Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та природокористування
Кафедра вищої математики

04-02-74М

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для практичних занять
з навчальної дисципліни **«Вища математика»** з розділів

«Функції багатьох змінних», «Комплексні числа, многочлени, раціональні дроби», «Інтегральне числення функцій однієї та багатьох змінних», «Ряди», «Диференціальні рівняння», «Ряди Фур'є», «Перетворення Лапласа та Фур'є»
для здобувачів вищої освіти бакалаврського рівня за освітніми програмами спеціальностей
123 «Комп'ютерна інженерія» та
125 «Кібербезпека та захист інформації»
денної та заочної форми навчання

Рекомендовано науково-методичною радою з якості ННІКІТІ
Протокол № 4 від 24.02.2025 р.

Рівне – 2025

Методичні вказівки для практичних занять з навчальної дисципліни «Вища математика» з розділів «Функції багатьох змінних», «Комплексні числа, многочлени, раціональні дроби», «Інтегральне числення функцій однієї та багатьох змінних», «Ряди», «Диференціальні рівняння», «Ряди Фур'є», «Перетворення Лапласа та Фур'є» для здобувачів вищої освіти бакалаврського рівня за освітніми програмами спеціальностей 123 «Комп'ютерна інженерія» та 125 «Кібербезпека та захист інформації» денної та заочної форми навчання. [Електронне видання] / Кушнір В. П., Кушнір О. О., Тадеєв П. О. – Рівне : НУВГП, 2025. – 35 с.

Укладачі: Кушнір В. П., к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої математики; Кушнір О. О., к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої математики; Тадеєв П. О., д.пед.н., к.ф.-м.н., професор, завідувач кафедри вищої математики.

Відповідальний за випуск: Тадеєв П. О., д.пед.н., к.ф.-м.н., професор, завідувач кафедри вищої математики.

Керівники груп забезпечення спеціальностей
123 «Комп'ютерна інженерія»: к. т. н., доцент Сидор А. І.
125 «Кібербезпека та захист інформації»: к.т.н., доцент Назарук В. Д.

Попередня версія методичних вказівок: 04-02-40

Зміст

Вступ 4
Заняття 1. Функції багатьох змінних (ФБЗ): область визначення, лінії рівня, границі, неперервність, частинні похідні. 4
Заняття 2. ФБЗ: похідна в напрямку, дотична та нормаль до поверхні, складена та неявно задана функції, екстремуми. 6
Заняття 3. Комплексні числа, многочлени, раціональна функція 8
Заняття 4. Невизначений інтеграл: методи інтегрування. 10
Заняття 5. Невизначений інтеграл: інтегрування основних класів функцій. 13
Заняття 6. Визначений інтеграл 14
Заняття 7. Невласні інтеграли. Обчислення подвійних та потрійних інтегралів. 16
Заняття 8. Криволінійні інтеграли. 19
Заняття 9. Диференціальні рівняння (ДР) I порядку. Основні типи. 22
Заняття 10. Лінійні ДР та рівняння Бернуллі. Типи ДР вищих порядків, що допускають пониження порядку. 23
Заняття 11. Лінійні ДР вищих порядків. 25
Заняття 12. ЛНДР з ПК зі спеціальними правими частинами. 27

Заняття 13. Стійкість розв’язків ДР та їх систем. 28
Заняття 14. Ряди. 29
Заняття 15. Розклад функцій в ряд Фур’є. Інтеграл та перетворення Фур'є. 31
Заняття 16. Перетворення Лапласа. 32
Література 34

Вступ

Мета методичних вказівок — максимально залучити студентів до активної самостійної роботи з вищої математики на практичних заняттях.

Для цього, відповідно до силабуса, на кожне заняття пропонуються приклади і задачі від простих до складніших, що дасть можливість кожному студентові під керівництвом викладача розв'язувати ті завдання, які відповідають його математичній підготовці в цілому та його підготовці до даного заняття. Пропонуються також завдання для домашніх робіт до кожного заняття для закріплення набутих навичок.

Заняття 1. Функції багатьох змінних (ФБЗ): область визначення, лінії рівня, границі, неперервність, частинні похідні.

1. Означення функції n змінних. Область визначення функції двох змінних. Лінії рівня функції двох змінних.
2. Окіл точки на площині і проколотий окіл, малюнок. Означення граничної та ізольованої точок множини. Означення обмеженої та замкнутої множин. Означення і позначення границі функції двох змінних. Теорема про арифметичні дії над границями. Означення неперервної функції в точці. Означення неперервної функції в області. Теореми про неперервні функції на замкнутій обмеженій множині.
3. Означення приросту функції двох змінних в напрямку вектора в точці. Означення похідної в напрямку функції двох змінних. Властивість похідної в напрямку. Фізичний зміст похідної в напрямку. Означення часткових приростів функції двох змінних. Означення частинних похідних функції двох змінних. Правило знаходження частинних похідних. Означення градієнта функції двох змінних в точці.
4. Означення повного приросту функції двох змінних. Означення диференційованої функції в точці і повного диференціалу. Зв'язок диференційованості функції з неперервністю. Зв'язок диференційованості функції з існуванням частинних похідних. Формула для знаходження похідної в напрямку. Формула для

диференціалу через частинні похідні. Геометр. зміст градієнта.

1. Зобразити області визначення функцій:

а)$z = \ln(1 - x^2/4 - y^2)$, б)$z = \sqrt{x + 2y - 1}$, в)$z = \frac{2x}{x-2y}$,

г) $z = \sqrt{xy}$,

2. Зобразити лінії чи поверхні рівня функцій:

а)$z = 4 + x^2 + y^2$, б)$z = x + 2y - 1$, в)$u = x^2 + y^2 - z^2$.

3. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \frac{x+2yx}{x^2+y^2}$, б)$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} \frac{\sin xy}{x}$,в)$\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \frac{2xy-x^2}{x^2-y^2}$.

4. Зобразити множину неперервності функції: $z = \frac{x+2yx}{x^2+y^2}$.

5. При якому значенні А функція буде неперервною на всій площині Оху? $z = \begin{cases} \frac{arctg 2(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, \text{при} (x, y) \neq (0,0), \\ \text{А}, \text{при} (x, y) = (0,0). \end{cases}$

6. Знайти частинні похідні функцій:

а) $z = 4x^3y^2 + 5x\sin y - 3x + 7$, б)$z = (2x - 3y)\sin 5x$,

в)$z = \ln(x + 2y)$, г)$u = x^{yz}$.

7. Знайти диференціал функції за означенням та з допомогою частинних похідних $z = x^2 + 2xy$.

8.Знайти градієнти та диференціали функцій:

а) $z = 2xy^2 + 5tg3y - 2$, б)$z = x^2/y$.

9. Знайти наближено з допомогою диференціалу та перевірити себе з допомогою калькулятора $0{,}97^{2{,}01}$.

Домашнє завдання

1. Зобразити області визначення функцій: а)$z = \frac{2xy}{y-x^2}$,

б)$z = \ln(x^2/9 - y^2/4 - 1)$, в)$z = \arcsin\frac{y-1}{x}$.

2. Зобразити лінії чи поверхні рівня функцій:

а) $z = \sqrt{xy}$,б)$z = x^2 - y^2$, в)$u = x^2 + y^2 + z^2$.

3. Знайти границі: а) $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ y\to 2}} \frac{x+2y}{x^2(y-2)}$, б) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to 2}} (1+\frac{y}{x})^x$,

в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2y-x}{x+y}$, г) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{y+x}{x^2+y^2}$.

4. Зобразити множину неперервності функції: $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$.

5. Знайти частинні похідні функцій: а) $u=(xy)^z$,

б) $z=xy^2+5\ln x\cos 2y-3y^2+2$, в) $z=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

6. Показати, що функція $z=xy+xe^{y/x}$ задовольняє рівняння в частинних похідних $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+z$.

7. Знайти диференціал функції за означенням та з допомогою частинних похідних $z=x^2y+y^2x$.

8.Знайти градієнти та диференціали функцій:

а) $z=\ln(x^2+y^2)$, б) $z=xy-y/x$.

9. Знайти наближено з допомогою диференціалу та перевірити себе з допомогою калькулятора:

а) $\log_2(0{,}95+\sqrt[3]{1{,}07})$, б) $tg 46^{\circ}+\sin 31^{\circ}$.

Заняття 2. ФБЗ: похідна в напрямку, дотична та нормаль до поверхні, складена та неявно задана функції, екстремуми.

2. Рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні, заданої неявно чи явно. Геометричний зміст диференціалу.

3. Формули для похідної складної функції. Інваріантність формули диференціалу. Формула для похідної неявно заданої функції від одної змінної через частинні похідні. Формули для частинних похідних неявно заданої функції двох змінних. Знаходження частинних похідних функцій, заданих системою рівнянь.

4. Означення і позначення частинних похідних другого порядку функції двох змінних. Означення повної похідної другого порядку функції двох змінних. Теорема про змішані похідні вищих порядків функції двох змінних. Диференціали вищих порядків. Формула Тейлора.

5. Означення точки максимуму (мінімуму, екстремуму) функції двох змінних в області. Означення точок локального максимуму (мінімуму, екстремуму) функції двох змінних. Необхідна умова локального екстремуму функції двох змінних. Достатня умова локального екстремуму функції двох змінних. Знаходження умовного екстремуму з допомогою функції Лагранжа. Дослідження функції двох змінних на абсолютний екстремум на множині.

