overrightarrow{M_0M_1}$ паралелограм (рис. 4.6).

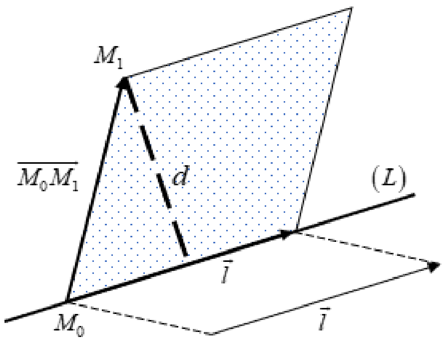


Рис. 4.6.

Площа паралелограма з допомогою векторного добутку обчислюється за формулою: $S=\left|\vec{l}\times\overrightarrow{M_0M_1}\right|$

З елементарної математики відомо, що площа паралелограма дорівнює добутку основи на висоту, у нашому випадку, на відстань d, тобто $S=\left|\vec{l}\right|\cdot d$.

Тоді з рівності $\left|\vec{l}\right|\cdot d=\left|\vec{l}\times\overrightarrow{M_0M_1}\right|$ знаходимо відстань

$$d=\frac{\left|\vec{l}\times\overrightarrow{M_0M_1}\right|}{\left|\vec{l}\right|}.$$

4.8. Зразки розв’язання завдань

Приклад 1. Скласти рівняння площини, що проходить через середину відрізка M_1M_2 перпендикулярно до нього, якщо $M_1(3;1;-4)$, а $M_2(5;-3;8)$.

Розв’язання. Середину відрізка знайдемо за формулами:

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2};\quad y_0=\frac{y_1+y_2}{2};\quad z_0=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

Таким чином

$$x_0=\frac{3+5}{2}=4;\quad y_0=\frac{1-3}{2}=-1;\quad z_0=\frac{-4+8}{2}=2.$$

Отже, серединою відрізка M_1M_2 є точка $M_0(4;-1;2)$.

За нормальний вектор площини беремо вектор $\vec{n}=\overline{M_1M_2}=(2;-4;12)$, або можна взяти вектор, який у два рази коротший від вектора $\overline{M_1M_2}$, тобто $\vec{n}=(1;-2;6)$.

Підставляємо знайдені величини у рівняння

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Отримаємо:

$1\cdot(x-4)-2\cdot(y+1)+6\cdot(z-2)=0$, $\Rightarrow x-2y+6z-18=0$.

Приклад 2. Знайти відстань від точки $M_0(1;2;4)$ до площини $2x+2y-z-11=0$.

Розв’язання. Скористаємося формулою

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$ і обчислимо відстань:

$$d=\frac{|2\cdot1+2\cdot2-4-11|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{9}{3}=3$$ (лін. од.).

Приклад 3. Знайти відстань від точки $M_1(-6;-1;5)$ до прямої $\dfrac{x-4}{-2}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$.

Розв'язання. Візьмемо довільну точку на прямій, наприклад, точку $M_0(4;-2;1)$, та побудуємо вектор $\overrightarrow{M_0M_1}=(-10;1;4)$. Напрямний вектор прямої $\vec{l}=(-2;2;-1)$ має довжину $\left|\vec{l}\right|=\sqrt{(-2)^2+2^2+(-1)^2}=3$. Знайдемо векторний добуток $\vec{l}\times\overrightarrow{M_0M_1}$:

$$\vec{l}\times\overrightarrow{M_0M_1}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 2 & -1\\ -10 & 1 & 4\end{vmatrix}=9\vec{i}+18\vec{j}+18\vec{k}=9(1;2;2).$$

Звідси $\left|\vec{l}\times\overrightarrow{M_0M_1}\right|=9\sqrt{1^2+2^2+2^2}=27$.

За формулою $d=\dfrac{\left|\vec{l}\times\overrightarrow{M_0M_1}\right|}{\left|\vec{l}\right|}$ отримуємо шукану відстань $d=\dfrac{9}{3}=3$ (лін. од.).

Приклад 4. Дано координати вершин піраміди $M_1M_2M_3M_4$: $M_1(1;-1;1)$, $M_2(-2;1;3)$, $M_3(4;-5;-2)$, $M_4(-1;1;-2)$. Знайти: 1) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

2) канонічне рівняння висоти OM_4, проведеної з вершини M_4 до грані $M_1M_2M_3$;

3) координати точки $O(x_0;y_0;z_0)$, як точки перетину висоти OM_4 з площиною $M_1M_2M_3$;

4) довжину висоти OM_4, як відстань від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$ (рис. 4.7).

