Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та природокористування
Навчально-науковий інститут кібернетики, інформаційних технологій та інженерії
Кафедра вищої математики

04-02-73М

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

та завдання до практичних занять та самостійного вивчення навчальної дисципліни **«Вища математика»** з розділів **«Вступ до математичного аналізу»** та **«Диференціальне числення функцій однієї змінної»** для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою спеціальності **275 «Транспортні технології»**, денної та заочної форм навчання

Рекомендовано
науково-методичною
радою з якості ННМІ
Протокол № 4 від 31.12.2024 р.

Рівне – 2025

Методичні вказівки та завдання до практичних занять та самостійного вивчення навчальної дисципліни **«Вища математика»** з розділів **«Вступ до математичного аналізу»** та **«Диференціальне числення функцій однієї змінної»** для здобувачів вищої освіти бакалаврського рівня за освітньо-професійною програмою спеціальності **275 «Транспортні технології»** денної та заочної форм навчання. [Електронне видання] / Іващук Я. Г., Самолюк І. В. – Рівне : НУВГП, 2025. – 38 с.

Укладачі:
Іващук Я. Г., к. ф.-м. н., доцент кафедри вищої математики;
Самолюк І. В., асистент кафедри вищої математики.

Відповідальний за випуск: Тадеєв П. О., д. пед. н., професор, завідувач кафедри вищої математики.

Керівник групи забезпечення спеціальності:
275 «Транспортні технології»: Хітров І. О., к. т. н., доцент.

Голова науково-методичної ради
з якості ННМІ проф. Марчук М. М.

Попередня версія методичних вказівок 04-02-36

© Я. Г. Іващук,
І. В. Самолюк, 2025
© НУВГП, 2025

Зміст

Вступ

Вивчення вступу до математичного аналізу і диференціального числення функцій однієї змінної є одним із способів розвитку логічного і алгоритмічного мислення студентів, оволодіння основними методами дослідження та розв'язування математичних задач, вироблення уміння самостійно розширювати свої знання з математики і застосовувати математичний апарат до аналізу та розв'язання практичних задач.

Вища математика спрямована на формування загальнонаукових, інструментальних, загально-професійних та спеціалізовано-професійних компетенцій.

1. Вступ до математичного аналізу

Нехай функція $y=f\left(x\right)$ визначена в деякому околі X точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0.

Число A називають границею функції $y=f\left(x\right)$ в точці x_0, якщо для довільної збіжної до x_0 послідовності $\left\{x_n\right\}$, де $x_n \in X$, $x_n \neq x_0$, послідовність значень функції $\left\{f\left(x_n\right)\right\}$ має границю, яка дорівнює числу A, і записують

$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=A.$$

Нехай функція $y=f\left(x\right)$ визначена на нескінченому проміжку $\left(-\infty;+\infty\right)$.

Число A називають границею функції $y=f\left(x\right)$ при $x\to\infty$ і пишуть $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(x\right)=A$, якщо для довільного числа $\varepsilon>0$ існує таке число $M=M\left(\varepsilon\right)>0$, що при $\left|x\right|>M$ виконується нерівність

$$\left|f\left(x\right)-A\right|<\varepsilon.$$

Функція $y=f\left(x\right)$ при $x\to x_0$ називається нескінченно великою функцією, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=\infty$.

Функція $y=f\left(x\right)$ при $x\to x_0$ називається нескінченно малою функцією, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=0$.

Основні теореми про границі.

Теорема 1. (про границю суми, добутку і частки). Якщо кожна з функцій $f\left(x\right)$ і $\varphi\left(x\right)$ має скінченну границю в точці x_0, то в цій точці існують також границі функцій $f\left(x\right)\pm\varphi\left(x\right)$,

$f(x)\cdot\varphi(x)$, $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ (остання за умови, що $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\neq 0$) і справедливі формули

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\pm\varphi(x)\right)=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}\varphi(x);$$

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\varphi(x)=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\varphi(x);$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}.$$

Наслідки з теореми 1:

Н-1.1 $\lim\limits_{x\to x_0}c\,f(x)=c\lim\limits_{x\to x_0}f(x),\quad c\in R$;

Н-1.2 $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^n=\left[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\right]^n$, зокрема

$\lim\limits_{x\to x_0}x^n=\lim\limits_{x\to x_0}x_0^n=x_0^n,\quad n\in N$;

Н-1.3 Якщо $f(x)$ елементарна функція, то

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f\left(\lim_{x\to x_0}x\right)=f(x_0).$$

Теорема 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Теорема 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$,

де e - ірраціональне число, наближене значення якого, з точністю до 10^{-15} дорівнює 2,718281828459045.

Наслідки з теореми 3:

Н-3.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k_1}{x}\right)^{k_2 x}=e^{k_1 k_2}$, де k_1 і k_2 - дійсні числа;

Н-3.2 $\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e$.

При обчисленні границь, пов'язаних з числом e, часто застосовують таке твердження: якщо існують границі $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)$, то існує також границя

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{\varphi(x)} = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}.$$

2.1. Обчислення границь

Приклад 1.1. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^5+9x+7}{3x^6+x^3+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-5x+1}{2x^2+3x-7}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{3x^2-5x-2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$;

Розв'язання. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^5+9x+7}{3x^6+x^3+1}$.

Границі чисельника і знаменника існують і границя знаменника не дорівнює нулю, тому можна користуватися теоремою 1:

$$\lim_{x\to 1}\frac{4x^5+9x+7}{3x^6+x^3+1} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}\left(4x^5+9x+7\right)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^6+x^3+1\right)} =$$

$$= \frac{4\lim\limits_{x\to 1}x^5+9\lim\limits_{x\to 1}x+\lim\limits_{x\to 1}7}{3\lim\limits_{x\to 1}x^6+\lim\limits_{x\to 1}x^3+\lim\limits_{x\to 1}1} = \frac{4+9+7}{3+1+1} = 4.$$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-5x+1}{2x^2+3x-7}$.

При $x\to\infty$ маємо невизначеність виду $\dfrac{\infty}{\infty}$, тому поділимо чисельник і знаменник на x^2, а потім скористаємося відповідними властивостями границь. Матимемо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2-5x+1}{2x^2+3x-7}=\lim_{x\to\infty}\frac{6-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}}=\left|\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}=0,\\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0\end{array}\right|=\frac{6}{2}=3.$$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{3x^2-5x-2}$.

