

627,824

Проф. Я. Т. НЕНЬКО

# ФИЛЬТРАЦИЯ ВОДЫ

Ч Е Р Е З  
ЗЕМЛЯНЫЕ ПЕРЕМОЧКИ  
И ПЛОТИНЫ  
НА НЕПРОНИЦАЕМОМ  
ОСНОВАНИИ

ТИ ♦ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ♦ НКТП  
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО УКРАИНЫ

54533

✓

621804 626  
У  
H-51

НКТП -  
СОЮЗВОДСТРОЙ  
НАУЧНО - ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ ГИДРОТЕХНИЧЕСКАЯ ЛАБОРАТОРИЯ

Проф. Я. Т. НЕНЬКО

34-33

# ФИЛЬТРАЦИЯ ВОДЫ ЧЕРЕЗ ЗЕМЛЯНЫЕ ПЕРЕМЫЧКИ И ПЛОТИНЫ НА НЕПРОНИЦАЕМОМ ОСНОВАНИИ

54533

Киевский  
Гидромелиоративный  
институт  
БИБЛИОТЕКА

проверено  
1966 г.

V

И



Библиографическое описание этого издания помещено в „Літописі Українського Друку“, „Картковому Репертуарі“ и других указателях Украинской Книжной Палаты

55-4-3

Типо - цинкография ДНТВУ  
Харьков, Суздальск. ряды, 18/20.  
Уполномоч. Главлита № 5.  
Зак. № 01,11.

Редактор Г. Н. Чайковский  
Литредактор М. Дейнеко  
Техоформление Я. С. Фонин  
Корректор Ф. Малая

Тираж 2000, 5<sup>1</sup>/<sub>4</sub> печатн. листов. В печати. листе 48.000 зн. Бумага 62 × 94.  
Вес 1 метр. стопы 38 кг. Сдано в набор 10/1-36 г. Подписано к печ. 26/II-36 г.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая работа является лишь частью задуманного и в значительной мере выполненного труда на тему: „Теория земляных перемычек и плотин“. Публикуемая часть работы касается исключительно вопросов фильтрации воды через земляные перемычки и плотины, совершенно не затрагивая вопросов устойчивости земляных массивов. Такое деление задуманной работы вызывается необходимостью подведения идейного содержания под лабораторные опыты, какие Харьковская научно-исследовательская гидротехническая лаборатория взяла на себя обязательство произвести согласно теме, вошедшей в производственный план лаборатории.

Самый порядок изложения темы, затрагиваемой этой работой, также подчинен этому основному требованию.

Автор поставил ряд вопросов, на который может ответить лишь один лабораторный опыт. Отдельные математические интерпретации явлений фильтрации и принятые допущения будут, возможно, в значительной мере скорректированы опытом.

Предварительное, чисто теоретическое рассмотрение вопроса ценно уже тем, что создает обстановку строгой целеустремленности опыта.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить благодарность дирекции Гидротехнической лаборатории в лице С. Л. Козюры и инженера М. Н. Грацианского за включение в тематический план лаборатории вопроса, давно интересующего автора, главному инженеру Сокзводстроя П. К. Ширину и инженеру П. М. Карпову за предоставленную ими возможность скорого опубликования настоящей работы.

*Я. Ненько*

Харьков,  
1935 г.

## ВВЕДЕНИЕ

### 1. Основные допущения

Случаи аварий с земляными плотинами инженеры-гидротехники склонны часто приписывать воздействию фильтрационного потока на тело плотины. Отсюда, как логическое следствие, понятны и тот интерес к вопросам фильтрации через земляные плотины и то солидное место, какие отведены названному вопросу в технической литературе.

Особенно большое внимание этому вопросу было уделено в широкой дискуссии, развернувшейся на страницах американского журнала: „Proceedings of the American Society of civil Engineers“ в 1923 г. по поводу статьи известного американского гидротехника J. D. Justin'a по вопросу проектирования земляных плотин\*.

Мы не будем перечислять всех сделанных попыток теоретического или опытного разрешения вопроса о фильтрации через земляные плотины, но отметим все же исключительный по полноте освещения данного вопроса труд академика Н. Н. Павловского\*\*.

Все известные нам решения задачи о фильтрации через земляные плотины, как и лабораторные опыты, не освещают все же многих недоуменных вопросов и не дают ответа на целый ряд запросов практики; например, существующие приемы решения не позволяют решить задачу о фильтрации воды через *простейшую перемычку с вертикальными бортами при отсутствии подпора со стороны низового бьефа* и многие другие, столь же простые на первый взгляд, задачи.

Вторая особенность предложенных различными авторами решений вопроса о фильтрации через тело земляных плотин заключается в том, что установление кривой депрессий (поверхности грунтового потока) в теле плотины производится *вне зависимости* от физической характеристики материала, слагающего земляной массив (коэффициента фильтрации, коэффициента порозности); кривая депрессий получает один и тот же вид для геометрически равных земляных массивов, сложены ли они из крупно-зернистых песков или из тончайших глинистых грунтов.

\* J. D. Justin: „The design of Earth Dams“. 1923.

\*\* Н. Н. Павловский: „О фильтрации воды через земляные плотины“. 1931.

Наконец, третья особенность трудов, посвященных данному вопросу: гидравлика грунтового потока резко расходится с гидравликой открытого потока, что принципиально недопустимо.

Эти обстоятельства целиком оправдывают непрерывные попытки гидротехников внести ясность и четкость, свойственные практике, в постановку и решение задачи о фильтрации через тело земляной плотины; этим же оправдываем мы и свою попытку решить задачу при некоторых ограничивающих ее условиях, но с учетом сделанных выше замечаний.

Ограничивающие условия, принятые нами для решения задачи, будут следующие:

1. Тело перемычки (плотины) сложено по всему поперечному сечению из однородного водопроницаемого материала.

2. Тело перемычки (плотины) — призматическое, однообразной высоты и большой протяженности.

3. Тело перемычки (плотины) расположено на водонепроницаемом основании.

Условие второе (2) позволяет пренебречь влиянием бортов тальвега, перегораживаемого плотиной (перемычкой), и свести рассмотрение вопроса о фильтрации через тело земляной плотины (перемычки) к решению *плоской задачи*.

Мы будем решать задачу исключительно *гидравлическими приемами*; эти приемы мы считаем пока единственно приемлемыми для инженеров-проектировщиков и строителей, ибо гидродинамические приемы решения даже для простейших очертаний сыпучего массива настолько сложны и громоздки, что едва ли они могут быть доступными для широких кругов гидротехников.

Кстати, нам пока известно одно законченное гидродинамическое решение задачи — лишь для случая перемычки с вертикальными бортами Г. Гамеля (G. Hamel)\*.

Для упрощения и лучшего освещения приемов решения задачи, для большего оттенения отдельных моментов в явлении фильтрации воды через сыпучие массивы мы упрощаем для первичных рассмотрений модель плотины (перемычки) до простейшей схемы — прямоугольной призмы, покоящейся на водонепроницаемом основании. При дальнейшем рассмотрении вопроса о фильтрациях через сыпучие массивы эта простейшая схема будет постепенно усложняться, и в результате мы получим обычное для земляных плотин очертание в поперечном сечении.

---

\* G. Hamel: Über Grundwasserströmung, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik\*, Heft 3, 1934





кривой депрессий до точки перегиба (II) и вторая часть (2) с *нормальной кривой спада*.

Образование перепада в первой части фильтрационного потока — обычное гидравлическое явление во всех тех случаях движения жидкости, когда поток в открытом русле переходит от большего живого сечения к меньшему; в этом случае происходит перераспределение в количественном соотношении слагаемых энергии потока — кинетической и потенциальной.

В самом деле, если на весьма малой ширине массива ( $\Delta x$ ) пренебречь потерей энергии на продвижение фильтрационного потока от напорной грани  $OA$  до рассматриваемого сечения ( $H$ ), то количество удельной энергии, имевшейся в открытом потоке до поступления в массив (в сечении  $OA$ ), должно равняться количеству удельной энергии в сечении, отстоящем на величину  $\Delta x$  от напорной грани  $OA$ :

$$H_0 + \frac{\alpha_0 V_0^2}{2g} \cong H + \frac{\alpha V^2}{2g}, \quad (1)$$

- где  $H_0$  — глубина открытого потока перед массивом;  
 $V_0$  — скорость (средняя) движения открытого потока;  
 $H$  — глубина фильтрационного потока на отстоянии  $\Delta x$  от напорной грани  $OA$ ;  
 $V$  — *действительная* средняя скорость движения молекул воды в порах сыпучего тела;  
 $\alpha_0$  и  $\alpha$  — коэффициенты коррективы на неравномерность распределения скоростей по живому сечению для живой силы.

Для случая установившегося движения и плоской задачи уравнение неразрывности движения будет иметь такой вид:

$$V_0 H_0 = \beta V H, \quad (2)$$

где  $\beta$  — коэффициент *площадной порозности* материала, слагающего данный массив.

Величину  $\beta H$  условимся надалее называть *эффективной площадью фильтрации* или *эффективным живым сечением фильтрационного потока*.

Подставляя из выражения (2) значение  $V_0$  в уравнение (1) и приняв коэффициенты коррективы  $\alpha_0 \cong \alpha \cong 1$ , перепишем уравнение в несколько перефразированном виде:

$$H_0 - H = \left( 1 - \beta^2 \frac{H^2}{H_0^2} \right) \frac{V^2}{2g}. \quad (3)$$

Так как для большинства грунтов значение члена  $\beta^2 \frac{H^2}{H_0^2}$  мало в сравнении с единицей, то, пренебрегая последним (чем отчасти компенсируем пренебрежение потерями), получим:

$$H_0 - H \cong \frac{V^2}{2g}, \quad (4)$$

т. е. обычную гидравлическую формулу для величины перепада в случае отсутствия потерь ( $\varphi = 1$ ).

Выражение (4) указывает, что в сыпучем массиве у напорной грани должен сразу же образоваться перепад ( $H_0 - H = z'$ ); этот перепад будет тем большим, чем больше порозность материала, слагающего массив, или, что то же, чем больше коэффициент фильтрации данного грунта.

Это наличие перепада в первой (верховой) части фильтрационного потока весьма затрудняет решение задачи, ибо оно не позволяет получить математическую интерпретацию поверхности потока для этой части.

Для второй части математическая интерпретация кривой поверхности потока весьма легка и проста по форме.

Следовательно, сама физическая сторона явления фильтрации в данном массиве вынуждает нас разбить поток на две части, отличные одна от другой по характеру движения воды в каждой из них.

Выход фильтрационного потока на низовой грани будет происходить некоторым живым сечением  $BC$ , равным конечной ординате кривой депрессий  $y_2$ ; величина  $y_2$  будет, очевидно, зависеть от физических свойств материала массива и его геометрических размеров.

### 3. Уравнение для верховой части фильтрационного потока

Для рассмотрения движения фильтрационного потока в первой (верховой) части применим основное уравнение гидравлики — уравнение Д. Бернулли (D. Bernoulli); напомним это уравнение для сечений  $OA$  и  $PD$  и для плоскости сравнения  $OX$ :

$$H_0 + \frac{\alpha_0 V_0^2}{2g} = y_1 + \frac{\alpha V_1^2}{2g} + \int_x \frac{v'}{k} dx, \quad (5)$$

где:  $v'$  — так называемая скорость фильтрации, связанная с действительной скоростью движения молекул воды в порах грунта зависимостью:

$$v' = \beta V; \quad (6)$$

$k$  — коэффициент фильтрации материала, слагающего массив.

Вводя элементы живого сечения потока, величину расхода фильтрации и пренебрегая членом, выражающим запас кинетической энергии в открытом потоке перед массивом, перепишем, на основании сказанного, уравнение Бернулли (5) в таком виде:

$$H_0 - y_1 = \frac{q^2}{2g\beta^2 y_1^2} + \int_x \frac{q}{ky} dx, \quad (7)$$

причем коэффициент коррективы принят равным:  $\alpha_1 = 1$ .

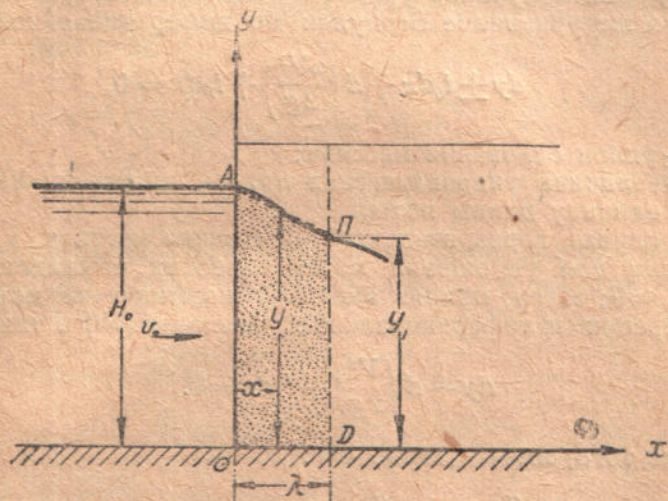
Таким образом, задача определения основных величин фильтрации в первой (верховой) части фильтрационного потока

упирается в необходимость определения величины последнего члена уравнения (7), выражающего потери потока на пути от сечения  $OA$  до сечения  $PD$ .

Для интегрирования выражения:

$$\int_{\lambda} \frac{q}{ky} dx$$

необходимо, очевидно (так как нет других возможностей), задаться законом изменения величины ординат кривой депрессий на длине потока фильтрации  $OD$ , равном  $\lambda$ . Эту задачу попытаемся разрешить при некоторых допущениях, достаточно близко



Фиг. 2

отображающих действительную картину явления, и, кроме того, достаточно простых по своему математическому выражению.

Положим, что изменение ординат кривой депрессий на участке фильтрационного потока  $OD$  следует линейному закону:

$$y = H_0 - \frac{H_0 - y_1}{\lambda} x,$$

изображенному на фиг. 2 пунктирной прямой  $AP$ .

Тогда величину потерь, выражаемую последним членом уравнения (7), можно определить из следующей зависимости:

$$\int_{\lambda} \frac{q}{ky} dx = \frac{q}{k} \int_{\lambda} \frac{dx}{H_0 - \frac{H_0 - y_1}{\lambda} x} = \frac{q}{k} \frac{\lambda}{H_0 - y_1} \ln \frac{H_0}{y_1}, \quad (8)$$

а уравнение (7) для первой верховой части фильтрационного потока мы напишем в таком виде:

$$H_0 - y_1 = \frac{q^2}{2g\beta^2 y_1^2} + \frac{q}{k} \frac{\lambda}{H_0 - y_1} \ln \frac{H_0}{y_1}. \quad (9)$$

#### 4. Уравнение для низовой части потока

Во второй части фильтрационный поток приобретает вполне определенные очертания своего граничного контура — свободной поверхности (кривая *ПВ*, фиг. 1).

Для установления формы очертания потока по верху, иными словами, — для получения уравнения кривой депрессий *ПВ* применим то же уравнение Бернулли по дифференциальной форме:

$$dy \pm i_0 dx + d \left( \frac{\alpha V^2}{2g} \right) + i_f dx = 0, \quad (10)$$

где  $i_0$  — уклон основания массива;

$i_f$  — величина гидравлических потерь, приходящихся на погонную единицу длины потока.

Для случая горизонтального основания массива, какое мы принимаем для упрощения математических выкладок, будем иметь  $i_0 = 0$ ; затем, приняв величину коэффициента коррективы  $\alpha = 1$ , перепишем дифференциальное уравнение (10) в таком виде:

$$dy + d \left( \frac{V^2}{2g} \right) + i_f dx = 0.$$

Кроме того, имея в виду, что:

$$V = \frac{q}{\beta y} \text{ и } i_f = \frac{q}{ky} \text{ * (по закону Дарси),}$$

можем окончательно для нашего случая написать:

$$dy - \frac{q^2}{g\beta^2 y^3} dy + \frac{q}{ky} dx = 0. \quad (11)$$

Разделяя переменные в уравнении (11) и интегрируя его, получим уравнение кривой депрессий в общем виде:

$$x = C - \frac{qk}{g\beta^2 y} - \frac{k}{2q} y^2. \quad (12)$$

\* В предположении, что живые сечения фильтрационного потока суть вертикальные плоские поверхности; это предположение отклоняется от действительности и, следовательно, является одной из условностей нашего анализа.

В действительности живые сечения (экинапорные поверхности) будут криволинейны, что легко проследить на опыте, наблюдая показания *донных* пьезометров и пьезометров, соединенных с дырчатыми колодцами.

Постоянная  $C$  определится из условия:  $x = S$ ,  $y = y_2$ ,

$$C = S + \frac{k \cdot q}{g\beta^2 y_2} + \frac{k}{2q} y_2^2,$$

и уравнение (12) можно переписать в таком виде:

$$x = S + \frac{k \cdot q}{g\beta^2 y_2} + \frac{k}{2q} y_2^2 - \frac{kq}{g\beta^2 y} - \frac{k}{2q} y^2. \quad (13)$$

Выражение (13) является искомой формой очертания свободной поверхности фильтрационного потока в низовой его части.

Для конечных сечений низовой части фильтрационного потока  $PD$  и  $BC$  (фиг. 1) уравнение (13) следует, очевидно, переписать в таком виде:

$$\lambda = S + \frac{kq}{g\beta^2} \left( \frac{1}{y_2} - \frac{1}{y_1} \right) - \frac{k}{2q} (y_1^2 - y_2^2). \quad (14)$$

### 5. Примечание

Если в уравнениях (10) и (12) пренебречь членом, выражающим запас кинетической энергии потока, то получим из уравнения (8):

$$dy \pm i_0 dx + i_f dx = 0$$

или:

$$dy \pm i_0 dx + \frac{q}{ky} dx = 0; \quad (15)$$

из уравнения (12)

$$x = C - \frac{k}{2q} y^2. \quad (16)$$

Полученные уравнения (15) и (16) представляют собою не что иное, как уравнения Дюпюи (Dupuit)\*: первое — в дифференциальной форме, второе — в интегральной. Таким образом, уравнение Дюпюи — сокращенная форма уравнения Бернулли. Учитывая это последнее обстоятельство, получаем прямую и неразрывную цепь гидравлических явлений от открытого потока до свободного грунтового.

Большинство работ, посвященных движению грунтовых вод, в основном использовали для решения различного рода задач уравнение Дюпюи, ибо оно позволяло решать задачи в изящных и простых математических зависимостях. Однако, для отдельных случаев движения грунтового потока опыт не подтверждает этих решений. Это вынудило проф. I. Koženy (Вена) пересмотреть часть ранее решенных задач.

\* Dupuit: „Etudes théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux“.

## 6. Система уравнений, определяющих форму и мощность фильтрационного потока

Рассмотрение принципиальной схемы движения фильтрационного потока в прямоугольном призматическом массиве дало возможность получить такие зависимости:

$$H_0 - y_1 = \frac{q^2}{2g\beta^2 y_1^2} + \frac{q}{k} \frac{\lambda}{H_0 - y_1} \ln \left( \frac{H_0}{y_1} \right);$$

$$\lambda = S + \frac{kq}{g\beta^2} \left( \frac{1}{y_2} - \frac{1}{y_1} \right) - \frac{k}{2q} (y_1^2 - y_2^2).$$

Исключая из этой системы уравнений неизвестную величину  $\lambda$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} \left[ (H_0 - y_1) \frac{k}{q} - \frac{kq}{2g\beta^2 y_1^2} \right] \frac{H_0 - y_1}{\ln \left( \frac{H_0}{y_1} \right)} - S - \frac{kq}{g\beta^2} \left( \frac{1}{y_2} - \frac{1}{y_1} \right) + \\ + \frac{k}{2q} (y_1^2 - y_2^2) = 0 \end{aligned} \right\} (17)$$

или

$$F(q, y_1, y_2) = 0,$$

уравнение, связующее неизвестные  $q$ ,  $y_1$  и  $y_2$ .

Следовательно, для определенности решения задачи нам необходимо получить два дополнительные условия, связующие те же неизвестные. Попробуем получить эти недостающие условия, применив постулат об установлении таких форм движения фильтрационного потока, при которых через сыпучий массив будет протекать максимальный возможный расход.

Постулат „максимального дебита“ применяется довольно удачно в гидравлике открытого потока.

Примем за независимые переменные величины ординат  $y_1$  и  $y_2$ ; тогда математическая формулировка постулата „максимального дебита“ будет такова:

$$\frac{\partial q}{\partial y_1} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y_1}}{\frac{\partial F}{\partial q}} = 0;$$

$$\frac{\partial q}{\partial y_2} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y_2}}{\frac{\partial F}{\partial q}} = 0,$$

где  $\frac{\partial q}{\partial y_1}$  и  $\frac{\partial q}{\partial y_2}$  — частные производные от неявной функции  $F(q, y_1, y_2) = 0$  по переменным  $y_1$  и  $y_2$ .

Следовательно, задача сводится к отысканию частных производных от функции (17):

$$F(q, y_1, y_2) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} = \left( \frac{kq}{g\beta^2 y_1^3} - \frac{k}{q} \right) \frac{H_0 - y_1}{\ln \frac{H_0}{y_1}} -$$

$$- \frac{\left( \ln \frac{H_0}{y_1} - \frac{H_0 - y_1}{y_1} \right)}{\ln \left( \frac{H_0}{y_1} \right)} \left[ (H_0 - y_1) \frac{k}{q} - \frac{kq}{2g\beta^2 y_1^2} \right] + \frac{k}{q} y_1 - \frac{q \cdot k}{g\beta^2 y_1^3} = 0,$$

или, сделав соответствующие преобразования, получим:

$$\frac{q^2}{g\beta^2 y_1^3} = \frac{2 \left( \frac{H_0 - y_1}{y_1} - \ln \frac{H_0}{y_1} \right)}{1 - 2 \ln \frac{H_0}{y_1}} \quad (18)$$

Дифференцируя функцию  $F(q, y_1, y_2)$  по  $y_2$ , получим:

$$\frac{\partial F}{\partial y_2} = - \frac{kq}{g\beta^2 y_2^3} + \frac{k}{q} y_2 = 0,$$

откуда:

$$y_2^3 - \frac{q^2}{g\beta^2} = 0. \quad (19)$$

Уравнения (18) и (19) являются теми недостающими условиями, какие необходимы для разрешения задачи.

Таким образом, для решения задачи мы располагаем следующей системой уравнений, связующих неизвестные  $q$ ,  $y_1$  и  $y_2$ :

$$\left. \begin{aligned} \text{I} \dots & \left[ (H_0 - y_1) \frac{k}{q} - \frac{kq}{2g\beta^2 y_1^2} \right] \frac{H_0 - y_1}{\ln \frac{H_0}{y_1}} - S + \frac{kq}{g\beta^2 y_1} + \\ & + \frac{ky_1^2}{2q} - \frac{kq}{g\beta^2 y_2} - \frac{k}{2q} y_2^2 = 0 \\ \text{II} \dots & \dots \frac{q^2}{g\beta^2 y_1^3} = \frac{2 \left( \frac{H_0 - y_1}{y_1} - \ln \frac{H_0}{y_1} \right)}{1 - 2 \ln \frac{H_0}{y_1}} \\ \text{III} \dots & \dots y_2^3 - \frac{q^2}{g\beta^2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

## 7. Решение системы (20) фильтрационных уравнений

После незначительных преобразований перепишем первое уравнение системы (20) в таком виде:

$$\frac{1}{\ln \frac{H_0}{y_1}} \left[ \frac{2(H_0 - y_1)}{y_1} - \frac{q^2}{g\beta^2 y_1^3} \right] \cdot \left( \frac{H_0 - y_1}{y_1} \right) + 2 \frac{q^2}{g\beta^2 y_1^3} +$$

$$+ 1 - 2 \frac{q^2}{g\beta^2 y_1^2 y_2} - \left( \frac{y_2}{y_1} \right)^2 = \frac{2q}{ky_1^2} S;$$

подставляя в это уравнение значение  $q$  из третьего уравнения системы (20) будем иметь:

$$\frac{1}{\ln \frac{H_0}{y_1}} \left[ \frac{2(H_0 - y_1)}{y_1} - \left( \frac{y_2}{y_1} \right)^3 \right] \left( \frac{H_0 - y_1}{y_1} \right) + 2 \left( \frac{y_2}{y_1} \right)^3 + 1 - 3 \left( \frac{y_2}{y_1} \right)^2 =$$

$$= 2 \frac{S}{ky_1^2} \sqrt{\beta^2 g y_2^3} \quad (21)$$

Исключение  $q$  из второго и третьего уравнений системы (20) позволяет написать:

$$\left( \frac{y_2}{y_1} \right)^3 = \frac{2 \left( \frac{H_0 - y_1}{y_1} - \ln \frac{H_0}{y_1} \right)}{1 - 2 \ln \frac{H_0}{y_1}} \quad (22)$$

Правая часть полученной зависимости является величиной безразмерной, поэтому она может быть заранее вычислена для любых значений отношения  $\left( \frac{H_0}{y_1} \right)$ ; обозначая последнюю:

$$\frac{2 \left( \frac{H_0 - y_1}{y_1} - \ln \frac{H_0}{y_1} \right)}{1 - 2 \ln \frac{H_0}{y_1}} = f \left( \frac{H_0}{y_1} \right),$$

перепишем уравнение (22) в таком виде:

$$\left( \frac{y_2}{y_1} \right)^3 = f \left( \frac{H_0}{y_1} \right).$$

Исключая из уравнений (21) и (22) неизвестное  $y_2$ , получим:

$$\frac{1}{\ln \frac{H_0}{y_1}} \left[ \frac{2(H_0 - y_1)}{y_1} - f \left( \frac{H_0}{y_1} \right) \right] \left( \frac{H_0 - y_1}{y_1} \right) + 2 f \left( \frac{H_0}{y_1} \right) +$$

$$+ 1 - 3 \left[ f \left( \frac{H_0}{y_1} \right) \right]^{\frac{2}{3}} = 2 S \frac{\beta}{k} \sqrt{\frac{g}{y_1}} \cdot \sqrt{f \left( \frac{H_0}{y_1} \right)}. \quad (23)$$



Левая часть уравнения (23) безразмерна, а потому она может быть заранее вычислена для любых значений отношения  $\left(\frac{H_0}{y_1}\right)$ .

Вводя обозначение:

$$\frac{1}{\ln \frac{H_0}{y_1}} \left[ \frac{2(H_0 - y_1)}{y_1} - f\left(\frac{H_0}{y_1}\right) \right] \left(\frac{H_0 - y_1}{y_1}\right) + 2 \cdot f\left(\frac{H_0}{y_1}\right) + 1 - 3 \left[ f\left(\frac{H_0}{y_1}\right) \right]^2 = \Phi\left(\frac{H_0}{y_1}\right),$$

перепишем уравнение (23) в таком виде:

$$\Phi\left(\frac{H_0}{y_1}\right) = 2S \frac{\beta}{k} \sqrt{\frac{g}{y_1}} \cdot \sqrt{f\left(\frac{H_0}{y_1}\right)}. \quad (23')$$

Решение уравнения (23) возможно либо путем подбора, либо путем графического построения правой и левой части как функций  $(y_1)$ .