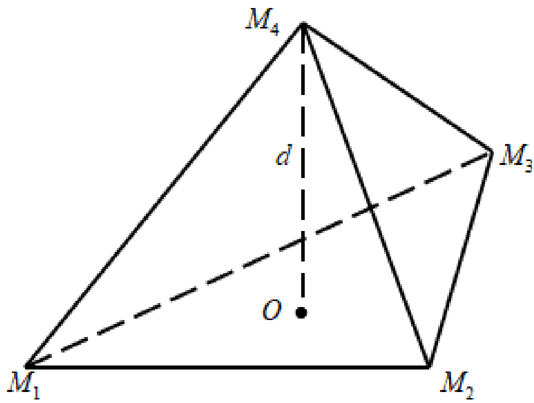


Рис. 4.7

Розв'язання.

1) Рівняння площини $M_1M_2M_3$ запишемо, як рівняння площини, що проходить через три задані точки і яке має вигляд

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Отже, маємо таке рівняння

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ -2-1 & 1-(-1) & 3-1 \\ 4-1 & -5-(-1) & -2-1 \end{vmatrix}=0, \text{ або } \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & -3 \end{vmatrix}=0.$$

Зведемо дане рівняння до загального рівняння площини, розклавши визначник за елементами першого рядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -3 \end{vmatrix}\cdot(x-1)-\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}\cdot(y+1)+\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}\cdot(z-1)=0, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2(x-1)-3(y+1)+6(z-1)=0, \Rightarrow$$

$\Rightarrow\ 2x-3y+6z-11=0$ - загальне рівняння площини $M_1M_2M_3$.

2) Нормальний вектор $\vec{n}=(2;-3;6)$ площини $M_1M_2M_3$ для висоти буде напрямним вектором, тому канонічне рівняння прямої (висоти) OM_4 матиме вигляд :

$$\frac{x-x_4}{2}=\frac{y-y_4}{-3}=\frac{z-z_4}{6},$$

або

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{6}.$$

3) Щоб знайти точку перетину висоти OM_4 з площиною $M_1M_2M_3$, треба спочатку рівняння висоти записати в параметричній формі та розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z+2}{6}=t,\\ 2x-3y+6z-11=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2t-1,\\ y=-3t+1,\\ z=6t-2,\\ 2x-3y+6z-11=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2(2t-1)-3(-3t+1)+6(6t-2)-11=0,\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4t+9t+36t-2-3-12-11=0,\ \Rightarrow t=\frac{28}{49}=\frac{4}{7}.$$

Тоді точка перетину висоти з площиною матиме такі координати:

$$x_0=2\cdot\frac{4}{7}-1=\frac{1}{7},\ y_0=-3\cdot\frac{4}{7}+1=-\frac{5}{7},\ z_0=6\cdot\frac{4}{7}-2=\frac{10}{7}.$$

Отже, $O(x_0;y_0;z_0)=O\left(\dfrac{1}{7};-\dfrac{5}{7};\dfrac{10}{7}\right)$;

4) Довжину висоти OM_4 знайдемо за формулою:

$$d=\frac{|Ax_4+By_4+Cz_4+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

де $Ax+By+Cz+D=0$ загальне рівняння площини $M_1M_2M_3$.

Підставляємо вже відомі значення величин та знаходимо довжину

$$d=\frac{\left|2\cdot(-1)-3\cdot1+6\cdot(-2)-11\right|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}}=\frac{|-28|}{7}=4 \text{ (лін. од.).}$$

Приклад 5. Пряма задана в просторі загальним рівнянням $\begin{cases}2x-3y-2z+6=0,\\ x-3y+z+3=0.\end{cases}$

Скласти її канонічне рівняння $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$.

Розв'язання. Щоб перейти із загального рівняння прямої до канонічного, треба знайти одну точку $M_0(x_0;\,y_0;\,z_0)$, що лежить на прямій, і напрямний вектор прямої $\vec{l}=(m;\,n;\,p)$.

Друга площина має нормальний вектор $\vec{n}_2=(1;-3;1)$, а перша - $\vec{n}_1=(2;-3;-2)$. Бачимо, що відповідні координати векторів не пропорційні між собою. Це означає, що нормальні вектори площин не колінеарні, а це означає, що площини не паралельні, тобто перетинаються по прямій. Напрямний вектор цієї прямої знайдемо за формулою:

$$\vec{l}=(m;\,n;\,p)=\vec{n}_1\times\vec{n}_2.$$

$$\vec{l}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -3 & -2\\ 1 & -3 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3 & -2\\ -3 & 1\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & -3\end{vmatrix}\cdot\vec{k}=$$

$$=-9\vec{i}-4\vec{j}-3\vec{k}=(-9;-4;-3).$$

Напрямний вектор не колінеарний до жодного із одиничних векторів $\vec{i}=(1;\,0;\,0)$, $\vec{j}=(0;1;\,0)$, $\vec{k}=(0;\,0;1)$, тому дана пряма перетинає усі три координатні площини Oxy, Oxz, Oyz. Допустимо, що дана пряма перетинає площину Oxy. Її рівняння $z=0$. Тоді система рівнянь матиме вигляд

$$\begin{cases}2x-3y+6=0,\\ x-3y+3=0.\end{cases}$$

Розв’яжемо систему методом Гаусса. Віднімемо від першого рівняння друге рівняння та знайдемо невідому x:

$x+3=0$, $\Rightarrow$ $x=-3$.