Тут застосовувати теорему про границю частки не можна, тому що границя чисельника дорівнює нулю і границя знаменника дорівнює нулю, тобто маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$. Розкладемо чисельник і знаменник на лінійні множники, скориставшись формулою: $ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$, де x_1 і x_2 - нулі квадратного тричлена. Отже,

$$2x^2+x-10=2\left(x-2\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)=\left(x-2\right)\left(2x+5\right),$$

$$3x^2-5x-2=3\left(x-2\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)=\left(x-2\right)\left(3x+1\right).$$

Оскільки при знаходженні границі функцій в точці $x=2$ розглядаються значення $x\neq 2$, то даний дріб можна скоротити на $x-2$, тому

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{3x^2-5x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x-2\right)\left(2x+5\right)}{\left(x-2\right)\left(3x+1\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(2x+5\right)}{\left(3x+1\right)}=\frac{9}{7}.$$

4) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$.

При $x\to 4$ маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$.

Помноживши чисельник і знаменник на вираз

$\left(2+\sqrt{x}\right)\left(3+\sqrt{2x+1}\right)$ та скористаємося формулою

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ отримаємо:

$$\lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}=\lim_{x\to 4}\frac{\left(2-\sqrt{x}\right)\left(2+\sqrt{x}\right)\left(3+\sqrt{2x+1}\right)}{\left(2+\sqrt{x}\right)\left(3+\sqrt{2x+1}\right)\left(3-\sqrt{2x+1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(3+\sqrt{2x+1}\right)}{\left(2+\sqrt{x}\right)(9-2x-1)}=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(3+\sqrt{2x+1}\right)}{\left(2+\sqrt{x}\right)(8-2x)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(3+\sqrt{2x+1}\right)}{\left(2+\sqrt{x}\right)(8-2x)}=\lim_{x\to 4}\frac{\left(3+\sqrt{2x+1}\right)}{2\left(2+\sqrt{x}\right)}=\frac{6}{2\cdot 4}=\frac{3}{4}.$$

Приклад 1.2. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{1-5x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x}{arctg\,2x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}(6x+5)\left(\ln(3x+2)-\ln(3x-1)\right)$.

Розв'язання. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}=\left|\frac{0}{0},1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{8\sin 2x\sin 2x}{2x\cdot 2x}=8\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2=8\cdot 1^2=8.$$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{1-5x}$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{1-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{2x+3}-1\right)^{1-5x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{2x+3}\right)^{1-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2x+3}{-4}}\right)\right)^{\frac{2x+3}{-4}\cdot\frac{-4}{2x+3}\cdot\frac{1-5x}{1}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{20x-4}{2x+3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{20-\frac{4}{x}}{2+\frac{3}{x}}}=e^{10}.$$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x}{arctg2x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{6x}{arctg2x}=\left|\begin{matrix} arctg2x=t, \quad 2x=tgt, \\ x=\frac{1}{2}tgt,\ \text{при}\ x\to 0 \quad t\to 0\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{3tgt}{t}=3\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t\cos t}=3\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{\cos t}=3.$$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}(6x+5)\big(\ln(3x+2)-\ln(3x-1)\big)$.

$$\lim_{x\to\infty}(6x+5)\big(\ln(3x+2)-\ln(3x-1)\big)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}(6x+5)\ln\frac{3x+2}{3x-1}=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{6x+5}=$$

$$=\ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{3x-1}\right)^{6x+5}=\ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x-1}{3}}\right)^{\frac{3x-1}{3}\cdot\frac{3}{3x-1}\cdot(6x+5)}=$$

$$=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{3x-1}{3}}\right)\right)^{\frac{3x-1}{3}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{18x+15}{3x-1}}=\ln e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{18x+15}{3x-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{18x+15}{3x-1}\cdot\ln e=\lim_{x\to\infty}\frac{18+\frac{15}{x}}{3-\frac{1}{x}}=\frac{18}{3}=6.$$

2. Диференціальне числення функцій однієї змінної

Нехай задано неперервну функцію $y=f\left(x\right)$ з областю визначення $D\left(y\right)$. Надаємо аргументу x довільного приросту Δx такого, щоб точка $x+\Delta x$ також належала $D\left(y\right)$. Знайдемо приріст функції: $\Delta y=f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)$.

Похідною функції $y=f\left(x\right)$ в точці x називається границя відношення приросту функції Δy в цій точці до приросту аргументу Δx, коли приріст аргументу прямує до нуля, тобто

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}.$$

Похідну функції $y=f\left(x\right)$ в точці x позначають ще й такими символами: y'_x; $\frac{dy}{dx}$; $\frac{df}{dx}$; $f'\left(x\right)$.

Нехай аргументом функції f є функція $u=u\left(x\right)$, яка має похідну $u_x{}'$ в точці x. Тоді $y=f\left(u\left(x\right)\right)$ - складена функція з проміжним аргументом u і кінцевим аргументом x.

Похідна складеної функції обчислюється за формулою:

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x.$$

Правила диференціювання:

1. $C'=0$**;** **2.** $\left(C\cdot u\right)'=C\cdot u'$**;** **3.** $\left(u\pm v\right)'=u'\pm v'$**;**

4. $(uv)' = u'v + uv'$ **;** **5.** $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ **;**

6. $y = f(x)$, обернена функція $x = \varphi(y)$, тоді $y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$;

7. Функція задана параметрично рівняннями: $y = y(t)$, $x = x(t)$, тоді

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Таблиця похідних

1. $(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$ **;** **2.** $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2} \cdot u'$ **;**

3. $\left(\dfrac{a}{u}\right)' = -\dfrac{a}{u^2} \cdot u'$ **;** **4.** $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$ **;**

5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$ **;** **6.** $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$ **;**

7. $(tg\, u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$ **;** **8.** $(ctg\, u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$ **;**

9. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$ **;**

10. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$ **;**

11. $(arctg\, u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$ **; 12.** $(arcctg\, u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$ **;**

13. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$ **;** **14.** $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$ **;**

15. $(e^u)' = e^u \cdot u'$ **;** **16.** $(a^u)' = a^u \cdot \mathbf{ln}\, a \cdot u'$ **.**

2.1. Зразки розв'язання завдань

Приклад 2.1. Знайти похідні функцій:

а) $y=\sin^3 x$;   б) $y=e^x \cdot tg 2x$;   в) $y=\dfrac{x^5}{2^x}$;

г) $y=\ln ctg\, x^4$;   д) $x=a\cos t^2$, $y=a\sin t^2$.

