



**Трач В. М., д.т.н., професор, Подворний А. В., д.т.н., доцент,**  
(Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне, v.m.trach@nuwm.edu.ua , a.v.podvornyi@nuwm.edu.ua)

## **ВПЛИВ ПІДСИЛЕННЯ АНІЗОТРОПНИМИ КОМПОЗИТАМИ СТАЛЕВИХ ОБОЛОНОК ТУНЕЛЬНИХ СПОРУД НА НАДІЙНІСТЬ ПАРАМЕТРІВ ЇХ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ**

В статті, при використанні модифікованого авторами варіаційного принципу Ху – Васідзу в рамках просторової лінійної теорії пружності, представлено підхід стосовно побудови системи з шести диференціальних рівнянь руху, що описують вільні коливання товстостінних анізотропних циліндричних оболонок. На цій основі, за використання аналітичного методу Бубнова – Гальоркіна, виведено нескінчену одновимірну систему диференціальних рівнянь загального виду Коші, що дозволяє визначати частоти вільних коливань товстостінних також й шаруватих анізотропних циліндричних оболонкових конструкцій. Для реалізації одновимірної розв'язуючої системи диференціальних рівнянь, про вільні коливання анізотропних циліндричних оболонок, використано числовий метод дискретної ортогоналізації, який було відповідним чином адаптовано. Складений алгоритм і розроблений числовий програмний комплекс для персональних комп'ютерів, що дозволяє реалізовувати задачі стосовно встановлення надійних параметрів вільних коливань сталевих оболонкових конструкцій тунельних споруд, підсилених шаруватими волокнистими композитами.

**Ключові слова:** циліндрична оболонка; тунельна споруда; вільні коливання; тривимірна постановка; волокнистий композит.

**Вступ. Аналіз останніх досліджень.** Відомо, що динамічні розрахунки оболонкових конструкцій тунельних споруд транспортного будівництва залежать від встановлення параметрів їх вільних коливань. Використання класичних та уточнених моделей дослідження таких конструкцій дозволило отримати деякі розв'язки таких задач. Водночас використання сучасних композитних матеріалів і конструктивних рішень призводить до зростання вимог стосовно побудови математичних моделей коливань, які за своєю

точністю цілком задовольняли б практичне використання. Відомо, що розробка таких моделей щодо розв'язку, наприклад, динамічних задач товстостінних циліндричних оболонкових елементів тунелів можлива лише в рамках просторової теорії пружності. Ця задача суттєво ускладнюється, якщо матеріал конструкції анізотропний, що може бути обумовлено наявністю в ньому однієї площини пружної симетрії паралельної серединній поверхні. Таке можливо, якщо волокнистий матеріал укладається на поверхню оболонкової тунельної конструкції (рисунок).

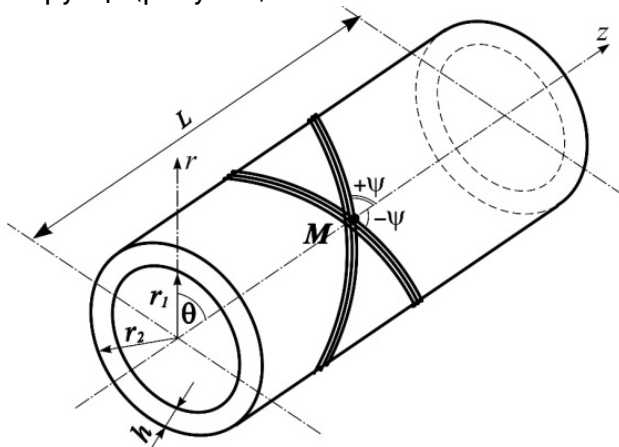


Рисунок. Товстостінна анізотропна циліндрична оболонка

**Постановка задачі та методика розв'язку. Принцип Ху – Васідзу.** Відповідно до варіаційного принципу Ху – Васідзу [1] рівняння руху, співвідношення пружності, геометричні співвідношення та відповідні граничні умови можливо отримати з умови стаціонарності функціоналу  $\Pi_1$ , що визначається з інтегралу для динамічних задач:

$$\Pi_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iiint_V \left[ W(e_{ij}) - T(u_i) + \Phi(u_i) - \sigma_{ij} \left[ e_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i;j} + u_{j;i}) \right] \right] dV + \right. \\ \left. + \iint_{S_1} \Psi(u_i) dS - \iint_{S_2} p_i (u_i - \bar{u}_i) \right\} dS dt. \quad (1)$$

Тут варіюються без використання додаткових умов переміщення  $u_i$ , деформації  $e_{ij}$ , напруження  $\sigma_{ij}$ , напруження  $p_i$  на поверхні  $S_2$ , що викликані переміщеннями  $\bar{u}_i$ . Також в цьому функціоналі  $W(e_{ij})$  – потенціальна енергія деформації,  $T(u_i)$  –

кінетична енергія,  $\Phi(u_i)$ ,  $\Psi(u_i)$  – потенціали об'ємних і поверхневих навантажень, крапка з комою перед параметрами  $i, j$  позначає коваріантну похідну за координатою з відповідним індексом  $i, j = 1, 2, 3$ .