Таким образом, для нахождения основных величин, определяющих мощность и форму фильтрационного потока в перемычке с вертикальными бортами, мы последовательно должны вычислить:

$$\left. \begin{array}{l} \text{I} \dots \dots \Phi\left(\frac{H_0}{y_1}\right) = 2S \frac{\beta}{k} \sqrt{\frac{g}{y_1}} \sqrt{f\left(\frac{H_0}{y_1}\right)} \\ \text{II} \dots \dots y_2 = y_1 \cdot \sqrt[3]{f\left(\frac{H_0}{y_1}\right)} \\ \text{III} \dots \dots q = \beta \sqrt{g y_1^3 \cdot f\left(\frac{H_0}{y_1}\right)} \\ \text{IV} \dots \dots \lambda = S - \frac{k}{\beta} \sqrt{\frac{y_1}{g}} \left[ \sqrt{f\left(\frac{H_0}{y_1}\right)} - \frac{1}{2 \sqrt{f\left(\frac{H_0}{y_1}\right)}} + \right. \\ \left. + 2 \sqrt[6]{f\left(\frac{H_0}{y_1}\right)} \right]. \end{array} \right\} (24)$$

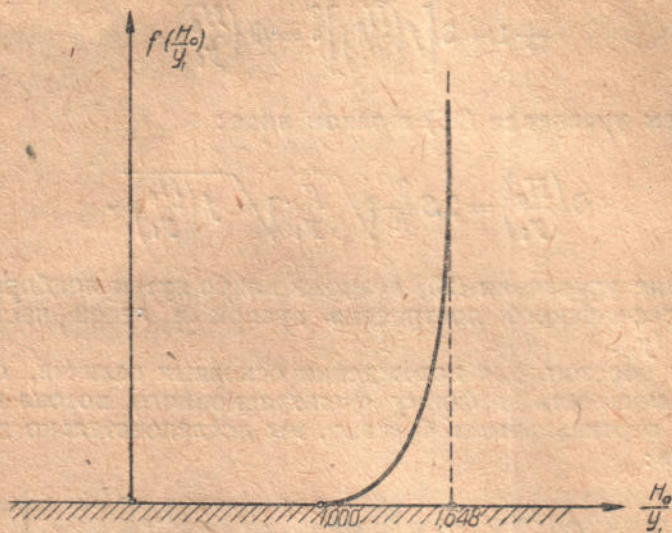
Построение кривой депрессий во второй части фильтрационного потока должно производиться по уравнению (13); для этого уравнения основные величины, определяющие параметры уравнения, вычисляются из системы (24).

## 8. Дополнение

Функция

$$f\left(\frac{H_0}{y_1}\right) = \frac{2 \left( \frac{H_0 - y_1}{y_1} - \ln \frac{H_0}{y_1} \right)}{1 - 2 \ln \frac{H_0}{y_1}}$$

допускает изменение величины отношения  $\left(\frac{H_0}{y_1}\right)$  в довольно



Фиг. 3

узких пределах, а именно: от  $\frac{H_0}{y_1} = 1$  до  $\frac{H_0}{y_1} = e^{1/2}$ ; в первом случае функция приобретает числовое значение, равное:

$$f\left(\frac{H_0}{y_1}\right)_{\frac{H_0}{y_1} = 1} = 0;$$

во втором случае:

$$f\left(\frac{H_0}{y_1}\right)_{\frac{H_0}{y_1} = e^{1/2}} = \infty$$

Графическую интерпретацию функции  $f\left(\frac{H_0}{y_1}\right)$  мы видим на фиг. 3.

Вообще же для обычных грунтов и обычных размеров перемычек величина отношения  $\left(\frac{H_0}{y_1}\right)$ , удовлетворяющая уравнению (23) будет мало отличаться от единицы.

## 9. Упрощение решения задачи о фильтрации через перемычку с отвесными бортами

Стремление отобразить в математическом анализе возможно точнее действительную картину явления фильтрации через перемычку с отвесными бортами привело к довольно сложным зависимостям между основными элементами, определяющими форму и мощность фильтрационного потока. Эти сложные, вернее громоздкие, зависимости делают даже принципиально строгое решение мало приемлемым для практики. Для большинства грунтов, применяемых в строительной практике, величина отношения  $\left(\frac{H_0}{y_1}\right)$ , удовлетворяющая уравнению (23), мало будет отличаться от единицы, поэтому решение задачи можно значительно упростить, положив:

$$\frac{H_0}{y_1} \cong 1.$$

Такое допущение равносильно следующим условиям:

а) величина перепада у напорной грани (фиг. 1) равна:

$$H_0 - H \cong \frac{\alpha V^2}{2q} \cong 0;$$

б) изменение ординат кривой депрессий по всей ширине массива (S) следует одному и тому же закону, выражаемому уравнением (13).

В силу этих допущений схема фильтрационного потока примет вид, изображенный на фиг. 4, а уравнение, связующее основные элементы фильтрационного потока (14) при  $\lambda = 0$ , можно переписать в такой форме:

$$S + \frac{kq}{g\beta^2 y_2} + \frac{k}{2q} y_2^2 - \frac{kq}{g\beta^2 H_0} - \frac{k}{2q} H_0^2 = 0 \quad (25)$$

или:

$$F(q, y_2) = 0.$$

Применяя принцип „максимального расхода“, получим:

$$\frac{\partial F}{\partial y_2} = -\frac{kq}{g\beta^2 y_2^2} + \frac{k}{q} y_2 = 0,$$

откуда:

$$y_2 = \sqrt[3]{\frac{q^2}{\beta^2 g}} = h_{кр}. \quad (26)$$

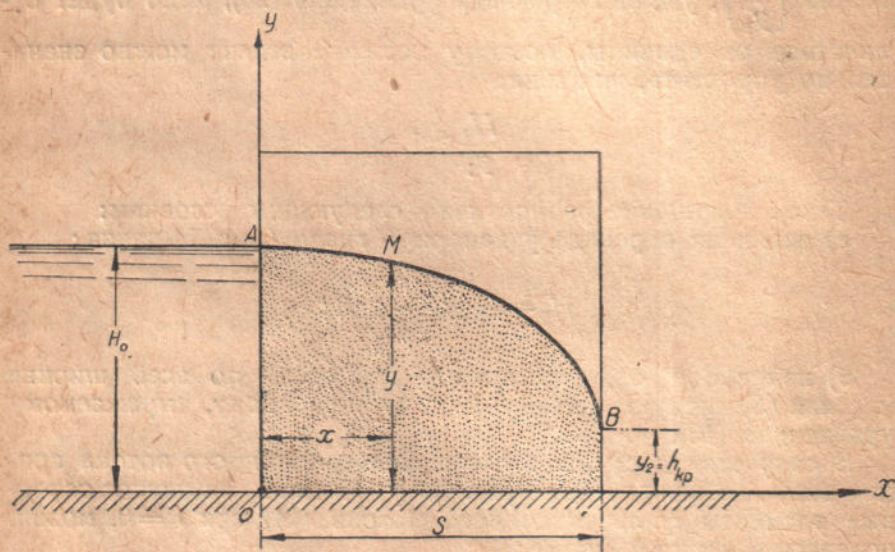
Полученную величину  $y_2$  из выражения (26) по аналогии с потоком жидкости в открытом русле мы в праве назвать „критической глубиной“, ибо она отвечает минимуму удельной

энергии в выходном сечении фильтрационного потока (низовая грань перемычки); в этом легко убедиться.

Решение задачи сводится, следовательно, к решению системы двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \text{I} \dots \dots \dots S + \frac{kq}{g\beta^2 y_2} + \frac{k}{2q} y_2^2 - \frac{kq}{g\beta^2 H_0} - \frac{k}{2q} H_0^2 &= 0 \\ \text{II} \dots \dots \dots y_2 &= \sqrt[3]{\frac{q^2}{\beta^2 g}}, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

связующих две искомых величины:  $q$  и  $y_2$ .



Фиг. 4

Исключение неизвестного  $q$  из системы уравнений (27) позволяет получить уравнение, зависящее только от  $y_2$ , в таком виде:

$$\frac{2\beta}{k} S \sqrt{g} = \frac{H_0^3 + 2y_2^3 - 3H_0 y_2^2}{H_0 \sqrt{y_2^3}} \quad (28)$$

Или, пренебрегая членом  $\frac{kq}{g\beta^2 H_0}$  в уравнении (27) в силу малости этого члена, получим:

$$2 \frac{\beta}{k} S \sqrt{g} = \frac{H_0^2 - 3y_2^2}{\sqrt{y_2^3}} \quad (28')$$

Уравнение (28) и (28') решаются также путем подбора или графического построения.

Величина расхода воды через перемычку определится из уравнения (26), переписанного в таком виде:

$$q = \beta \sqrt{gy_2^3} \quad (29)$$

или по уравнению:

$$q = \frac{k}{2} \cdot \frac{H_0^2 - 3y_2^2}{S}, \quad (30)$$

которое получается из зависимостей (28') и (29) по исключении из них выражения  $\beta \sqrt{gy_2^3}$ .

Построение кривой депрессий может быть произведено по уравнению (13) или по уравнению (12), в котором постоянная  $C$  определится из условия:  $x = 0, y = H_0$ ,

откуда:

$$C = \frac{kq}{g\beta^2 H_0} + \frac{k}{2q} H_0^2,$$

в уравнение кривой депрессий следует написать в таком виде:

$$x = \frac{kq}{g\beta^2} \left( \frac{1}{H_0} - \frac{1}{y} \right) + \frac{k}{2q} (H_0^2 - y^2). \quad (31)$$

Если воспользоваться зависимостью (26), то уравнение (29) по исключении из него величины расхода  $q$  можно переписать так:

$$x = \frac{k}{\beta} \sqrt{\frac{y_2^3}{g}} \left( \frac{1}{H_0} - \frac{1}{y} \right) + \frac{k}{2\beta \sqrt{gy_2^3}} (H_0^2 - y_2^2). \quad (32)$$

Ввиду малости числовых значений членов уравнения кривой депрессий (29) или (30), выражающих изменение удельной энергии вдоль фильтрационного потока, последними для ходовых грунтов и размеров перемычек можно пренебречь и уравнение кривой депрессий переписать в таком виде:

$$x = \frac{k}{2\beta \sqrt{gy_2^3}} (H_0^2 - y^2), \quad (33)$$

Следует помнить, что в уравнение (33) подставляется числовое значение  $y_2 = h_{кр}$ , найденное из уравнения (28).

## 10. Пример

Требуется определить высоту выхода фильтрационного потока на низовой грани ( $y_2$ ), величину расхода на погонную единицу длины перемычки и построить кривую депрессий для песчаной перемычки с вертикальными бортами, поддерживаемыми досчатыми щитами, при наличии таких данных:

Ширина перемычки  $S = 3$  м;

Напор, поддерживаемый перемычкой  $H = 4$  м;

Высота гребня  $a = 0,2$  м;

Коэффициент фильтрации  $k = 0,005$  \* м/сек;

Коэффициент порозности  $\beta = 0,35$  \*;

\* Коэффициенты для примера взяты условные.

Подставляем данные в уравнение (28), получим:

$$1315,46 = \frac{64 - 12 y_2^2 + 2 y_2^3}{4 \sqrt{y_2^3}};$$

это уравнение обращается в тождество с точностью до второго знака после запятой при  $y_2 = 0,0526$  м.

Подставляя найденное числовое значение  $y_2 = 0,0526$  м в уравнение (26) получим:

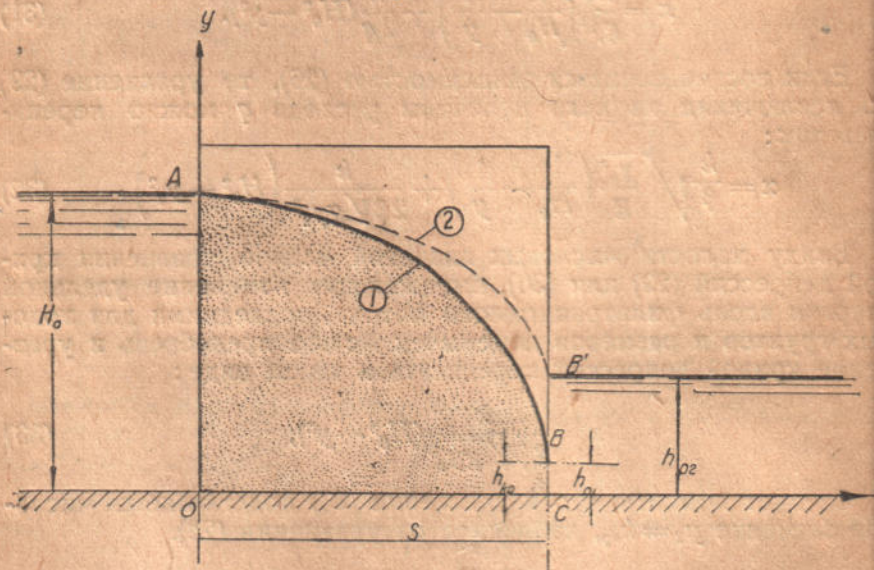
$$q = 0,35 \sqrt{9,81 \times 0,0526^3} = 0,01323 \text{ м}^2/\text{сек}.$$

Уравнение кривой депрессий после подстановки найденных числовых значений  $y_2$  и  $q$  будет иметь вид:

$$x = 3,00277 - \frac{0,00006}{y} - 0,18897 y^2.$$

## 11. Влияние величины подпора со стороны нижнего бьефа

Рассмотренный случай фильтрации воды через перемычку с отвесными бортами при условии отсутствия воды в нижнем



Фиг. 5

бьефе перемычки позволяет установить, что глубина фильтрационного потока у выходной грани массива (перемычки) в этом случае зависит исключительно от свойств материала, составляющего массив, и размеров самого массива. По аналогии с движением воды в открытом русле глубина в концевой части фильтрационного потока  $y_2$  названа нами „критической глубиной“

$$y_2 = h_{кр}.$$

Та же аналогия позволяет утверждать нам далее, что в том случае, когда с низовой стороны будет существовать подпор (в) и будет удовлетворено неравенство:

$$h_{01} < h_{кр}$$

низовой подпор (фиг. 5) не окажет никакого влияния на движение фильтрующей через перемычку воды; следовательно, определение основных размеров фильтрационного потока должно быть произведено, как для случая отсутствия подпора с низовой стороны.

В случае же, когда:

$$h_{02} > h_{кр},$$

подпор со стороны низового бьефа будет существенно влиять на движение и форму фильтрационного потока. В этом случае величина конечной ординаты кривой депрессий равна:

$$y'_2 = h_{02},$$

задача о построении кривой депрессий значительно упрощается.

Приведенные рассуждения о влиянии низового подпора на форму фильтрационного потока, а отсюда и на величину деформации фильтрации через перемычку с вертикальными бортами, вполне подтверждаются опытами проф. J. Koženy \* и инженера Эренбергера (Ehrenberger — Вена \*\*).

## 12. Построение кривой депрессий для случая $h_{02} > h_{кр}$

Нами уже отмечалось выше, что для большинства грунтов, применяемых для возведения перемычек и земляных плотин, величина перепада, образующегося сразу же у напорной грани:

$$H_0 - H \cong \frac{V^2}{2g},$$

ввиду малости скоростей фильтрации будет величиной, далеко пренебрегаемой погрешностями нашего анализа. Это обстоятельство позволяет значительно упростить задачу определения основных параметров фильтрационного потока для всех тех перемычек, какие будут иметь вертикальную напорную грань.

Следует отметить, кстати, что действительную картину явления фильтрации в верхней (1) части потока (фиг. 1) мы бесцельно отобразить в математическом анализе и можем говорить только о той или иной степени приближения к действительности; поэтому упрощение решения задачи, укладываемое в рамки допустимых инженерных погрешностей или не приводя-

\* „Wasserkraft und Wasserwirtschaft“, №№ 5 — 10, 1927.

\*\* „Zeitschrift des öesterr. Ing. und Arch. Vereines“, №№ 9 — 11, 1928, Wien — Versuche über die Ergibigkeit von Brunne“.

щее в результате к ложной трактовке вопроса, всегда будет приветствуемо.

Простейшим приемом решения задачи построения кривой депрессий для случая перемычки с отвесными бортами и наличия подпора с низовой стороны, по величине своей превосходящего критическую глубину фильтрационного потока

$$h_0 > h_{кр},$$

будет решение Дюпюи.

По Дюпюи решение задачи представляется в таком виде:

а) Уравнение кривой депрессий:

$$x = \frac{k}{2q} (H_0^2 - y^2), \quad (34)$$

т.е. упрощенное уравнение (31);

б) величина дебита фильтрационного потока:

$$q = \frac{k}{2S} (H_0^2 - h_0^2); \quad (35)$$

уравнение кривой депрессий по Дюпюи (32) можно, воспользовавшись зависимостью (33), перефразировать так:

$$y^2 = H_0^2 - \frac{H_0^2 - h_0^2}{S} x \quad (36)$$

Решение задачи для данного случая ( $h_0 > h_{кр}$ ) будет более строгим тогда, когда мы для построения кривой депрессий используем уравнение (31), а для определения величины дебита фильтрации и, следовательно, параметров уравнения (31) воспользуемся уравнением (25), подставив в него значения  $y_2 = h_0$ :

$$S + \frac{kq}{g\beta^2} \left( \frac{1}{h_0} - \frac{1}{H_0} \right) - \frac{k}{2q} (H_0^2 - h_0^2) = 0.$$

Решая это уравнение относительно искомой неизвестной  $q$ , получим:

$$q = \frac{\beta^2}{k} g \cdot S \frac{H_0 \cdot h_0}{H_0 - h_0} \left[ \sqrt{1 + \frac{k^2 (H_0 + h_0) (H_0 - h_0)^2}{2 g H_0 h_0 S^2}} - 1 \right] \quad (37)$$

### 13. Выводы

Проведенный выше анализ движения фильтрационного потока в перемычке с отвесными бортами указывает на чрезвычайную сложность задачи даже для простейших форм очертания контура пористой однородной массы. Этот же анализ убеждает нас в том, что мы не сможем отобразить в математическом анализе действительной картины движения фильтрационного потока в целом, за исключением случая безграничной ширины массива ( $S = \infty$ ).



Для конечных размеров массива наши попытки определить действительное очертание свободной поверхности фильтрационного потока будут являться лишь приближением к действительности с той или иной степенью вероятности.

Насколько мы были близки в своих допущениях и в своем анализе к действительности, на это сможет ответить лишь тщательно поставленный лабораторный опыт.

Все же, несмотря на это, мы имеем возможность из нашего анализа движения фильтрационного потока в перемычке с отвесными бортами сделать следующие выводы:

1) Очертания кривой депрессий, вернее параметры кривой депрессий, находятся в теснейшей зависимости от:

а) физических свойств материала, слагающего выпучивший массив ( $k, \beta$ );

б) размеров массива ( $H_0, S$ );

в) величины подпора с низовой стороны только в том случае, когда  $h_0 > h_{кр}$ .

2) В случае отсутствия подпора с низовой стороны глубина фильтрационного потока в его конечном (низовом) сечении устанавливается в строгом соответствии с дебитом ( $q$ ) потока и порозностью ( $\beta$ ) материала, слагающего массив. Глубина эта совершенно тождественна понятию критической глубины в потоке жидкости в открытом русле.

3) Предложение Дюпюи, так широко используемое в литературе по вопросу движения грунтовых вод, являясь по существу лишь упрощенной интерпретацией уравнения Д. Бернулли, не позволяет решить задачу даже для простейшего случая перемычки с вертикальными бортами без подпора с низовой стороны (массового случая в строительной практике), ибо уравнение:

$$q = \frac{k}{2S} (H_0^2 - y_2^2) \quad (35)$$

не имеет экстремы.

Формула Дюпюи применима лишь в том случае, когда величина низового подпора превышает критическую глубину фильтрационного потока или равна ей:

$$h_0 \geq h_{кр}$$

Если применение этой формулы до сих пор не вызывало возражений, то только потому, что критическая глубина ( $h_{кр}$ ) обычно для плоской формы движения сравнительно малая величина, которая в производимых опытах перекрывалась низким подпором.

4) В случае  $h_0 > h_{кр}$  никакое превышение точки выхода фильтрационного потока на низовую грань перемычки над уровнем эллиптического бьефа не должно иметь места в силу простого гидравлического условия, что в случае перехода от больших скоростей к меньшим возможен только подъем уровня (прыжок), но не в коем случае не перепад. В действительности для этого

случая точка выхода фильтрационного потока должна быть несколько ниже отметки нижнего бьефа. В самом деле — на границе сопряжения грунтового потока и низового бьефа  $BC$  (фиг. 5) при условии пренебрежения гидравлическими потерями будем иметь:

$$y_2 + \frac{\alpha V_2^2}{2g} \cong h_{02} + \frac{\alpha V_{02}^2}{2g},$$

или, выражая через величину единичного расхода, перепишем:

$$y_2 + \frac{\alpha q^2}{2g\beta_n^2 y_2^2} \cong h_{02} + \frac{\alpha q^2}{2gh_{02}^2};$$

откуда:

$$h_{02} - y_2 \cong \frac{\alpha q^2}{2g\beta_n^2 y_2^2} - \frac{\alpha q^2}{2gh_{02}^2} > 0,$$

что и требовалось доказать.

#### 14. Экранированная перемычка с вертикальными бортами; случай $h_{кр} < y_1$

Заканчивая рассмотрение явлений фильтрации через перемычку с отвесными бортами, разберем случай перемычки такого же очертания поперечного сечения, как и рассмотренная нами выше, но только экранированной со стороны верхней грани (согласно фиг. 6) маской из более водонепроницаемого материала, чем материал основной части перемычки.

Примем обозначения: коэффициентов фильтрации — для материала экрана  $k_s$  и для материала, слагающего основную часть перемычки —  $k_n$ ; коэффициентов порозности — для экрана  $\beta_s$  и для перемычки  $\beta_n$ . Основные размеры перемычки и экрана показаны на фиг. 6.

Уравнение (14) позволяет написать, приняв во внимание соображения § 9, следующие зависимости для случая  $h_{кр(в)} < y_2$ :

а) для основной части перемычки  $BCDE$  (фиг. 6):

$$2(S-d) \frac{q}{k_n} + \frac{2q^2}{g\beta_n^2 y_2} + y_2^2 - \frac{2q^2}{g\beta_n^2 y_1} - y_1^2 = 0$$

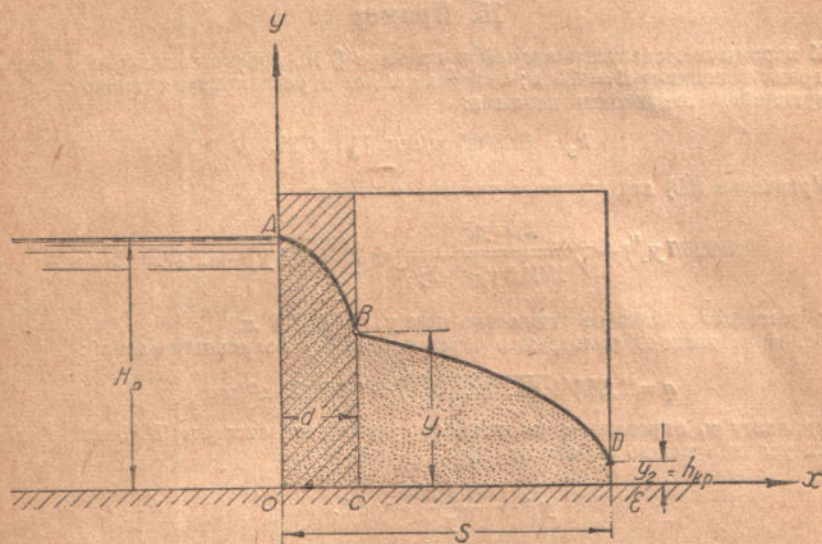
б) для экрана  $OABC$ :

$$2d \frac{q}{k_s} + \frac{2q^2}{g\beta_s^2 y_1} + y_1^2 - \frac{2q^2}{g\beta_s^2 H_0} - H_0^2 = 0.$$

Пренебрегая членами  $\frac{2q^2}{g\beta_n^2 y_1}$  и  $\frac{2q^2}{g\beta_s^2 H_0}$  в силу малости послед-

них и в интересах упрощения решения задачи, перепишем зависимости (38) в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} 2(S-d)\frac{q}{k} + \frac{2q^2}{g\beta_n^2 y_2} + y_2^2 &= y_1^2 \\ 2d\frac{q}{k_s} + \frac{2q^2}{g\beta_s^2 y_1} + y_1^2 &= H_0^2 \end{aligned} \right\} \quad (38^1)$$



Фиг. 6

присоединяя недостающее третье условие (искомые неизвестные  $q$ ,  $y_1$ ,  $y_2$ , имеем:

$$y_2 = \sqrt[3]{\frac{q^2}{\beta_n^2 g}} \quad (26)$$

Решим систему (38<sup>1</sup>) путем последовательного исключения неизвестных  $q$  и  $y_1$ . В результате получим уравнение, содержащее только  $y_2$ :

$$\begin{aligned} 2\frac{\beta_n}{k_s} d \sqrt{g y_2^3} + \frac{2\left(\frac{\beta_n}{\beta_s}\right)^2 \cdot y_2^3}{\sqrt{2(S-d)\frac{\beta_n}{k_n} \sqrt{g y_2^2} + 2y_2^2}} + \\ + \sqrt{2(S-d)\frac{\beta_n}{k_n} \sqrt{g y_2^2} + 2y_2^2} = H_0^2 \end{aligned} \quad (39)$$

Из уравнения (39) путем подбора или графического построения определяется величина конечной ординаты кривой депрес-

сий в перемычке  $y_2 = h_{кр}$ ; затем из уравнения (26) определяется величина расхода через перемычку ( $q$ ) и, наконец, из зависимости второй системы (38<sup>1</sup>) определится величина  $y_1$  — ордината кривой депрессий в точке сопряжения с раздельной гранью  $BC$ .

Случай  $h_{кр_2} > y_2$  явно в практике невозможен, ибо этот случай потребует очень тонкого экрана; поэтому мы на этом случае и не останавливаемся.

## 15. Пример

К перемычке, рассматриваемой в примере § 10, добавляется экран у напорной грани толщиной  $d = 0,5$  м; материалом для экрана принят суглинок, характеризующийся следующими данными:

$$k_2 = 0,00005 \text{ м/сек}, \beta_2 = 0,25.$$

Уравнение (39) для заданных условий можно написать так:

$$21924,7 y_2^{3/2} + \frac{3,92 y_2^3}{\sqrt{1534,8 y_2^{3/2} + 2 y_2^2}} + \sqrt{1534,8 y_2^{3/2} + 2 y_2^2} = 16;$$

оно обращается в близкое тождество при  $y_2 = 0,00778$  м.

Величина расхода фильтрации через перемычку получается равной:

$$q = 0,35 \sqrt{9,81 \times (0,00778)^3} = 0,000475 \text{ м}^2/\text{сек}.$$

Ординату  $y_1$  определяем из второго уравнения системы (38<sup>1</sup>), какое для данных условий можно переписать так:

$$y_1^2 + \frac{0,001586}{y_1} = 6,5.$$

Уравнение обращается в близкое тождество при  $y_1 = 2,55$  м.