Розв'язання. а) $y'=3\sin^2 x\cdot\cos x$

б) $y'=\left(e^x\right)' tg 2x+e^x\cdot\left(tg 2x\right)'=e^x\cdot tg 2x+\dfrac{2e^x}{\cos^2 2x}$;

в) $y'=\dfrac{5x^4\cdot 2^x-x^5\cdot 2^x\ln 2}{\left(2^x\right)^2}=\dfrac{5x^4-x^5\ln 2}{2^x}$;

г) $y'=\dfrac{1}{ctg\, x^4}\cdot\left(-\dfrac{1}{\sin^2 x^4}\right)\cdot 4x^3=$

$=-\dfrac{4x^3}{\cos x^4\sin x^4}=-\dfrac{8x^3}{\sin 2x^4}$;

д) $y'_x=\dfrac{\left(a\cos t^2\right)'_t}{\left(a\sin t^2\right)'_t}=\dfrac{2at\cos t^2}{-2at\sin t^2}=-ctg\, t^2$.

Щоб знайти похідну неявно заданої функції, потрібно взяти похідну по x від обох частин рівності $F\left(x,y\right)=0$, вважаючи, що y є функцією від x, а потім одержане рівняння розв'язати відносно похідної y'_x. Похідна неявно заданої функції виражається через незалежну змінну x і саму функцію y .

Приклад 2.2. Знайти похідну y'_x, якщо

$x^2+y^2-2y+3x=1.$

Розв'язання. $2x+2y\,y'-2y'+3=0$, $\Rightarrow$

$$y'(2y-2)=-2x-3, \quad \Rightarrow \; y'=\frac{-2x-3}{2y-2}=\frac{2x+3}{2-2y} \; .$$

Похідні вищих порядків знаходять за формулами:

1) якщо функція $y=f(x)$, то

$y''=\left(y'(x)\right)'$, $y'''=\left(y''(x)\right)'$ і т. д.;

2) якщо функція задана параметрично, то

$$y''_{xx}=\frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}, \text{ або } \; y''_{xx}=\frac{y''_{tt}\cdot x'_t-y'_t\cdot x''_{tt}}{\left(x'_t\right)^3}, \; y'''_{xxx}=\frac{\left(y''_{xx}\right)'_t}{x'_t} \; .$$

З означення похідної $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ і властивостей нескінченно малих величин випливає рівність:

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'+\alpha(x,\Delta x)$, де $\alpha(x,\Delta x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$, звідки

$$\Delta y=y'\cdot\Delta x+\alpha(x,\Delta x)\cdot\Delta x \; .$$

Перший з доданків лінійний відносно Δx, а другий доданок — нескінченно мала вищого порядку, ніж Δx, тому що

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha(x,\Delta x)\cdot\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(x,\Delta x)=0 \; .$$

Цей доданок не є лінійним відносно Δx, тобто містить Δx в степені вищому від одиниці. Таким чином, перший доданок є головною частиною приросту функції.

Диференціалом dy функції $y=f(x)$ в точці x називається головна , лінійна відносно Δx, частина приросту функції f в цій точці:

$dy=f'(x)\cdot\Delta x$, або $dy=f'(x)\cdot dx$, оскільки $dx=\Delta x$.

Для достатньо малих значень Δx приріст $\Delta y\approx dy$.

Дістанемо формулу наближеного обчислення значень функції:

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\cdot\Delta x \; .$$

Приклад 2.3. Користуючись поняттям диференціала, знайти наближене значення функції

$$y=\sqrt[5]{\frac{2-x}{2+x}} \text{ в точці } x=0,15.$$

Розв'язання. Щоб скористатися формулою наближеного обчислення візьмемо за $x=0$, а $\Delta x=0,15$. Тоді

$$y'=\frac{1}{5}\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{-\frac{4}{5}}\cdot\left(\frac{2-x}{2+x}\right)'=\frac{1}{5}\sqrt[5]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^4}\cdot\frac{(-4)}{(2+x)^2};$$

$$y'(0)=-\frac{1}{5}, \qquad dy=-\frac{1}{5}\cdot 0,15=-0,03.$$

Остаточно, маємо

$$y(0,15)\approx y(0)+dy=1-0,03=0,97.$$

Значення $y(0,15)\approx 0,97039$ з точністю до 10^{-5}.

Бачимо, що ми отримали результат з точністю до 10^{-3}.

Точки локального максимуму і локального мінімуму називаються точками локального екстремуму. Точки, в яких похідна $f'(x)$ дорівнює нулю або не існує, називаються критичними точками.

Необхідна умова екстремуму:

в точках екстремуму похідна $f'(x)$ дорівнює нулю або не існує.

Достатні умови екстремуму функції:

I. Нехай функція f неперервна в деякому околі точки x_0.

1) якщо при переході через точку x_0 похідна змінює знак з + на —, то в точці x_0 функція досягає максимуму;

2) якщо при переході через точку x_0 похідна змінює знак з — на +, то в точці x_0 функція досягає мінімуму;

3) якщо при переході через точку x_0 похідна не змінює знаку, то екстремуму немає.

II. Нехай в критичній точці x_0 функція f двічі диференційована (це означає, що $f'(x_0)=0$) і в околі точки x_0 існує друга неперервна похідна, причому $f''(x_0)\neq 0$.

Якщо $f''(x_0)<0$, то x_0 — точка локального максимуму; якщо $f''(x_0)>0$, то x_0 — точка локального мінімуму.

Інтервали опуклості і вгнутості знаходять з умови.

Нехай функція $y=f(x)$ є двічі диференційованою на $(a;b)$, тоді:

1) якщо на $(a;b)$ $f''(x)<0$, то крива $y=f(x)$ там опукла;

2) якщо на $(a;b)$ $f''(x)>0$, то крива $y=f(x)$ там вгнута.