1. а)Знайти похідну функції $z = x^2y^3 + 7y - 2$в точці M(0;2) в напрямку $\vec{s} = (3; -4)$.

б) Знайти похідну функції $z = \frac{x^2}{x+y}$в точці M(1;2) в напрямку, що йде з точки M в початок координат.

2. Знайти рівняння дотичних площин та нормалей до поверхонь в заданих точках: а)$x^2 + y^2 + z^2 = 6$при x=y=1,

б)$z = x^2 - y^2$, M(2; 1) .

3. Знайти похідні складених функцій:

а)$z = 5x^2y^2 - 2xy + 3x - 4, x = u\sin v, y = u - \cos v, \partial z/\partial u, \partial z/\partial v$–?

б) $z = x^y, x = tgt, y = \sin t, dz/dt$ –?

4. Знайти похідні неявно заданих функцій:

а) $xe^{2y} - y\ln x - 8 = 0, y'_x$–?

б) $z^3 + y = xz, M(3; 0)(z > 0), z'_x(M), z'_y(M), dz(M)$–?

5. Знайти частинні похідні, повну похідну та диференціал другого порядку функції $z = x^2\sin 5y$в точці M(2;0).

6. Дослідити на екстремум функції: а) $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$,

б) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y, x, y \geq 0$.

7. а) Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2y(4 - x - y)$на трикутнику, обмеженому прямими$x = 0, y = 0, x + y = 6$.

б) Знайти найбільше і найменше значення функції $z = 6 - 4x - 3y$при $x^2 + y^2 \leq 1$.

Домашнє завдання

1. а)Знайти похідну функції $z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$в точці M(3;1) в напрямку, що йде від цієї точки до точки N(6;5).

б) Знайти похідну функції $z = arctgxy$в точці М(1;1) в напрямку бісектриси першого координатного кута.
2. Знайти рівняння дотичних площин та нормалей до поверхонь в заданих точках: а)$x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$, М(1; 2; -1) (спочатку перевірити чи точка лежить на поверхні),
б)$z = arctg\, y/x$, М(1; 1) .
3. Знайти похідні складених функцій:
а)$u = \ln(e^x + e^y), y = x^3(x = x), du/dx$ −?
б) $z = x^2\ln y, x = u/v\,, y = 3u - 2v, \partial\, z/\partial\, u, \partial\, z/\partial\, v-$?
4. Знайти похідні неявно заданих функцій:
а) $e^z = xyz, z'_x, z'_y-$?, б)$y^x = x^y, y'_x-$?,
в)$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1, M(\pi/2\,; \pi/4)(z \in [0; \pi/2])$,
$z'_x(M), z'_y(M), dz(M)-$?
5. Знайти частинні похідні, повну похідну та диференціал другого порядку функції $z = e^{x/y}$в точці М(0;2).
6. Дослідити на екстремум функції:
а) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$,
б) $z = x^3y^2(6 - x - y), x, y \geq 0.$
7. а) Знайти екстремуми функції$z = x^2 + y^2$на множині, обмеженій лініями$x = 2, y = 3, x/2 + y/3 = 1.$
б) Знайти найбільше екстремуми функції $z = x^2 - y^2$ при $x^2 + y^2 \leq 1.$
в) Знайти сторони прямокутного трикутника, що має при заданій площі S найменший периметр.

Заняття 3. Комплексні числа, многочлени, раціональна функція

1. Означення комплексної площини та комплексних чисел (точок-векторів). Уявна та дійсна частини комплексного числа. Алгебраїчна форма. Рівність комплексних чисел.
2. Додавання та віднімання комплексних чисел (векторів) в алгебраїчній формі. Закони комутативності та асоціативності для додавання комплексних чисел.

3. Тригонометрична форма комплексного числа. Зв'язок тригонометричної та алгебраїчної форми комплексного числа.
4. Означення множення комплексних чисел-векторів. Закони комутативності, асоціативності дистрибутивності для множення. Ділення комплексних чисел в тригонометричній формі. Піднесення до натурального степеня в тригонометричній формі (формула Муавра). Добування кореня з комплексного числа. Кількість коренів n-го степеня з комплексного числа, їх геометрична інтерпретація. Закони для піднесення до степеня та добування кореня. Корені n-го степеня з одиниці та їх застосування до добування коренів n-го степ. з комплексного числа. Множення комплексних чисел в алгебраїчній формі.
5. Означення взаємно спряжених комплексних чисел, їх геометрична інтерпретація. Властивості спряжених комплексних чисел. Ділення комплексних чисел в алгебраїчній формі.
6. Корінь квадратний з від'ємних чисел та розв'язування квадр. рівнянь з від'ємним дискримінантом. Властивість коренів квадр. рівняння з дійсними коефіцієнтами з від'ємним дискримінантом.
7. Означення многочлена, його степеня та кореня многочлена. Основна теорема алгебри. Лема д'Аламбера. Множина значень многочлена. Ділення многочлена на многочлен з остачею. Теорема Безу. Розклад многочлена на множники в множині комплексних чисел. Кратність кореня многочлена. Властивість про кратність кореня похідної з многочлена. Властивість коренів многочлена з дійсними коефіцієнтами. Розклад многочлена на множники в множині дійсних чисел.
8. Чи можуть два многочлени n-го степ. співпадати більш ніж в n точках. Єдиність стандартної форми многочлена. Узагальнення теореми Вієта. Властивість раціонального кореня многочлена з цілими коефіцієнтами.
9. Означення раціональної функції (раціонального дробу). Означення правильних та неправильних раціональних дробів. Виділення цілої частини раціональної функції. Означення простих раціональних дробів. Теорема-план розкладу правильного раціонального дробу на прості дроби.
1. Обчислити і зобразити результат на комплексній площині:

а) $(3 - 4i)(2+7i) - (2-i)^2+7 - i^3$, б) $(3 - 2i) / (4+2i)$, в) $(2+2i)^{10}$,
г) $(1 - i\sqrt{3})^5$, д) $\sqrt[5]{i-\sqrt{3}}$, е) $\sqrt[3]{1}$.
2. Розв'язати квадратне рівняння в множині комплексних чисел ($\mathbb{C}$), зробити перевірку за теоремою Вієта, та зобразити корені на $\mathbb{C}$: а) $x^2-2x+2=0$, б) $4x^2+20x+29=0$.
3. Розкласти многочлен на множники в $\mathbb{C}$ і в $\mathbb{R}$:
а) $x^3 - 2x^2 + 3x - 2$, б) $2x^3 + 3x^2 - x + 2$.
4. Виділити цілу частину:
а) $\frac{4x^2-3x+5}{x+4}$, б) $\frac{x^5-3x^4+5x^2+7}{x^3+4x+1}$.
5. Розкласти на суму простих дробів: а) $\frac{4x^2-3x+5}{(x+4)(x-2)(x+1)}$,
б) $\frac{3x+5}{x^3+x}$, в) $\frac{4x^2-3x+5}{(x^2+x+1)(x-2)^2}$.

Домашнє завдання

1. Обчислити і зобразити результат на комплексній площині:
а) $(2 - i)(2+5i) + (3 - 2i)^2 - i^5$, б) $(3 - 2i) / (4 - i)$, в) $(3 - 4i) / i$,
г) $(3 - 3i)^4$, д) $(i - \sqrt{3})^6$, е) $\sqrt[4]{i}$, є) $\sqrt{1/2 + i\sqrt{3}/2}$.
2. Розв'язати квадратне рівняння в множині комплексних чисел ($\mathbb{C}$), зробити перевірку за теоремою Вієта, та зобразити корені на $\mathbb{C}$: а) $x^2+6x+13=0$, б) $2x^2 - 8x + 40=0$.
3. Розкласти многочлен на множники в $\mathbb{C}$ і в $\mathbb{R}$:
а) $x^3 + 5x^2 - 3x - 3$, б) $2x^3 + 6x^2 +3x - 2$.
4. Виділити цілу частину: $\frac{3x^3-4x^2+7}{x^2+4}$.
5. Розкласти на суму простих дробів: а) $\frac{x+5}{(x-2)(x+1)}$,
б) $\frac{x+1}{x^3+2x^2+2x}$, в) $\frac{x^2-3x+1}{x^2(x-2)^2}$.

Заняття 4. Невизначений інтеграл: методи інтегрування.

1. Означення первісної на інтервалі з прикладом. Формула підведення під знак диференціалу з прикладом.
2. Властивості первісної про додавання сталої і про дві первісні одної функції. Первісна для суми, різниці двох функцій.

Первісна домноженої на константу функції. Первісна функції з домноженим на константу аргументом. Первісна функції з зсунутим на константу аргументом.

3. Означення невизначеного інтегралу.

4. Невизначений інтеграл суми, різниці двох функцій. Невизначений інтеграл домноженої на константу функції. Похідна з невизначеного інтегралу. Диференціал з невизначеного інтегралу. Інваріантність формули невизн. інтегралу з прикладом.

5. Теорема про існування первісної. Приклади функцій з неелементарними первісними.