Роль полуметрового экрана сказалась весьма сильно, о чем свидетельствует величина отношения:

$$\frac{q_{10}}{q_{15}} = \frac{0,01323}{0,000475} \cong 27,9.$$

## II. ПЕРЕМЫЧКА С ВЕРТИКАЛЬНОЙ ВЕРХОВОЙ И НАКЛОННОЙ НИЗОВОЙ ГРАНЯМИ

### 16. Схема фильтрационного потока в перемычке при $h_0 = 0$

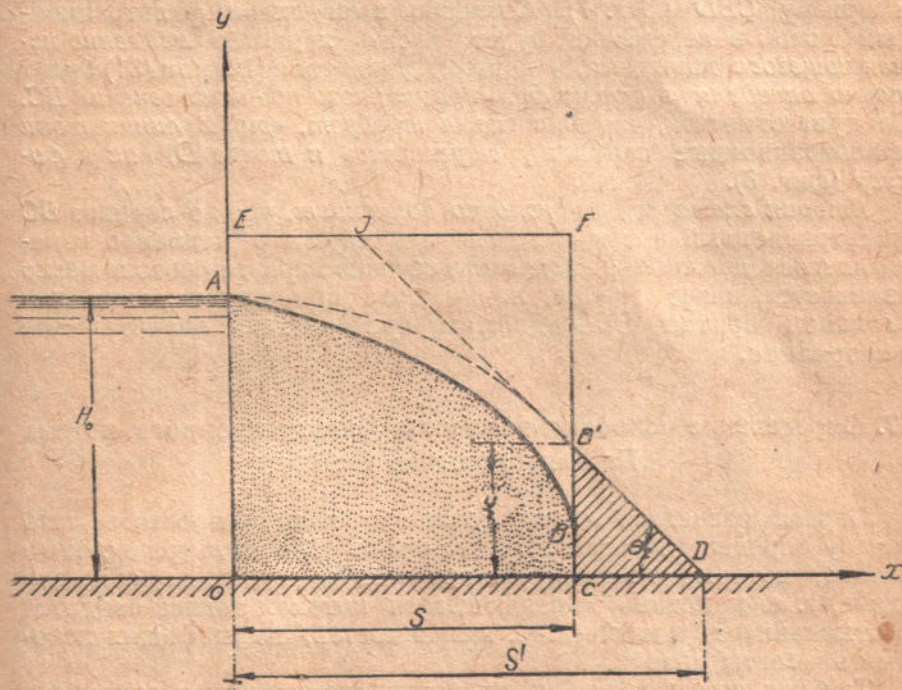
Усложним первичную простую схему перемычки с отвесными бортами добавлением треугольной призмы  $B'CD$  (фиг. 7), подсыпанной к низовой грани уже рассмотренной нами ранее перемычки. Эта добавленная треугольная призма из сыпучей массы должна неизбежно создать дополнительное сопротивление фильтрационному потоку и тем самым вызвать повышение кривой депрессий из положения  $AB$  в положение  $AB^1$  (фиг. 7).

Явление фильтрации через данную перемычку рассматриваем в предположении отсутствия подпора с низовой стороны:  $h_0 = 0$ .

Варьируя величину угла  $\theta_2$ , подберем такую величину гидравлических потерь в треугольной призме  $CB'D$ , чтобы приведенная высота их точно соответствовала отрезку прямой  $BB^1$ , иными

словами, поднимем точку выхода кривой депрессий  $B$  в перемычке с отвесными бортами в точку  $B'$  с помощью дополнительных сопротивлений в призме.

Продолжив боковую грань  $B'D$  треугольной призмы до пересечения с гребнем перемычки  $EF$ , мы тем самым отсечем от перемычки с отвесными бортами пассивную по отношению к явлению фильтрации часть перемычки; в результате получим расчетную схему перемычки с наклонной низовой гранью  $ID$ .



Фиг. 7

На основании соображений, приведенных в § 9 при рассмотрении явления фильтрации в перемычке с вертикальными бортами, примем величину перепада, образующегося у напорной грани, близкой к нулю; тем самым мы устанавливаем однообразный закон изменения ординат кривой депрессий от сечения  $OA$  до сечения  $B'C$  (фиг. 7), выражаемый уравнением (12):

$$x = C - \frac{kq}{g\beta^2 y} - \frac{k}{2q} y^2, \quad (12)$$

или, после определения постоянной  $C$ , уравнением (31):

$$x = \frac{kq}{g\beta^2} \left( \frac{1}{H_0} - \frac{1}{y} \right) + \frac{k}{2q} (H_0^2 - y^2). \quad (31)$$

Однако, для решения задачи необходимо моделировать фильтрационный поток в перемычке таким образом, чтобы эта модель потока могла быть уложена в рамки математического анализа.

Таких расчетных моделей (схем) нами намечено две.

*Первая модель (схема)* фильтрационного потока перемычки — с отвесной верховой гранью и наклонной в сторону верхнего бьефа низовой — предусматривает *полное однообразие линий тока* (элементарных струек) вдоль всей перемычки, включая и призму  $CBD$  (фиг. 7). Согласно этой схеме фильтрационный поток в перемычке будет носить характер *медленно-изменяющегося* движения, и поэтому уравнение (12) или (31) будет *точно определять форму фильтрационного потока в сечении BC*. Следует отметить, что *эта схема требует, чтобы линии тока (фильтрационные струйки), стремились к точке D, как к фокусу* (фиг. 8).

*Вторая схема* только *условно допускает*, что до сечения  $BC$  фильтрационный поток будет, носить характер медленно изменяющегося движения; ниже этого сечения характер потока резко изменяется, иначе говоря, линии тока при прохождении треугольной призмы  $BCD$  должны претерпевать значительные деформации.

## 17. Определение основных элементов фильтрационного потока

### Первая расчетная схема

Первая расчетная схема позволяет весьма просто решать задачу определения основных элементов того фильтрационного потока, который должен установиться в перемычке согласно схеме, т. е. медленно изменяющегося потока. Задача сводится к отысканию математических зависимостей, связывающих искомые элементы потока.

Так как поток согласно принятой схеме должен сохранять однообразную форму движения по всей ширине перемычки, то, очевидно, мы сможем определить положение точки выхода кривой депрессий на дневную поверхность, как *точки общей* для кривой депрессий и линий откоса  $DE$  (фиг. 8).

Подставляя координаты точки  $B(x_2, y_2)$  в уравнение (31) кривой депрессий и уравнения прямой откоса  $ED$ .

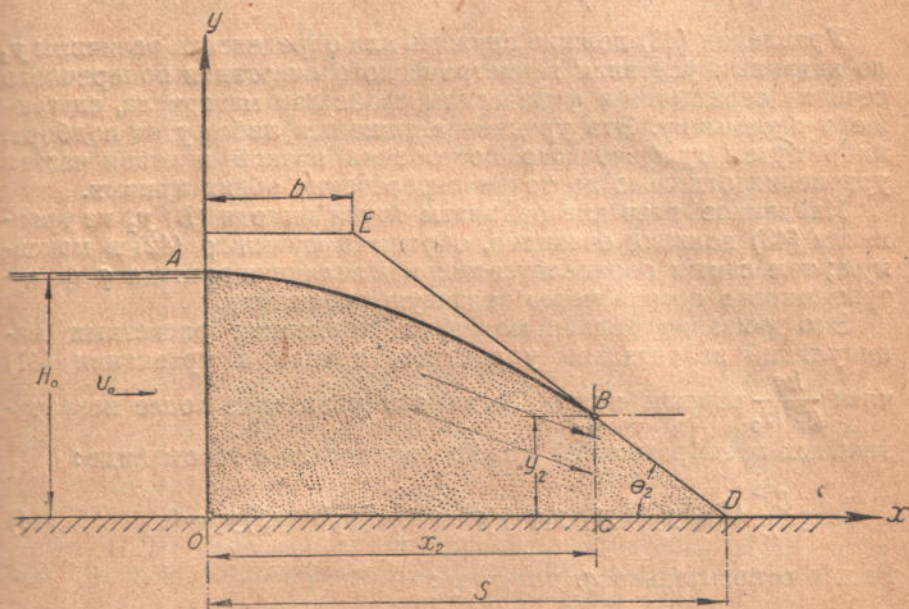
$$x = S - y \operatorname{ctg} \theta_2,$$

будем иметь для определения числовых значений координат точки  $B$  систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= \frac{qk}{g\beta^2} \left( \frac{1}{H_0} - \frac{1}{y_2} \right) + \frac{k}{2q} (H_0^2 - y_2^2) \\ x_2 &= S - y_2 \operatorname{ctg} \theta_2 \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

По исключении из системы уравнений (40) неизвестной  $x_2$  получим уравнение, связующее искомые элементы фильтрационного потока:

$$S - y_2 \operatorname{ctg} \theta_2 = \frac{kq}{g\beta^2} \left( \frac{1}{H_0} - \frac{1}{y_2} \right) + \frac{k}{2q} (H_0^2 - y_2^2) \quad (41)$$



Фиг. 8

Решая уравнение (41) относительно  $q$ , получим:

$$q = -\frac{g\beta^2}{2k} \frac{H_0 y_2}{H_0 - y_2} (S - y_2 \operatorname{ctg} \theta_2) + \sqrt{\left[ \frac{g\beta^2}{2k} \frac{H_0 y_2}{H_0 - y_2} (S - y_2 \operatorname{ctg} \theta_2) \right]^2 + \frac{g\beta^2}{2} (H_0 + y_2) H_0 y_2} \quad (42)$$

Применяя „принцип максимального расхода“, получим недостающую вторую зависимость. Условие прохождения через перемычку максимального дебита потребует, чтобы:

$$\frac{dq}{dy_2} = \frac{H_0 y_2}{H_0 - y_2} \operatorname{ctg} \theta_2 - \left( \frac{H_0}{H_0 - y_2} \right)^2 (S - y_2 \operatorname{ctg} \theta_2) +$$

$$\frac{\frac{g\beta^2}{2k} (S - y_2 \operatorname{ctg} \theta_2) \frac{H_0 y_2}{H_0 - y_2} \left[ \left( \frac{H_0}{H_0 - y_2} \right)^2 (S - y_2 \operatorname{ctg} \theta_2) - \frac{H_0 y_2}{H_0 - y_2} \operatorname{ctg} \theta_2 \right] + \frac{k}{2} (H_0^2 - 2H_0 y_2)}{\sqrt{\left[ \frac{g\beta^2}{2k} \frac{H_0 y_2}{H_0 - y_2} (S - y_2 \operatorname{ctg} \theta_2) \right]^2 + \frac{g\beta^2}{2} (H_0^2 y_2 + H_0 y_2^2)}} = 0$$

После соответствующих алгебраических преобразований получим:

$$2gH_0y_2^2(2Sy_2 - H_0^2 \operatorname{ctg} \theta_2 - y_2^2 \operatorname{ctg} \theta_2)(H_0S - 2H_0y_2 \operatorname{ctg} \theta_2 + y_2^2 \operatorname{ctg} \theta_2) = \\ = \frac{k^2}{\beta^2} (H_0 + 2y_2)^2 \cdot (H_0 - y_2)^4. \quad (43)$$

Уравнение (43) должно служить для определения величины  $y_2$  по заданным условиям геометрического очертания поперечного сечения перемычки и физическим свойствам материала, слагающего перемычку. Это уравнение решается либо путем подбора, либо путем графического построения правой и левой частей уравнения отдельно до точки пересечения обеих кривых.

Найденное значение ординаты точки выхода (B)  $y_2$  из уравнения (43) должно, очевидно, обращать функцию (42) в максимум; тем самым определится искомая величина расхода  $q$  фильтрационного потока через заданную перемычку.

Это решение задачи можно в отношении расчетных манипуляций значительно упростить, приняв в уравнении (41) член  $\frac{kq}{g\beta^2 H_0}$  равным нулю. Тогда это уравнение после незначительных преобразований можно переписать в таком виде:

$$\frac{g\beta^2}{k} (S - y_2 \operatorname{ctg} \theta_2) y_2 q + q^2 - \frac{g\beta^2}{2} (H_0^2 - y_2^2) y_2 = 0 \quad (44)$$

Решая относительно  $q$ , получим:

$$q = -\frac{g\beta^2}{2k} (S - y_2 \operatorname{ctg} \theta_2) y_2 + \\ + \sqrt{\left[ \frac{g\beta^2}{2k} (S - y_2 \operatorname{ctg} \theta_2) y_2 \right]^2 + \frac{g\beta^2}{2} (H_0^2 - y_2^2) y_2}; \quad (45)$$

дифференцируя по  $y_2$ :

$$\frac{dq}{dy_2} = -(S - 2y_2 \operatorname{ctg} \theta_2) + \\ + \frac{2y_2 \left( \frac{g\beta^2}{2k} \right) (S - y_2 \operatorname{ctg} \theta_2) (S - 2y_2 \operatorname{ctg} \theta_2) + k(H_0^2 - 3y_2^2)}{2 \sqrt{\left[ \frac{g\beta^2}{2k} (S - y_2 \operatorname{ctg} \theta_2) y_2 \right]^2 + \frac{g\beta^2}{2} (H_0^2 - y_2^2) y_2}} = 0$$

Откуда после преобразований имеем:

$$2gy_2 \cdot (2Sy_2 - H_0^2 \operatorname{ctg} \theta_2 - y_2^2 \operatorname{ctg} \theta_2) \cdot (S - 2y_2 \operatorname{ctg} \theta_2) = \\ = \frac{k^2}{\beta^2} (H_0^2 - 3y_2^2)^2. \quad (46)$$



По формуле (46) должна, очевидно, определяться величина ординаты  $y_2$  точки выхода кривой депрессий на низовой откос.

Величина расхода через перемычку определится по формуле (45) после подстановки в нее числового значения  $y_2$ , найденного из уравнения (46).

Для случая:

$$S - 2 y_2 \operatorname{ctg} \theta_2 > 0$$

формулу для определения величины расхода через перемычку можно значительно упростить на основании следующих рассуждений: удовлетворяя постулату „максимального дебита“, найдем частную производную по  $y_2$  от неявной функции (44):

$$\frac{dF_{44}}{dy_2} = \frac{\beta^2 g}{k} (S - 2 y_2 \operatorname{ctg} \theta_2) q - \frac{g \beta^2}{2} (H_0^2 - 3 y_2^2) = 0,$$

откуда имеем:

$$q = \frac{k}{2} \left( \frac{H_0^2 - 3 y_2^2}{S - 2 y_2 \operatorname{ctg} \theta_2} \right). \quad (47)$$

Функция (47) может принимать с изменением  $y_2$  значения от нуля до  $\infty$ , поэтому применение этой формулы должно быть ограничено для некоторых соотношений между  $S, y_2$  и  $H_0$ ; пределы применения формулы (47), очевидно, должны быть установлены практикой расчетов.

Дальнейшее упрощение расчетных формул (43) и (46) намечается уже в зависимости от физических свойств материала, уложенного в тело перемычки, т.е. от величины коэффициентов  $k$  и  $\beta$ .

Для тонко-зернистых грунтов величина отношения  $\frac{k^2}{\beta^2}$  может получиться столь малой, что превратит всю правую часть уравнения (43) или (46) в очень малую дробь, и если, например, уравнение (46) переписать в таком виде:

$$2 S y_2 - H_0^2 \operatorname{ctg} \theta_2 - y_2^2 \operatorname{ctg} \theta_2 = \frac{k^2}{\beta^2} \frac{(H_0^2 - 3 y_2^2)^2}{(S - 2 y_2 \operatorname{ctg} \theta_2) \cdot 2 g y_2},$$

то для случая:

$$S - 2 y_2 \operatorname{ctg} \theta_2 > 1$$

получаем еще меньшую величину в правой части.

Если в наших расчетах можно допустить более грубую точность, чем числовая величина правой части полученного уравнения, то в этом случае числовой величиной правой части уравнения можно пренебречь, приняв последнюю равной нулю; в результате будем иметь:

$$\frac{k^2}{\beta^2} \frac{(H_0^2 - 3 y_2^2)^2}{(S - 2 y_2 \operatorname{ctg} \theta_2) \cdot 2 g y_2} \cong 0$$

$$2 S y_2 - H_0^2 \operatorname{ctg} \theta_2 - y_2^2 \operatorname{ctg} \theta_2 \cong 0;$$

или, решая последнее относительно  $y_2$ , получим известное уравнение А. Шоклича\* — Н. Н. Павловского\*\* в обозначениях нашей фиг. 8.

$$y_2 = \frac{S}{\operatorname{ctg} \theta_2} - \sqrt{\left(\frac{S}{\operatorname{ctg} \theta_2}\right)^2 - H_0^2}. \quad (48)$$

### 18. Влияние низового подпора на характер фильтрационного потока в перемычке

Наблюдения над свободной поверхностью потока в открытом русле указывают, что в тех случаях, когда в открытом потоке происходит резкий переход от малых скоростей к большим, на поверхности потока образуется перепад; в случаях перехода от больших скоростей к малым наблюдается явление прыжка.

В случаях отвесной или очень крутой низовой грани согласно соображениям, приведенным в § 13, пункте 4, переход фильтрационного потока в свободный при условии  $h_{02} > h_{кр}$  будет всегда сопровождаться прыжком (переход от больших скоростей к меньшим); следовательно, величина низовой ординаты кривой депрессий будет диктоваться высотой низового подпора  $h_{02}$  (фиг. 5). Расхождение между величиной конечной ординаты депрессий  $y_2$  и высотой уровня нижнего бьефа будет усматриваться только в случае  $h_{кр} > h_{01}$ .

Переходя к рассматриваемому типу перемычки с наклонной низовой гранью, мы также должны иметь в виду две зоны возможного стояния уровней нижнего бьефа перемычки. Первая зона будет характеризоваться неравенством (фиг. 9):

$$y_2 > h_{01},$$

вторая зона:

$$y_2 < h_{02},$$

причем символом  $y_2$  мы продолжаем обозначать высоту ординаты точки выхода кривой депрессий на низовой откос при условии  $h_0 = 0$ .

Из фиг. 9 со всей очевидностью явствует, что колебание уровня воды нижнего бьефа в пределах первой зоны ни в какой мере не будет сказываться на установлении кривой депрессий в перемычке: кривая депрессий установится в такой форме, как и в случае отсутствия подпора с низовой стороны.

Во второй зоне высота ординаты точки выхода кривой депрессий на дневную поверхность будет полностью следовать за высотой уровня воды в нижнем бьефе лишь до определенного предела изменения величины низового откоса.

В самом деле, согласно замечанию, сделанному выше, равенство  $y_2 = h_{02}$  требует, чтобы скорости выхода фильтрационного

\* А. Schoklitsch. „Der Wasserbau“ 1930.

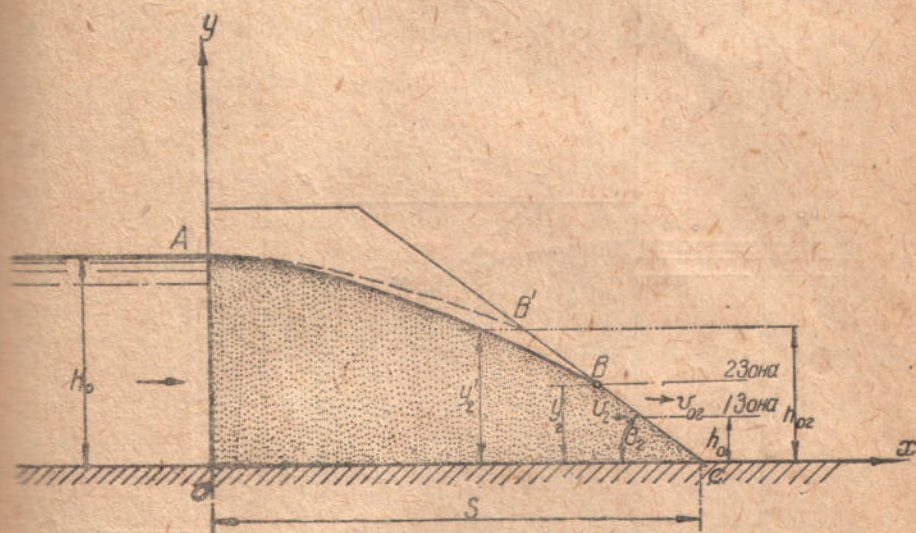
\*\* „О фильтрации воды через земляные плотины“. 1931.

потока в свободный (открытый) поток были несколько большими скоростями открытого потока:

$$\bar{v}_2 \geq \bar{v}_{02} \text{ (фиг. 9).}$$

Символом  $\bar{v}$  нами обозначены осредненные по живому сечению потока скорости. Заменяя величины скоростей выражениями через расходы, перепишем неравенство в таком виде:

$$\frac{q \sin \theta_2}{y_2^3 \cdot \beta} \geq \frac{q}{h_{02}};$$



Фиг. 9

так как нами поставлено условие:  $y'_2 = h_{02}$ , то после сокращений будем иметь:

$$\sin \theta_2 \geq \beta.$$

Следовательно, даже при сохранении принятой нами весьма искусственной схемы выхода фильтрационного потока с равными скоростями по всей смоченной части откоса мы получаем достаточно большой диапазон изменения величины низового откоса, при котором будет сохраняться равенство:

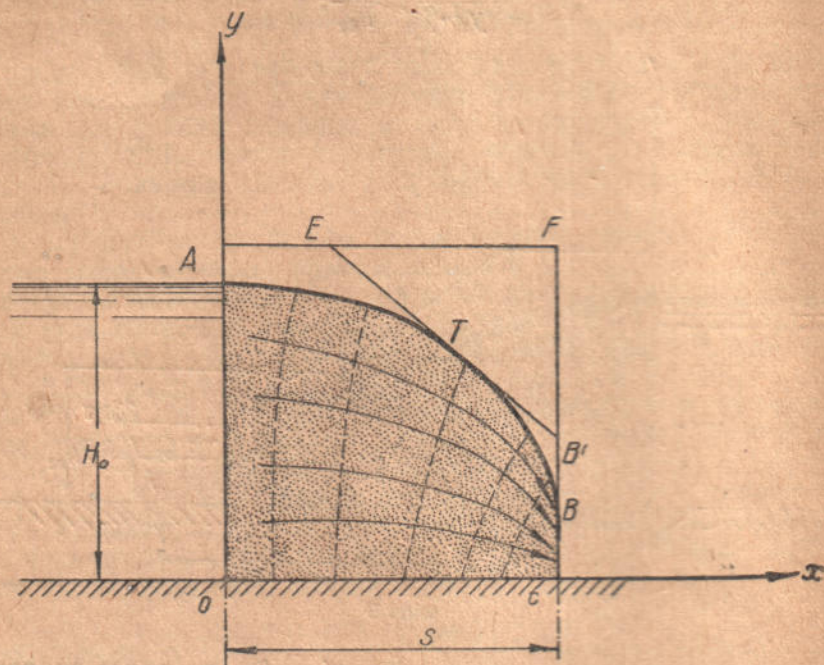
$$y'_2 = h_{02}.$$

Действительные откосы в практике очень редко выходят за пределы этого диапазона, поэтому будем считать для обычных очертаний перемычек в практике, что во второй зоне величина конечной ординаты кривой депрессий диктуется высотой уровня нижнего бьефа. В таком случае решение задачи определения

мощности фильтрационного потока ( $q$ ) сведется к простым математическим зависимостям § 12.

### 19. О касании кривой депрессий к низовому откосу

Предположим, что часть массива  $B'EF$  простой перемычки с отвесными бортами срезана плоскостью  $EB'$ , касательной к кривой депрессий в некоторой точке  $T$  (фиг. 10). Такая операция



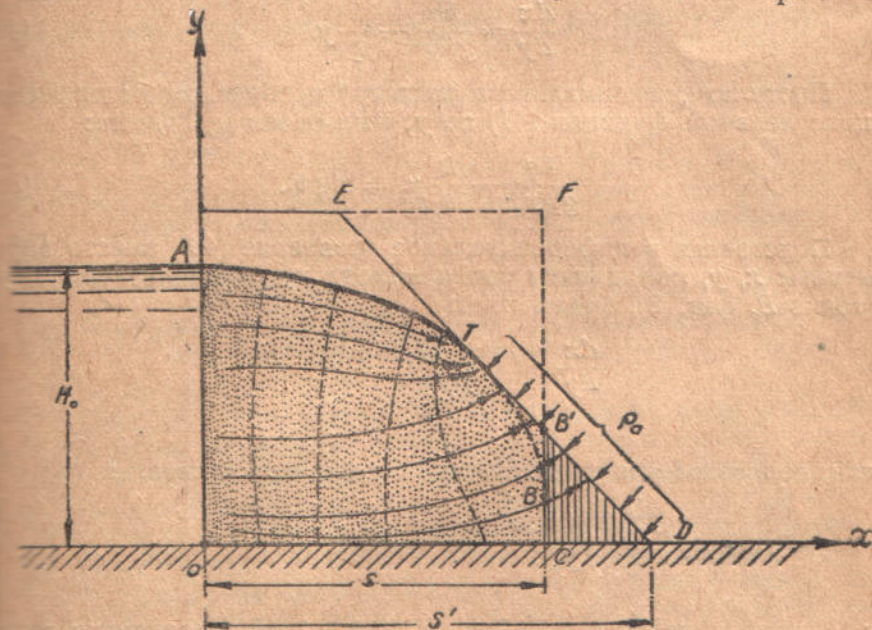
Фиг. 10

над перемычкой не должна сказаться на форме фильтрационного потока, ибо она совершенно не изменяет условий протекания последнего.

Фильтрационные струйки будут сходиться к сечению  $BC$ , как к фокусу. Но стоит лишь сделать досыпку к перемычке у низовой грани в виде трехгранной призмы (фиг. 11) с таким расчетом, чтобы одна из ее граней —  $B'D$  служила продолжением плоскости среза  $EB'$ , как картина фильтрации резко изменится. Кривая депрессий, существовавшая в перемычке до присыпки трехгранной призмы, — кривая  $AB$  (фиг. 11), должна будет модифицироваться под влиянием дополнительных гидравлических сопротивлений, представляемых призмой  $BCD$  фильтрационному потоку. Можно думать, что модифицироваться будет только часть кривой депрессий  $TB$ , расположенная ниже точки касания  $T$ ; верхняя часть —  $AT$  останется без изменения.

Логика явлений фильтрации заставляет предполагать, что фильтрационный поток в этом случае станет выходить на дневную поверхность по всей части откоса, расположенной ниже точки  $T$ . Фильтрационные струйки должны будут значительно изменить свое направление у низового откоса по сравнению со схемой, изображенной на фиг. 10.

Ввиду малости изменения величины атмосферного давления в пределах смоченной высоты низового откоса перемены последнего можно посчитать постоянным:  $P_a = \text{const}$ . Фильтрацион-



Фиг. 11

ные струйки должны будут с целью уменьшения протяженности ориентировать свои траектории к моменту выхода из сыпучего массива почти нормально к низовой грани (фиг. 11).