Якщо $f''(x_0)=0$, або не існує, але $f'(x_0)$ існує і при цьому, друга похідна $f''(x)$ змінює знак при переході через точку x_0, то точка $(x_0; f(x_0))$ є точкою перегину кривої .

Точка перегину відділяє опуклу частину кривої від вгнутої, або навпаки.

Пряма лінія називається асимптотою для кривої $y=f(x)$, якщо відстань від точки М, що лежить на кривій, до цієї прямої прямує до нуля при русі точки М вздовж якої-небудь гілки кривої в нескінченність.

Є три види асимптот: вертикальні, горизонтальні і похилі:

1) якщо хоча б одна із односторонніх границь функції f в точці x_0 дорівнює нескінченності, тобто точка x_0 є точкою

розриву першого роду функції, то пряма $x = x_0$ — вертикальна асимптота;

2) якщо $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = A$, то пряма $y = A$ — горизонтальна асимптота (права при $x \to +\infty$ і ліва при $x \to -\infty$);

3) якщо існують границі

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k_1, \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - k_1 x \right) = b_1,$$

то пряма $y = k_1 x + b_1$ — права похила асимптота.

Якщо існують границі

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = k_2, \qquad \lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - k_2 x \right) = b_2,$$

то пряма $y = k_2 x + b_2$ — ліва похила асимптота.

Загальне дослідження функцій та побудову їх графіків зручно виконувати, наприклад, за такою схемою:

1) знайти область існування функції;

2) дослідити функцію на періодичність, парність і непарність;

3) знайти точки розриву та дослідити їх;

4) знайти асимптоти графіка функції;

5) знайти інтервали монотонності, точки локальних екстремумів та значення функції в цих точках;

6) знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину, обчислити значення функції в цих точках;

7) знайти точки перетину графіка функції з координатними осями.

8) побудувати графік функції, враховуючи дослідження, проведені в п. 1) – 7).

Приклад 2.4. Дослідити та побудувати графік функції

$$y = \frac{x^3}{1 - x^2}.$$

Розв'язання. 1) Область існування – вся числова вісь, крім точок $x = \pm 1$.

2) Функція не періодична. Оскільки

$$f(-x)=\frac{(-x)^3}{1-(-x)^2}=-\frac{x^3}{1-x^2}=-f(x),$$

то функція непарна, тому досліджуватимемо її лише для $x\geq 0$.

3) Функція в точці $x=1$ має розрив другого роду і

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}\frac{x^3}{1-x^2}=-\infty,\quad \lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}\frac{x^3}{1-x^2}=+\infty.$$

4) З п. 3) випливає, що пряма $x=1$ – права вертикальна асимптота кривої. Аналогічно, пряма $x=-1$ буде лівою вертикальною асимптотою кривої. Дослідимо криву на наявність похилої асимптоти. Оскільки

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{(1-x^2)\cdot x}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x-x^3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\frac{1}{x^2}-1}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{1-x^2}-(-1)\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{1-x^2}=0,$$

то при $x\to\pm\infty$ задана крива має похилу асимптоту $y=-x$

Горизонтальних асимптот немає, оскільки

$$\lim_{x\to\pm\infty} y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{1-x^2}=\pm\infty.$$

5) Похідна $y'=\dfrac{x^2\cdot(3-x^2)}{(1-x^2)^2}$ дорівнює нулю при $x=0$ і $x=\pm\sqrt{3}$ та не існує в точках $x=\pm 1$, але останні не входять в область визначення, тому критичними точками функції є точки $x_1=-\sqrt{3}$, $x_2=0$, $x_3=+\sqrt{3}$.

На інтервалі $(0;+\infty)$ маємо:

якщо $x\in(0;1)$, то $f'(x)>0$ – функція зростає;

якщо $x \in \left(1; \sqrt{3}\right)$, то $f'(x) > 0$ – функція зростає;

якщо $x \in \left(\sqrt{3}; +\infty\right)$, то $f'(x) < 0$ – функція спадає;

в точці $x_3 = +\sqrt{3}$ функція має локальний максимум:
$y_{\max} = f\left(\sqrt{3}\right) \approx -2,6$;

відповідно в точці $x_1 = -\sqrt{3}$ функція має локальний мінімум:
$y_{\min} = f\left(-\sqrt{3}\right) \approx 2,6$.

6) Знаходимо другу похідну: $y'' = \dfrac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(1-x^2\right)^3}$.

Похідна $f''(x) = 0$ при $x = 0$ і не існує при $x = \pm 1$.

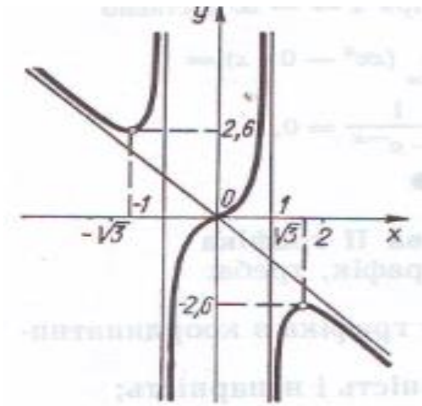
Оскільки точки $x = \pm 1$ не входять в область визначення, то $x = 0$ – єдина критична точка. Маємо:

якщо $x \in (-1; 0)$, то $f''(x) < 0$ – крива опукла;

якщо $x \in (0; 1)$, то $f''(x) > 0$ – крива вгнута;

якщо $x \in (1; +\infty)$, то $f''(x) < 0$ – крива опукла;

точка $O(0; 0)$ – точка перегину.



7) Якщо $x = 0$, то $y = 0$, тому графік перетинає осі координат в точці $O(0; 0)$.

8) Враховуючи проведене дослідження і непарність функції, будуємо графік (рис. 1).

Рис. 1.

3. Завдання для самостійної роботи

Завдання 3.1. Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопіталя.

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x^2-2x}{5x^3-3x^2+xx+4}$;

б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{3x^2-4x-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{2x+1}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5-3x^2+5}{3x^5+4x^2-x}$;

б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{7-x}-\sqrt{7+x}}{\sqrt{7}\,x}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 4x+\sin 2x}{6x}$;

д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{2x}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^6-x+5}{x^6+3x^2+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{3x^2-8x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 6x}{7x\sin 3x}$;

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5-4x^2+x}{2x^5+2x-3}$;

б) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{3x^2-14x-5}{x^2-7x+10}$;

в) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg\,x-\sin x}{x^2\sin x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\ln\dfrac{3x-1}{3x+2}$.