6. В чому полягає метод розкладу? Найпростіші перетворення під знаком диференціалу з прикладами. В чому полягає метод підведення під знак диференціалу?

7. Формула інтегрування частинами. В чому полягає метод інтегрування частинами? І-IV типи виразів, що інтегруються частинами з прикладами.

1. Безпосереднє інтегрування та метод розкладу:

$$\int 10^x dx, \int x^3 dx, \int \sqrt[5]{x} dx, \int \frac{dx}{x^4}, \int x(\sqrt{x} + 5x^3) dx,$$

$$\int a^x e^x dx, \int \frac{\cos 2x dx}{\cos^2 x \sin^2 x}, \int tg^2 x dx, \int 2\sin^2 \frac{x}{2} dx, \int \frac{dx}{9 + x^2},$$

$$\int \frac{(1+x)^2 dx}{x^2}, \int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2}}, \int \frac{dx}{4 - x^2}, \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 16}}.$$

2. Підведення під знак диференціалу:

$$\int tg^3 x dtgx, \int tg^5 x \frac{dx}{\cos^2 x}, \int (x^2 + 3)^{15} d(x^2 + 3), \int x^2 (x^3 - 5)^6 dx.$$

3. Підведення під знак диференціалу:

$$\int e^{5x} dx, \int e^{\sin x} \cos x dx, \int x e^{x^2} dx, \int 3^{-x} dx, \int \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}},$$

$\int \frac{xdx}{x^2-3}, \int \frac{dx}{2-x}, \int \frac{dx}{2x-3}, \int \frac{dx}{(x^2+1)arctgx}, \int \sin 2xdx,$
$\int e^x \cos e^x dx, \int \cos(7x - 1)dx, \int tgxdx, \int \sin(lnx)\frac{dx}{x}, \int \frac{x^2dx}{\sin^2 x^3},$
$\int \sin^3 x \cos xdx, \int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}, \int \frac{x^3dx}{x^8-1}, \int \frac{dx}{2x^2+3}, \int \frac{2x-3}{x^2-7}dx.$

4. Заміна змінної:

$\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}}, \int \frac{e^{\sqrt{2x-1}}dx}{\sqrt{2x-1}}, \int \frac{(1+tg^2x)dx}{2tgx-3}, \int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}.$

5. Інтегрування частинами:

$\int (2x+7)e^x dx, \int (x^2-2x+7)e^x dx, \int \ln xdx,$
$\int \frac{\ln xdx}{x^3}, \int x\sin 2xdx, \int xarctgxdx, \int e^x \sin xdx, \int \sqrt{x^2+5}dx.$

Домашнє завдання

1. Безпосереднє інтегрування та метод розкладу:

$\int \frac{(\sqrt{x}+x^2 2^x+3)dx}{x^2}, \int \frac{dx}{x^2+7}, \int \frac{dx}{x^2-10}, \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}.$
$\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx, \int \frac{dx}{2-x^2}, \int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}, \int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}},$
$\int \frac{1+\cos^2 xdx}{\cos^2 x \sin^2 x}, \int \frac{d\arcsin x}{\arcsin x}, \int \frac{d\cos x}{\cos^2 x}, \int \frac{dx^2}{\sin^2 x^2}, \int \ln^5 xd\ln x.$

2. Підведення під знак диференціалу: $\int \sin(10x - 3)dx, \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}, \int \frac{\sqrt[3]{tg^2x}}{\cos^2 x}dx, \int x^2\sqrt{x^3-4}dx,$
$\int e^x ctge^x dx, \int 5^{-\sin x}\cos xdx, \int x7^{x^2}dx, \int e^{\arcsin x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$
$\int \frac{dx}{\sqrt{7+8x^2}}, \int \frac{dx}{\sqrt{7-5x^2}}, \int \frac{x^{2dx}}{\sqrt{x^6-1}}, \int \frac{x^2dx}{\cos^2(x^3-1)}.$

3. Заміна змінної: $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x-7)}, \int \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}, \int \frac{(1+tg^2x)dx}{tg^2x-1}.$

4. Інтегрування частинами:
$\int x^2\cos4xdx, \int \sqrt{x}\ln xdx, \int \arcsin xdx, \int e^{5x}\cos xdx$.

Заняття 5. Невизначений інтеграл: інтегрування основних класів функцій.

1. Інтегрування простих раціональних дробів I-IV типів. Інтегрування раціональних дробів. Теорема про первісну раціональної функції.
2. Інтегрування виразів $\sin^n x \cdot \cos^m x$, якщо один з степенів непарний. Інтегрування виразів $\sin^n x \cdot \cos^m x$, якщо обидва степені парні невід'ємні. Інтегрування $\sin nx\cos mx$ і т.п. Теорема про універсальну тригонометричну підстановку. Теорема про підстановку $tgx = t$. Які підстановки роблять при інтегруванні $R(tgx), R(ctgx)$?
3. Яку підстановку роблять при інтегруванні функції $R(x, \sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ldots)$? Тригонометричні підстановки в ірраціональних виразах. Інтегрування диференціального біному.

1. Інтегрування найпростіших раціональних дробів:
$\int \frac{dx}{x-3}, \int \frac{dx}{(x-3)^5}, \int \frac{xdx}{(x-3)^4}, \int \frac{dx}{x^2+2x+5}, \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}},$
$\int \frac{(x+2)dx}{x^2-7x+13}, \int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{5x^2-2x+1}}$.
2. Інтегрування раціональних функцій: $\int \frac{(1-x)dx}{x^3-4x}, \int \frac{(2x-7)dx}{(x^2+x-2)(x^2+1)}, \int \frac{(x^5+3)dx}{x^2-1}$.
3. Інтегрування тригонометричних функцій: $\int \sin^3 xdx$,
$\int \frac{\cos^3 xdx}{\sin^4 x}, \int \cos^4 xdx, \int \sin^2 x\cos^2 xdx, \int \sin3x\cos5xdx,$
$\int \frac{dx}{5-3\cos x}, \int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}, \int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}, \int \frac{dx}{\sin^6 x}$.
4. Інтегрування ірраціональних функцій:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}, \int \frac{\left(\sqrt{x+1}+1\right)dx}{\sqrt{x+1}-1}, \int \frac{\sqrt{4-x^2}dx}{x}, \int \frac{dx}{x\sqrt{9+x^2}}.$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}dx}{x}, \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}, \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$$

Домашнє завдання

1. Інтегрування найпростіших раціональних дробів:

$$\int \frac{dx}{(2x-1)^4}, \int \frac{xdx}{(x-1)^4}, \int \frac{(3x-1)dx}{x^2-4x+8}, \int \frac{(3x-1)dx}{\sqrt{x^2-4x+8}},$$

$$\int \frac{dx}{2x^2-2x+3}, \int \frac{(x-2)dx}{x^2-4x+7}.$$

2. Інтегрування раціональних функцій: $\int \frac{(2x-1)dx}{(x-1)(x-2)}, \int \frac{(x^5+x^4-8)dx}{x^3-4x}, \int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}.$

3. Інтегрування тригонометричних функцій: $\int \sin^4 x dx,$

$$\int \cos^3 x \sin^2 x dx, \int ctg^2 x dx, \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}, \int \sin 15x \sin 10x dx,$$

$$\int \frac{dx}{1-\sin x}, \int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3}, \int \frac{dx}{\sin x}, \int \frac{dx}{\cos x}.$$

4. Інтегрування ірраціональних функцій:

$$\int \frac{(\sqrt{x}-1)dx}{\sqrt[3]{x}+1}, \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}^3}, \int \sqrt{(1-x^2)^3}dx, \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}, \int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+1}}, \int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^2}}.$$

Заняття 6. Визначений інтеграл

1. Означення розбиття відрізка і діаметру розбиття. Означення і геометричний зміст інтегральної суми для даного розбиття і вибраних проміжних точок. Означення визначеного інтегралу. Геометричний зміст визначеного інтегралу. Фізичний та прикладний зміст визначеного інтегралу.
2. Необхідна умова існування визначеного інтегралу. Достатні умови існування визначеного інтегралу.
3. Властивості визначеного інтегралу для суми, різниці функцій, про винесення константи. Визначений інтеграл для

невід’ємної функції. Властивість про оцінку визначеного інтегралу. Порівняння визначених інтегралів. Теорема про середнє значення функції. Адитивність визнач. інтегралу.

4. Означення функції верхньої межі інтегралу. Теорема про функцію верхньої межі інтегралу. Формула Лейбніца для похідної з визначеного інтегралу із змінними межами інтегрування. Формула Ньютона-Лейбніца.

5. Заміна змінної у визначеному інтегралі. Формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

6. Знаходження площ з допомогою визначеного інтегралу: в декартових координатах, з параметрично заданими лініями, в полярній системі координат. Формула для довжини дуги та диференціалу дуги кривої, заданої явно, параметрично, та в полярній системі координат. Формула для обчислення об’єму тіла через поперечні перерізи. Формула для об’єму тіла, утвореного обертанням навколо осі х криволінійної трапеції. План розв’язування прикладних задач з допомогою визначеного інтегралу. Формули для статичних моментів та моментів інерції для криволінійної трапеції та координати центра мас.

1. $\int_{-1}^{2}(x^2-2x+$
$3)\,dx, \int_{0}^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}, \int_{0}^{1} \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}, \int_{0}^{\pi/4} \cos^2 x dx, \int_{0}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}$.