Поток изменяет направление фильтрационных струек, и этим изменением в целом достигается наименьшая потеря энергии на гидравлические сопротивления.

Прежняя точка касания  $T$  кривой депрессий к низовой грани перемены, очевидно, станет фокусом сосредоточения фильтрационных струек, а ближайшая к ней зона на низовом откосе станет зоной выхода наибольшей части расхода через перемену.

Из этого следует, что точка  $T$  будет точкой выхода на низовой откос кривой депрессий. Докажем, что при условии наличия первой схемы движения фильтрационного потока в перемене (см. § 16), схемы, изображенной на фиг. 8 и названной медленной схемой медленно изменяющегося движения, поступат про-

теканья через перемычку максимального расхода требует, чтобы в точке выхода (1) на дневную поверхность кривая депрессий была касательна к низовому откосу, т. е.

$$\left. \frac{dx}{dy} \right|_{\substack{x \rightarrow x_2 \\ y \rightarrow y_2}} = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} \pm \theta_2 \right).$$

Дифференцируя уравнение (12) по  $y$ , получим:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{kq}{g\beta^2 y^2} - \frac{k}{q} y. \quad (49)$$

Постулат „максимального расхода“ требует, чтобы дифференциал неявной функции (41) по  $y_2$  был равен нулю, или:

$$\frac{kq}{g\beta^2 y_2^2} - \frac{k}{q} y_2 = \operatorname{ctg} \theta_2. \quad (50)$$

Подставляя в дифференциальное уравнение (49), вместо переменных  $x, y$ , координаты точки выхода кривой депрессий  $x_2, y_2$  (точка  $B$ , фиг. 8), будем иметь:

$$\left. \frac{dx}{dy} \right|_{\substack{x = x_2 \\ y = y_2}} = \frac{kq}{g\beta^2 y_2^2} - \frac{k}{q} y_2,$$

или, сопоставляя с уравнением (50), сможем написать:

$$\left. \frac{dx}{dy} \right|_{\substack{x = x_2 \\ y = y_2}} = -\operatorname{ctg} \theta_2 = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} + \theta_2 \right),$$

т. е. кривая депрессий  $AB$  (фиг. 8) в точке пересечения с низовым откосом (в точке  $B$ ) касательна к последнему.

Далее, из уравнения (25), относящегося к перемычке с отвесными бортами, после дифференцирования по  $y_2$  согласно постулату „максимального расхода“ имеем:

$$-\frac{qk}{g\beta^2 y_2^2} + \frac{k}{q} y_2 = 0$$

Сопоставляя с уравнением (49) после подстановки в последнее, вместо текущих координат  $x, y$ , координат точки  $B$  ( $x_2, y_2$ ), получим:

$$\left( \frac{dx}{dy} \right)_{\substack{x = x_2 \\ y = y_2}} = \frac{kq}{g\beta^2 y_2^2} - \frac{k}{q} y_2 = 0 = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2} \right),$$

т. е. вертикальная низовая грань является касательной к кривой депрессий в точке выхода последней на дневную поверхность (точка  $B$ , фиг. 4).

Покажем, что уравнения (25) и (41) имеют *экстрему максимум*.

Из уравнения (41) после дифференцирования имеем:

$$\left| \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial y_2^2}}{\frac{\partial F}{\partial q}} \right| = \frac{\frac{2q}{g\beta^2 y_2^3} + \frac{1}{q}}{\frac{1}{2q^2}(y_2^2 - H_0^2) + \frac{1}{g\beta^2} \left( \frac{1}{H_0} + \frac{1}{y_2} \right)} < 0,$$

так как знак функции в знаменателе определяет выражение:

$$\frac{1}{2q^2}(y_2^2 - H_0^2) < 0.$$

Уравнение (25) позволяет получить точно такое же выражение. Отсюда следует, что функции (25) и (41) имеют *экстрему максимум*.

## 20. Перемычка с низовой гранью, наклоненной в сторону нижнего бьефа; случай $h_0 = 0$

В практике плотиностроения в настоящее время считается обязательным устройство дренажа у подошвы низового откоса земляной плотины, но достаточно убедительный расчет этого сооружения еще никем не дан. Между тем расчет в этом случае крайне необходим, хотя бы для правильного конструктивного оформления дренажного приспособления. Так как наиболее распространенная конструкция дренажного сооружения представляет собою трапециoidalную каменную отсыпку у подошвы плотины, то, очевидно, раздельная плоскость между телом плотины и обратным фильтром будет наклонена в сторону нижнего бьефа плотины.

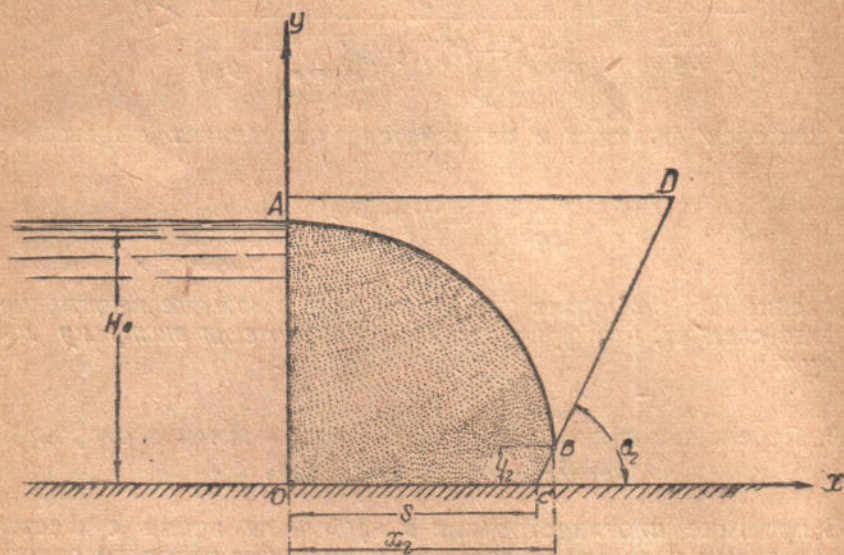
Для того, чтобы ввести поставленную перед нами задачу в рамки нашего анализа, мы представим себе оформление плотины в виде перемычки с вертикальной верховой гранью и наклонной в сторону нижнего бьефа низовой гранью, долженствующей опираться на дренажную отсыпку (фиг. 12). Назовем такую перемычку (в отличие от рассмотренной выше перемычки) *перемычкой с „отрицательным“ откосом*.

Решение задачи определения элементов фильтрационного потока в заданной перемычке уже в значительной мере облегчено решением задачи для случая *перемычки с „положительным“ откосом* (см. § 17). В самом деле, уравнение прямой  $CD$ , изображающей след плоскости низового откоса на плоскости фигуры, имеет вид:

$$x = S + y \operatorname{ctg} \theta_0,$$

и уравнение (44), определяющее положение точки пересечения кривой депрессий с низовым откосом (точки касания согласно § 19), для данного случая перемычки можно переписать так:

$$\frac{g\beta^2}{k}(S + y_2 \operatorname{ctg} \theta_2) \cdot y_2 \cdot q + q^2 - \frac{g\beta^2}{2}(H_0^2 - y_2^2)y_2 = 0 \quad (51)$$



Фиг. 12

Постулируя установление формы фильтрационного потока в перемычке, обеспечивающее пропуск максимального расхода, получим в результате излагаемых выше операций уравнение:

$$2gy_2^2(2Sy_2 + H_0^2 \operatorname{ctg} \theta_2 + y_2^2 \operatorname{ctg} \theta_2)(S + 2y_2 \operatorname{ctg} \theta_2) = \frac{k^2}{\beta^2}(H_0^2 - 3y_2^2)^2, \quad (52)$$

из которого путем подбора или графического построения определяется числовое значение  $y_2$ , ординаты кривой депрессий в точке выхода последней на дневную поверхность.

Для определения величины расхода фильтрационного потока через заданную перемычку может служить уравнение, полученное в результате дифференцирования выражения (51) по  $y_2$ :

$$q = \frac{k}{2} \left( \frac{H_0^2 - 3y_2^2}{S + 2y_2 \operatorname{ctg} \theta_2} \right). \quad (53)$$

Любопытно отметить, что для заданного типа перемычки, даже для самых тонких грунтов упрощение решения задачи



путем пренебрежения правой частью уравнения (52) приводит к консенсу. В самом деле, полагая:

$$\frac{k^2}{\beta^2} - \frac{(H_0^2 - 3y_2^2)^2}{2gy_2^2(S + 2y_2 \operatorname{ctg} \theta_2)} \cong 0,$$

получаем:

$$2Sy_2 + H_0^2 \operatorname{ctg} \theta_2 + y_2^2 \operatorname{ctg} \theta_2 = 0;$$

откуда:

$$y_2 = -\frac{S}{\operatorname{ctg} \theta_2} \pm \sqrt{\left(\frac{S}{\operatorname{ctg} \theta_2}\right)^2 - H_0^2}.$$

т.е. при любом знаке перед радикалом будем получать отрицательное числовое значение  $y_2$  — ординаты точки выхода кривой депрессий на низовой откос.

Это обстоятельство лишний раз убеждает нас в том, что проведенная нами строгость решения задач для рассмотренных случаев перемычек имеет полное основание.

### III. Обобщенное решение задачи для рассмотренных типов перемычек при условии медленно изменяющегося движения фильтрационного потока

Модель медленно изменяющегося движения, принятая нами для рассмотрения движения фильтрационного потока через перемычки, позволила нам довольно просто установить математические зависимости между основными элементами потока, геометрическими размерами и физическими свойствами материала перемычек; эта же модель фильтрационного потока ввиду условия обязательности касания кривой депрессий в точке выхода на дневную поверхность к низовой грани (которое согласно § 19 вытекает из самой сущности модели), позволяет и физически и формально объединить все вышерассмотренные случаи в один случай перемычки — перемычку с вертикальной низовой гранью и низовым откосом любой величины угла  $\theta_2$ . Уравнение низового откоса в общем виде напишем так:

$$x = S + y \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} \pm \theta_2 \right). \quad (54)$$

Тогда формула для определения ординаты точки выхода (касания) кривой депрессий на низовом откосе примет следующий вид:

$$2gy_2^2 \left[ 2Sy_2 + H_0^2 \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} \pm \theta_2 \right) + y_2^2 \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} \pm \theta_2 \right) \right] \cdot \left[ S + 2y_2 \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} \pm \theta_2 \right) \right] = \frac{k^2}{\beta^2} (H_0^2 - 3y_2^2)^2. \quad (55)$$

Величина дебита фильтрации через перемычку будет определяться по следующим формулам:

$$q = -\frac{g\beta^2}{2k} \left[ S + y_2 \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} \pm \theta_2 \right) \right] y_2 + \sqrt{\left[ \frac{g\beta^2}{2k} \left\{ S + y_2 \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} \pm \theta_2 \right) \right\} y_2 \right]^2 + \frac{g\beta^2}{2} (H_0^2 - y_2^2) y_2}; \quad (56)$$

или:

$$q = \frac{k}{2} \left( \frac{H_0^2 - 3y_2^2}{S + 2y_2 \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} \pm \theta_2 \right)} \right). \quad (57)$$

Последняя формула (57) должна применяться лишь в случае:

$$S + 2y_2 \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} \pm \theta_2 \right) > 0,$$

и

$$H_0^2 > 3y_2^2.$$

Рассмотрение формул (54), (55), (56) и (57) приводит к следующему: при угле наклона низовой грани перемычки  $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$  эти формулы дадут решение задачи для случая перемычки с отвесными бортами; при угле наклона низовой грани к горизонту  $\left( \frac{\pi}{2} + \theta_2 \right)$  получается решение для случая перемычки с „положительным“ низовым откосом и, наконец, при угле наклона откоса равным  $\left( \frac{\pi}{2} - \theta_2 \right)$  имеет место решение задачи для случая перемычки с „отрицательным“ низовым откосом. Из перемены знака перед  $\theta_2$  в выражении  $\left( \frac{\pi}{2} \pm \theta_2 \right)$  вытекают, как следствия, названия откосов: „положительный“ — наклон низовой грани в сторону верхнего бьефа, и „отрицательный“ — наклон низовой грани в сторону нижнего бьефа.

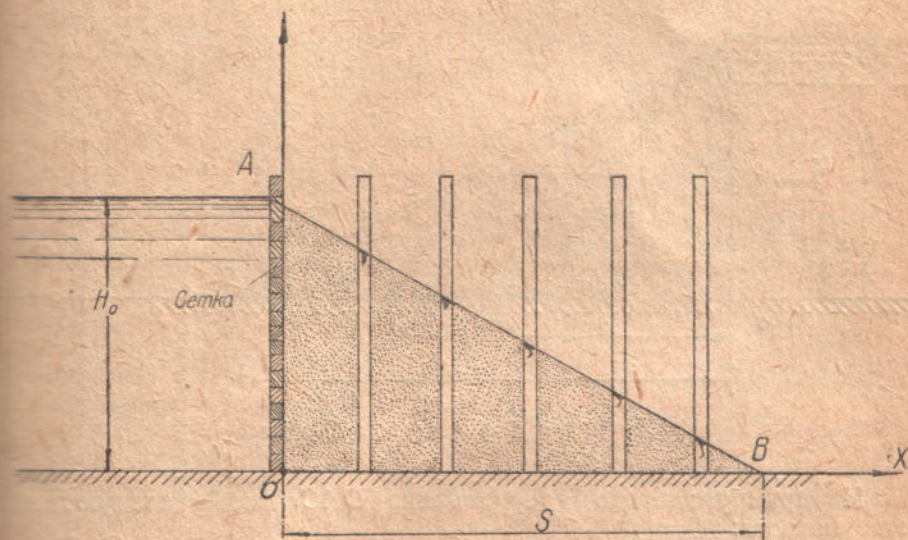
## 22. Случай трехгранной перемычки

Рассмотренная выше задача о фильтрации через перемычку с „положительным“ низовым откосом и особенно соображения, приведенные в § 19, позволяют сделать весьма интересный вывод: для случая перемычки с „положительным“ низовым откосом, имеющей ширину гребня:  $b=0$  и поддерживающей напор воды на уровне гребня (фиг. 13), кривая депрессий будет совпадать с низовым откосом при любых значениях угла наклона низовой грани к горизонту ( $\theta_2$ ), т. е. опыт должен показать картину, изображенную на фиг. 12.

В данном случае перемычки фильтрационный поток будет полностью характеризован одной только величиной — величиной дебита воды через перемычку.

Эту величину расхода воды через перемычку, изображенную на фиг. 13, определим на основании следующих соображений:

а) модель фильтрационного потока с медленно изменяющимся движением (стремление элементарных струек выходить на дневную поверхность по касательной к откосу) в данном случае неприменима;



Фиг. 13

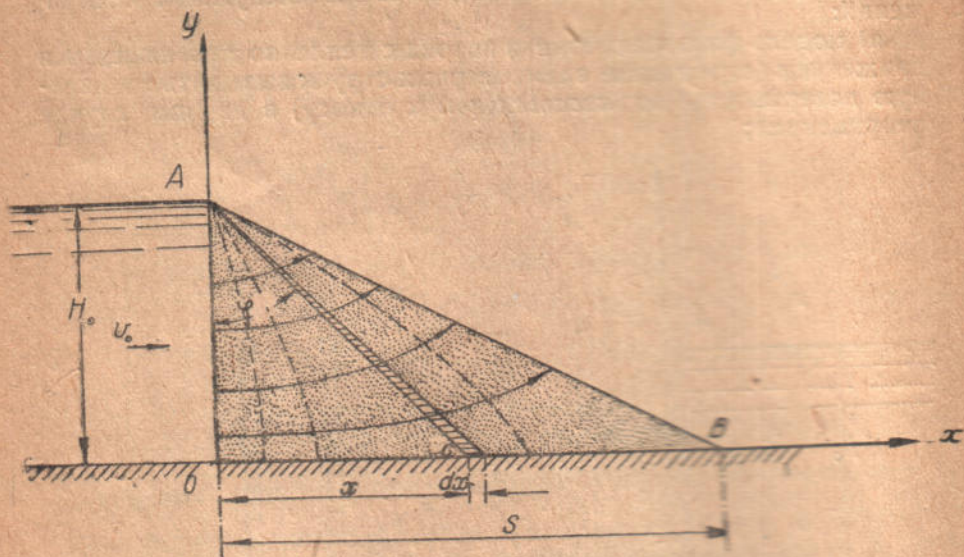
б) элементарные струйки должны будут стремиться выйти на дневную поверхность почти по нормам к откосу. Это обстоятельство указывает на тот факт, что живые сечения фильтрационного потока будут в сильной степени отклоняться от вертикальных плоскостей; живые сечения потока можно представить себе в виде кривых поверхностей, изображенных на фиг. 14 пунктиром.

Для решения задачи определения величины дебита воды через трехгранную перемычку условно допускаем, что любая плоскость  $AC$ , проведенная через точку  $A$  под углом  $\varphi$  к вертикали, будет являться живым сечением фильтрационного потока в перемычке  $OAB$  (фиг. 14); такая схема фильтрационного потока в перемычке (вторая модель, оговоренная нами в § 16), будет, думается нам, достаточно близка к действительности.

Подсчитаем на основании принятых допущений и схемы (модели) фильтрационного потока в трехгранной перемычке

величину гидравлических потерь в этой перемычке, или, иначе говоря, определим значение интеграла:

$$h_w = \int_s \frac{q}{k y_\varphi} dx,$$



Фиг. 14

Из прямоугольного треугольника  $\triangle OAC$  имеем следующие зависимости:

$$\overline{AC} = y_\varphi = \frac{H_0}{\cos \varphi};$$

$$\overline{OC} = x = H_0 \operatorname{tg} \varphi;$$

из второго соотношения получаем:

$$dx = H_0 \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}.$$

Подставляя найденные величины  $y_\varphi$  и  $dx$  в подынтегральную функцию, будем иметь:

$$\begin{aligned} &= \int_s \frac{q}{k y_\varphi} dx = \frac{q}{k} \int_0^{\theta_2} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \frac{q}{k} \left| \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \right|_0^{\theta_2} = \\ &= \frac{q}{k} \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_2}{2}. \end{aligned}$$

Так как напор, поддерживаемый перемычкой, должен быть почти полностью (за исключением разности скоростных напоров) потерян при продвижении расхода  $q$  от в рховой грани перемычки до низового откоса, то, очевидно, можно написать:

$$\frac{q}{k} \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_2}{2} \cong H_0, \quad (58)$$

откуда:

$$q \cong \frac{KH_0}{\ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_2}{2}}. \quad (59)$$

Для данного случая клинообразной перемычки Н. Н. Павловским\* получено выражение для расхода в таком виде:

$$q = \frac{k H_0}{\operatorname{ctg} \frac{\theta_2}{2}} \quad (\text{в наших обозначениях}).$$

Это выражение получено на основе моделирования фильтрационного потока в клинообразной перемычке в виде отдельных *горизонтальных струек*\*\* , причем по сравнению с формулой (59) оно дает *меньшие* величины расхода  $q$ . Очевидно, опыту надлежит ответить на вопрос о достоверности той или иной формулы или, иначе говоря, принятой модели движения фильтрационного потока в клинообразной перемычке и о степени приближения каждой из них к действительности.

### 23. Дополнительное упрощенное решение задачи о фильтрации через перемычку с „положительным“ низовым откосом при $h_0 = 0$

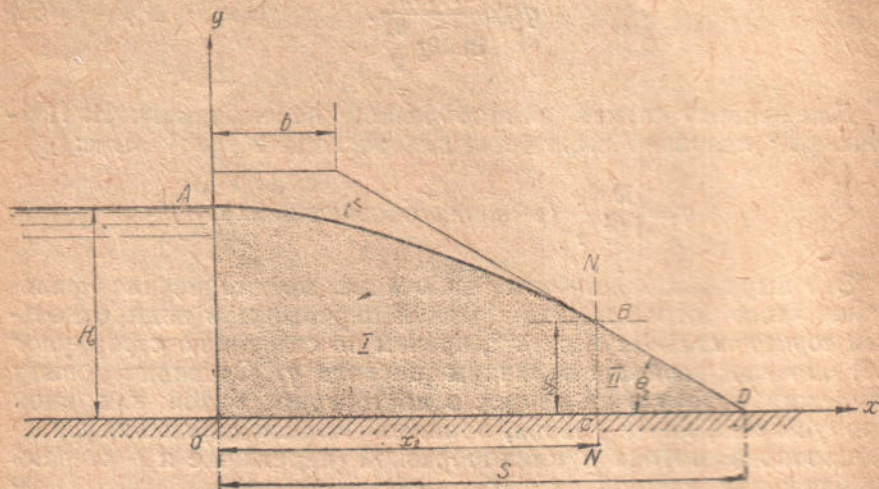
Приведенные в предыдущем параграфе соображения и найденное выражение гидравлических потерь в клинообразной перемычке (58) могут послужить для получения *упрощенного* решения задачи о фильтрации через перемычку с „положительным“ низовым, откосом и вертикальной верховой гранью „нормального типа“, т. е. с шириною гребня, отличной от нуля:  $b > 0$  (фиг. 8).

Следует заметить, что решение это будет до известной меры носить условный характер, почему его можно с успехом называть геометрическим решением.

\* Ibid., стр. 13.

\*\* Следует заметить, что выражение:  $q = \frac{k H_0}{\operatorname{ctg} \theta_2}$ , является лишь сокращенным выражением уравнения (50), (которое дается в § 19):  $\frac{qk}{g \beta^2 y_2^2} - \frac{k}{q} y_2 = - \operatorname{ctg} \theta_2$ , если в последнем пренебречь членом  $\frac{qk}{g \beta^2 y_2^2} \cong 0$ , то уравнение превращается:  $\frac{k}{q} y_2 = \operatorname{ctg} \theta_2$ .

Для решения задачи разделим фильтрационный поток в перемычке вертикальной плоскостью  $NN_1$  (фиг. 15) на две части: первая часть — от верховой грани до разделяющей плоскости  $NN_1$  — будет представлять, судя по форме кривой депрессий, фильтрационный поток в перемычке с отвесными бортами, т.е. случай, разобранный в I главе; вторая часть — фильтрационный поток в клинообразной перемычке, т.е. случай, рассмотренный в предыдущем параграфе.



Фиг. 15

Основные элементы фильтрационного потока в первой его части будут связаны полученным ранее уравнением:

$$I \dots \frac{g\beta^2}{k}(S - y_2 \operatorname{ctg} \theta_2)y_2 q + q^2 - \frac{g\beta^2}{2}(H_0^2 - y_2^2)y_2 = 0. \quad (45)$$

и во второй:

$$II \dots \dots \dots q = \frac{k y_2}{\ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_2}{2}}.$$

Эти два уравнения связывают два искомых неизвестных —  $q$ ,  $y_2$ .

Исключая из этой системы уравнений неизвестное  $q$ , получаем:

$$g\beta^2(S - y_2 \operatorname{ctg} \theta_2) \frac{y_2^2}{\ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_2}{2}} + \frac{k^2 y_2^2}{\left(\ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_2}{2}\right)^2} - \frac{g\beta^2}{2}(H_0^2 - y_2^2)y_2 = 0.$$

Уравнение это после незначительных преобразований можно переписать в таком виде:

$$y_2^2 - 2y_2 \left[ \frac{S}{2 \operatorname{ctg} \theta_2 - \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_2}{2}} - \frac{k^2}{g \beta^2 \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_2}{2} \left( 2 \operatorname{ctg} \theta_2 - \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_2}{2} \right)} \right] + \frac{H_0^2 \cdot \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_2}{2}}{2 \operatorname{ctg} \theta_2 - \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_2}{2}} = 0.$$

Для большинства грунтов, какими располагает практика,  $k^2$  представляет величину такой малости, что все выражение:

$$\frac{k^2}{g \beta^2 \left( 2 \operatorname{ctg} \theta_2 - \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_2}{2} \right) \cdot \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_2}{2}}$$

для любых практических размеров перемычек и даже лабораторных моделей (за исключением случая  $\theta_2 = 90^\circ$ , когда это выражение стремится к бесконечности) будет давать числовую величину, далеко выходящую за пределы точности наших расчетов и наблюдений; поэтому этой величиной можно с успехом пренебречь (от этого уравнение не теряет своей особенности: при  $\theta \rightarrow 90^\circ$  коэффициент при  $y_2$  стремится к бесконечности), и тогда будем иметь:

$$y_2^2 - \frac{2S}{2 \operatorname{ctg} \theta_2 - \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_2}{2}} \cdot y_2 + \frac{H_0 \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_2}{2}}{2 \operatorname{ctg} \theta_2 - \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_2}{2}} = 0$$

откуда:

$$y_2 = \frac{S}{2 \operatorname{ctg} \theta_2 - \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_2}{2}} - \sqrt{\left( \frac{S}{2 \operatorname{ctg} \theta_2 - \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_2}{2}} \right)^2 - \frac{H_0^2 \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_2}{2}}{2 \operatorname{ctg} \theta_2 - \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_2}{2}}}; \quad (60)$$

знак плюс перед радикалом логически неприемлем.

Уравнение (60) решает задачу чисто геометрически, вне влияния характера грунтов, и стоит вне общности решения для любых величин низового откоса, какое нами получено выше (уравнение 55), так как для случая  $\theta_2 \rightarrow 90^\circ$  дает после раскрытия неопределенности значение  $y_2 \rightarrow 0$ , т. е. явно невозможный случай. Отсюда очевидно, что для откосов незначительных (малых  $\operatorname{ctg} \theta_2$ ) уравнение (60) должно давать преуменьшенные результаты.

Уравнение (60) при замене в нем величины  $\ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_2}{2}$  величиной  $\operatorname{ctg} \theta_2$ , т. е. при условии принятия величины гидравлических потерь в клинообразной перемычке по Н. Н. Павловскому равною:

$$H_0 = \frac{q}{k} \operatorname{ctg} \theta_2,$$

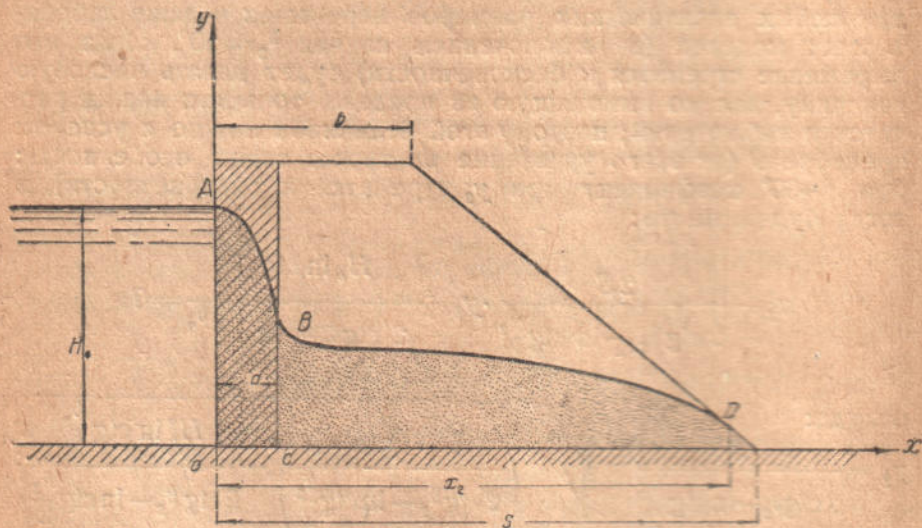
превращается в уравнение:

$$y_2 = \frac{S}{\operatorname{ctg} \theta_2} - \sqrt{\left(\frac{S}{\operatorname{ctg} \theta_2}\right)^2 - H_0^2},$$

т. е. в уравнение Шоклича-Павловского.