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-2x^2+4x}{2x^3+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2+6x-16}$;

в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{\sqrt{3x+10}-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\sin7x\,ctg\,5x$;

д) $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{5}{x}+2}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^4+x^2+x}{x^4+3x+2}$

б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-7x+6}{2x^2+5x-7}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+16}-4}{\sqrt{x^2+1}-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin^2(x-1)}{3x^2-6x+3}$;

д) $\lim\limits_{x\to0}(1+2\sin x)^{\frac{5}{\sin x}}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^4+6x^2+5}{4x^4-5x^2+3x}$;

б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x^2-x-14}{x^2+8x+12}$;

в) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos^3x}{4x\sin x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{2x-3}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{6x^2+4x+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-6x+5}{2x^2-11x+5}$;

в) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\,tg\,3x}{1-\cos6x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\frac{3}{\cos x}}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+9}{7x^2+10x+5}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2-7x+6}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{2x^2-72}{x^2-7x+6}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x-1}{3x\sin x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty} 3x\left[\ln(x+4)-\ln x\right]$.

10. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4+10x^2-3}{2x^5-x^3+8}$;

б) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{3x^2+10x+3}{2x^2+5x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{3x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 4x-\cos 6x}{3x\sin 6x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x}{1+2x}\right)^{-4x}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^5-4x^2+1}{2x^5-5x^2-x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2+x-3}{x^2+x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg^2 4x}{x\sin 3x}$;

12. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^5+1}{3x^5-2x+3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{3x^2-14x-5}{x^2-6x+5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{5x+4}-3}{\sqrt{2x-1}-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{arctg\, 3x}{4x}$;

д) (**11**) $\lim\limits_{x\to\infty} (x+3)\left[\ln(2+4x)-\ln(1+4x)\right]$;

д) (**12**) $\lim\limits_{x\to 2} (7-3x)^{\frac{x}{2x-4}}$.

13. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^6-3x^2-2}{2x^6+4x+5}$;

б) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3x^2-10x+3}{x^2-2x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{2x+1}-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin 2x\cdot ctg^2 5x$;

д) $\lim\limits_{x\to 2} (3x-5)^{\frac{x^2}{x-2}}$;

14. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-4x^2+5}{3x^3+2x^2-x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2x^2-13x-7}{x^2-9x+14}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} x\,ctg\,7x$;

д) $\lim\limits_{x\to 3} (3x-8)^{\frac{2}{x-3}}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3+3x^2-1}{2x^3-3x+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-3x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4+3x}-\sqrt{4-3x}}{7x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{x\sin 3x}$;

16. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4-3x^2+2}{5x^4-3x-2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-5x+6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{2x-1}-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 3x}{5x}$;

д) (**15**) $\lim\limits_{x\to\infty} (2x+3)\left[\ln(x+2)-\ln(x+3)\right]$;

д) (**16**) $\lim\limits_{x\to\infty} (x+5)\left[\ln(2x-3)-\ln(2x)\right]$.

17. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{9x^5-4x^4+2}{3x^5-2x-1}$;

18. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-4x+1}{x^3-2x^2-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{2x^2-11x+5}{x^2-7x+10}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+x}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos5x}{x\,tg\,2x}$;

д) $\lim\limits_{x\to2}(2x-3)^{\frac{x^2}{x-2}}$.

б) $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{2x^2-9x-18}{x^2-7x+6}$;

в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{3x+10}-4}{x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\sin5x\cdot ctg\,3x$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}3x\left[\ln(2x)-\ln(2x-3)\right]$.

19. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-3x^2+1}{2x^5-2x+3}$;

б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x}{arctg\,6x}$;

в) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{\sqrt{4x-3}-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{3x^2-17x-28}{x^2-9x+14}$;

20. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{2x^3-5x^2-x}$;

б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2-x+1}{2x^2+5x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{arctg\,2x}{4x}$;

г) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x-2}-1}$;

д) (**19**) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)\left[\ln(x-1)-\ln(x+1)\right]$;

д) (**20**) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+1)\left[\ln(x+3)-\ln(x)\right]$.

21. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^3-4x^2+1}{6x^3+3x+2}$;

б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3x^2-8x-3}{2x-6}$;

22. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+14x^2}{1+2x+7x^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^2-25}{x^2+8x+15}$;

в) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x-7}{\sqrt{2x+11}-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{6x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 2x\cdot ctg\, x$;

г) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1-\sqrt{x-3}}{2-\sqrt{x}}$;

д) (**21**) $\lim\limits_{x\to 1}\left(3x-2\right)^{\frac{x}{x-1}}$;

д) (**22**) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x-7\right)\left[\ln\left(x+4\right)-\ln\left(x\right)\right]$.

23. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+6x-5}{5x^2-x-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2+x}-2}{x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{54x}{arctg\, x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3x\right)^{\frac{1}{x}}$.

24. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3-2x+1}{5x^3+4x+3}$;

б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{7x^2+23x+6}{x^2+8x+15}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{4x}\right)^{x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin^2 5x}{tg^2 3x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x+1}\right)$.

25. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{2x^3+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

26. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+1}{2x^3+5x^2-x}$;

б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+3x+1}{2x^2+5x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^x$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg\,2x}{4x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$; г) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x-2}-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x^2}$. д) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+1)\left[\ln(x+3)-\ln(x)\right]$.

27. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x+1}{5x^2-x-1}$; **28.** а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+7x+10}{2x^2+9x+10}$;

в) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{3x^2-14x-5}{x^2-2x-15}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 5x}{x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\,ctg\,2x}{\sin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{1-\sqrt{x-4}}{2-\sqrt{2x-6}}$;

д) (**27**) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+2)\left[\ln(x+1)-\ln(x)\right]$;

д) (**28**) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-3)\left[\ln(x-2)-\ln(x+1)\right]$.

29. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4-5x^2-3}{5x^4-2x^3-4x}$; **30.** а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x+1}{2x^3+3x^2+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{2x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2x^2-7x-4}{2x^2-13x+20}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\ x-\cos^5 x}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\arcsin x}$;

г) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{5+x}-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3-\sqrt{x+11}}{2-\sqrt{x+6}}$;

д) (**29**) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)\left[\ln(2x+1)-\ln(2x-1)\right]$;

д) (**30**) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-5)\left[\ln(x-3)-\ln x\right]$.

Завдання 3.2. Знайти похідні $\dfrac{dy}{dx}$ заданих функцій.

1. а) $y=\sqrt[3]{x^4+5x}$;

б) $y=\dfrac{1+tg\,x}{1-tg\,x}$;

в) $y=x^{\frac{2}{x}}$;

г) $y=arctg\sqrt{x}-\sqrt{x}$;

д) $x\sin y-y\cos x=0$;

е) $\begin{cases}x=t-\ln t,\\ y=3t^2-2t^3\end{cases}$.

2. а) $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{2+x^3}}-\sqrt{2+x}$;

б) $y=\sin^3 2x$;

в) $y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$;

г) $y=x^{e^x}$;

д) $e^{xy}-x^2+y^2=0$;

е) $\begin{cases}x=t+\ln\cos t,\\ y=t-\ln\sin t.\end{cases}$

3. а) $y=\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$;

б) $y=e^{1+\ln x}$;

в) $y = arctg\,\dfrac{1}{x}$; г) $y = x^{\arcsin x}$;

д) $y \sin x + \cos x = \cos y$; е) $\begin{cases} x = 2t - \sin 2t, \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$

4. а) $y = \sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x}}$; б) $y = tg \ln \sqrt{x}$;

в) $y = 3^{\cos x}$; г) $y = x^{e-x}$;

д) $\cos(x-y) - 2x + 4y = 0$; е) $\begin{cases} x = t + 0,5 \sin 2t, \\ y = \cos^2 t. \end{cases}$

5. а) $y = x + \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}$; б) $y = \sin\sqrt{1+x^2}$;

в) $y = \ln ctg \sqrt[3]{x}$; г) $y = x^{\frac{1}{x^2}}$;

д) $xe^y + ye^y = xy$; е) $\begin{cases} x = t^3 + 2t \quad , \\ y = t^2 + 8t - 1 \quad . \end{cases}$

6. а) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}$; б) $y = \cos \ln^2 x$;

в) $y = (e^{\sin x} - 1)^2$; г) $y = 2x^{\sqrt{x}}$;

д) $\cos(xy) = \dfrac{y}{x}$; е) $\begin{cases} x = 0,25t^4 + 0,5t^2 + t \\ y = 0,5t^2 + \dfrac{1}{t} \quad . \end{cases}$

7. а) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2x-1}} + \dfrac{5}{\sqrt[4]{(x^3+2)^3}}$; б) $y = \cos \ln^2 x$;

в) $y=(e^{\sin x}-1)^2$; г) $y=2x^{\sqrt{x}}$;

д) $\cos(xy)=\dfrac{y}{x}$; е) $\begin{cases} x=\arcsin(t^2-1), \\ y=\arccos 2t. \end{cases}$

8. а) $y=x\sqrt[3]{\dfrac{2}{1+x}}$; б) $y=\dfrac{1+\sin 3x}{1-\sin 3x}$;

в) $y=2^{\frac{1-x}{1+x}}$; г) $y=(\ln x)^x$;

д) $xy+\ln y-2\ln x=0$; е) $\begin{cases} x=t^2+t+1, \\ y=t^3+t. \end{cases}$

9. а) $y=\sqrt[3]{1+x\sqrt{x+3}}$; б) $y=\sqrt{1+\ln^2 x}$;

в) $y=e^{\frac{1}{x^2}}$; г) $y=(\sin x)^{\cos x}$;

д) $e^{x+y}=\sin\dfrac{y}{x}$; е) $\begin{cases} x=ctg\, t, \\ y=\dfrac{1}{\cos^2 t}. \end{cases}$

10. а) $y=\dfrac{\sqrt{1+3x^2}}{2+3x^2}$; б) $y=e^{x^2}\cos^3(2x+3)$;

в) $y=x\,arctg^3 5x+\ln tg\, x$; г) $y=(\sin 3x)^{\sqrt{x}}$;

д) $y\ln x-x\ln y=x+y$; е) $\begin{cases} x=\dfrac{2-t}{2+t^2}, \\ y=\dfrac{t^2}{2+t^2} \end{cases}$

11. а) $y=2\sqrt{4x+3}-\dfrac{3}{\sqrt{x^3+x+1}}$; б) $y=(e^{\cos x}+3)^2$;

в) $y=\ln\sin(2x+5)$; г) $y=x^{x^x}$;

д) $tg\left(\dfrac{y}{x}\right)=5x$; е) $\begin{cases} x=\cos\left(\dfrac{t}{2}\right), \\ y=t-\sin t. \end{cases}$

12. а) $y=x^2\sqrt{1-x^2}$; б) $y=\dfrac{4\sin x}{\cos^2 x}$;

в) $y=arctg\, e^{2x}$; г) $y=x^{\frac{1}{x}}$;

д) $x-y+arctg\, y=0$; е) $\begin{cases} x=t^3+8t, \\ y=t^5+2t. \end{cases}$

13. а) $y=x\sqrt{\dfrac{(1+x^2)}{(1-x)}}$; б) $y=\dfrac{1}{tg^2 2x}$;

в) $y=\arcsin\sqrt{1-3x}$; г) $y=x^{\ln x}$;

д) $y\sin x=\cos(x-y)$; е) $\begin{cases} x=\cos\left(\dfrac{t}{2}\right), \\ y=t-\sin t. \end{cases}$

14. а) $y=\dfrac{(3+6x)}{\sqrt{x+5x^2}}$; б) $y=x^2\cos x$;

в) $y=x^m\ln x$; г) $y=x^{-tg\, x}$;

д) $\frac{y}{x} = arctg\left(\frac{x}{y}\right)$; е) $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$

15. а) $y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$; б) $y = \frac{\sin^2 x}{\left(2 + 3\cos^2 x\right)}$;

в) $y = \frac{\left(x \ln x\right)}{x - 1}$; г) $y = \left(arctg\, x\right)^{\ln x}$;