а)$y=2x-x^2, y=-x,$ б) $y=x^2, y=2/(2+x^2)$,

в) $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t,$ г)$\rho=a\sqrt{\cos 2\phi}$.

3. Знайти довжину дуги кривої:

а)$y=x^2/2-1, y\le 0,$ б)$x=t^6/6\,, y=2-t^4/4, 1\le t\le 2.$

4. Вивести формули для площі сфери та об’єму кулі.

5. Знайти об’єм фігури, утвореної при обертанні астроїди навколо осі Ох.

6. Швидкість тіла $v=\sqrt{1+t}$.Знайти шлях пройдений тілом за перші 10 секунд руху.

7. Знайти масу стержня, якщо його густина задана формулою $\rho=\cos^3 x, 0\le x\le \pi/2.$

8. Обчислити роботу, затрачену на викачування рідини з густиною ρ із конічного котла, з висотою H і радіусом основи R.

9. Знайти статичний момент відносно осі Оу підграфіка функції$y = 2x - 4, 2 < x < 4$.

Домашнє завдання

1. $\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \int_0^1 \frac{y^2 dy}{\sqrt{y^6+4}}, \int_0^{\pi/2} \sin^3 y dy, \int_0^1 x e^{-x} dx,$

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{3 + 2\cos x}, \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1 + 3\cos^2 x}, \int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}dx}{x}.$$

2. Знайти площі фігур, обмежених лініями:
а)$y = 3x^2 - 6x, y = 0, x = 4,$ б) $\rho = 4\sin^2\phi$.
3. Знайти довжину дуги кривої:
а)$y = \ln x, 3/4 \le x \le 12/5,$ б)$\rho = a(1 + \cos\phi)$.
4. Вивести формули для площі бічної поверхні конуса та його об'єму.
5. Знайти об'єм фігури, утвореної при обертанні підграфіка функції $y = tgx, 0 \le x \le \pi/4$ навколо осі Ох.
6. Знайти силу тиску води на вертикальну трикутну площадку з висотою Н, основою а, паралельною поверхні води, якщо протилежна вершина на поверхні води.

Заняття 7. Невласні інтеграли. Обчислення подвійних та потрійних інтегралів.

1. Означення невласного інтегралу І-го роду з нескінченною верхньою межею. Коли він збігається і розбіг.? Геометричний зміст невласного інтегралу І-го роду з нескінченною верхньою межею для невід'ємної функції. Означення невласного інтегралу І-го роду з нескінченною нижньою межею. Коли він збігається і розбігається? Означення невласного інтегралу І-го роду з обома нескінченними межами. Коли він збігається і розбігається? Означення фінітної функції. Невласні інтеграли від фінітних функцій. Означення невласного інтегралу ІІ-го роду з особливістю у верхній межі. Коли він збігається і розбігається? Геометричний зміст. Означ. невласного інтегралу ІІ-го роду з

особливістю у нижній межі. Коли він збігається і розбігається? Геометричний зміст. Означення невласного інтегралу ІІ-го роду з особливістю всередині проміжку. Коли він збігається і розбігається? Узагальнення формули Ньютона-Лейбніца для невласних інтегралів.

2. Означення хвоста інтегралу. Лема про хвіст інтегралу. Ознаки порівняння для невласних інтегралів. Ознака Веєрштраса.

3. Подвійний інтеграл: означення, геометр. і механічний зміст. Теорема існування. Власт. подв. інтегралу. Означ. циліндричної області та обчисл. подв. інт. для неї.

4. Заміна змінних. Перехід до полярної системи координат в подвійному інтегралі.

5. Потрійний інтеграл: означення, геометр. і механ. зміст. Теорема існування. Властивості потрійного інтегралу. Означ. циліндричної області та обчисл. потр. інт. для неї.

6. Заміна змінних в потр. інт. Перехід до циліндричної сист. коорд. Перехід до сферичної сист. коорд.

7. Застосування кратних інтегралів: площа плоскої фігури, площа поверхні, об'єм тіла, моменти інерції, статичні моменти і координати центра мас.

1. Обчислити невласні інтеграли:
$\int_0^{+\infty} e^{-3x}dx, \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}, \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{4+x^2}, \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2xdx}{x^2+1}, \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

2. Дослідити на збіжність
інтеграли: $\int_1^{+\infty} \frac{xdx}{1+x^7}, \int_0^{+\infty} \frac{(x^2-1)dx}{1+4x^3+x^5}, \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt[3]{(1-x)^5}}.$

3. Перейти від подвійного інтегралу $\iint_D f(x,y)dxdy$ до повторного для наступних множин D:

а) трикутник з вершинами A(1; 2), B(4; 5), C(0; 2);

б) D обмежена лінією: $x^2+y^2=4.$ (в декартовій та полярній системах координат);

в) D обмежена лінією: $x^2+y^2=2x, y \le x.$ (в декартовій та полярній системах координат).

4. Обчислити: а) $\iint_D (3x+2xy+5)\,dxdy$, D обмежена лініями

$y = x, y = 2x, x \in [1; 2]$;
б) $\iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy, D: 3 \le x^2 + y^2 \le 4, 0 \le y \le x$.
5. Перейти від потрійного інтегралу $\iiint_D \quad f(x, y, z) dxdydz$ до повторного для наступних множин D:
а) тетраедр, обмежений площинами: 2x+y+3z=6, x=0, y=0, z=0;
б) D обмежена поверхнями: $x^2 + y^2 \le 4, x^2 + y^2 + z^2 = 16$ (в декартовій та циліндричній системах координат);
в) D обмежена поверхнями: $x^2 + y^2 = z^2, x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \ge 0$. (в декартовій, циліндричній та сферичній системах координат).
6. Обчислити: а) $\iiint_D \quad 3x^2 y dxdydz$, D обмежена поверхнями, $x^2 + y^2 = z, y = 0, x = 1, y = x, z \ge 0$;
б) $\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz, D: x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ (в першому октанті).
7. Знайти центр ваги півкруга $x^2 + y^2 \le 1, y \ge 0$.
8. Знайти момент інерції відносно осі Oz циліндра $x^2 + y^2 \le 1, z \in [0; 1]$.

Домашнє завдання

1. Обчислити невласні інтеграли:
$\int_0^{+\infty} \quad \frac{arctgx}{1+x^2} dx, \int_1^e \quad \frac{dx}{x\ln^2 x}, \int_{-\infty}^{-1} \quad \frac{dx}{x^2}, \int_0^2 \quad \frac{dx}{\sqrt{2-x}}, \int_2^{+\infty} \quad \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}},$

$$\int\limits_0^1 \quad \ln x dx, \int\limits_{-1}^2 \quad \frac{dx}{x}.$$

2. Дослідити на збіжність інтеграли:
$\int_1^{+\infty} \quad \frac{xdx}{\sqrt{x^7}-1}, \int_0^{+\infty} \quad \frac{(x^2+x-3)dx}{x^5+2x^4+x}, \int_1^2 \quad \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$.
3. Перейти від подвійного інтегралу $\iint_D \quad f(x, y) dxdy$ до повторного для наступних множин D:
а) трикутник з вершинами A(0; 1), B(0; 4), C(4; 4);

б) D обмежена лінією: $x^2 + y^2 = R^2$. (в декартовій та полярній системах координат);
в) D обмежена лінією: $x^2 + y^2 = 4x$. (в декартовій та полярній системах координат).
4.Обчислити:
а) $\iint_D (x^2 - 2xy)\, dxdy$, D обмеж. лініями $y = x^2, y = 2x$;
б) $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dxdy, D: x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq y \leq x\sqrt{3}$.
5. Перейти від потрійного інтегралу $\iiint_D f(x, y, z) dxdydz$ до повторного для наступних множин D:
а) тетраедр, обмежений площинами: x - y+2z=6, x=0, y=0, z=0ж
б) D обмежена поверхнями: $x^2 + y^2 \leq 4, x^2 \geq y^2, z = 0, z = 2$ (в декартовій та циліндричній системах координат);
в) D обмежена поверхнями: $x^2 + y^2 = z, z = 4$ (в декартовій, та циліндричній системах координат).
6.Обчислити: а) $\iiint_D x^2 dxdydz$, D обмежена поверхнями, $y^2 = z, x = 0, x = 1, y = 1, z = 0$;
б) $\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2} dxdydz, D: R^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4R^2$.
7. Знайти момент інерції круга відносно його діаметра.
8. Знайти центр ваги конуса $x^2 + y^2 \leq z^2, z \in [0; 1]$.

Заняття 8. Криволінійні інтеграли.

1.Криволінійний інтеграл першого роду: означення, геометр. і механічний зміст, теорема існування, властивості.
2.Обчислення для кривих, заданих явно, параметрично.
3.Застосування криволінійного інтегралу першого роду.
4.Криволінійний інтеграл II роду: означення, механ. зміст, теорема існування, властивості.
5.Обчислення для кривих, заданих явно, параметрично.
6.Формула Гріна. Площа плоскої фігури через криволінійний інтеграл.
7.Умова незалежності інтегралу від шляху інтегрування. Потенціальне векторне поле. Знаходження потенціалу.