#### 24. Экранированная перемычка с „положительным“ низовым откосом; случай $h_0 = 0$ и $h_{\text{пр}(*)} < y_1$

Пусть фиг. 16 изображает экранированную перемычку с положительным низовым откосом и отвесной верховой гранью.



Фиг. 16

Экранирование произведено путем устройства отсыпки с вертикальными стенками из более водонепроницаемого материала, чем материал основной массы тела перемычки.

Материал основной массы тела перемычки характеризуется следующими данными:

$k_n$  — коэффициент фильтрации материала перемычки;

$\beta_n$  — коэффициент порозности этого материала.

Материалы экрана характеризуются коэффициентами:  $k_{\text{э}}$ ,  $\beta_{\text{э}}$ .

Основные размеры перемычки показаны на фиг. 16.



Для решения поставленной задачи располагаем следующими, ранее полученными, зависимостями:

$$\left. \begin{aligned} 2d \cdot \frac{q}{k_*} + \frac{2q^2}{g\beta_n^2 y_2} + y_1^2 - \frac{2q^2}{g\beta_n^2 H_0} - H_0^2 &= 0 \\ 2[(S-d) - y_2 \operatorname{ctg} \theta_2] \frac{q}{k_n} + \frac{2q^2}{g\beta_n^2 y_2} + y_2^2 - \frac{2q^2}{g\beta_n^2 y_1} - y_1^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

присоединяя недостающее третье условие, вытекающее из доказанного в § 19 положения о касании кривой депрессий к низовому откосу:

$$\left. \frac{dx}{dy} \right|_{\substack{x=y_2 \\ y=y_2}} = \frac{qk_n}{g\beta_n y_2^2} - \frac{k_n}{q} y_2 = -\operatorname{ctg} \theta_2, \quad (50)$$

получим систему трех уравнений, связывающих неизвестные:  $q$ ,  $y_1$  и  $y_2$ .

На основании замечаний § 12 и ввиду того обстоятельства, что для данного случая имеем:

$$y_1 > h_{кр(с)},$$

где  $h_{кр(с)}$  — критическая глубина фильтрационного потока у выхода из экрана, можно членами  $\frac{2q^2}{g\beta_n^2 y_1}$  и  $\frac{2q^2}{g\beta_n^2 H_0}$  в первом уравнении системы (61) пренебречь; кроме того, ввиду очень малого для обычных грунтов числового значения члена  $\frac{2q^2}{g\beta_n^2 y_1}$  во втором уравнении системы (61) последним также можно пренебречь, не вызывая этим более или менее значительных погрешностей. В результате таких пренебрежений получим систему сравнительно простых уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \text{I} \quad & 2d \frac{q}{k_*} + y_1^2 - H_0^2 = 0^{\circ} \\ \text{II} \quad & 2(S-d - y_2 \operatorname{ctg} \theta_2) \frac{q}{k_n} + \frac{2q^2}{g\beta_n^2 y_2} + y_2^2 - y_1^2 = 0 \\ \text{III} \quad & \frac{qk_n}{g\beta_n^2 y_2^2} - \frac{k_n}{q} y_2 + \operatorname{ctg} \theta_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Исключая из I и II уравнений  $y_1$ , получим:

$$\text{II} \quad 2(S-d - y_2 \operatorname{ctg} \theta_2) \frac{q}{k_n} + \frac{2q^2}{g\beta_n^2 y_2} + y_2^2 - H_0^2 + 2d \frac{q}{k_*} = 0. \quad (63)$$

Из уравнения III имеем:

$$q = -\frac{g\beta_n^2 y_2^2}{2k_n} \operatorname{ctg} \theta_2 + \sqrt{\left(\frac{g\beta_n^2 y_2^2}{2k_n} \operatorname{ctg} \theta_2\right)^2 + g\beta_n^2 y_2^3}. \quad (64)$$

откуда получим:

$$\frac{q^2}{g \beta_n^2 y_2} = -\frac{g \beta_n^2}{2 k_n} y_2 \operatorname{ctg} \theta_2 + \frac{y_2 \operatorname{ctg} \theta_2}{k_n} \sqrt{\left(\frac{g \beta_n^2 y_2^2}{2 k_n} \operatorname{ctg} \theta_2\right)^2 + g \beta_n^2 y_2^3 + y_2^2}$$

Подставляя найденные значения  $q$  и  $\frac{q^2}{g \beta_n^2 y_2}$  в уравнение (63), будем иметь:

$$2 \left( \frac{S-d}{k_n} + \frac{d}{k_s} - \frac{2 y_2 \operatorname{ctg} \theta_2}{k_n} \right) \left( \sqrt{\left(\frac{g \beta_n^2 y_2^2}{2 k_n} \operatorname{ctg} \theta_2\right)^2 + g \beta_n^2 y_2^3} - \frac{g \beta_n^2 y_2^2 \operatorname{ctg} \theta_2}{2 k_n} \right) = H_0^2 - 3 y_2^2 \quad (65)$$

Из уравнения (65) путем подбора находится  $y_2$  для заданных размеров перемычки и характеристики материалов тела перемычки и экрана.

Для определения величины расхода через экранированную перемычку может быть использовано уравнение (64).

Более удобное для расчетных целей уравнение, определяющее величину фильтрационного расхода через перемычку, получаем из уравнения (63) после дифференцирования последнего по  $y_2$  и приравнивания производной нулю (согласно постулату максимального дебита); для этого уравнение следует переписать в таком виде:

$$F(q, y_2) = 2 \left( \frac{S-d}{k_n} + \frac{d}{k_s} - \frac{y_2 \operatorname{ctg} \theta_2}{k_n} \right) q \cdot y_2 + \frac{2 q^2}{g \beta_n^2} + y_2^3 - H_0^2 y_2 = 0;$$

дифференцируя, получим:

$$\frac{\partial F}{\partial y_2} = 2 \left( \frac{S-d}{k_n} + \frac{d}{k_s} - \frac{2 y_2 \operatorname{ctg} \theta_2}{k_n} \right) q + 3 y_2^2 - H_0^2 = 0,$$

откуда имеем:

$$q = \frac{H_0^2 - 3 y_2^2}{2 \left( \frac{S-d}{k_n} + \frac{d}{k_s} - \frac{2 y_2 \operatorname{ctg} \theta_2}{k_n} \right)} \quad (66)$$

При пользовании формулой (66) следует иметь в виду замечание, сделанное в § 18.

Случай экранированной перемычки  $h_{\text{экр}} > y_1$ , на основании замечания § 14 мы исключаем из рассмотрения.

## 25. Примеры

1) Перемычка, поддерживаемая с верховой стороны досчатым водопроницаемым забором, имеет следующие размеры:

Высота перемычки  $H_n = 4,50$  м;

Напор, поддерживаемый перемычкой = 4,00 м;

Ширина гребня перемычки  $b = 1,00$  м;

изовой откос 1:1,  $\text{ctg } \theta_2 = 1$ ;

Коэффициент фильтрации  $k = 0,005$  м/сек;

Коэффициент порозности  $\beta = 0,35$ .

Требуется определить координаты выхода кривой депрессий на дневную поверхность (низовой откос) и подсчитать расход фильтрационного потока через перемычку.

Пользуясь уравнением (44), получим следующую зависимость:

$$78,48(11y_2 - 16 - y_2^2)(22 - 8y_2 + y_2^2)y_2^2 = \frac{(4 + 2y_2)^2(4 - y_2)^4}{4900}.$$

Полученное уравнение обращается в тождество при значениях  $y_2 \cong 1,72515$  м; для дальнейших расчетов примем:  $y_2 \cong 1,725$  м. Этой высоте выхода кривой депрессий на низовой откос соответствует величина расхода через перемычку:

$$q \cong \frac{0,005}{2} \left( \frac{16 - 3 \cdot 1,725^3}{5,50 - 3,45} \right) \cong 0,0086 \text{ м}^2/\text{сек}.$$

Осредненная скорость выхода фильтрационной воды на низовой грани равна:

$$\bar{v} = \frac{q}{\left( \frac{y_2}{\sin \theta_2} \right)} \cong \frac{0,0086}{1,725} \cdot 0,7071 \cong 0,0035 \text{ м/сек}.$$

Абсцисса точки выхода кривой депрессий получается равной:

$$x_2 \cong 5,5 - 1,725 = 3,775 \text{ м}.$$

2) Определить те же элементы и для той же перемычки, что в примере первом, по упрощенным формулам решения задачи (60) и (59).

$$y_2 = \frac{5,5}{2 - 0,8812} - \sqrt{\left( \frac{5,5}{2 - 0,8812} \right)^2 - \frac{16 \cdot 0,8812}{2 - 0,8812}} \cong 1,515 \text{ м};$$

величина расхода получается равной:

$$q = \frac{0,005 \cdot 1,515}{0,8812} \cong 0,0086 \text{ м}^2/\text{сек};$$

абсцисса точки выхода будет равна:

$$x_2 = 5,5 - 1,515 = 3,985 \text{ м}.$$

3) Сохраним те же основные размеры и тот же материал перемычки, что и в первом примере, заменив только часть материала перемычки у верховой грани материалом более водонепроницаемым, чем основной материал перемычки:  $k_s = 0,00005$  м/сек; пусть толщина этой части (экрана) будет равна  $d = 0,5$  м (фиг. 17).

Из формулы (65) имеем:

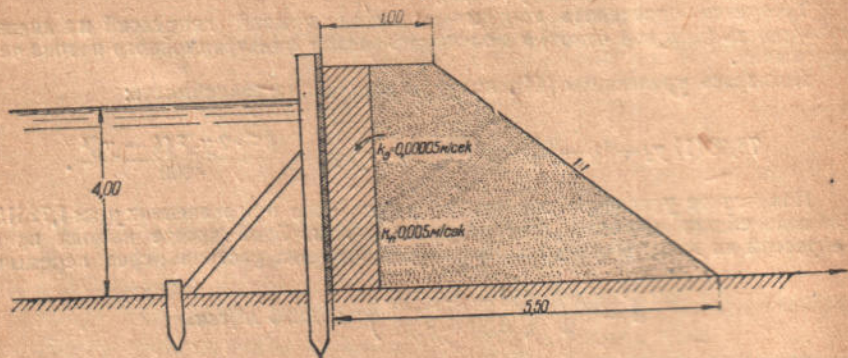
$$(22000 - 800y_2)(\sqrt{(120y_2^2)^2 + 1,2y_2^3} - 120y_2^2) = 16 - 3y_2^2.$$

Это уравнение обращается в близкое тождество при:

$$y_2 \cong 0,16 \text{ м.}$$

Величина расхода через экранированную перемычку получается равной

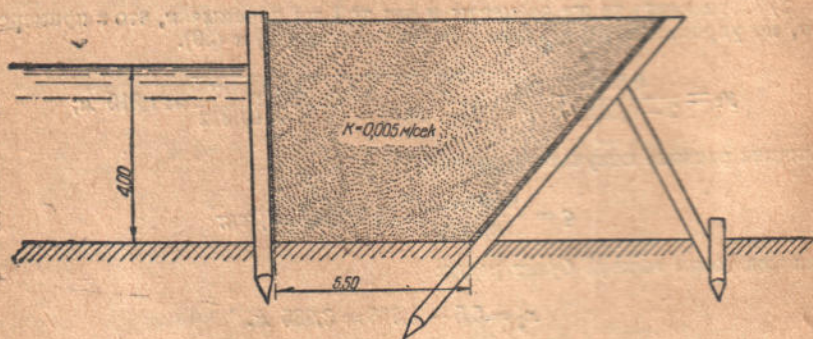
$$q = \frac{16 - 0,0768}{2 \left( \frac{5,5 - 0,5}{0,005} + \frac{0,5}{0,00005} - \frac{0,32}{0,005} \right)} \cong 0,00073 \text{ м}^3/\text{сек.}$$



Фиг. 17

Ордината кривой депрессий по грани раздела различных материалов получается равной:

$$y_1 = \sqrt{H_0^2 - \frac{2d \cdot q}{k_s}} \cong 1,18 \text{ м.}$$



Фиг. 18

Роль экрана явствует из величины соотношения расходов через простую перемычку и перемычку экранированную:

$$\frac{q_{\Pi}}{q_0} = \frac{0,0086}{0,00073} \cong 11,8$$

4) Определить элементы фильтрационного потока через перемычку с отрицательным\* низовым откосом; основные данные показаны на фиг. 18.

Из формулы (52) имеем:

$$19,62 (11 y_2 + 16 + y_2^2) (5,5 + 2y_2) y_2 = \frac{(16 - 3 y_2^2)^2}{4900}$$

Уравнение обращается в тождество при:

$$y_2 = 0,0055 \text{ м};$$

расход через перемычку получается равным:

$$q = \frac{0,005}{2} \frac{16 - 3 \cdot (0,0055)^2}{5,5 + 0,011} \cong 0,00726 \text{ м}^2/\text{сек.}$$

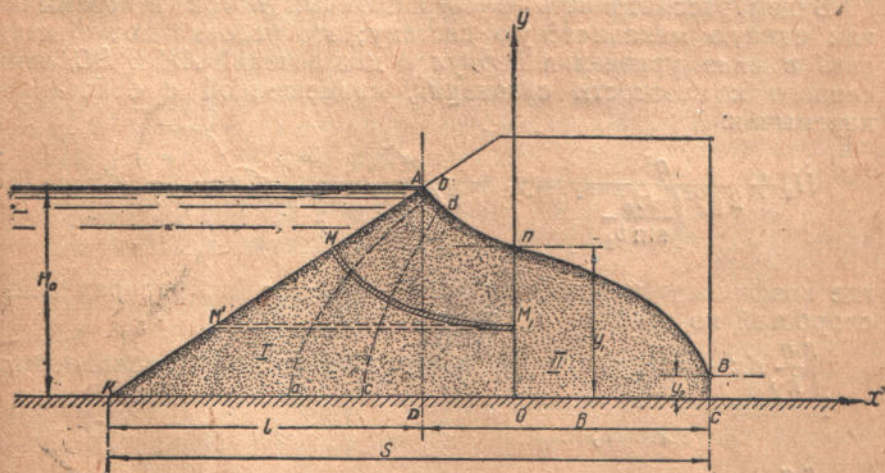
Величина осредненной скорости в выходном живом сечении потока получается равной:

$$\bar{v} = \frac{q}{\left(\frac{y_2}{\sin \theta_2}\right)} = \frac{0,00726}{0,0055} \cdot 0,7071 \cong 0,93 \text{ м/сек.}$$

### III. ПЕРЕМЫЧКА С НАКЛОННОЙ ВЕРХОВОЙ И ОТВЕСНОЙ НИЗОВОЙ ГРАНЯМИ

#### 26. Схема фильтрационного потока в перемычке при $h_0 = 0$

К перемычке с вертикальными бортами (1 случай, рассмотренный выше) добавим (досыпем) с верховой стороны трех-



Фиг. 19

гранную призму  $KAD$ ; эта призма сложена из того же материала, из которого сложена и основная часть перемычки; в результате получим схему нового типа перемычки, изображенную на фиг. 19.

Эту схему будем называть схемой перемычки с наклонной верховой гранью или *перемычкой с верховым откосом*.

Пусть рассматриваемая перемычка поддерживает напор  $H_0$ ; подпор с низовой стороны перемычки отсутствует.

Для рассмотрения движения фильтрационного потока через сыпучий массив, очерченный в поперечном профиле согласно схеме фиг. 19, разделим поток вертикальной плоскостью  $OY$ , проходящей через точку перегиба ( $\Pi$ ) кривой депрессий, на две части: первую (верховую) часть — от грани откоса  $KA$  до раздельной плоскости  $OY$  и вторую (низовую) часть — от раздельной плоскости  $OY$  до низовой грани перемычки.

В первой части фильтрационного потока кривая депрессий претерпевает наибольшую модификацию; во второй (низовой) части потока кривая депрессий будет следовать нормальному ходу изменений ординат обычной кривой спада, выражаемому уравнением (12).

Такое деление фильтрационного потока на две части вызывается характером возможного к применению математического анализа: для второй (низовой) части потока этот анализ достаточно строг; для верховой части — сугубо условен.

При решении поставленной перед нами задачи определения основных элементов фильтрационного потока мы, очевидно, должны будем располагать соответствующим числом математических зависимостей, связывающих эти характерные для фильтрационного потока величины. Следовательно, задача состоит в отыскании этих зависимостей.

Будем рассматривать фильтрационный поток в перемычке, как единую механическую систему; это условие можно написать в виде уравнения Бернулли для сечений  $AK$  и  $BC$ , отнесенного к плоскости сравнения, совмещенной с основанием перемычки:

$$H_0 + \frac{q^2}{2g\beta^2 \left(\frac{H_0}{\sin \theta_1}\right)^2} = y_2 + \frac{q^2}{2g\beta^2 y_2^2} + \int_I \frac{q}{ky} dx + \int_B \frac{q}{ky} dx, \quad (67)$$

где коэффициент коррективы на неравномерность распределения скоростей по сечению принят  $\alpha \cong 1$ ;

$\int_I \frac{q}{ky} dx$  — потеря энергии в верховой части фильтрационного потока;

$\int_B \frac{q}{ky} dx$  — потеря энергии в низовой части потока.

Уравнение (67) указывает, что решение задачи о фильтрации через верховую часть перемычки с наклонной верховой гранью сводится, главным образом, к отысканию значений величины гидравлических потерь, достаточно близких к действительности.

## 27. Потеря энергии в верховой части фильтрационного потока

Движение фильтрационного потока в верховой части перемычки — явление *чрезвычайно сложное с гидравлической точки зрения*, — оно не поддается не только точному, но даже достаточно *убедительному* анализу; поэтому мы принуждены будем прибегнуть к *условностям* и *моделировать* поток в верховой части перемычки (в нашей расчетной схеме) в такой форме, которая позволит применить математический анализ и в то же время достаточно близко отобразит действительную картину явления.

С этой целью представим себе весь фильтрационный поток разделенным на отдельные элементарные струйки и проследим за продвижением любой из них.

Пусть линия  $MM_1$  изображает элементарную струйку, проходящую через точку  $M$ , расположенную на верховом откосе. Логика явления заставляет предполагать, и опыт это подтверждает, что струйка  $MM_1$  (фиг. 19), нормальная в момент поступления в сыпучий массив к верховому откосу, должна будет по пути изменять направление своей траектории таким образом, чтобы подойти к сечению  $OP$  (раздельной плоскости) почти нормально.

Следует отметить, что траектория струйки по своей протяженности и по форме будет такая, какая в результате продвижения вдоль струйки некоторого элементарного расхода создает *наименьшие потери энергии на гидравлические сопротивления*.

Схема горизонтальных струек ( $MM_1$ , фиг. 19), очевидно, не отвечает этому условию.

Живые сечения потока в верховой части перемычки с наклонной верховой гранью должны также претерпевать значительные деформации по пути следования потока от сечения  $KA$  к сечению  $OP$ . Форма промежуточных живых сечений (или иными словами — эквипотенциальных поверхностей) показана схематически на фиг. 19 в виде кривых  $ab$  и  $cd$ .

Эта картина движения потока в верховой его части позволяет подобрать более или менее близкую к действительной картине *модель фильтрационного потока* в верховой части перемычки с тем *неизменным условием*, чтобы подобранная модель укладывалась в рамки простого математического анализа.

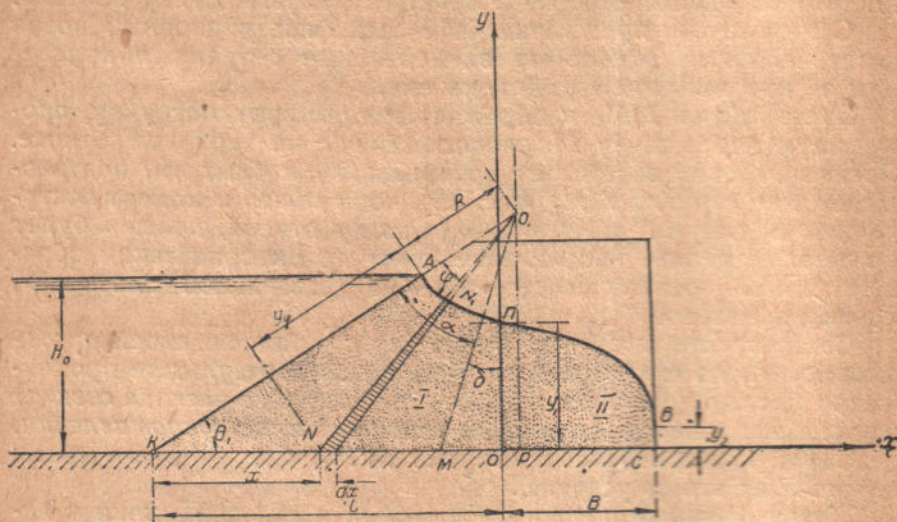
Задачу определения гидравлических потерь в верховой части перемычки будем решать в двух вариантах: первый вариант решения проведем с *моделью фильтрационного потока*, наиболее близко отображающей действительную картину, — это вариант достаточно строгого решения задачи; второй вариант — всемерное упрощение решения задачи на основе решения первого.

Первый вариант определения величины гидравлических сопротивлений в верховой части потока

Условно допускаем, что: а) очертание кривой депрессий на участке  $AP$  (до точки перегиба) соответствует *дуге круга*, очер-

ченного из точки пересечения ( $O_1$ ) линии откоса  $AK$  и прямой, проходящей через точку перегиба ( $\Pi$ ) нормально к касательной в точке перегиба к кривой депрессий; б) живые сечения фильтрационного потока в верховой части перемычки (эквипотенциальные поверхности) представляют собою ряд плоских поверхностей, в продолжении своем пересекающихся в точке  $O_1$  (фиг. 20).

Такая схема (модель) фильтрационного потока в верховой части перемычки будет ближе соответствовать, думается нам, действительной картине, чем схема горизонтальных струек.



Фиг. 20

На основании этих допущений и схемы фильтрационного потока в верховой его части можно уже сравнительно легко и просто определить величину гидравлических потерь в этой части потока или, что то же, проинтегрировать выражение:

$$h_{w_1} = \int_0^x \frac{q}{ky} dx.$$

Пусть фиг. 20 изображает нашу условную схему (модель) движения.

Прямая  $NN_1$  на фиг. 20 будет изображать живое сечение потока на плоскости фигуры.

Введем следующие обозначения: проекцию живого сечения (отрезок прямой  $NN_1$ ) обозначим через  $y_\varphi$ ; угол, образуемый прямой  $NO_1$  с линией откоса  $KO_1$ , — через  $\varphi$ ; отстояние „дна“ живого сечения от подошвы основания верхового откоса — через  $x$ ; тогда интеграл, выражающий величину гидравличе-



ских потерь в верховой части фильтрационного потока, можно переписать в таком виде:

$$h_{w_1} = \int_i \frac{q}{ky_\varphi} dx;$$

очевидно, для интегрирования этого выражения необходимо определить значения  $y_\varphi$  и  $dx$ .

Обращаясь к фиг. 20, замечаем, что отрезок прямой  $KO_1$  определяется в своей протяженности выражением:

$$\overline{KO_1} = \frac{H_0}{\sin \theta_1} + R,$$

где  $R$  — радиус дуги круга, по которой предположено очертание кривой депрессий на участке  $АП$ .