Підставляємо це значення у друге рівняння та знаходимо невідому змінну y:

$-3-3y+3=0$, $\Rightarrow$ $-3y=0$, $\Rightarrow$ $y=0$.

Отже, точкою перетину заданої прямої з площиною Oxy, є точка $M_0\left(x_0; y_0; z_0\right)=M_0\left(-3; 0; 0\right)$. Зрозуміло, що ця точка лежить на прямій. Всі знайдені значення підставляємо у канонічне рівняння прямої. Отримаємо:

$$\frac{x+3}{-9}=\frac{y}{-4}=\frac{z}{-3}.$$

4.9 Індивідуальні завдання.

Завдання 4.9.1. Дано координати вершин піраміди $M_1M_2M_3M_4$. Знайти: 1) рівняння площини $M_1M_2M_3$; 2) канонічне рівняння висоти OM_4, проведеної з вершини M_4 до грані $M_1M_2M_3$; 3) координати точки $O\left(x_0; y_0; z_0\right)$, як точки перетину висоти OM_4 з площиною $M_1M_2M_3$; 4) довжину висоти OM_4, як відстань від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$.

Варіанти:

1. $M_1\left(-3; 4; -7\right)$, $M_2\left(1; 5; -4\right)$, $M_3\left(-5; -2; 0\right)$, $M_4\left(-12; 7; -1\right)$.

2. $M_1\left(-1; 2; -3\right)$, $M_2\left(4; -1; 0\right)$, $M_3\left(2; 1; -2\right)$, $M_4\left(1; -6; -5\right)$.

3. $M_1\left(-3; -1; 1\right)$, $M_2\left(-9; 1; -2\right)$, $M_3\left(3; -5; 4\right)$, $M_4\left(-7; 0; -1\right)$.

4. $M_1\left(1; -1; 1\right)$, $M_2\left(-2; 0; 3\right)$, $M_3\left(2; 1; -1\right)$, $M_4\left(-2; 4; 2\right)$.

5. $M_1\left(1; 2; 0\right)$, $M_2\left(1; -1; 2\right)$, $M_3\left(0; 1; -1\right)$, $M_4\left(2; -1; 4\right)$.

6. $M_1\left(1; 0; 2\right)$, $M_2\left(1; 2; -1\right)$, $M_3\left(2; -2; 1\right)$, $M_4\left(-5; -9; 1\right)$.

7. $M_1\left(1; 2; -3\right)$, $M_2\left(1; 0; 1\right)$, $M_3\left(-2; -1; 6\right)$, $M_4\left(3; -2; -9\right)$.

8. $M_1(3;10;-1)$, $M_2(-2;3;-5)$, $M_3(-6;0;-3)$, $M_4(-6;7;-10)$.

9. $M_1(-1;2;4)$, $M_2(-1;-2;-4)$, $M_3(3;0;-1)$, $M_4(-2;3;5)$.

10. $M_1(0;-3;1)$, $M_2(-4;1;2)$, $M_3(2;-1;5)$, $M_4(-3;4;-5)$.

11. $M_1(1;3;0)$, $M_2(4;-1;2)$, $M_3(3;0;1)$, $M_4(4;3;0)$.

12. $M_1(-2;-1;-1)$, $M_2(0;3;2)$, $M_3(3;1;-4)$, $M_4(-21;20;-16)$.

13. $M_1(-3;-5;6)$, $M_2(2;1;-4)$, $M_3(0;-3;-1)$, $M_4(3;6;4)$.

14. $M_1(2;-4;-3)$, $M_2(5;-6;0)$, $M_3(-1;3;-3)$, $M_4(2;-10;8)$.

15. $M_1(1;-1;2)$, $M_2(2;1;2)$, $M_3(1;1;4)$, $M_4(-3;2;7)$.

16. $M_1(1;3;6)$, $M_2(2;2;1)$, $M_3(-1;0;1)$, $M_4(5;-4;5)$.

17. $M_1(-3;-2;-4)$, $M_2(-4;2;-7)$, $M_3(5;0;3)$, $M_4(-1;3;0)$.

18. $M_1(2;-2;1)$, $M_2(-3;0;-5)$, $M_3(0;-2;-1)$, $M_4(-3;4;2)$.