д) $\left(e^x - 1\right)\left(e^y - 1\right) - 1 = 0$; е) $\begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = \cos t. \end{cases}$

16. а) $y = \sqrt[3]{\frac{1 + x^2}{1 - x^2}}$; б) $y = \left(\frac{1}{2}\right) tg^2\, x + \ln \cos x$;

в) $y = arctg \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}$; г) $y = \left(x + x^2\right)^x$;

д) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$; е) $\begin{cases} x = t + \ln \cos t, \\ y = t - \ln \sin t. \end{cases}$

17. а) $y = 3\sqrt[3]{x^5 + 5x^4 - \frac{5}{x}}$; б) $y = \ln \sqrt{\frac{\left(1 - \sin x\right)}{\left(1 + \sin x\right)}}$

;

в) $y = \arccos \frac{1}{x}$; г) $y = \left(\sin x\right)^{\ln x}$;

д) $x - y + a \sin y = 0$; е) $\begin{cases} x = \ln x \quad , \\ y = \left(\frac{1}{2}\right)\left(t + \frac{1}{t}\right) \end{cases}$

18. а) $y=\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$; б) $y=\sqrt{1+\ln^2 x}$;

в) $y=\ln\arcsin\sqrt{1-x^2}$; г) $y=x^{arctg\,x}$;

д) $y\sin x+\cos(x-y)=\cos y$; е) $\begin{cases} x=tg\,t+ctg\,t, \\ y=2\ln ctg\,t. \end{cases}$

19. а) $y=\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^3+1}$; б) $y=\dfrac{1}{3}tg^3 x-tg\,x+x$;

в) $y=arctg\sqrt{\dfrac{3-x}{x-2}}$; г) $y=(\ln x)^x$;

д) $x-y+e^y\,arctg\,x=0$; е) $\begin{cases} x=at\cos t, \\ y=at\sin t. \end{cases}$

20. а) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; б) $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$;

в) $y=\arccos e^x$; г) $y=x^{\arcsin x}$;

д) $\ln y=arctg\,\dfrac{x}{y}$; е) $\begin{cases} x=t^2, \\ y=\dfrac{1}{3}t^3-t. \end{cases}$

21. а) $y=\dfrac{3x-4}{\sqrt{x^3+3x-2}}$; б) $y=\left(3^{\sin 2x}-\cos^2 2x\right)^3$;

в) $y=\ln\arcsin\sqrt{1-x^2}$; г) $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{2-x^2}{x^3-6x}}$;

д) $y=(2x+3)^{tg\,x}$;   е) $\begin{cases} x=t-\ln t, \\ y=3t^2-2t^3. \end{cases}$

22. а) $y=\dfrac{2x}{\sqrt{x^3-6x-9}}$;   б) $y=\left(3^{\cos 3x}+\sin^2 3x\right)$;

в) $y=arctg\,\dfrac{2x+1}{2x-1}$;   г) $y=\ln\sqrt{\dfrac{x^2+3}{x^3+9x}}$;

д) $y=\left(x^3+2\right)^{\sin x}$;   е) $\begin{cases} x=\arcsin t, \\ y=3t-t^3. \end{cases}$

23. а) $y=\dfrac{3x}{\sqrt{x^3-4x^2+1}}$;   б) $y=\left(2^{\arcsin x}+\arccos x\right)^4$;

в) $y=\ln arctg\sqrt{x-1}$;   г) $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{2x^2-2}{x^3-3x}}$;

д) $y=\left(x^2+1\right)^{arctg\,x}$;   е) $\begin{cases} x=2t-\sin 2t, \\ y=8\sin^3 t. \end{cases}$

24. а) $y=\dfrac{4x+1}{\sqrt{x^2-16x-2}}$;   б) $y=\left(4^{tg\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)^3$;

в) $y=\arcsin\sqrt{1-4x^2}$;   г) $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{3-x^2}{x^3-9x}}$;

д) $y=(x+\sin x)^{x^2}$;   е) $\begin{cases} x=arctg\,3t, \\ y=\ln\left(1+9t^2\right). \end{cases}$

25. а) $y=\dfrac{2x^3+5}{\sqrt{x^4+2}}$; б) $y=\left(4^{\arccos 2x}-\sqrt{1-4x^2}\right)^3$;

в) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x^2}{x^3-3x}}$; г) $y=\ln\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{x}}$;

д) $y=(ctg\,x)^{\sec x}$; е) $\begin{cases} x=a(\sin t-t\cos t), \\ y=a(\cos t+t\sin t). \end{cases}$

26. а) $y=\dfrac{3x-4}{\sqrt{x^2+9x-6}}$; б) $y=\left(5^{\sin^2 x}-\cos 2x\right)^3$;

в) $y=\ln\cos e^{-4x}$; г) $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{3x^2-2}{3x^2+2}}$;

д) $y=\left(1-x^2\right)^{\arcsin x}$; е) $\begin{cases} x=a\,tg\,t, \\ y=b\sec t. \end{cases}$

27. а) $y=\dfrac{x^3-10}{\sqrt{x^4-8x}}$; б) $y=\left(6^{arcctg\,3x}+arcctg\,3x\right)$;

в) $y=\ln tg\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; г) $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{10-3x^2}{x^3-10x}}$;

д) $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$; е) $\begin{cases} x=ctg\,t, \\ y=\sec^2 t. \end{cases}$

28. а) $y=\dfrac{5x}{\sqrt{x^2+5x-1}}$; б) $y=\left(3^{\cos 2x}+\cos^2 x\right)^4$;

в) $y = e^{arctg\sqrt{x-1}}$; г) $y = \ln\sqrt{\dfrac{5-4x}{x^2+6x-10}}$;

д) $y = \left(\arcsin\sqrt{x}\right)^{2\sqrt{x}}$; е) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

29. а) $y = \dfrac{2x+1}{\sqrt[3]{x^3+6x+1}}$; б) $y = \left(5^{tg^2 x} + \sec^2 x\right)^3$;

в) $y = e^{\arccos\sqrt{1-x}}$; г) $y = \ln\sqrt[3]{\dfrac{3x+1}{3x-1}}$;

д) $y = (\cos 2x)^{tg\,2x}$; е) $\begin{cases} x = a\cos^2 t, \\ y = b\sin^3 t. \end{cases}$

30. а) $y = \dfrac{5x-6}{\sqrt[3]{x^3+5x-2}}$; б) $y = \left(3^{ctg^2 x} + \ln\sin x\right)^3$;

в) $y = e^{arctg\sqrt{4x-1}}$; г) $y = \ln\sqrt[3]{\dfrac{2x^3+1}{2x^3-1}}$

;

д) $y = \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^x$; е) $\begin{cases} x = t^2 + \ln t, \\ y = 2t^3 + 3t. \end{cases}$

Завдання 3.3. Обчислити наближено за допомогою диференціала значення функції $y = f(x)$ у точці x.