Из треугольника  $KO_1N$  имеем такие отношения:

$$\frac{x}{\sin \varphi} = \frac{y_\varphi + R}{\sin \theta_1} = \frac{\overline{KO_1}}{\sin (\theta_1 + \varphi)};$$

Отсюда определяются искомые значения  $y_\varphi$  и  $dx$ :

$$\frac{y_\varphi + R}{\sin \theta_1} = \frac{H_0 + R \sin \theta_1}{\sin \theta_1 \cdot \sin (\theta_1 + \varphi)},$$

откуда:

$$y_\varphi = \frac{H_0 + R \sin \theta_1}{\sin (\theta_1 + \varphi)} - R;$$

из соотношения:

$$\frac{x}{\sin \varphi} = \frac{H_0 + R \sin \theta_1}{\sin \theta_1 \cdot \sin (\theta_1 + \varphi)}$$

получаем:

$$x = \frac{H_0 + R \sin \theta_1}{\sin \theta_1} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sin (\theta_1 + \varphi)},$$

и, наконец, после дифференцирования имеем после незначительных преобразований:

$$dx = (H_0 + R \sin \theta_1) \frac{d\varphi}{\sin^2 (\theta_1 + \varphi)}.$$

Величина радиуса дуги кривой депрессий  $АП$  определится из соотношения:

$$R \cos (90 - \theta_1 - \alpha) - R \cos (90 - \theta_1) = H_0 - y_1,$$

(проектирование отрезков прямых:  $AO_1 = R$  и  $ПО_1 = R$  на вертикаль  $O_1P$ ); замечая из фигуры, что угол  $\alpha$  равняется:

$$\alpha = 90 - \theta_1 - \delta,$$

перепишем выражение для радиуса дуги  $АП$  в таком виде:

$$R \cos \delta - R \sin \theta_1 = H_0 - y_1,$$

откуда:

$$R = \frac{H_0 - y_1}{\cos \delta - \sin \theta_1}. \quad (68)$$

Подставляя найденные выражения для  $y_\varphi$  и  $dx$  в подынтегральную функцию, получим:

$$h_{w1} = \int_l \frac{q}{ky_\varphi} dx = \frac{q}{k} \int_0^\alpha \frac{(H_0 + R \sin \theta_1) d\varphi}{\sin(\theta_1 + \varphi) [H_0 + R \sin \theta_1 - R \sin(\theta_1 + \varphi)]},$$

или, разлагая подынтегральное выражение на простейшие дроби, перепишем:

$$h_{w1} = \frac{q}{k} \int_0^\alpha \frac{d(\theta + \varphi)}{\sin(\theta_1 + \varphi)} + \frac{q}{k} \int_0^\alpha \frac{R d(\theta + \varphi)}{H_0 + R \sin \theta_1 - R \sin(\theta_1 + \varphi)}.$$

Первый интеграл этого выражения будет равен:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{q}{k} \int_0^\alpha \frac{d(\theta + \varphi)}{\sin(\theta_1 + \varphi)} = \frac{q}{k} \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\theta + \varphi}{2} \right) \Big|_0^\alpha = \\ &= \frac{q}{k} \left[ \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\theta + \alpha}{2} \right) - \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right] = \frac{q}{k} \ln \left( \operatorname{tg} \frac{90 - \delta}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2} \right); \end{aligned}$$

второй интеграл:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{q}{k} \int_0^\alpha \frac{R d(\theta_1 + \varphi)}{H_0 + R \sin \theta_1 - R \sin(\theta_1 + \varphi)} = \\ &= \frac{q}{k} \cdot \frac{R}{H_0 + R \sin \theta_1} \cdot \int_0^\alpha \frac{d(\theta + \varphi)}{1 - \frac{R}{H_0 + R \sin \theta_1} \sin(\theta_1 + \varphi)}, \end{aligned}$$

с помощью обозначения:

$$\frac{R}{H_0 + R \sin \theta_1} = a$$

и подстановки:

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\theta + \varphi}{2} \right) = z$$

приводится к виду:

$$I_2 = \frac{q}{k} \int_{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}^{\operatorname{tg} \frac{\theta+\alpha}{2}} \frac{2 dz}{z^2 - 2az + 1} = \frac{q}{k} \frac{2a}{\sqrt{1-a^2}} \int_{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}^{\operatorname{tg} \frac{\theta+\alpha}{2}} \frac{d \left( \frac{z-a}{\sqrt{1-a^2}} \right)}{\left( \frac{z-a}{\sqrt{1-a^2}} \right)^2 + 1};$$

так как:

$$a = \frac{R}{H_0 + R \sin \theta_1} < 1,$$

то интеграл  $I_2$  переписется в квадратурах в таком виде:

$$I_2 = \frac{q}{k} \frac{2a}{\sqrt{1-a^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{z-a}{\sqrt{1-a^2}} \right) \Bigg|_{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}^{\operatorname{tg} \frac{\theta+\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{q}{k} \frac{2a}{\sqrt{1-a^2}} \left( \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta+\alpha}{2} - a}{\sqrt{1-a^2}} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - a}{\sqrt{1-a^2}} \right);$$

замечая, что  $\alpha = 90 - \theta_1 - \delta$ , перепишем:

$$I_2 = \frac{q}{k} \frac{2a}{\sqrt{1-a^2}} \left( \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{tg} \frac{90-\delta}{2} - a}{\sqrt{1-a^2}} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} - a}{\sqrt{1-a^2}} \right),$$

или, пользуясь зависимостями между arcus'ами, перепишем после небольших преобразований:

$$I_2 = \frac{q}{k} \frac{2a}{\sqrt{1-a^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\left( \operatorname{tg} \frac{90-\delta}{2} - \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} \right) \cdot \sqrt{1-a^2}}{\left( 1 - a \operatorname{tg} \frac{90-\delta}{2} \right) + \left( \operatorname{tg} \frac{90-\delta}{2} - a \right) \cdot \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2}};$$

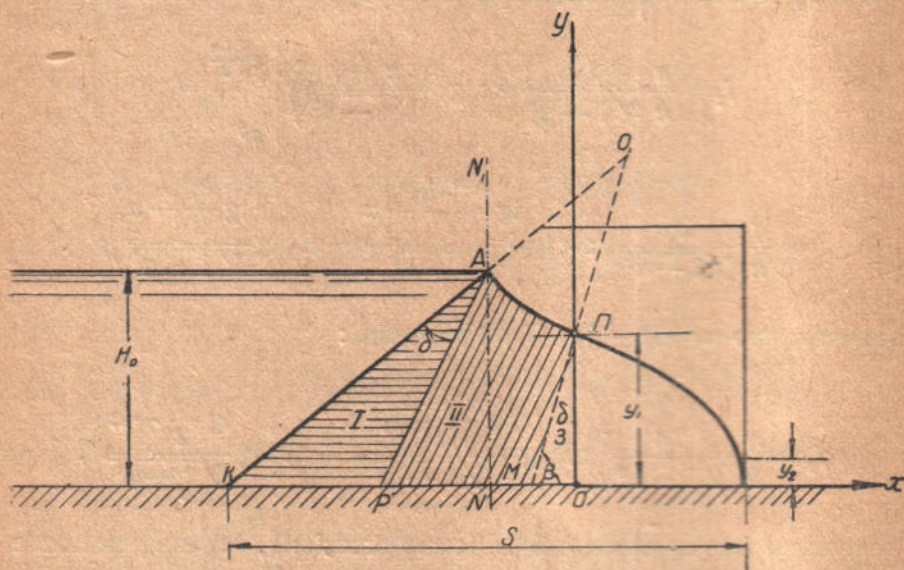
следует помнить, что в выражении интеграла  $I_2$  символ  $a$  имеет следующее значение:

$$a = \frac{R}{H_0 + R \sin \theta_1} = \frac{H_0 - y_1}{H_0 \cos \delta - y_1 \sin \theta_1}.$$

Следовательно, величина гидравлических потерь будет определяться выражением:

$$h_{w1} = I_1 + I_2 = \frac{q}{k} \left[ \ln \left( \operatorname{tg} \frac{90 - \delta}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a^2} - 1}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\left( \operatorname{tg} \frac{90 - \delta}{2} - \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} \right) \sqrt{1 - a^2}}{\left( 1 - a \operatorname{tg} \frac{90 - \delta}{2} \right) + \left( \operatorname{tg} \frac{90 - \delta}{2} - a \right) \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2}} \right] \quad (69)$$

но только до сечения  $MP$ ; очевидно, для определения полной величины потерь фильтрационного потока до раздельной пло-



Фиг. 21

скости  $OP$  необходимо учесть потери в треугольной призме  $MPO$  (фиг. 21). Схема потерь, представляемая уравнением (69), изображена на фиг. 21.

Первое слагаемое уравнения (69) будет представлять потери в треугольной призме  $KAP$ , а второе — в фигуре  $APPM$ .

Потери в треугольной призме  $MPO$  подсчитаем на основании тех допущений, какие принимали для определения потерь в части фильтрационного потока  $KAPM$ , т. е. будем считать, что струйки, будучи нормальными к сечению  $MP$ , должны будут ориентироваться нормально к сечению  $PO$  по мере продвижения к нему (фиг. 22).

Из треугольника  $MPI$  имеем соотношения:

$$\frac{y_{\varphi}}{\sin \beta} = \frac{\overline{MP}}{\sin [180 - (\beta + \varphi)]} = \frac{x}{\sin \varphi},$$

откуда:

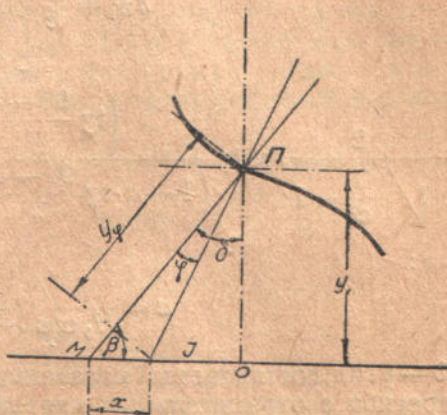
$$y_{\varphi} = \frac{y_1}{\sin (\beta + \varphi)},$$

и

$$x = \frac{y_1 \sin \varphi}{\sin \beta \sin (\beta + \varphi)};$$

после дифференцирования будем иметь:

$$dx = y_1 \frac{d\varphi}{\sin^2 (\beta + \varphi)};$$



Фиг. 22

величина потерь в призме будет выражаться:

$$h_{w_3} = \int \frac{q}{ky_{\varphi}} dx = \frac{q}{k} \int_0^{90-\beta} \frac{d\varphi}{\sin (\beta - \varphi)} = -\frac{q}{k} \ln \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{q}{k} \ln \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2};$$

или, имея в виду, что согласно фиг. 20:

$$\beta = \theta_1 + \alpha = \theta_1 + 90 - \theta_1 - \delta = 90 - \delta,$$

получим выражение для потерь в призме  $MPO$  в таком виде:

$$h_{w_3} = \frac{q}{k} \ln \operatorname{ctg} \left( \frac{90 - \delta}{2} \right).$$

Таким образом, полная величина гидравлических потерь до разделной плоскости  $YO$  согласно принятой нами модели фильтрационного потока будет определяться выражением:

$$h_{w_1} = \frac{q}{k} \left[ \ln \left( \operatorname{tg} \frac{90 - \delta}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2} \right) + \ln \operatorname{ctg} \frac{90 - \delta}{2} + \right. \\ \left. + \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a^2} - 1}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\left( \operatorname{tg} \frac{90 - \delta}{2} - \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} \right) \cdot \sqrt{1 - a^2}}{\left( 1 - a \cdot \operatorname{tg} \frac{90 - \delta}{2} \right) + \left( \operatorname{tg} \frac{90 - \delta}{2} - a \right) \cdot \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2}} \right]$$

или, после незначительного преобразования:

$$h_{w_1} = \frac{q}{k} \left[ \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2} + \right. \\ \left. + \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a^2} - 1}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\left( \operatorname{tg} \frac{90 - \delta}{2} - \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} \right) \sqrt{1 - a^2}}{\left( 1 - a \cdot \operatorname{tg} \frac{90 - \delta}{2} \right) + \left( \operatorname{tg} \frac{90 - \delta}{2} - a \right) \cdot \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2}} \right] \quad (70)$$

где:

$$a = \frac{H_0 - y_1}{H_0 \cos \delta - y_1 \sin \theta_1};$$

и  $\delta$  — угол, составляемый касательной к кривой депрессий в точке перегиба с отрицательным направлением оси  $x$ -ов.

Величина угла  $\delta$  определится на основании следующих соображений: дифференцируя уравнение (12) кривой депрессий, получим:

$$dx = \left( \frac{qk}{g\beta^2 y^2} - \frac{k}{q} y \right) dy;$$

отсюда имеем величину углового коэффициента касательной:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{\frac{qk}{g\beta^2} - \frac{k}{q} y^3} = \frac{q}{k} \frac{y^2}{\frac{q^2}{g\beta^2} - y^3},$$

или, подставляя координаты точки перегиба  $\Pi (0, y_1)$ , получим:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\substack{x=0 \\ y=y_1}} = \operatorname{tg} \delta = \frac{q}{k} \frac{y_1^2}{\frac{q^2}{g\beta^2} - y_1^3}.$$

#### Второй вариант определения гидравлических потерь

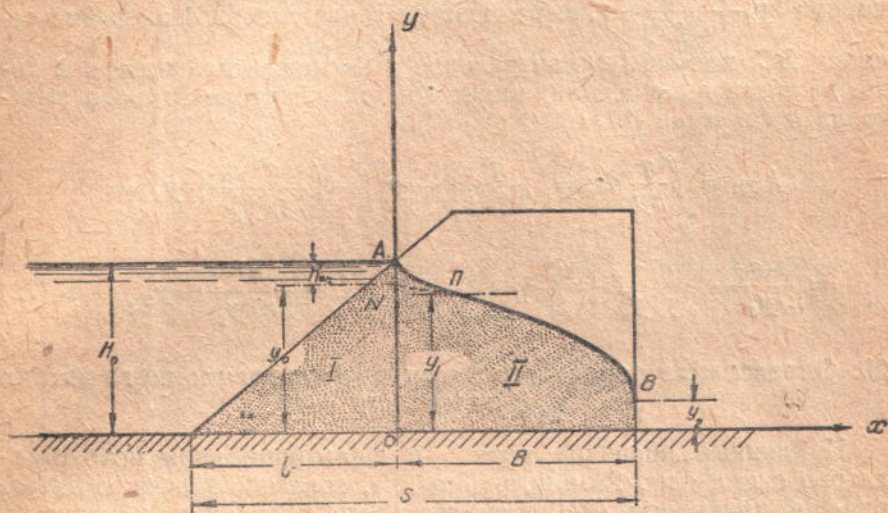
Рассмотрение выражения (70) для определения величины гидравлических потерь приводит к мысли, что сопротивления в верховой части фильтрационного потока (до плоскости раздела  $OY$ ) можно представить в виде двух потерь: а) потери в треугольной призме  $KAN$  (фиг. 21) и б) потери от сечения  $AN$  до сечения  $PO$ .

Величина потерь в призме  $KAN$  будет определяться выражением:

$$h'_{w_1} = \frac{q}{k} \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2},$$

Это выражение нам уже известно, оно нами предложено выше для определения величины гидравлических потерь в низовой треугольной призме (§ 22).

Потери по длине потока от сечения  $AN$  до сечения  $PO$  (определяемые в уравнении (70) вторым слагаемым) подсчитаем близкими тем потерям, какие мы бы имели в случае наличия на этом участке нормальной кривой спада; иными словами, в расчетной схеме переносим плоскость раздела  $OY$  на место плоскости  $NN_1$  (фиг. 21)



Фиг. 23

Эту последнюю схему, изображенную на фиг. 23, мы и положим в основание решения задачи, как схему, позволяющую весьма просто решать задачу и дающую вполне допустимые с инженерной точки зрения отклонения (по сравнению с первой схемой).

## 28. Потеря энергии в низовой части фильтрационного потока

Кривая депрессий для второй (низовой) части фильтрационного потока будет определяться уравнением:

$$x = \frac{qk}{g\beta^2 y_0} + \frac{k}{2q} y_0^2 - \frac{kq}{g\beta^2 y} - \frac{k}{2q} y^2,$$

а уравнением, связующим основные элементы низовой части фильтрационного потока, будет служить уравнение:

$$B = \frac{kq}{g\beta^2} \left( \frac{1}{y_0} - \frac{1}{y_2} \right) + \frac{k}{2q} (y_0^2 - y_2^2) \quad (71)$$

Выделяем из уравнения (71), после некоторой его перефразировки, выражение, определяющее величину запаса удельной энергии в сечении  $ON$  (фиг. 23):

$$\frac{q^2}{2g\beta^2 y_0^2} + y_0 = \frac{B \cdot q}{k \cdot y_0} - \frac{q^2}{2g\beta^2 y_0^2} + \frac{y_0}{2} + \frac{q^2}{g\beta^2 y_0 y_2} + \frac{y_2^2}{2y_0};$$

далее, вычитая из обеих частей полученного равенства сумму членов  $\left(y_2 + \frac{q^2}{2g\beta^2 y_2^2}\right)$ , выражающую запас удельной энергии в сечении  $BC$ , получим окончательное выражение для потерь в низовой части потока, или, иначе говоря, значение второго интеграла в формуле (67):

$$\begin{aligned} h_{\text{вп}} &= \int_B^A \frac{q}{ky} dx = \left(\frac{q^2}{2g\beta^2 y_0^2} + y_0\right) - \left(\frac{q^2}{2g\beta^2 y_2^2} + y_2\right) = \\ &= \frac{B \cdot q}{k \cdot y_0} - \frac{q^2}{2g\beta^2 y_0^2} + \frac{y_0}{2} + \frac{q^2}{g\beta^2 y_2 y_0} + \frac{y_2^2}{2y_0} - \frac{q^2}{2g\beta^2 y_2^2} - y_2 \end{aligned} \quad (72)$$

## 29. Определение основных элементов фильтрационного потока в перемычке

Найденные значения потерь в фильтрационном потоке согласно схеме фиг. 23 или, что то же, согласно значению интеграла в уравнении (67) позволяют это уравнение переписать после некоторых сокращений в таком виде:

$$\begin{aligned} H_0 + \frac{q^2}{2g\beta^2 H_0^2} \sin^2 \theta_1 &= \frac{q}{k} \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2} + \frac{B \cdot q}{k \cdot y_0} - \frac{q^2}{2g\beta^2 y_0^2} + \frac{y_0}{2} + \\ &+ \frac{q^2}{g\beta^2 y_2 y_0} + \frac{y_0^2}{2y_0}. \end{aligned} \quad (73)$$

На основании многочисленных замечаний, сделанных выше, мы можем пренебречь членами:

$$\frac{q^2}{2g\beta^2 H_0^2} \sin^2 \theta_1 \text{ и } \frac{q^2}{2g\beta^2 y_0^2},$$

и переписать это уравнение в виде:

$$H_0 = \frac{q}{k} \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2} + \frac{Bq}{ky_0} + \frac{y_1}{2} + \frac{q^2}{g\beta^2 y_2 y_0} + \frac{y_2}{2y_0}. \quad (74)$$

Согласно постулату протекания через перемычку максимального расхода из уравнения (74) имеем:

$$q^2 = \beta^2 g y_2^3;$$



наконец, выражение для гидравлических потерь в верховой трехгранной призме позволяет написать:

$$H_0 - y_0 \cong \frac{q}{k} \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2}. \quad (75)$$

Таким образом, в результате произведенных операций мы имеем систему уравнений, связующих искомые элементы фильтрационного потока ( $y_0$ ,  $y_2$  и  $q$ ):

$$\left. \begin{aligned} \text{I} \dots H_0 &= \frac{q}{k} \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2} + \frac{Bq}{ky_0} + \frac{y_1}{2} + \frac{q^2}{g\beta^2 y_2 y_0} + \frac{y_1^2}{2y_0} \\ \text{II} \dots H_0 - y_0 &= \frac{q}{k} \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2} \\ \text{III} \dots q^2 &= \beta^2 g y_2^3 \\ \text{IV} \dots B &= S - H_0 \operatorname{ctg} \theta_1 \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

Произведя несложные операции исключения последовательно неизвестных  $q$  и  $y_0$ , получим уравнение, зависящее от одной переменной  $y_2$ :

$$H_0 - \left( \frac{\beta}{k} \sqrt{g} \cdot \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2} \right) y_2^{3/2} = \sqrt{2(S - H_0 \operatorname{ctg} \theta_1) \cdot \frac{\beta}{k} \sqrt{g y_2^3} + 3y_2^2}. \quad (77)$$

По уравнению (77) подбирается числовая величина конечной ординаты кривой депрессий для заданных размеров перемычки и физических свойств материала, слагающего перемычку.

Определение всех других элементов фильтрационного потока, после нахождения величины  $y_2$ , не представляет никакого труда по зависимостям системы (76). Нетрудно заметить, что уравнение (78) является общим случаем решения для перемычек с любым углом верхнего откоса вплоть до вертикального.

### 30. Пример

Определить основные элементы фильтрационного потока в перемычке, имеющей показанные на фиг. 24 размеры и сложенной из материала, характеризующегося коэффициентами:

$$k = 0,005 \text{ м/сек},$$

$$\beta = 0,35.$$

Для заданных размеров перемычки и характеристики материала насыпи по формуле (77) подбираем величину  $y_2$ ; подставляя данные величины в уравнение (77), получим:

$$4 - 193,2 y_2^{3/2} = \sqrt{657,72 y_2^3 + 3 y_2^2};$$

это уравнение обращается в тождество при числовой величине  $y_2$ , близкой

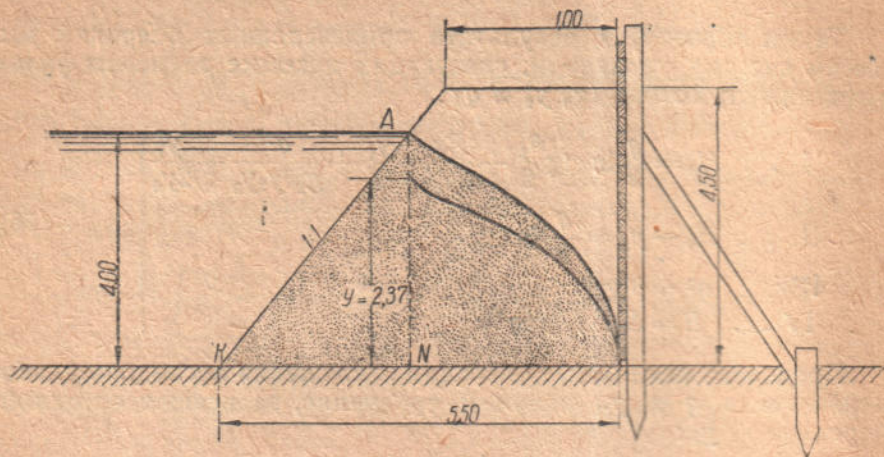
$$y_2 \cong 0,0415 \text{ м}.$$

Из формулы второй системы (76) имеем:

$$y_0 \cong 4 - 193,2 \times (0,0415)^{3/2} = 2,367 \text{ м.}$$

донный пьезометр в точке  $N$  (фиг. 23) должен показать примерно эту высоту. Наконец, по формуле третьей системы (76) определяем величину дебита через перемычку:

$$q = 0,35\sqrt{g}(0,0415)^{3/2} \cong 0,0093 \text{ м}^2/\text{сек.}$$



Фиг. 24

В качестве примера нами использована перевернутая схема перемычки первого примера § 25, дабы подчеркнуть гидравлическое различие этих двух типов инженерных сооружений: это различие предьявляет особое требование к инженеру-конструктору при проектировании того или иного типа.

### 31. Определение основных элементов фильтрационного потока в перемычке для случая $h_0 > 0$

Рассмотренный выше случай перемычки с наклонной верхней гранью и отвесной нижней при условии отсутствия подпора с нижней стороны  $h_0 = 0$  является основным случаем в инженерной практике, так как условия производства гидротехнических работ требуют полной осушки котлована. Но иногда бывает небезинтересным для практики случай перемычки, разделяющей два бьефа, т. е. случай, когда:

$$h_0 > 0.$$

В этом случае следует на основании рассуждений § 11 строго различать две основные картины в явлении фильтрации через перемычку: а) при условии изменения высоты низового подпора  $h_0$  в пределах от 0 до  $h_{кр}$ :

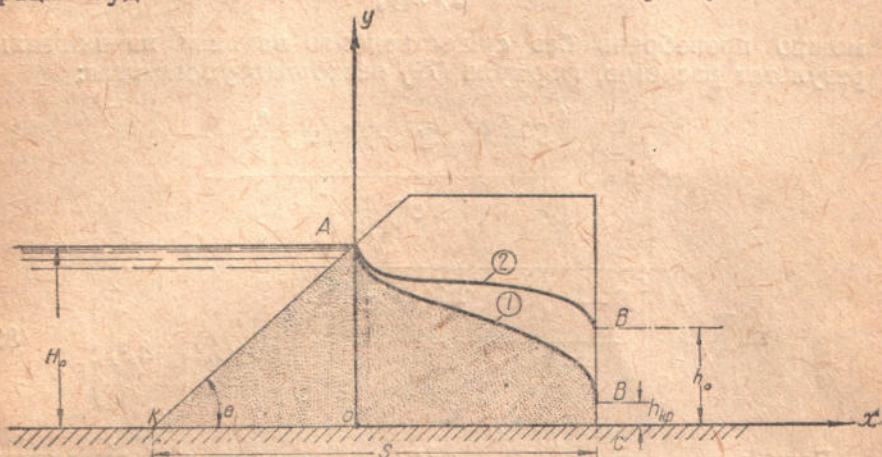
$$0 < h_0 < h_{кр}.$$

картина фильтрации через перемычку останется стабильной на всем диапазоне изменения  $h_0$ ; следовательно, определение основных элементов фильтрационного потока через перемычку должно быть произведено при помощи приема, изложенного в § 29.

б) При условии изменения высоты низового подпора от  $h_{кр}$  и выше:

$$h_0 > h_{кр}$$

картина фильтрации будет также меняться (фиг. 25), так как основной командующей величиной в расчетах размеров фильтрации будет являться высота низового подпора  $h_0$ . Для этого



Фиг. 25

случая систему уравнения (76), определяющую основные элементы фильтрационного потока, можно переписать в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} I \dots H_0 &= \frac{q}{k} \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2} + \frac{B \cdot q}{ky_0} + \frac{y_0}{2} + \frac{q^2}{g\beta^2 h_0 y_0} + \frac{h_0^2}{2y_0}; \\ II \dots H_0 - y_0 &= \frac{q}{k} \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2}; \\ III \dots B &= S - H_0 \operatorname{ctg} \theta_1 \end{aligned} \right\} (78)$$

Четвертое уравнение выпало в силу того обстоятельства, что задана величина конечной ординаты  $y_2 = h_0$ ; невозможность случая превышения конечной ординаты кривой депрессии  $h_0$ , когда  $h_0 > h_{кр}$ , нами доказана выше (§ 13, замечание 4).

Исключая из системы уравнений (78) неизвестное  $y_0$ , получим одно уравнение с неизвестным  $q$ , которое легко решается:

$$q = k \left\{ \frac{S - H_0 \operatorname{ctg} \theta_1 + \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2}}{\left( \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2} \right)^2 - \frac{k^2}{g\beta^2 h_0}} - (H_0^2 - h_0^2) \right\}, \quad (79)$$

логический знак перед радикалом минус (—), так как при условии равенства отметок бьефов  $H_0 = h_0$  расход должен быть равен нулю ( $q = 0$ ).

В случае, когда членом уравнения I системы (78)

$$\frac{q^2}{2g^2 h_0 y_0}$$

можно пренебречь без существенного влияния на конечный результат расчетов, формула (79) несколько упростится:

$$q = k \left\{ \frac{S - H_0 \operatorname{ctg} \theta_1 + \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2}}{\left( \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2} \right)^2} - \sqrt{\left[ \frac{S - H_0 \operatorname{ctg} \theta_1 + \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2}}{\left( \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2} \right)^2} \right]^2 - (H_0^2 - h_0^2)} \right\} \quad (80)$$

Если в этом случае  $\left( \frac{q^2}{2g^2 h_0 y_0} \cong 0 \right)$  решить систему уравнений (78) относительно  $y_0$ , то получим:

$$y_0 = - \left( \frac{S - H_0 \operatorname{ctg} \theta_1}{\ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2}} \right) + \sqrt{\left( \frac{S - H_0 \operatorname{ctg} \theta_1}{\ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2}} \right)^2 + \frac{2(S - H_0 \operatorname{ctg} \theta_1)}{\ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2}} + h_0^2}, \quad (81)$$

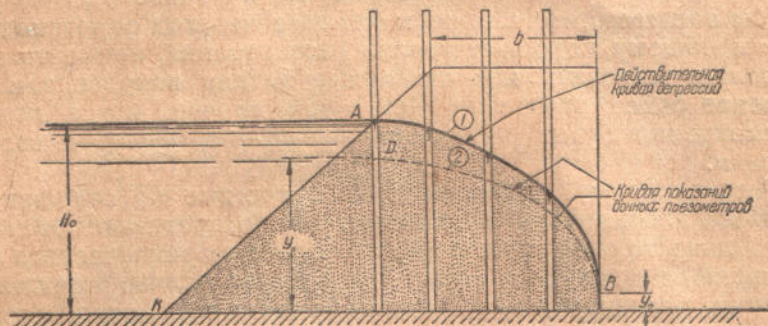
т. е. физические свойства материала, слагающего перемычку, не нашли своего отражения в формуле (81); следовательно, кривая депрессий будет устанавливаться одинаково в геометрически равных перемычках, хоть и отличных одна от другой по материалу. Только в этом случае возможна и допустима *чисто геометрическая* трактовка вопроса, имеющая место в трудах других авторов по данному вопросу.

### 32. Общее замечание

Описанная в § 26 схема фильтрационного потока в перемычке с верховым откосом и вертикальной низовой гранью может существовать только в перемычках с достаточно большой шириной перемычки по верху (с шириной гребня  $b$ ). В перемычках с малыми величинами ширины гребня и сравнительно крутыми

верховыми откосами кривая депрессий в большинстве случаев не будет иметь точки перегиба; следовательно, величина гидравлических потерь не может быть определена с помощью приема, изложенного в варианте первом § 27; этим еще раз оправдывается наше предпочтение варианту второму, принятому нами для подсчета гидравлических потерь в верховой трехгранной призме.