19. $M_1(5;4;1)$, $M_2(-1;-2;-2)$, $M_3(3;-2;2)$, $M_4(-5;5;4)$.

20. $M_1(3;6;-2)$, $M_2(0;2;-3)$, $M_3(1;-2;0)$, $M_4(-7;6;6)$.

21. $M_1(1;-4;1)$, $M_2(4;4;0)$, $M_3(-1;2;-4)$, $M_4(-9;7;8)$.

22. $M_1(4;6;-1)$, $M_2(7;2;4)$, $M_3(-2;0;-4)$, $M_4(3;1;-4)$.

23. $M_1(-2;4;-6)$, $M_2(0;-6;1)$, $M_3(4;2;1)$, $M_4(7;-1;-8)$.

24. $M_1(3;4;-1)$, $M_2(2;-4;2)$, $M_3(5;6;0)$, $M_4(11;-3;-12)$.

25. $M_1(-4;2;6)$, $M_2(2;-3;0)$, $M_3(-10;5;8)$, $M_4(-12;1;8)$.

26. $M_1(-4;-2;-5)$, $M_2(1;8;-5)$, $M_3(0;4;-4)$, $M_4(9;-2;-10)$.

27. $M_1(2;-1;2)$, $M_2(1;2;-1)$, $M_3(3;2;1)$, $M_4(-5;3;7)$.

28. $M_1(1;1;2)$, $M_2(-1;1;3)$, $M_3(2;-2;4)$, $M_4(2;3;8)$.

29. $M_1(2;3;1)$, $M_2(4;1;-2)$, $M_3(6;3;7)$, $M_4(-5;-4;8)$.

30. $M_1(1;1;-1)$, $M_2(2;3;1)$, $M_3(3;2;1)$, $M_4(-3;-7;6)$.

Завдання 4.9.2. Пряма задана в просторі загальним рівнянням $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$

Скласти її канонічне рівняння $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$.

Варіанти:

1. $\begin{cases} 2x+y+z-2=0, \\ 2x-y-3z+6=0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x-3y+2z+2=0, \\ x+3y+z+14=0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x-2y+z-4=0, \\ 2x+2y-z-8=0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+y+z-2=0, \\ x-y-2z+2=0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x+3y+z+6=0, \\ x-3y-2z+3=0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x+y-z-6=0, \\ 3x-y+2z=0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+5y+2z+11=0, \\ x-y-z-1=0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x+4y-2z+1=0, \\ 2x-4y+3z+2=0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 5x+y-3z+4=0, \\ x-y+2z+2=0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x-y-z-2=0, \\ x-2y+z+4=0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 4x+y-3z+2=0, \\ 2x-y+z-8=0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x+3y-2z-1=0, \\ 2x-3y+z+6=0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 6x-7y-4z-2=0, \\ x+7y-z-5=0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 8x-y-3z-1=0, \\ x+y+z+10=0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 6x-5y-4z+8=0, \\ 6x+5y+3z+4=0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x+5y-z-5=0, \\ 2x-5y+2z+5=0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x-3y+z+6=0, \\ x-3y-2z+3=0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 5x+y+2z+4=0, \\ x-y-3z+2=0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 4x+y+z+2=0, \\ 2x-y-3z-8=0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2x+y-3z-2=0, \\ 2x-y+z+6=0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x+y-2z-2=0, \\ x-y+z+2=0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x+5y-z+11=0, \\ x-y+2z-1=0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x-y+z-2=0, \\ x-2y-z+4=0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 6x-7y-z-2=0, \\ x+7y-4z-5=0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x+5y+2z-5=0, \\ 2x-5y-z+5=0. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x-3y+z+2=0, \\ x+3y+2z+14=0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x+3y-2z+6=0, \\ x-3y+z+3=0. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 3x+4y+3z+1=0, \\ 2x-4y-2z+4=0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 3x+3y+z-1=0, \\ 2x-3y-2z+6=0. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 6x-5y+3z+8=0, \\ 6x+5y-4z+4=0. \end{cases}$

Список рекомендованої літератури

1. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика: навч. посібник К. : А.С.К., 2006. 648 с.

2. Шкіль М. І., Колесник Т. В., Котлова В. М. Вища математика : підручник: у 3-х книгах. Кн. 1.: Аналітична геометрія з елементами алгебри. Вступ до математичного аналізу. К. : Либідь,1994. 280 с.

3. Пасічник Я. А. Вища математика : підручник. Острог : Видавництво Національного університету «Острозька академія», 2021. 432 с.

4. Ярмуш Я. І., Самолюк І.В. Вища математика. Практикум : навч. посіб. Рівне : НУВГП, 2015. 148 с. URL: http://ep3.nuwm.edu.ua/id/eprint/5632