1.Обчислити: $\int_l (x+y)\,dl, l: y = x-1, x \in [0;1]$;

$\int\limits_l \quad ydl, l: y^2 = 2x$, відрізанапараболою$x^2 = 2y$;

$\int\limits_l \quad (x^2+y^2)^3 dl, l$: коло$x = a\text{cos}t, y = a\text{sin}t$.

2. Знайти масу четвертини еліпса в першому квадранті, якщо густина в кожній точці дорівнює ординаті точки$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$.

3. Обчислити:$\int_l \quad ydx + xdy, l$: коло$x = R\text{cos}t, y = R\text{sin}t$в першій чверті.

4. Обчислити роботу сили: а)$\vec{F} = y\vec{\imath} + (y-x)\vec{\jmath}$вздовж параболи $y = 1 - x^2$від точки А(-1; 0) до точки В(0; 1),

б)$\vec{F} = (x+y^2)\vec{\imath} + (y-x)\vec{\jmath} + z\vec{k}$вздовж відрізка АВ, де А(-1; 0; 1), В(0; 1; 2).

5.Обчислити безпосередньо та за формулою Гріна $\oint_l (1-x^2)\,ydx + x(1+y^2)dy, l$: коло$x^2+y^2 = R^2$за годинниковою стрілкою.

6. Обчислити за формулою Гріна $\oint_l \quad 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2dy, l$:контур трикутника з вершинами А(1; 1), В(2; 2), С(1; 3).

7. Довести, що інтеграл не залежить від шляху інтегрування та обчислити його$\int_A^B (2xy - 5y^3)\,dx + (x^2 - 15xy^2 + 6y)dy$,

якщо а) А(0; 0), В(2; 3); б) А(-1; 2), В(2; -3).

8. Знайти функцію u та обчислити $\int_{(0;0)}^{(\pi;\pi)} \quad du$, якщо:

а)$du = (2x+3y)dx + (3x-4y)dy$;

б) $du = (1 - e^{x-y} + \text{cos}x)dx + (e^{x-y} + \text{cos}y)dy$.

9. Чи буде силове поле $\vec{F} = (x^4 + 4xy^3)\vec{\imath} + (6x^2y^2 - 5y^4)\vec{\jmath}$потенціальним? Якщо так, то знайти його потенціал і обчислити роботу цього поля по переміщенню матеріальної точки з точки А(-2; -1) до точки В(3; 0).

Домашнє завдання

1.Обчислити: $\int_l \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, l- відрізок ОА, О(0; 0), А(1; 2);

$\int_l \frac{ydl}{\sqrt{x}}, l: y^2 = x^3$,від точки О(0; 0) до точки В(1; 1);

$$\int_l \sqrt{2y}dl, l: \text{першааркациклоїди} \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

2. Знайти момент інерції однорідного кола (γ=1) $x^2 + y^2 = a^2$ відносно його діаметра. (Відп. πa^3.)

3. Обчислити: $\int_l (x^2 - 2xy)\,dx + (2xy + y^2)dy, l: y = x^2, x \in [1; 2]$;

$$\int_l -ydx + xdy, l: \text{циклоїда} x = a(t - sint), y = a(1 - \cos t), \text{першаарка}.$$

4. Обчислити роботу сили:

а) $\vec{F} = (y - z)\vec{i} + (z - x)\vec{j} + (x - y)\vec{k}$ вздовж одного витка гвинтової лінії $x = \cos t, y = \sin t, z = t/(2\pi)$ в напрямку зростання параметра *t*;

б) $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ в додатному напрямку вздовж еліпса $x = a\cos t, y = b\sin t$.

5.Обчислити безпосередньо та за формулою Гріна $\oint_l -x^2ydx + xy^2dy, l: \text{коло} x^2 + y^2 = R^2$ за годинниковою стрілкою.

6. Довести, що інтеграл не залежить від шляху інтегрування та обчислити його $\int_A^B x^2dx + y^2dy$, якщо А(0; 0), В(1; 4).

7. Знайти функцію *u* та обчислити $\int_{(0;0)}^{(\pi;-\pi)} du$, якщо:

а) $du = (\sin y - y\sin 2x)dx + (x\sin y + \cos^2 x + 1)dy$;

б) $du = (e^{x+y} + \cos(x - y))dx + (e^{x+y} - \cos(x - y) + 2)dy$.

8. Чи буде силове поле $\vec{F} = 2xy\vec{i} + x^2\vec{j}$ потенціальним? Якщо так, то знайти його потенціал і обчислити роботу цього поля по

переміщенню матеріальної точки вздовж еліпса $x^2/4 + y^2 = 1$від точки А(2; 0) до точки В(0; 1).

Заняття 9. Диференціальні рівняння (ДР) І порядку. Основні типи.

1.Означення ДР і його порядку. Загальний вигляд ДР першого порядку і ДР першого порядку, розв’язаного відносно похідної. ДР І-го порядку в симетричній формі. Означення розв’язку ДР. Означення інтегралу ДР. Означення інтегральної кривої ДР. .Що таке інтегрування ДР?
2.Вигляд задачі Коші для ДР І-го пор. Геометр. зміст зад. Коші для ДР І- го пор. Теорема про існування та єдиність розв. задачі Коші.
3.Поле напрямків. Ізокліни.
4.Означення загального розв’язку ДР. Означення часткового розв’язку ДР. Означення заг. і частк. інтегралу ДР. Означення особливого розв'язку. В яких точках площини, згідно теореми про єдиність розв'язку, може проходити графік особливого розв'язку?
5. Означення ДР, розв’язних в квадратурах. Означення ДР з відокремлюваними змінними. Як впізнавати рівняння з відокремлюваними змінними розв’язані відносно похідної? Як впізнавати рівняння з відокремлюваними змінними в симетричній формі? Як розв’язувати ДР з відокремлюваними змінними? Рівняння, що зводяться до ДР з відокремлюваними змінними. Метод розв'язання.
6.Означення однорідної функції n-го степеня і приклад. Означення однорідного ДР І-го порядку. Як впізнавати однорідні ДР І-го пор. в симетр. формі? В якому вигляді можна подати однорідне ДР І-го порядку, розв’язане відносно похідної? Метод розв’язання однорідного ДР І-го порядку.
1. Розв’язати ДР з відокремлюваними змінними:

$$xyy' = 1 - x^2; y' = 10^{x+y}; (x + xy^2)dx + (y + x^2y)dy = 0, y(0) = 1.$$

2. а) Моторний човен рухається в спокійній воді зі швидкістю v=10км/год. На повному ходу його мотор був виключений, і через t=20 с швидкість човна зменшилась до v_1= 6 км/год. Вважаючи, що сила опору води пропорційна швидкості, знайти швидкість човна через 2 хвилини після виключення мотору. Знайти відстань, пройдену човном за 1 хвилину після виключення мотору.
б) Знайти рівняння лінії, що проходить через точку (2;3) та має таку властивість, що відрізок будь-якої її дотичної, розміщений між осями координат, ділиться пополам точкою дотику.

3. Розв'язати однорідні ДР:$y' = \frac{y^2}{x^2} - 2; xy' = y\ln\frac{y}{x}; (x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0, y(2) = 1.$

Домашнє завдання

1. Розв'язати ДР з відокремлюваними змінними:
$$tgx\sin^2 ydx + \cos^2 xctgydy = 0; y'\sin x = y\ln y, y(\pi/2) = e.$$

2. а) Швидкість охолодження тіла пропорційна різниці між температурами тіла та середовища. Тіло з температурою 25°С поміщено в термостат (температура в ньому підтримується 0°С). Коли тіло охолодиться до 10°С, якщо через 20 хвилин воно охолодилось до 20°С? (Відп.≈82хв.)
б) Знайти рівняння лінії, для якої квадрат довжини відрізка, що відтинається дотичною від осі ординат, дорівнює добутку координат точки дотику. (Відп. $x = ce^{\pm 2\sqrt{\frac{y}{x}}}$.)

3. Розв'язати однорідні ДР:$y' = \frac{y^2}{x^2} - 2; xy' = y - x; xydy = (x^2 + y^2)dx; (xy' - y)arctg\frac{y}{x} = x, y(1) = 0.$

Заняття 10. Лінійні ДР та рівняння Бернуллі. Типи ДР вищих порядків, що допускають пониження порядку.

1.Означення лінійного ДР І-го порядку. Означення лінійного однорідного і лінійного неоднорідного ДР І-го порядку. В чому полягає метод варіації довільної сталої для ЛНДР І-го порядку? В чому полягає метод Бернуллі? Означення рівняння Бернуллі.