Следует особенно отметить, что для случая перемычек с малой шириной по верху (случая отсутствия точки перегиба на кривой депрессий) подсчитанная нами числовая величина ординаты  $y_0$  (фиг. 22, 23, 24) должна представлять собой величину,



Фиг. 26

близкую к показанию донного пьезометра; следовательно, кривая депрессий, построенная на основе этой величины, будет являться кривой показания донных пьезометров, расположенных вдоль основания перемычки (фиг. 26).

Опыт должен четко показать две кривых:

1) дырчатые колодцы должны будут отметить действительную кривую депрессий  $AB$  (поверхность грунтового потока) в перемычке и

2) донные пьезометры должны отметить кривую  $DB$ , расположенную значительно ниже действительной кривой депрессий.

Точка выхода на низовую грань перемычки будет одна и та же для обеих кривых (точка  $B$ ).

#### IV. ОДНОРОДНАЯ ЗЕМЛЯНАЯ ПЛОТИНА ОБЫЧНОГО ПРОФИЛЯ

##### 33. Схема фильтрационного потока в земляной плотине при условии $h_0 = 0$

На протяжении всего предыдущего изложения вопроса о фильтрации через сыпучие массивы, расположенные на непроницаемом основании, мы стремились к единой цели — выяснить особенности явления фильтрации для каждого отдельного случая геометрического очертания массива.

Мы умышленно, как это было оговорено выше, выбирали очертание отдельных массивов, в которых мы рассматривали протекание явления фильтрации; выбирая, мы основывались на следующих соображениях: во-первых, рассматриваемый массив должен быть в очертании своем не просто абстрагированной схемой, — он должен иметь известное применение в гидротехническом строительстве; во-вторых, рассмотренные отдельные схемы в будущем должны будут или войти как отдельные составляющие элементы схемы фильтрационного потока в теле земляной однородной плотины обычного профиля, или помочь выяснить роль и назначение отдельного конструктивного оформления той или иной части или детали плотины.

Мы полагаем, что в данном вопросе переход от частных случаев к общему упрощает анализ рассмотрения, кроме того, это позволяет выяснить как отдельные детали вопроса, так и их значение более отчетливо, чем в том случае, когда порядок рассмотрения будет противоположный — от общего к частным случаям.

Рассмотренные выше отдельные частные по отношению к земляной плотине задачи (которые, однако, представляют каждая в отдельности свой особый интерес для гидротехнического строительства) позволяют теперь довольно отчетливо представить картину движения фильтрационного потока в земляной плотине, указывают пути разрешения задачи определения величины основных элементов потока и особых точек кривой депрессий, а главное, степени точности тех условных допущений, к которым мы принуждены были в силу логики вещей прибегнуть. Кроме того, отдельные полученные нами математические зависимости будут целиком применимы к общему случаю фильтрационного потока через однообразную земляную плотину обычного профиля.

Обратимся к фиг. 27, изображающей фильтрационный поток в однородной земляной плотине обычного профиля.

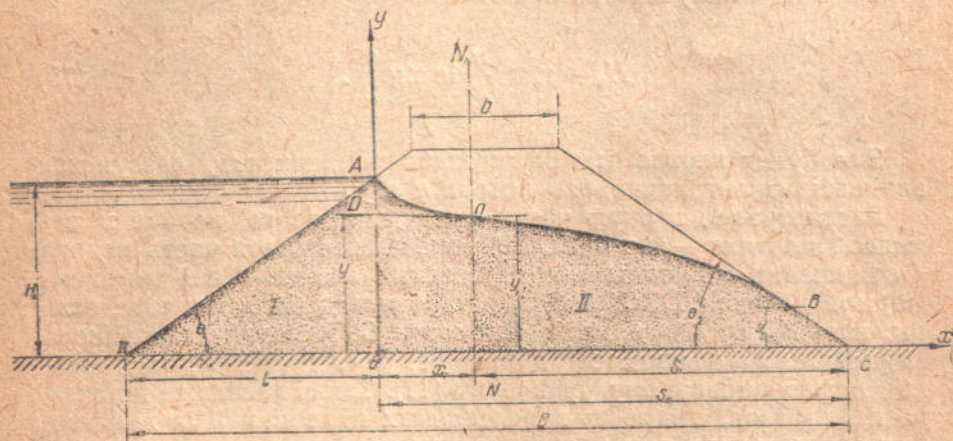
Если в случае перемычки с верховым откосом и вертикальной низовой гранью при известных соотношениях геометрических размеров последней (малой ширине по верху —  $b$  и кругом верховым откосе, малом  $\text{ctg } \theta$ .) можно наблюдать кривую депрессий без точки перегиба, то в случае фильтрации через земляную плотину обычного профиля — точка перегиба на кривой депрессий будет обязательным явлением.

В силу этого последнего замечания фильтрационный поток в земляной плотине может быть разделен вертикальной плоскостью  $NN_1$ , проведенной через точку перегиба на две отличных одна от другой части не только по виду кривой депрессий, но и по характеру движения потока, как это нами выяснено выше (см. § 26-27); поэтому мы, согласно проведенному выше анализу, будем рассматривать движение в каждой части потока отдельно.

Однако, совершенно естественное расположение плоскости раздела  $NN_1$ , указанное на фиг. 27, весьма усложняет решение

задачи определения основных элементов фильтрационного потока (см. § 27). Отсюда стремление перенести эту разделяющую плоскость в такое положение (одна из условий нашего анализа), которое позволяет значительно упростить задачу рассмотрения явления фильтрации через земляную плотину без заметно ощутимых инженерных погрешностей.

Такою плоскостью раздела может послужить вертикальная плоскость, проведенная через точку пересечения линии откоса плотины и горизонта воды перед плотиной (точка  $A$ ); эту же плоскость примем за координатную плоскость  $OY$ .



Фиг. 27

В результате деления фильтрационного потока в земляной плотине обычного профиля на две показанные на фиг. 27 части получаем следующую расчетную схему: первая часть — фильтрационный поток в треугольной призме  $AKC$ ; вторая часть  $AOBC$  представляет основную часть фильтрационного потока в целом. Такая схема позволяет применить для решения задачи определения основных элементов потока полученные ранее выводы и математические зависимости.

#### 34. Система уравнений, определяющих основные элементы фильтрационного потока

К первой части фильтрационного потока, расположенной влево от плоскости раздела  $OY$ , мы в праве приложить все те выводы, какие нами сделаны в отношении верхней части фильтрационного потока в перемычке с верхним откосом и вертикальной низовой гранью. Эти выводы (см. § 27, вариант второй, определения величины гидравлических потерь) в основном сводятся к тому, что потери энергии потока в верхней трех-

гранной призме  $КАО$  на гидравлические сопротивления могут быть исчислены по выражению:

$$h_{\text{вп}} = \frac{q}{k} \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2};$$

или, игнорируя изменение величины живой силы фильтрационного потока на пути перемещения расхода  $q$  от сечения  $КА$  к сечению  $ОА$ , напишем это выражение для потерь в таком виде, в каком оно получено нами выше:

$$H_0 - y_0 \cong \frac{q}{k} \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2}. \quad (75)$$

Это будет первая математическая зависимость, связующая элементы фильтрационного потока  $q$  и  $y_0$ .

Рассматривая вторую часть фильтрационного потока в земляной плотине — часть  $АОСВ$ , замечаем, что эта часть потока в отношении величины гидравлических потерь в ней заменена формой потока  $ОДВС$ , какая установилась бы в плотине, если бы, начиная от раздельной плоскости  $ОУ$ , сразу установилось „медленно изменяющееся“ движение, т. е. движение, подчиненное дифференциальному уравнению (11). Такая замена не должна, на наш взгляд, вызывать значительных отклонений от действительности; между тем она позволяет рассматривать фильтрационный поток в земляной плотине во второй (низовой) его части, как поток, устанавливающийся в перемычке с отвесной верховой гранью и „положительным“ низовым откосом, и, следовательно, применять к этой части потока уравнения (41), (43) или (46), например, уравнение:

$$\begin{aligned} 2gy_2(2S_0y_2 - y_0^2 \operatorname{ctg} \theta_2 - y_2^3 \operatorname{ctg} \theta_2) \cdot (S_0 - 2y_2 \operatorname{ctg} \theta_2) = \\ = \frac{k^2}{\beta^2} (y_0^2 - 3y_2^2)^2. \end{aligned} \quad (46)$$

Это уравнение вводит в рассмотрение новую неизвестную величину — ординату точки выхода кривой депрессий на низовой откос —  $y_2$ ; следовательно, уравнения (46) и (75) связывают три неизвестные величины  $y_0$ ,  $y_2$  и  $q$ .

Недостающую третью математическую зависимость между названными искомыми неизвестными мы представим в двух вариантах:

*Первый вариант* будет получен в результате использования модели „медленно изменяющегося“ движения, устанавливающегося на всем пути потока от  $О$  до  $С$ . Эта модель позволяет на основании высказанного в § 19 положения о касании кривой



депрессий к низовому откосу получить в результате дифференцирования уравнения (41) по  $y_2$  следующую зависимость:

$$\frac{qk}{g\beta^2 y_2^2} - \frac{k}{q} y_2 = -\text{ctg } \theta_2 \quad (50)$$

*Второй вариант* — результат отказа от модели потока, принятой для первого варианта, — позволяет, согласно рассуждениям и выводам § 22, написать недостающее третье условие в таком виде:

$$y_2 \approx \frac{q}{k} \ln \text{ctg } \frac{\theta_2}{2}. \quad (58)$$

Наконец, чисто геометрические соотношения позволяют написать выражение для определения величины  $S_0$ , имеющее место в уравнениях (41), (43) и (46), в таком виде (фиг. 27).

$$S_0 = B - H_0 \text{ctg } \theta_1,$$

или:

$$S_0 = b + (H_{\text{на}} - H_0) \text{ctg } \theta_1 + H_{\text{на}} \text{ctg } \theta_2$$

Таким образом, в результате упрощения схемы фильтрационного потока в земляной плотине обычного очертания мы можем располагать системой уравнений для определения основных элементов фильтрационного потока —  $y_0$ ,  $y_2$  и  $q$  — в двух вариантах:

а) по первому варианту:

$$\left. \begin{aligned} \text{I} \dots H_0 - y_0 &= \frac{q}{k} \ln \text{ctg } \frac{\theta_1}{2} \\ \text{II} \dots 2gy_2(2S_0y_2 - y_0^2 \text{ctg } \theta_2 - y_2^2 \text{ctg } \theta_2) \cdot (S_0 - 2y_2 \text{ctg } \theta_2) &= \\ &= \frac{k^2}{\beta^2} (y_0^2 - 3y_2^2)^2 \\ \text{III} \dots \frac{qk}{g\beta^2 y_2^2} - \frac{k}{q} y_2 &= -\text{ctg } \theta_2 \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

б) по второму варианту:

$$\left. \begin{aligned} \text{I} \dots H_0 - y_0 &= \frac{q}{k} \ln \text{ctg } \frac{\theta_1}{2} \\ \text{II} \dots S_0 - y_2 \text{ctg } \theta_2 - \frac{qk}{g\beta^2} \left( \frac{1}{y_0} - \frac{1}{y_2} \right) - \frac{k}{2q} (y_0^2 - y_2^2) &= 0 \\ \text{III} \dots y_2 &= \frac{q}{k} \ln \text{ctg } \frac{\theta_2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

### 35. Определение элементов фильтрационного потока в земляной плотине

а) *Первый вариант.* Исключая из первого и третьего уравнений системы (82) неизвестную  $q$ , получим систему из двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \text{I} \dots \frac{\ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2}}{H_0 - y_0} \cdot y_2 - \frac{h^2 (H_0 - y_0)}{g\beta^2 y_2^2 \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2}} &= \operatorname{ctg} \theta_2 \\ \text{II} \dots 2gy_2(2S_0y_2 - y_0^2 \operatorname{ctg} \theta_2 - y_2^2 \operatorname{ctg} \theta_2) (S_0 - 2y_2 \operatorname{ctg} \theta_2) &= \frac{k^2}{\beta^2} (y_0^2 - 3y_2^2)^2 \end{aligned} \right\} (84)$$

Эту систему уравнений можно решать либо путем одновременного подбора числовых значений величин  $y_0$  и  $y_2$ , удовлетворяющих совместно каждому из уравнений системы, либо путем внесения упрощений в каждое из уравнений.

Ввиду того, что в практике плотиностроения применяются в основном грунты, характеризующиеся невысокими величинами коэффициента фильтрации  $k$ , можно без значительных инженерных погрешностей пренебречь членами, содержащими множитель  $k^2$ , в обоих уравнениях системы (84) и в результате получить систему весьма простых уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \text{I} \dots \frac{\ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_2}{2}}{H_0 - y_0} \cdot y_2 &= \operatorname{ctg} \theta_2 \\ \text{II} \dots 2S_0y_2 - y_0^2 \operatorname{ctg} \theta_2 - y_2^2 \operatorname{ctg} \theta_2 &= 0 \end{aligned} \right\} (85)$$

Исключая из системы уравнений (85) неизвестную  $y_0$ , получим:

$$2S_0y_2 - \left( H_0 - y_2 \frac{\ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2}}{\operatorname{ctg} \theta_2} \right)^2 \operatorname{ctg} \theta_2 - y_2^2 \operatorname{ctg} \theta_2 = 0 \quad (86)$$

очень простое выражение для определения  $y_2$ . Следует отметить особенность уравнения (86): *это уравнение абсолютно нейтрально по отношению к качеству материала тела плотины.*

Решая уравнение (86) относительно  $y_2$ , будем иметь:

$$y_2 = \frac{S_0 + H_0 \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2}}{\operatorname{ctg}^2 \theta_2 + \left( \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2} \right)^2} \cdot \operatorname{ctg} \theta_2 - \sqrt{\frac{\left[ \frac{S_0 + H_0 \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2}}{\operatorname{ctg}^2 \theta_2 + \left( \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2} \right)^2} \cdot \operatorname{ctg} \theta_2 \right]^2 - \frac{H_0^2 \operatorname{ctg}^2 \theta_2}{\operatorname{ctg}^2 \theta_2 + \left( \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2} \right)^2}}{}} \quad (87)$$

Уравнение (87) служит для определения величины  $y_2$  во всяком случае в первом приближении. Если для определения соотношений геометрических размеров поперечного профиля и характера материала тела плотины потребуется корректирование величины  $y_2$ , полученной по уравнению (87), то такое корректирование может быть произведено с помощью уравнений системы (84).

б) *Второй вариант решения задачи.* Исключая из системы уравнений (83) неизвестное  $q$ , получим систему из двух уравнений, связывающих искомые неизвестные:

$$\left. \begin{aligned} \text{I} \dots y_0 &= H_0 - y_2 \frac{\ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2}}{\ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_2}{2}} \\ \text{II} \dots 2(S_0 - y_2 \operatorname{ctg} \theta_2) &\frac{y_2}{\ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_2}{2}} - \frac{2k^2 y_2^2}{g\beta^2 y_0 \left( \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_2}{2} \right)^2} + \\ &+ \frac{2k^2 y_2}{g\beta \left( \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_2}{2} \right)^2} + y_2^2 - y_0^2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

На основании сделанного выше замечания пренебрегаем разностью:

$$\frac{2k^2 y_2}{g\beta^2 \left( \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_2}{2} \right)^2} - \frac{2k^2 y_2^2}{g\beta^2 y_0 \left( \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_2}{2} \right)^2},$$

и тогда получим систему весьма простых уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \text{I} \dots y_0 &= H_0 - y_2 \frac{\ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2}}{\ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_2}{2}} \\ \text{II} \dots 2(S_0 - y_2 \operatorname{ctg} \theta_2) &\frac{y_2}{\ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_2}{2}} + y_2^2 - y_0^2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

Исключая из системы уравнений (89) неизвестную  $y_0$ , получим:

$$2(S_0 - y_2 \operatorname{ctg} \theta_2) \frac{y_2}{\ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_2}{2}} + y_2^2 - \left( H_0 - y_2 \frac{\ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2}}{\ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_2}{2}} \right)^2 = 0. \quad (90)$$

Решая уравнение относительно  $y_2$ , получим:

$$y_2 = \frac{\left( S_0 + H_0 \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2} \right) \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_2}{2}}{2 \operatorname{ctg} \theta_2 \cdot \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_2}{2} + \left( \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2} \right)^2 - \left( \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_2}{2} \right)^2} - \sqrt{A - B} \quad (91)$$

где

$$A = \left[ \frac{\left( S_0 + H_0 \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2} \right) \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_2}{2}}{2 \operatorname{ctg} \theta_2 \cdot \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_2}{2} + \left( \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2} \right)^2 - \left( \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_2}{2} \right)^2} \right]^2$$

$$B = \frac{\left( H_0 \cdot \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_2}{2} \right)^2}{2 \operatorname{ctg} \theta_2 \cdot \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_2}{2} + \left( \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2} \right)^2 - \left( \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_2}{2} \right)^2}$$

Уравнение (91) так же, как и уравнение (87), нейтрально по отношению к качеству материала тела плотины.

### 36. Пример определения основных элементов в земляной плотине обычного очертания

Земляная плотина, сложенная из суглинка, характеризующегося коэффициентом фильтрации:  $k = 0,00005$  м/сек\*, имеет высоту  $H_{пл} = 8$  м, ширину по верху  $B = 5$  м, верхней откос — тройной:  $\operatorname{ctg} \theta_1 = 3^*$ , нижней откос — двойной:  $\operatorname{ctg} \theta_2 = 2^*$ , поддерживает напор, равный  $H_0 = 6,5$  м (фиг. 28).

Определяем величину  $S_0$ :

$$S_0 = 5 + (8 - 6,5) \cdot 3 + 8 \cdot 2 = 25,50 \text{ м.}$$

а) Определяем величину:  $y_0$ ,  $y_2$  и  $q$  по первому варианту решения задачи; подставляя данные в формулу (87), будем иметь:

$$y_2 = \frac{(25,5 + 6,5 \times 1,815) \cdot 2}{4 + (1,815)^2} - \sqrt{\left[ \frac{(25,5 + 6,5 \times 1,815) \cdot 2}{4 + (1,815)^2} \right]^2 - \frac{6,5^2 \cdot 2^2}{4 + (1,815)^2}} = 10,227 - \sqrt{104,35 - 23,17} = 1,217 \text{ м.}$$

Из первого уравнения системы (85) имеем:

$$y_0 = H_0 - y_2 \frac{\ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2}}{\operatorname{ctg} \theta_2}; \quad (92)$$

\* Коэффициенты для примера взяты условные.

дставляя в это уравнение найденное значение  $y_2$  из формулы (87):

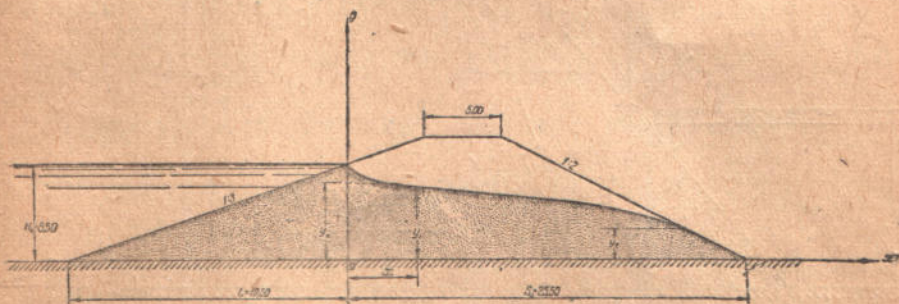
$$y_2 = 1,217 \text{ м.}$$

определим величину  $y_0$ :

$$y_0 = 6,5 - 1,217 \cdot \frac{1,815}{2} = 5,396 \text{ м.}$$

Величину единичного расхода определяем по выражению (75):

$$q = k \frac{H_0 - y_0}{\ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2}} = 0,00005 \frac{6,5 - 5,396}{1,815} \cong 0,00003 \text{ м}^2/\text{сек.}$$



Фиг. 28

б) Определим те же величины по второму варианту решения задачи; по формуле (91) вычисляем:

$$y_2 = \frac{(25,5 + 6,5 \times 1,815) \times 1,447}{4 \times 1,447 + 3,294 - 2,092} - \sqrt{\left[ \frac{(25,5 + 6,5 \times 1,815) \times 1,447}{4 \times 1,447 + 3,294 - 2,092} \right]^2 - \frac{(6,5 \times 1,447)^2}{4 \times 1,447 + 3,294 - 2,092}} = 7,719 - \sqrt{59,59 - 12,65} = 0,868 \text{ м.}$$

Величину  $y_0$  определяем по первой формуле системы (88):

$$y_0 = 6,5 - 0,868 - \frac{1,815}{1,447} \cong 5,41 \text{ м.}$$

Расход определяем по третьей формуле системы (83):

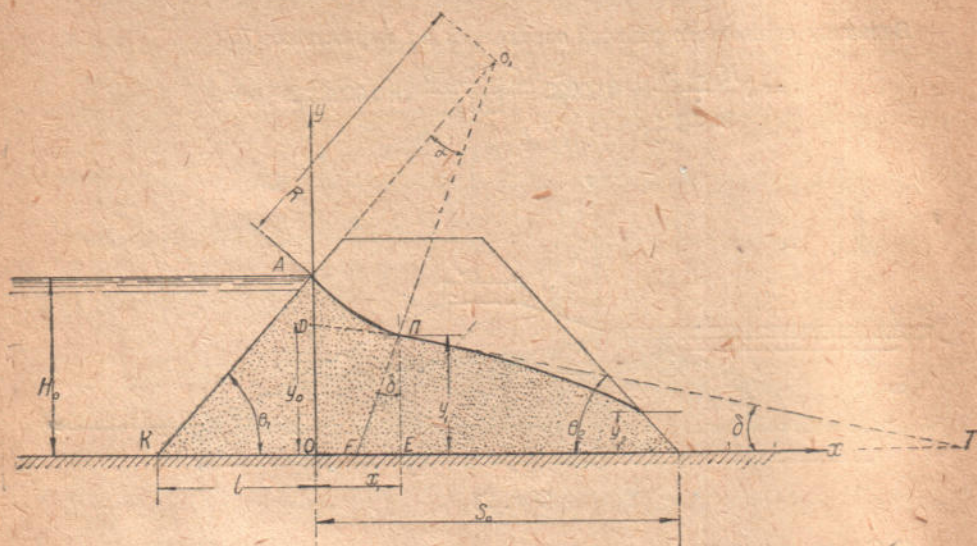
$$q = 0,00005 \frac{0,868}{1,447} \cong 0,00003 \text{ м}^2/\text{сек.}$$

### 37. Определение положения точки перегиба кривой депрессий

Местоположение координаты точки перегиба  $\Pi$  (фиг. 27) может быть определено лишь на основе некоторых допущений, позволяющих более или менее удачно отобразить в расчетной схеме действительную картину явления фильтрации через однородную земляную плотину. В качестве такого допущения примем, подобно тому, как мы это принимали в § 27, что очертание кривой депрессий на участке от верхового откоса до точки

перегиба  $AP$  (фиг. 27) близко к дуге круга, очерченного из точки пересечения линии верхового откоса  $AK$  и нормали к кривой депрессий в точке перегиба ( $P$ ).

Геометрическая схема такого построения кривой депрессий на участке  $AP$  изображена на фиг. 29.



Фиг. 29

Координаты точки перегиба на фигуре обозначены через  $x_1$  и  $y_1$ ; касательная к кривой депрессий к точке перегиба —  $PT$ , ее угловой коэффициент равен:

$$m = -\operatorname{tg} \delta.$$

Из фиг. 29 следует:

$$x_1 = R \cos \theta_1 - R \sin (90 - \theta_1 - \alpha),$$

но так как:

$$\alpha = 90 - \theta_1 - \delta,$$

то:

$$x = R (\cos \theta_1 - \sin \delta).$$

Подставляя значение  $R$  из формулы (68), получим окончательно:

$$x_1 = (H_0 - y_1) \frac{\cos \theta_1 - \sin \delta}{\cos \delta - \sin \theta_1} \quad (93)$$

Для заданных пограничных условий уравнение кривой депрессий (12) в приложении к пунктирному отрезку  $DP$  продолжения кривой, определяемой уравнением (12), примет вид:

$$x_1 = \frac{qk}{g\beta^2} \left( \frac{1}{y_0} - \frac{1}{y_1} \right) + \frac{k}{2q} (y_0^2 - y_1^2);$$

так как величина скоростных напоров будет значительно меньше точности наших расчетов, то, пренебрегая разностью:

$$\frac{qk}{g\beta^2} \left( \frac{1}{y_0} - \frac{1}{y_1} \right),$$

получим:

$$x_1 = \frac{k}{2q} (y_0^2 - y_1^2),$$

или, приравнивая правую часть полученного уравнения правой части уравнения (93), будем иметь:

$$\frac{k}{2q} (y_0^2 - y_1^2) = (H_0 - y_1) \frac{\cos \theta_1 - \sin \delta}{\cos \delta - \sin \theta_1} \quad (94)$$

Величину  $\delta$  определяем из следующего соотношения:

$$\operatorname{tg} \delta = -\frac{q}{k} \left( \frac{y_1^2}{\frac{q^2}{g\beta^2} - y_1^3} \right). \quad (95)$$

При малом дебите фильтрационного потока  $q$  можно пренебречь членом  $\frac{q^2}{g\beta^2}$  по сравнению с  $y_1^3$ , и тогда величина угла  $\delta$  может быть определена из очень простого соотношения:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{q}{ky_1} \quad (96)$$

Определение координат точки перегиба ( $\Pi$ ) кривой депрессий должно производиться в следующем порядке: определяется путем подбора числовая величина  $y_1$ , удовлетворяющая одновременно уравнениям (94) и (95) или (96), причем правая часть уравнения (94) будет определять координату  $x_1$ .

### 38. Пример определения координат точки перегиба

Определить координаты точки перегиба ( $\Pi$ ) кривой депрессий в земляной плотине, рассмотренной в примере § 36.

Подставляя известные величины в уравнение (94), будем иметь:

$$\frac{0,00005}{2 \times 0,00003} (5,4^2 - y_1^2) = (6,5 - y_1) \frac{0,948 - \sin \delta}{\cos \delta - 0,317}$$

и из уравнения (96):

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{0,00003}{0,00005 \cdot y_1} = \frac{0,6}{y_1}.$$

Путем подбора определяем  $y = 5,21$  м, при котором:

$$\operatorname{tg} \delta \cong 0,115, \quad \sin \delta \cong 0,115, \quad \cos \delta \cong 0,993,$$

и уравнение (94) обращается в близкое тождество.