1. $y = \sqrt[3]{x}$; $x = 7{,}76$. **2.** $y = \sqrt[3]{x^2+2x+5}$; $x = 0{,}97$.

3. $y = \dfrac{1}{2}\left(x + \sqrt{5-x^2}\right)$; $x = 0{,}98$.

4. $y=\sqrt{x^2+x+3}$; $x=1,97$.

5. $y=\arcsin x$; $x=0,08$. **6.** $y=\sqrt[3]{x}$; $x=1,21$.

7. $y=\sqrt[3]{x}$; $x=26,46$. **8.** $y=\sqrt[3]{x^2}$; $x=1,03$.

9. $y=x^{11}$; $x=1,021$. **10.** $y=\sqrt[3]{x}$; $x=8,24$.

11. $y=x^{21}$; $x=0,998$. **12.** $y=\sqrt[3]{x}$; $x=7,64$.

13. $y=x^6$; $x=2,01$. **14.** $y=x^5$; $x=2,007$.

15. $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+x+1}}$; $x=1,016$.

16. $y=x^7$; $x=1,996$. **17.** $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $x=4,16$.

18. $y=\sqrt{4x+1}$; $x=2,06$. **19.** $y=\sqrt{4x-3}$; $x=1,08$

.

20. $y=\sqrt[3]{x}$; $x=8,36$.

21. $y=x^7$; $x=2,002$. **22.** $y=x^6$; $x=0,999$.

23. $y=\sqrt{x^3}$; $x=0,98$. **24.** $y=\sqrt{1+x+\sin x}$; $x=0,01$

.

25. $y=\sqrt[5]{x^2}$; $x=1,03$. **26.** $y=\sqrt[3]{3x+\cos x}$; $x=0,01$.

27. $y=\sqrt[3]{x^3+7x}$; $x=1,012$. **28.** $y=\sqrt{x^2+5}$; $x=1,97$.

29. $y=\sqrt{x^3}$; $x=27,54$. **30.** $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$; $x=1,41$.

Завдання 3.4. Дослідити функції та побудувати їхні графіки.

1. а) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$; б) $y=\dfrac{e^x}{x}$.

2. а) $y=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$; б) $y=\ln\left(2x^2+3\right)$.

3. а) $y=\dfrac{x}{(x-1)^3}$; б) $y=x^3e^{-x}$.

4. а) $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$; б) $y=\dfrac{1}{e^x-1}$.

5. а) $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$; б) $y=x-\ln(x+1)$.

6. а) $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$; б) $y=e^{\frac{1}{x+2}}$.

7. а) $y=\dfrac{x^2+16}{x}$; б) $y=\dfrac{1}{e^{2x}-1}$.

8. а) $y=\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2$; б) $y=x^2\ln x$.

9. а) $y=\dfrac{x^3-1}{4x^2}$; б) $y=\ln\dfrac{x+1}{x+2}$.

10. а) $y=\dfrac{2}{x^2+x+1}$; б) $y=x-\ln x$.

11. а) $y=\dfrac{x^2+1}{x}$; б) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

12. а) $y=\dfrac{1}{1+x^2}$; б) $y=xe^{-x}$.

13. а) $y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$; б) $y=e^{\frac{1}{x}}$.

14. а) $y=\dfrac{x^3+1}{x^2}$; б) $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

15. а) $y=\dfrac{x}{3-x^2}$; б) $y=x\ln x$.

16. а) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$; б) $y=\ln\left(x^2-4\right)$.

17. а) $y=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$; б) $y=x^2-2\ln x$.

18. а) $y=\dfrac{x}{(x-1)^2}$; б) $y=(x-1)\cdot e^{3x+1}$.

19. а) $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$; б) $y=\left(2+x^2\right)e^{-x^2}$.

20. а) $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$; б) $y=x+\ln\left(x^2-1\right)$.

21. а) $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$; б) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

22. а) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$; б) $y=\dfrac{x^2}{x-1}$.

23. а) $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$; б) $y=\dfrac{4x^3+5}{x}$.

24. а) $y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$; б) $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$.

25. а) $y=\dfrac{4x^3}{x^3-1}$; б) $y=\dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$.

26. а) $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$; б) $y=xe^{-x^2}$.

27. а) $y=e^{2x-x^2}$; б) $y=x^2-2\ln x$.

28. а) $y=\ln\left(x^2-4\right)$; б) $y=e^{\frac{1}{2-x}}$.

29. а) $y=\ln\left(x^2+1\right)$; б) $y=\left(2+x^2\right)e^{-x^2}$.

30. а) $y=\ln\left(9-x^2\right)$; б) $y=\left(x-1\right)e^{3x+1}$.

Список рекомендованої літератури

1. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика : навч. посібник К. : А.С.К., 2006. 648 с.

2. Шкіль М. І., Колесник Т. В., Котлова В. М. Вища математика : підручник: у 3-х кн., Кн. 1.: Аналітична геометрія з елементами алгебри. Вступ до математичного аналізу. К. : Либідь, 1994. 280 с.

3. Пасічник Я. А. Вища математика : підручник. Острог : Видавництво Національного університету «Острозька академія», 2021. 432 с.

4. Пак В., Носенко Ю. Вища математика : підручник. К. : Либідь, 1996. 440 с.

5. Збірник задач з математичного аналізу. Част. 1 / Рудавський Ю. К. та ін. Львів : Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2008. 352 с.

6. Ярмуш Я. І., Самолюк І. В. Вища математика. Практикум : навч. посіб. Рівне : НУВГП, 2015. 148 с. URL: http://ep3.nuwm.edu.ua/id/eprint/5632