Яким методом розв’язують рівняння Бернуллі? Як можна перетворювати рівняння для перевірки приналежності їх до лінійного чи Бернуллі?
2.Як виражають в прикладних задачах швидкість зміни функції Q відносно деякої величини P? Який геометричний зміст похідної.
3.ДР в повних диференціалах. Як їх впізнавати? Інтегруючий множник. Знаходження інтегруючого множника, залежного тільки від одної змінної.
4.ДР вищих порядків. Вигляд задачі Коші. Фізичний зміст задачі Коші для ДР 2-го порядку. Геометричний зміст задачі Коші для ДР 2-го порядку. Теореми про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для ДР n-го порядку. Загальний розв. і загальний інтеграл ДР n-го порядку. Розв'язування задачі Коші при відомому заг. розв. Крайові задачі для ДР вищих порядків.
5.ДР виду$y^{(n)} = f(x)$.Пониження порядку в ДР виду$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$.Пониження порядку в ДР виду$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$.Пониження порядку в ДР, що є повними похідними, або стають ними після домноження на інтегруючий множник.
1. Розв’язати ДР, які є лінійними або Бернуллі: $y' - \frac{y}{x} = \sqrt{x}; xy' + y = y^2 \ln x; x' - \frac{x}{y} = \ln y, x(1) = 2;$
2.Визначити типи ДР I-го пор.: $a)(x + y)y' = x(\ln y - \ln x);$ $b)y' = 2xy + x^3; c)xy' + y = y^2; d)x' - xtgy = \frac{1}{\cos y};$ $e)e^{x-y}y' = 1; f)y' = \frac{y}{x}(1 + \arcsin\frac{y}{x}); g)y' = \frac{x}{x^2 \sin y - 5y}.$
3. Розв’язати ДР в повних диференціалах, або які мають інтегруючий множник, залежний тільки від одної змінної: $(x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0;$
$(x\cos y - y\sin y)dy + (x\sin y + y\cos y)dx = 0.$
4. Розв’язати ДР, що допускають пониження порядку:
$$y'' = x + \sin x; y'' = \frac{y'}{x} + x; y''tgx = y' + 1; 2y'^2 = (y - 1)y'';$$

$yy'' - y'^2 = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2; y'' = \ln x$.
5. Розв'язати однорідні ДР відносно *y* та його похідних, або ДР, які є точними похідними: $xyy'' + xy'^2 - yy' = 0; \frac{y'''}{y''} - \frac{3y'y''}{1+y'^2} = 0; y'' + x^3y' + \frac{y'^2}{y} = 0(\mu = \frac{1}{y'})$.

Домашнє завдання

1. Розв'язати ДР, які є лінійними або Бернуллі: $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = x^3$; $y' - y\cos x = \sin 2x, y(0) = -1; xy' + y = 2y^2\ln x, y(1) = 1/2$.
2. Визначити типи ДР І-го пор.: $a)(1 + e^{2x})y^2dy = e^xdx$; $b)xy'\sin\frac{y}{x} + x = y\sin\frac{y}{x}; c)xy' = y + x^2\cos x$; $d)y' - \frac{y}{x-1} = \frac{y^2}{x-1}; e)(y^2 - 6x)y' + 2y = 0$.
3. Розв'язати ДР в повних диференціалах, або які мають інтегруючий множник, залежний тільки від одної змінної: $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy = 0; (x + y^2)dx = 2xydy$.
4. Розв'язати ДР, що допускають пониження порядку: $xy'' = y', y(2) = 2, y'(2) = 3; x^2y'' = 1$; $y'' = 2 - y; y'' + \frac{y'}{x} = 0; y'' = 9e^{3x}, y(0) = 1, y'(0) = 3$.
5. Розв'язати однорідні ДР відносно *y* та його похідних, або ДР, які є точними похідними: $x(yy'' + y'^2) + yy' = 0; yy'' - y'^2 = 0(\mu = 1/y^2)$.

Заняття 11. Лінійні ДР вищих порядків.

1.Лінійні ДР n-го порядку: однорідні та неоднорідні. Теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші для ЛНДР.
2.Властивості розв'язків ЛОДР. Означення лінійно залежних і лінійно незалежних функцій на відрізку. Приклади лінійно залежних і лінійно незалежних функцій на відрізку.
3.Визначник Вронського. Теорема про вронськіан лінійно залежних

функцій. Теореми про вронськіан лінійно незалежних розв'язків ЛОДР n-го порядку. Теорема про структуру загального розв'язку ЛОДР n-го порядку. Теорема про знаходження вронськіана для ЛОДР n-го порядку. Формула Остроградського-Ліувілля. Застосування формули Остроградського-Ліувілля для знаходження загального розв'язку ЛОДР II-го порядку при відомому одному лінійно незалежному розв'язку.

4.Комплекснозначна функція дійсного аргументу. Її неперервність та диференційованість. Функція $e^{\lambda x}, \lambda \in \mathbb{C}$,та її властивості. Показникова форма комплексного числа.

5.Складання характеристичного многочлена для ЛОДР n-го порядку з постійними коефіцієнтами. Лінійно незалежні розв'язки ЛОДР з ПК, що відповідають дійсному однократному і s-кратному та комплексному однократному і s-кратному кореням характеристичного рівняння.

6.Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння n-го порядку. Властивості розв'язків. Принцип суперпозиції для ЛНДР. Метод варіації довільної сталої для ЛНДР n-го порядку.

1. Розв’язати лінійні однорідні ДР з постійними коефіцієнтами (ЛДР з ПК): $y'' + 5y' - 6y = 0; y'' - y = 0; y'' + 9y' + 20y = 0;$
$y'' + 4y' + 4y = 0, y(0) = y'(0) = 2; y''' - y'' - y' + y = 0.$

2. $k_1 = k_2 = k_3 = 3$, $k_4 = k_5 = 2+i$, $k_6 = k_7 = 2 - i$ — корені характеристичного рівняння деякого ЛОДР з ПК. Записати його загальний розв’язок.

3. Розв'язати лінійні ДР: однорідні II-го порядку, знаючи один з розв’язків, або неоднорідні, методом варіації довільних сталих:
$x^2y'' + 3xy' + y = 0, y_1 = 1/x\,; xy'' + y' = 0, y_1 = 1; xy'' + y' = x^2;$
$y'' + y' = tgx; y'' + 2y' + y = e^{-x}/x.$

Домашнє завдання

1. Розв’язати лінійні однорідні ДР з постійними коефіцієнтами (ЛДР з ПК): $y'' - 9y = 0; y'' - y' = 0; y'' + y = 0; y'' - 2y' + 2y = 0;$
$y'' + 4y' + 13y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -1; y''' - 13y'' + 12y' = 0;$
$y^{IV} - 4y'' = 0; y^{IV} + y = 0.$

2. $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, $k_4 = k_5 = i$, $k_6 = k_7 = -i$ — корені характеристичного рівняння деякого ЛОДР з ПК. Записати його загальний розв’язок.

3. Розв'язати лінійні ДР: однорідні II-го порядку, знаючи один з розв’язків, або неоднорідні, методом варіації довільних сталих:
$x^2y'' - xy' - 3y = 0, y_1 = x^3; x^2y'' - 4xy' + 6y = 0, y_1 = x^2;$
$x^2y'' - 4xy' + 6y = x^4 - x^2; y'' - 2y' + y = e^x/x.$

Заняття 12. ЛНДР з ПК зі спеціальними правими частинами.

1.Вигляд часткового розв'язку для ЛНДР з ПК із правими частинами видів$f(x) = P_n(x)e^{ax}, f(x) = P_n(x)e^{ax}\cos bx + Q_m(x)e^{ax}\sin bx$.
2.Означення системи ДР, її розв'язку. Система ДР в нормальній формі, її порядок. Задача Коші для системи ДР в нормальній формі, теорема про існування та єдиність розв'язку.
3.Лінійна система (однорідна та неоднорідна) в нормальній формі. Вигляд ЛНДР та ЛОДР n-го порядку. Матричний запис лінійної системи диференціальних рівнянь в нормальній формі.
4.Інтегрування систем ДР методом виключення.
5.Власні вектори і власні числа матриці. Метод розв'язування лінійних однорідних систем з постійними коефіцієнтами в нормальній формі з допомогою характеристичного рівняння. Те ж саме для неоднорідних систем.
1.Вказати вигляд часткових розв’язків ЛНДР з ПК зі спеціальними правими частинами:$y'' - 4y' + 4y = (2x - 3)e^{3x}$;
$y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}; y'' - 2y' = x^2 - x; y'' - 16y = 3\cos 4x - \sin 4x$;
$y'' + 16y = \cos 4x; y'' + y = x^2 \sin x; y'' - 2y' + 5y = e^x x\cos 2x$.
2.Розв’язати ЛНДР з ПК зі спеціальними правими частинами:
$2y'' + y' - y = 2e^x; y'' - 6y' = 2x^2 - x + 3, y(0) = y'(0) = 2$;
$y'' - 5y' + 6y = \sin 4x + 2\cos 4x; y'' + y = \sin x, y(0) = y'(0) = 1$;
$y'' - y' = 2x - 1 - \cos x$.
3.Визначити тип та розв’язати систему ДР двома методами:
$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = x + 2y; \end{cases} \begin{cases} x' = 4x + 6y, \\ y' = 2x + 2y; \end{cases} \begin{cases} x' = e^{3t} - y, \\ y' = 2e^{3t} - x, \end{cases} x(0) = 2, y(0) = -2.$
4. Знайти закон руху матеріальної точки з масою m, що рухається по прямій під дією сили, направленої до початку координат і прямо пропорційній відстані точки до початку координат (з коефіцієнтом пропорційності a), якщо опір середовища відсутній, але на точку діє ще зовнішня сила вздовж прямої руху$F = A\sin\omega t$.
(Відп.$x = c_1\cos\beta t + c_2\sin\beta t + \dfrac{A}{a - m\omega^2}\sin\omega t$, якщо$\omega \neq \beta = \sqrt{\dfrac{a}{m}}$;
$x = c_1\cos\beta t + c_2\sin\beta t - \dfrac{At}{2\beta\omega}$, якщо$\omega = \beta$.)