Правая часть этого уравнения в своей числовой величине получается равной:

$$x_1 = (6,5 - 5,21) \frac{0,948 - 0,115}{0,993 - 0,317} \cong 1,59 \text{ м.}$$

Величина радиуса дуги  $AP$  получается для данного случая равной:

$$R = \frac{6,5 - 5,21}{0,993 - 0,317} = 1,91 \text{ м.}$$

### 39. Дренажные устройства у подошвы низового откоса земляной плотины

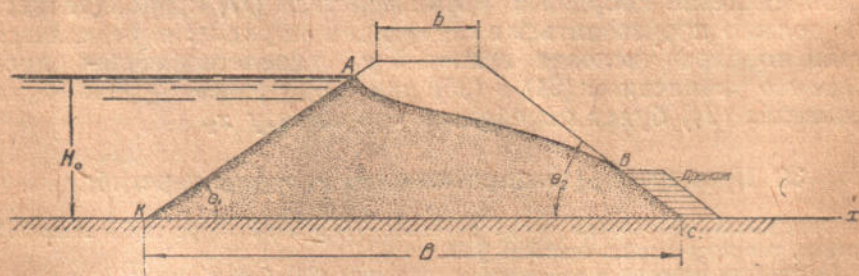
Практика плотиностроения за последние годы установила, как правило, обязательность устройства дренажных приспособлений у подошвы низового откоса; дренажные устройства увеличивают, по мнению проектировщиков, прочность низового откоса плотины.

Посмотрим, какова роль дренажных устройств в возможной модификации явления фильтрации через однородную земляную плотину с точки зрения проведенного нами анализа.

Не вдаваясь в детали конструктивного оформления дренажных устройств, мы все свое внимание сосредоточим на *плоскости раздела* между телом плотины и массой дренажа; с этой целью рассмотрим три возможных простейших схемы конструкции дренажа, в которые могут уложиться все возможные вариации конструктивных оформлений дренажа у подошвы плотины.

*1 схема*, плоскость раздела совпадает с плоскостью низового откоса (фиг. 30).

При этой схеме дренажного устройства явления фильтрации в земляной плотине остаются такими же, какими они были и



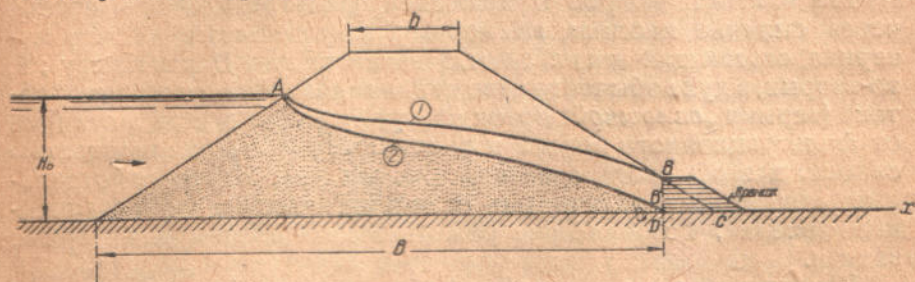
Фиг. 30

до устройства дренажа. Выклинивание фильтрационного потока на сравнительно большой протяженности линии откоса —  $BC$  создает *незначительные осередненные скорости выхода фильтрационных вод*; отсюда некоторая гарантия против вымывания частиц грунта, слагающего тело плотины. Роль дренажа сводится при этой схеме к тому, чтобы *загрузить* низовой откос на смоченной фильтрационной водой части и тем самым устранить возможное *оползание* части низового откоса.



II схема, плоскость раздела  $BD$  (фиг. 31) вертикальна и проходит через точку выхода кривой депрессий на низовой откос в случае однородной земляной плотины без дренажных устройств (кривая  $AB$ , фиг. 31).

Эта схема дренажа должна вызвать значительную модификацию кривой депрессий, особенно в ее низовой части (кривая 2);



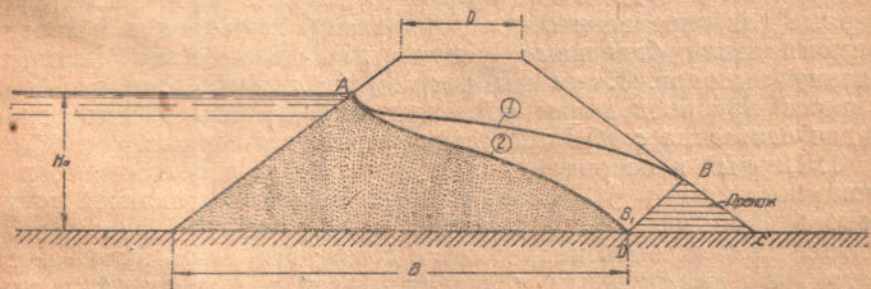
Фиг. 31

конечная ордината кривой депрессий на плоскости раздела  $BD$  очень уменьшится. Величина дебита фильтрации несколько возрастет. *Осредненные скорости* выхода фильтрационной воды настолько возрастут, что способны будут вымывать частицы материала тела плотины.

В этом случае совершенно очевидно, что дренаж должен быть запроектирован в форме обратного фильтра во избежание выноса частиц грунта, слагающего тело плотины.

III схема, плоскость раздела  $BD$  наклонена в сторону нижнего бьефа (фиг. 32).

В этом случае кривая депрессий (2 кривая — фиг. 32) еще сильнее модифицируется, чем во втором случае (см. § 20); ко-



Фиг. 32

нечная ордината еще больше уменьшится, величина дебита фильтрации увеличится; осредненные скорости выхода фильтрационного потока по сечению  $B'D$  (фиг. 32) настолько возрастут, что сделают это сечение фокусом размыва. Дренажные устройства в этом случае *должны обязательно* включать в свою конструкцию обратный фильтр во избежание выноса грунта из

тела земляной плотины. Следует оговориться, что в этом случае засорение фильтра неизбежно.

## ВЫВОДЫ

Мы излагали вопрос о движении фильтрационного потока через сыпучие массивы, во-первых, в предположении, что материал, слагающий эти массивы, отвечает закону Дарси (Darcy); и, во-вторых, в духе обычного изложения гидравлики „сплошного“ потока (термин „сплошной“ поток мы принуждены ввести в отличие от фильтрационного потока в понимании заполнения жидкостью сплошь всего живого сечения), т. е. мы рассматривали отдельные инженерные задачи или отдельные частные фильтрационные явления, позволяющие решать в дальнейшем инженерные задачи.

В изложении мы позволили себе сохранить отдельные громоздкие решения задачи лишь для того, чтобы показать сложность и трудность рассмотрения вопроса даже путем простых гидравлических приемов, которые позволяют с помощью введения *осередненных* величин оценивать отдельные явления фильтрации en masse.

Подобно приемам гидравлики „сплошного“ потока, мы принуждены были в процессе изложения создавать модели (схемы) движения фильтрационного потока, какие позволили бы нам оценить явление фильтрации с помощью простых гидравлических приемов и в величинах, в конечном итоге интересующих инженеров-проектировщиков: дебита фильтрации и положения основных точек кривой депрессий.

В процессе изложения вопроса о фильтрации через сыпучие массивы мы иногда подчеркивали отдельные моменты, характерные для определенного случая явления фильтрации, и иногда резюмировали отдельные решения задач в виде завершающих задачу выводов. Ниже мы считаем не лишним повторить эти выводы при подведении общих итогов нашего рассмотрения задач *движения свободного фильтрационного потока*.

1. Первый и основной вывод заключается в положении, высказанном нами в § 1 нашей работы: между гидравликой грунтового (фильтрационного) потока и гидравликой „сплошного“ потока должна быть непрерывная связь; эта связь выражается в том, что центральным уравнением всей гидравлики фильтрационного потока должно быть уравнение Д. Бернулли — основное уравнение всей гидравлики „сплошного“ потока.

2. Уравнение Дюпюи — лишь частный случай уравнения Бернулли — не позволяет решать целый ряд основных задач фильтрации, в частности для условий отсутствия подпора с низовой стороны перемычек и плотин.

3. Для фильтрационного потока, сохраняющего на протяжении до выходного сечения при отвесной низовой грани характер „медленно изменяющегося“ движения, уравнение Бернулли

позволяет получить уравнение „нормальной“ кривой спада, т. е. кривую поверхность фильтрационного потока, оканчивающуюся в точке выхода „критической глубиной“. Это последнее обстоятельство позволяет получить зависимость между основными элементами фильтрационного потока в виде выражения, аналогичного выражению в гидравлике „сплошного“ потока:

$$h_{кр} = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g\beta^2}}$$

эта зависимость легко может быть подвергнута экспериментальной проверке.

4. Решение задачи определения основных элементов фильтрационного потока для случая отсутствия подпора с низовой стороны перемычки или плотины возможно для модели „медленно изменяющегося“ движения лишь с помощью постулата „максимального дебита“, подобного постулату Беланже (Bélanget) для водослива с широким порогом.

5. Как общее правило, кривая депрессий, устанавливающаяся в земляной плотине или перемычке, зависит от физических свойств материала, слагающего тела плотины или перемычки. Эти физические свойства материала, необходимые для решения гидравлических задач по фильтрации, будут таковы: коэффициент фильтрации —  $k$  (вернее коэффициент сопротивления) и коэффициент площадной порозности —  $\beta$ .

6. В отдельных случаях можно решить задачу с достаточной инженерной точностью и при условии пренебрежения в основных уравнениях членами, содержащими коэффициенты  $k$  и  $\beta$ , и таким путем получить решение, не зависящее от этих величин. Такие решения нами названы „геометрическими“ в отличие от гидравлических.

7. „Геометрическое“ решение задачи о фильтрации через сыпучий массив имеет наибольшее основание в случаях наличия подпора с низовой стороны  $h_0$ , превышающего: а) величину критической глубины фильтрационного потока при отвесной низовой грани:

$$h_0 > h_{кр} = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g\beta^2}}$$

и б) глубину  $y_2$ , получаемую из уравнения:

$$\frac{qk}{g\beta^2 y_2^2} - \frac{k}{q} y_2 = \mp \operatorname{ctg} \theta_2,$$

т. е.  $h_0 > y_2$  для случая наклонной низовой грани, так как в этих случаях исключается необходимость применения постулата максимального дебита, ибо конечную величину ординаты кривой депрессий будет диктовать величина низового подпора  $h_0$ .

8. В случае наличия низового подпора, не превосходящего вышеуказанных величин, т. е.

$$h_0 < h_{кр} \text{ (отвесная низовая грань)}$$

и

$$h_0 < y_2 \text{ (наклонная низовая грань),}$$

последний не окажет *никакого* влияния на величину основных элементов фильтрационного потока.

9. При наличии низового подпора, большего величины  $h_{кр}$  или  $y_2$ , превышение точки выхода кривой депрессий на дневную поверхность, вообще говоря, *невозможно*.

10. Влияние отдельных геометрических размеров сыпучего массива на величины основных элементов фильтрационного потока вполне уясняется из приведенного нами анализа и полученных математических зависимостей.

11. Проведенный нами анализ и полученные математические зависимости позволяют не только уяснить роль дренажа, правильно выбрать конструкцию дренажа, но и решить задачу определения величины основных элементов фильтрационного потока, модифицированного дренажем.

12. Рассмотренные задачи сами по себе намечают с достаточной четкостью порядок лабораторных работ и требуемую точность этих работ.

Настоящая краткая сводка, конечно, не исчерпывает полностью всех тех выводов, какие можно сделать на основании полученных решений задач, ибо солидную часть выводов надлежит сделать из опыта и мы убеждены, что опыт внесет много ясности в отдельные моменты анализа явления фильтрации. Следовательно, последнее слово, как и во всех других областях инженерного дела, здесь надлежит сказать опыту.

---

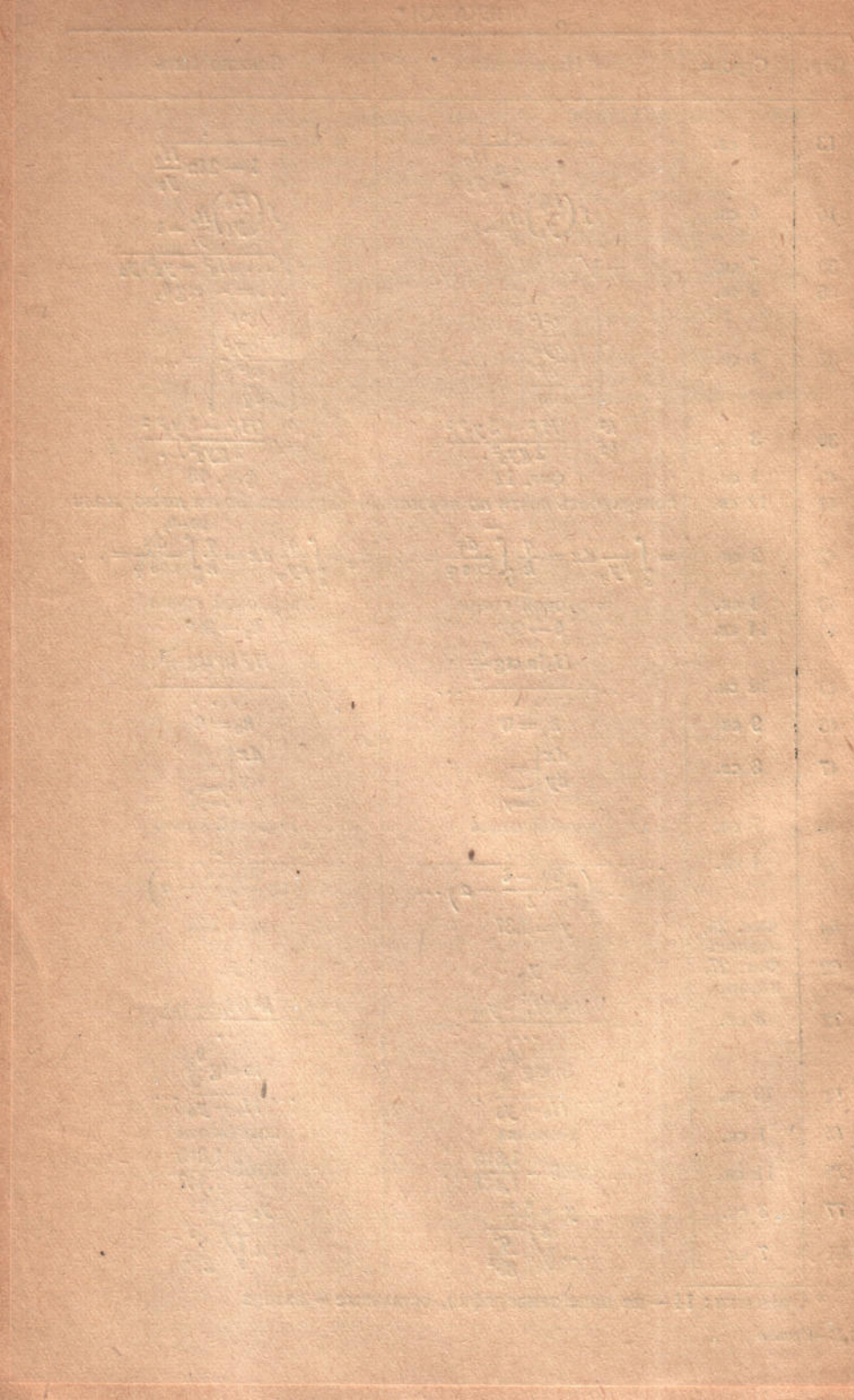
## ОГЛАВЛЕНИЕ

|  | Стр. |
|--|------|
| Предисловие . . . . .  | 3    |
| Введение . . . . .   | 4    |
| 1. Основные допущения . . . . .  | 4    |
| I. Перемычка с отвесными бортами на горизонтальном водонепроницаемом основании . . . . .   | 6    |
| 2. Принципиальная схема фильтрационного потока в перемычке при отсутствии подпора с низовой стороны $h_0 = 0$ . . . . .                      | 6    |
| 3. Уравнение для верховой части фильтрационного потока . . . . .   | 8    |
| 4. Уравнение для низовой части потока . . . . .  | 10   |
| 5. Примечание . . . . .  | 11   |
| 6. Система уравнений, определяющих форму и мощность фильтрационного потока . . . . .   | 12   |
| 7. Решение системы (20) фильтрационных уравнений . . . . .   | 14   |
| 8. Дополнение . . . . .  | 16   |
| 9. Упрощение решения задачи о фильтрации через перемычку с отвесными бортами . . . . .   | 17   |
| 10. Пример . . . . .   | 19   |
| 11. Влияние величины подпора со стороны нижнего бьефа . . . . .  | 20   |
| 12. Построение кривой депрессий для случая $h_{02} > h_{кр}$ . . . . .   | 21   |
| 13. Выводы . . . . .   | 22   |
| 14. Экранированная перемычка с вертикальными бортами, случай $h_{кр} < y_1$ . . . . .  | 24   |
| 15. Пример . . . . .   | 26   |
| II. Перемычка с вертикальной верховой и наклонной низовой гранями . . . . .  | 26   |
| 16. Схема фильтрационного потока в перемычке при $h_0 = 0$ . . . . .   | 26   |
| 17. Определение основных элементов фильтрационного потока . . . . .  | 28   |
| Первая расчетная схема . . . . .   | 28   |
| 18. Влияние низового подпора на характер фильтрационного потока в перемычке . . . . .  | 32   |
| 19. О касании кривой депрессий к низовому откосу . . . . .   | 34   |
| 20. Перемычка с низовой гранью, наклоненной в сторону нижнего бьефа; случай $h_0 = 0$ . . . . .  | 37   |
| 21. Обобщенное решение задачи для рассмотренных типов перемычек при условии медленно изменяющегося движения фильтрационного потока . . . . . | 39   |
| 22. Случай трехгранной перемычки . . . . .   | 40   |
| 23. Дополнительное упрощенное решение задачи о фильтрации через перемычку с „положительным“ низовым откосом при $h_0 = 0$ . . . . .          | 43   |
| 24. Экранированная перемычка с „положительным“ низовым откосом; случай $h_0 = 0$ и $h_{кр(в)} < y_1$ . . . . .                               | 46   |
| 25. Примеры . . . . .  | 49   |
| III. Перемычка с наклонной верховой и отвесной низовой гранями . . . . .   | 51   |
| 26. Схема фильтрационного потока в перемычке при $h_0 = 0$ . . . . .   | 51   |
| 27. Потеря энергии в верховой части фильтрационного потока . . . . .   | 53   |
| 28. Потеря энергии в низовой части фильтрационного потока . . . . .  | 61   |

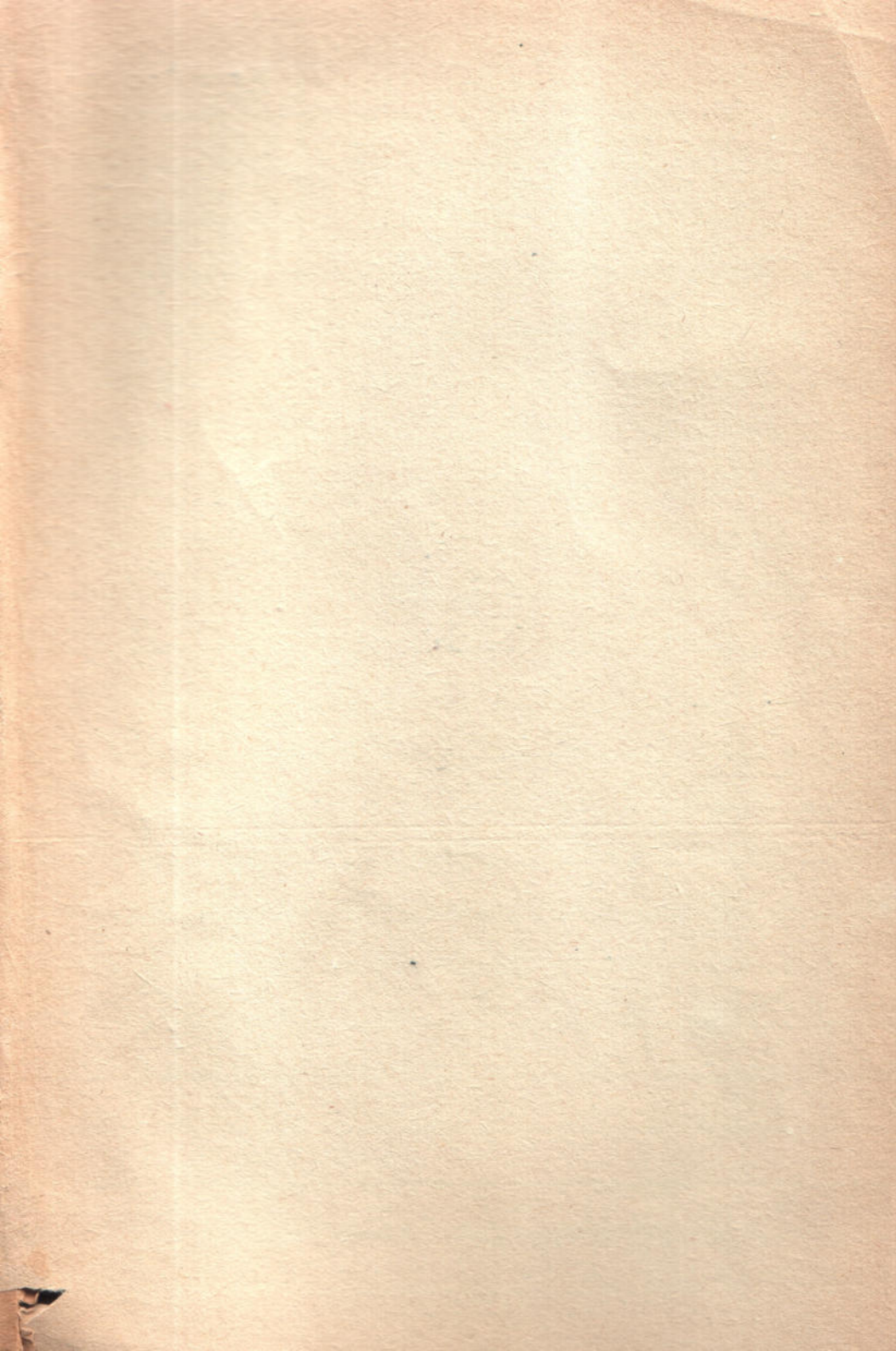
|  |    |
|--|----|
| 29. Определение основных элементов фильтрационного потока в перемычке . . . . .                      | 62 |
| 30. Пример . . . . .   | 63 |
| 31. Определение основных элементов фильтрационного потока в перемычке для случая $h_0 > 0$ . . . . . | 64 |
| 32. Общее замечание . . . . .  | 66 |
| IV. Однородная земляная плотина обычного профиля . . . . .   | 67 |
| 33. Схема фильтрационного потока в земляной плотине при условии $h_0 = 0$ . . . . .                  | 67 |
| 34. Система уравнений, определяющих основные элементы фильтрационного потока . . . . .               | 69 |
| 35. Определение элементов фильтрационного потока в земляной плотине . . . . .                        | 72 |
| 36. Пример определения основных элементов в земляной плотине обычного очертания . . . . .            | 74 |
| 37. Определение положения точки перегиба кривой депрессий . . . . .                                  | 75 |
| 38. Пример определения координат точки перегиба . . . . .  | 77 |
| 39. Дренажные устройства у подошвы низового откоса земляной плотины . . . . .                        | 78 |
| <b>Выводы</b> . . . . .  | 80 |

| Стр. | Строка              | Напечатано   | Должно быть  |
|------|---------------------|--|--|
| 13   | 7 св.               | $= \frac{\dots}{1 - 2 \ln \frac{H_0}{y_1}}$  | $= \frac{\dots}{1 - 2 \ln \frac{H_0}{y_1}}$  |
| 16   | 8 св.               | $f\left(\frac{H_0}{y_1}\right) \frac{H_0}{y} = 1$  | $f\left(\frac{H_0}{y_1}\right) \frac{H_0}{y_1} = 1$  |
| 30   | 7 св.               | $+ \sqrt{\dots (H_0 - y_2^2) y_2}$   | $+ \sqrt{\dots (H_0^2 - y_2^2) y_2}$   |
| 36   | 9 св.               | $\dots = \text{ctg } \theta_2$   | $\dots = - \text{ctg } \theta_2$   |
| 37   | 4 св.               | $\left  \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial y_2^2}}{\frac{\partial F}{\partial q}} \right  = \dots$     | $\left  \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial y_2^2}}{\frac{\partial F}{\partial q}} \right  = \dots$           |
| 39   | 3 св.               | $\frac{k^2}{\beta^2} \frac{(H_0^2 - 3 y_2^2)^2}{2 g y_2^2 \dots}$                                      | $\frac{k^2}{\beta^2} \frac{(H_0^2 - 3 y_2^2)^2}{2 g y_2^2 \dots}$  |
| 40   | 1 св.               | фиг. 12  | фиг. 13  |
| 41   | 12 св.              | поверхность почти по нормам  | поверхность почти по нормали   |
| 42   | 2 св.               | $= \int_s \frac{dx}{k y_\varphi} = \frac{q}{k} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \dots$ | $h_w = \int_s \frac{q}{k y_\varphi} dx = \frac{q}{k} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \dots$ |
| 43   | 3 св.               | в рховой грани   | верховой грани   |
| 45   | 14 св.              | $\theta \rightarrow 90^\circ$  | $\theta_2 \rightarrow 90^\circ$  |
| 45   | 12 св.              | $H_0 \ln \text{ctg } \frac{\theta_2}{2}$   | $H_0^2 \ln \text{ctg } \frac{\theta_2}{2}$   |
| 46   | 9 св.               | $h_0 = 0$  | $h_0 = 0$  |
| 47   | 8 св.               | $\left. \frac{dx}{dy} \right _{\substack{x=y_2 \\ y=y_2}}$   | $\left. \frac{dx}{ay} \right _{\substack{y=x_2 \\ x=y_2}}$   |
| 49   | 7 св.               | изовой откос   | Низовой откос  |
| 57   | 4 св.               | $\dots \left( \frac{g \frac{90 - \delta}{2} - a}{y} \right) \dots$                                     | $\dots \left( \frac{g \frac{90 - \delta}{2} - a}{y_0} \right) \dots$   |
| 64   | Фиг. 24,<br>надпись | $y = 2,37$   | $y_0 = 2,37$   |
| 69   | Фиг. 27,<br>надпись | $y$  | $y_0$  |
| 72   | 5 св.               | $\dots \frac{h^2 (H_0 - y_0)}{\dots}$  | $\dots \frac{k^2 (H_0 - y_0)}{\dots}$  |
| 72   | 10 св.              | $\dots \frac{\ln \text{ctg } \frac{\theta_2}{2}}{H_0 - y_0} \dots$                                     | $\dots \frac{\ln \text{ctg } \frac{\theta_1}{2}}{H_0 - y_0} \dots$   |
| 75   | 1 св.               | дставляя   | подставляя   |
| 75   | 11 св.              | $\dots 0,868 - \frac{1,815}{1,447} \dots$  | $\dots 0,868 \cdot \frac{1,815}{1,447} \dots$  |
| 77   | 3 св.               | $y = 5,21$   | $y_1 = 5,21$   |
| 81   | 7 св.               | $\dots \sqrt[8]{\frac{q^2}{g \beta^2}}$  | $\dots \sqrt[3]{\frac{q^2}{g \beta^2}}$  |

\* Опечатки: 14 — по вине типографии, остальные — автора







**Цена 2 рубля**

**55-4-3**