Домашнє завдання

1.Вказати вигляд часткових розв'язків ЛНДР з ПК зі спеціальними правими частинами:$y'' - 5y' + 6y = (5x + 3)e^{3x}$; $y'' - 5y' + 6y = x^2 - 5x + 3$; $y'' - 5y' + 6y = e^x$;
$y'' - 2y' - 8y = 8\cos 4x$; $y'' - 2y' + 10y = x\sin 3x$.
2.Розв'язати ЛНДР з ПК зі спеціальними правими частинами:
$y'' - y = e^x$; $y'' - 2y' + 2y = x^2, y(0) = 1, y'(0) = 0$;
$y'' - y' + 2y = 8\sin 2x$; $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \sin x$;
$y'' - 4y' + 4y = x + e^{2x}$.
3.Визначити тип та розв'язати систему ДР двома методами:
$\begin{cases} x' = -3x - y, \\ y' = x - y; \end{cases}$ $\begin{cases} x' = -9y, \\ y' = x; \end{cases}$ $\begin{cases} x' = y + t, \\ y' = x - t, \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 0$.

Заняття 13. Стійкість розв'язків ДР та їх систем.

1.Стійкі многочлени. Необхідна умова стійкості многочлена. Критерій Рауса-Гурвіца стійкості многочлена.
2.Означення стійкості за Ляпуновим розв'язку ДР та систем ДР. Означення асимптотичної стійкості розв'язку ДР та систем ДР. Незбурений та збурений розв'язки. Зведення задачі про стійкість розв'язку лінійних ДР та їх систем до задачі про стійкість нульового розв'язку відповідних однорідних ДР та їх систем.
3.Теореми про стійкість, асимптотичну стійкість та нестійкість розв'язків ЛДР з ПК через корені характеристичного рівняння. Те ж саме для систем ЛДР з ПК.
1. Дослідити розв'язок задачі Коші на стійкість за означенням:
$y' + 6y = 0, y(0) = 0$.
2.Дослідити стійкість розв'язків ДР з допомогою характеристичних рівнянь: $y'' - 7y' + 12y = 0$; $y'' + 7y' + 12y = 0$; $y'' + 5y' = 0$;
$y^V + y^{IV} + 7y^{III} + 4y'' + 10y' + 3y = 0$;
$y^{(4)} + 2y^{(3)} + 4y'' + 2y' + 5y = 0$; $y^{III} + \alpha y'' + 2y' + y = 0$.При яких α розв'язки останнього ДР є стійкими?
3.Дослідити стійкість розв'язків систем ДР:
$\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = 2x + 3y; \end{cases}$ $\begin{cases} x' = 2x - y + 2z, \\ y' = 5x - 3y + 3z, \\ z' = -x - 2z. \end{cases}$

Домашнє завдання

1. Дослідити розв'язок задачі Коші на стійкість за означенням:
$ty' - y = 0, y(0) = 0$.

2.Дослідити стійкість розв'язків ДР з допомогою характеристичних рівнянь: $y'' + 4y = 0; y'' + 4y' + 5y = 0; y'' + 5y' = 0;$
$y^{V} + 5y^{IV} + 10y^{III} + 11y'' + 7y' + 2y = 0;$
$y^{(4)} + 4y^{(3)} + 3y'' + 3y' + y = 0; y^{III} + 6y'' + 11y' + 6y = 0.$

3.Дослідити стійкість розв'язків систем ДР:

$$\begin{cases} x' = 3x - 5y, \\ y' = 2x - 3y; \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x - 2y, \\ y' = 2y - 3x; \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x - y - z, \\ y' = x + y - 3z, \\ z' = x - 5y - 3z. \end{cases}$$

Заняття 14. Ряди.

1.Означення числового ряду, частинних сум, збіжності і суми ряду. Властивості рядів. Геометричний ряд. Необхідна умова збіжності ряду.
2.Ряди з додатними членами. Властивість частинних сум дод. ряду. Ознаки порівняння, Д'аламбера , радикальна, та інтегральна Коші. Узагальнено гармонічні ряди.
3.Знакопочережні ряди. Ознака Лейбніца. Знакозмінні ряди: абсолютна і умовна збіжність. Ознака Вейєрштрасса. Узагальнені ознаки Д'аламбера і радикальна Коші. Теореми про перестановку членів абсолютно і умовно збіжних рядів.
4.Функціональні ряди: означення, область збіжності. Рівномірна збіжність, мажорованість. Їх зв'язок. Теореми про рівномірно збіжні ряди.
5.Степеневі ряди: означення, центр степ.ряду. Теорема Абеля, радіус та інтервал збіжності. Теореми про рівномірну збіжність почленне інтегрування та диференціювання степ. рядів. 6.Розклад функції в ряд Тейлора і Маклорена. Необхідна і достатня умова збіжності ряду Тейлора. Достатня умова збіжності ряду Тейлора. Ряди Маклорена для функцій ex, sinx, cosx, ln(1+x),(1+x)□. Застосування степеневих рядів до розв'язування диф. рівнянь та їх систем.
Демидович. Збірник задач з мат. аналізу для ВТУЗІВ, стор. 282
1. Дослідити ряди на збіжність та знайти їх суми за означенням:
∑_(n=1)^∞ 1/(n(n+1)),1+1/9+1/81+...,1-1+1-1+....
2. Дослідити ряди на збіжність за необхідною ознакою, за ознаками

порівняння чи за інтегральною ознакою:
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+n-1}{3n^3+2n^2-2n+5}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n\sqrt{n}-n}{n^3+1}$.
$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{(n+1)\ln^3(n+1)}$.
3. Дослідити ряди на збіжність за ознаками Даламбера чи радикальною Коші: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n2^n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^2(n+2)}, \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-3}{7n+1}\right)^n, \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-3}{2n+1}\right)^{n^2+1}$.
4. Дослідити знакозмінні ряди на абсолютну та умовну збіжність: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2n^2-1}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{n!}$.
5. Знайти центри, інтервали, радіуси та області збіжності степе- невих рядів: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n n}{n^2+3}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n!}, \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2x-3)n}{4n+1}\right)^n$.
6. Розкласти наступні функції в ряд Маклорена, використовуючи відомі розклади: $\sin\sqrt{x}, \frac{e^{x^2}-1}{x}, \sqrt[4]{16-x}$.
7. Обчислити наближено вирази з точністю до 0,01: $\cos 0{,}5, \int_0^1 \frac{e^{-x}-1}{x}\,dx, \int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx, \int_0^{1/2} \frac{dx}{1-x^7}$.
8. Знайти три ненульові доданки розкладу в ряд Тейлора розв’язку диференціального рівняння:
$y'=y+x^2, y(0)=-2; y''+xy=0, y(0)=0, y'(0)=1$.
Домашнє завдання
1. Дослідити ряди на збіжність та знайти їх суми за означенням:
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{2^n}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^{n+1}}{3^n}$.
2. Дослідити ряди на збіжність за необхідною ознакою, за ознаками порівняння чи за інтегральною ознакою: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2+1}{2n+1}, \sum_{n=1}^{\infty} \ln n, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^3+2n+5}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n\sqrt{n}+3}$,
$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{n-2}{n^2\sqrt{n}}, \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(n+3)\ln^2(n+3)}$.
3. Дослідити ряди на збіжність за ознаками Даламбера чи радикальною Коші: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 2^{n-1}}{(n+1)3^n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n5^n}{(n+2)!}, \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n, \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.
4. Дослідити знакозмінні ряди на абсолютну та умовну

збіжність:∑_(n=0)^∞ 〖(-1)〗^(n+1)/(n+1),∑_(n=1)^∞ (〖(-1)〗^n n)/2^n .
5. Знайти центри, інтервали, радіуси та області збіжності степе- невих рядів:∑_(n=1)^∞ x^n/n^2 ,∑_(n=1)^∞ (〖(x+5)〗^n n!)/〖100〗^n ,∑_(n=1)^∞ 〖(((x-1)n)/(2n-1))〗^n.
6. Розкласти наступні функції в ряд Маклорена, використовуючи відомі розклади: (cosx^2-1)/x^2 ,5/(3+x^2),√(9-x).
7. Обчислити наближено вирази з точністю до 0,01: sin1,∫_0^1▒〖e^(-x^2) dx〗,∫_0^(1⁄2) √(1-x^2) dx,∫_0^(1⁄2)▒〖ln(1-x^2)dx〗.
8. Знайти три ненульові доданки розкладу в ряд Тейлора розв’язку диференціального рівняння:
y'=2y+x-1,y(0)=0;y''+2/x y'+y=0,y(0)=1,y'(0)=0.

Заняття 15. Розклад функцій в ряд Фур’є. Інтеграл та перетворення Фур'є.

1. Ортогональна і ортонормована системи функцій на відрізку. Її власт. Ряди Фур'є по ортонормованій і по тригонометричній системах функцій. Достатня умова збіжності ряду Фур'є.
2.Формули для розкладу парних і непарних функцій в ряд Фур'є, розкладу по синусах чи по косинусах. Розклад функцій, заданих на відрізку [-*l*; *l*].
3.Теореми про рівномірну збіжність, почленне диференціювання та інтегрування. Середнє квадратичне відхилення функцій на відрізку. Оптимальність частинних сум ряду Фур'є. Нерівність Бесселя та рівність Парсеваля. Комплексна форма ряду Фур'є.
4. Фізичний зміст розкладу функції в ряд Фур'є. Спектр функції, його зображення.
5. Перехід від ряду до інтегралу Фур'є.
6. Різні форми інтегральної формули Фур'є.
7. Перетворення Фур'є та спектральна щільність. Умови їх існування.
8. Властивості перетворення Фур'є

1.Розкласти в ряд Фур’є функції. Зобразити графіки функцій та сум їх рядів Фур'є: $f(x)=\begin{cases}1, -\pi<x<0,\\ -1, 0<x<\pi;\end{cases}$ $f(x)=x^2, x\in(-\pi;\pi)$; $f(x)=\pi/4, x\in(0;\pi)$, по синусах і знайти $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$, $1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}-\ldots$; $f(x)=|x|, x\in(-1;1)$.

2.Знайти перетворення Фур'є наступних функцій. Побудувати графіки функцій та їх зображень: $f(t)=\begin{cases}1, 0\le t\le a,\\ 0, t\notin[0;a];\end{cases}$ $f(t)=\begin{cases}\cos t, -\pi/2\le t\le\pi/2,\\ 0, t\notin[-\pi/2;\pi/2].\end{cases}$

Домашнє завдання

1. Розкласти в ряд Фур'є функції. Зобразити графіки функцій та сум їх рядів Фур'є: $f(x)=\begin{cases}0, -\pi<x<0,\\ x, 0<x<\pi;\end{cases}$ $f(x)=e^x, x\in(-\pi;\pi)$; $f(x)=x, x\in(0;\pi)$, по синусах і по косинусах та знайти $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$; $f(x)=1, x\in(0;l)$, по синусах та по косинусах.

2.Знайти перетворення Фур'є наступних функцій. Побудувати графіки функцій та їх зображень: $f(t)=\begin{cases}t, -1\le t\le 1,\\ 0, t\notin[-1;1];\end{cases}$ $f(t)=\begin{cases}\sin t, 0\le t\le\pi,\\ 0, t\notin[0;\pi].\end{cases}$

Заняття 16. Перетворення Лапласа.

1.Операційне числення: основні означення. Теореми про область визначення зображення та про взаємну однозначність перетворення Лапласа.
2.Властивості перетворення Лапласа: лінійність, зміна масштабу аргументу оригіналу. Зміщення аргументу зображення та оригіналу. Властивості перетворення Лапласа: диференціювання та інтегрування зображення та оригіналу.
3. Таблиця основних оригіналів та їх зображень.
4. Означення згортки. Згортка оригіналів.
5.Операційний метод розв'язування ЛДР з ПК та їх систем. Знаходження функції Гріна та теореми розкладання.
6.Дельта-функція. Решітчасті функції. Дискретне перетворення Лапласа решітчастої функції. Властивості дискретного перетворення

Лапласа. Застосування дискретного перетворення Лапласа до розв'язування різницевих рівнянь.

1.Знайти за означенням зображення функції $f(t) = e^{2t}$, $t \geq 0$.

2.Чи може функція $F(p)=1/\sin p$ бути зображенням деякого оригіналу?

3.Чи є функція оригіналом $f(t) = e^{t^2}$, $t \geq 0$?

4.Знайти зображення оригіналів: $3t^4+t+2 - 2\sin 3t + 5\mathrm{ch}\, t + 3e^{-t}$; $\cos 2t \cos 7t$; $\cos^2 3t$; $t\, \mathrm{sh}\, 3t$; $t^2 \cos t$; $e^{3t} \sin t$; $e^{-t}\, \mathrm{sh} 5t$; $\int_0^t \tau sh 3\tau d\tau$; $\int_0^t \tau^2 \cos\tau d\tau$; $\int_0^t \tau sh 3\tau d\tau$; $\frac{e^t-1}{t}$; $\frac{sht}{t}$; $\sin(t-b)\chi(t-b)$; $ch(t-3)\chi(t-3)$; $\begin{cases} t, 0 \leq t \leq 1, \\ 1, 1 \leq t \leq 2, \\ 0, t \notin [0;2]; \end{cases}$ $|\sin t|\chi(t)$; $\int\limits_0^t e^{t-\tau}\sin\tau d\tau$; $\int\limits_0^t (t-\tau)^2 ch\tau d\tau$.

5.Знайти оригінали для зображень: $\frac{2p-5}{p^2+4p+3}$; $\frac{3-p}{4p^2+4p-3}$; $\frac{2p+5}{p(p-1)(p+5)}$; $1-\cos(1/p)$.

6.Розв'язати операційним методом задачі Коші для ДР або їх систем: $x' + x = e^{-t}, x(0) = 1$; $x'' + x = 2\cos t, x(0) = 0, x'(0) = -1$; $\begin{cases} x' = -x + y + e^t, \\ y' = x - y + e^t, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1$.

Домашнє завдання

1.Знайти за означенням зображення функції $f(t) = t$, $t \geq 0$.

2.Чи може функція $F(p)= p$ бути зображенням деякого оригіналу?

3.Чи є функція оригіналом $f(t) = \sin t^2$, $t \geq 0$?

4.Знайти зображення оригіналів: $5t^3+2t+3 - 2\mathrm{sh}\, t + 5\cos 7t + 2e^{-2t}$; $\cos t \sin t$; $\sin^2 3t$; $t \sin t$; $e^{2t}\cos 2t$; $e^{-3t}\mathrm{ch} t$; $\int_0^t \tau\sin\tau d\tau$; $\int_0^t e^{2\tau}\cos 2\tau d\tau$; $\frac{1-\cos t}{t}$; $\frac{\sin t}{t}$; $(t-2)\sin(t-2)\chi(t-2)$; $e^{t-3}\chi(t-3)$; $\begin{cases} \sin t, 0 \leq t \leq \pi, \\ 0, t \notin [0;\pi]; \end{cases}$ $\int\limits_0^t \cos(t-\tau)\sin\tau d\tau$; $\int\limits_0^t (t-\tau)\cos 2\tau d\tau$.

5.Знайти оригінали для зображень: $\frac{3p+1}{p^2+6p+10}$; $\frac{3+2p}{p^2+4p}$; $\frac{2p^2+5p}{(p+1)(p-2)^2}$; $(1+p^2)^{-1/2}$.

6.Розв'язати операційним методом задачі Коші для ДР або їх систем:

$$x' + 2x = 5, x(0) = 2; x'' + 5x = 3 + t, x(0) = 0, x'(0) = 1;$$

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = -x, \end{cases} x(0) = 1, y(0) = -1.$$

Література:

1. Вища математика: Збірник задач. Ч.1. За загальною редакцією Овчинникова П. П.. К. : Техніка. 2003. 279 с.
2. Вища математика: Збірник задач. Ч.2. За загальною редакцією Овчинникова П. П.. К. : Техніка. 2003. 376 с.
3. Вища математика. Збірник задач : навч. посіб. Ч. 2 : Диференціальне та інтегральне числення / Тевяшев А. Д. та ін. Харків : СМІТ, 2010. 330 с.
4. Вища математика із застосуванням інформаційних технологій : підручник / Іващенко В. П. та ін. Дніпропетровськ, 2013. 425 с.
5. Вища та прикладна математика : навч. посіб. / С. І. Резніков, О. П. Зінькевич, В. М. Сафонов, Ю. С. Резнікова. Київ : НУХТ, 2016. 343 с.
6. Гой Т. П., Махней О. В. Диференціальні рівняння : навчальний посібник. Івано-Франківськ : Сімик, 2012. 352 с.
7. Голубков І. Г., Клименко В. А., Жиленко Т. І. Вища математика : конспект лекцій : у 2 ч. Суми : Сумський державний університет. 2018. Ч. 1. 143 с.
8. Голубков І. Г., Клименко В. А., Жиленко Т. І. Вища математика : конспект лекцій : у 2 ч. Суми : Сумський державний університет. 2018. Ч. 2. 116 с.
9. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика. К. : А. С. К., 2001. 648 с.
10. Вища математика: Збірник задач. За редакцією Дубовика В. П., Юрика І. І. К. : А. С. К., 2001. 480 с.
11. Пасічник Я. А. Вища математика : підручник. Острог : Видавництво Національного університету «Острозька академія», 2021. 432 с.

12. Посібник для розв'язування задач з вищої математики : навч. посіб. Ч. 2 : Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної / Н. С. Бутенко, О. Г. Нерух, Н. М. Ружицька, Н. П. Стогній ; М-во освіти і науки України, Харків. нац. ун-т радіоелектроніки. Харків : ХНУРЕ, 2018. 268 с.
13. Пушак Я. С., Лозовий Б. Л. Теорія ймовірностей і елементи математичної статистики : навчальний посібник. Львів : «Магнолія 2006». 2007. 276 с.
14. Скуратовський Р. В. Вища математика з прикладами і задачами. Підручник. К.: Національна академія управління, 2021. 232 с.