Потенціальна енергія деформації у векторно-матричному представленні записується так

$$W(e_{ij}) = \frac{1}{2} \varepsilon^T B \varepsilon, \quad (2)$$

тут  $\varepsilon^T = (\varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{rr}, 2\varepsilon_{r\theta}, 2\varepsilon_{rz}, 2\varepsilon_{z\theta})$ ,  $B$  – матриця коефіцієнтів пружності.

Якщо ввести вектор  $\sigma^T = (\sigma_{zz}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{rz}, \sigma_{z\theta})$ , то з умови стаціонарності  $\delta\Pi_1$ , можливо отримати такі рівняння:

$$\sigma = B \varepsilon, \quad (3)$$

$$\varepsilon = \varepsilon(u), \quad (4)$$

$$\sigma_{ij;j} + f_i = 0, \quad (5)$$

а також граничні умови  $\sigma_{ij} n_j = \bar{F}_i$  на поверхні  $S_1$  та переміщення  $u_i = \bar{u}_i$  й напруження  $p_i = \sigma_{ij} n_j$  на  $S_2$ .

Співвідношення для деформації (4) представляють взаємозв'язок між деформаціями та переміщеннями. Обернені до співвідношень пружності (3) залежності деформацій від напружень представимо у вигляді

$$\varepsilon = A \sigma,$$

(6)

де матриця  $A = B^{-1}$ .

Коефіцієнти матриці  $A$  позначимо через  $a_{ij}$ , а матриці  $B$  –  $b_{ij}$  ( $i, j = \overline{1,6}$ ). Матриці  $A$  та  $B$  – симетричні, так як  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $b_{ij} = b_{ji}$ .

**Модифікований змішаний варіаційний принцип.** Для виведення модифікованого до Ху – Васідзу змішаного варіаційного принципу розділимо вектори  $\sigma$  та  $\varepsilon$  на дві частини так, щоб

$$\begin{aligned} \sigma_1^T &= (\sigma_{rr}, \tau_{r\theta}, \tau_{rz}), & \sigma_2^T &= (\sigma_{zz}, \sigma_{\theta\theta}, \tau_{z\theta}), \\ \varepsilon_1^T &= (\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{r\theta}, \varepsilon_{rz}), & \varepsilon_2^T &= (\varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{z\theta}). \end{aligned} \quad (7)$$

Для скорочення записів співвідношення пружності (3) та інші будемо записувати у матричному вигляді

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

де для блоків  $A_{ij}$ , відповідно до прийнятого поділу (7) для анізотропного матеріалу, пружні властивості якого знаходяться в одній площині, отримаємо:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & a_{45} & a_{55} \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} a_{13} & 0 & 0 \\ a_{23} & 0 & 0 \\ a_{36} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

З матричної залежності  $\varepsilon = A\sigma$ , при використанні (8), отримаємо:

$$\varepsilon_1 = A_{11}\sigma_1 + A_{12}\sigma_2, \quad (10)$$

$$\varepsilon_2 = A_{21}\sigma_1 + A_{22}\sigma_2, \quad (11)$$

після чого з (11) маємо вираз для

$$\sigma_2 = A_{22}^{-1}\varepsilon_2 - A_{22}^T A_{12}^T \sigma_1. \quad (12)$$

Останній підставимо в (10) і тоді

$$\varepsilon_1 = A_{11}\sigma_1 + A_{12}A_{22}^{-1}\varepsilon_2 - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\sigma_1 = A_{12}A_{22}^{-1}\varepsilon_2 + (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})\sigma_1. \quad (13)$$

З (13) знайдемо  $\sigma_1$

$$\sigma_1 = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} \cdot \varepsilon_1 - (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} \cdot A_{12}A_{22}^{-1}\varepsilon_2. \quad (14)$$

З матричної залежності

$$\sigma = B \cdot \varepsilon \quad (15)$$

запишемо

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Для розглядуваного виду анізотропного матеріалу маємо:

$$\sigma_1 = B_{11} \cdot \varepsilon_1 + B_{12} \cdot \varepsilon_2, \quad (17)$$

$$\sigma_2 = B_{21} \cdot \varepsilon_1 + B_{22} \cdot \varepsilon_2. \quad (18)$$

Після співставлення (15) та (14), встановимо зв'язок між матрицями

$$B_{11} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}, \quad (19)$$



$$B_{12} = -(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} A_{12}A_{22}^{-1}. \quad (20)$$

У вираз для  $\sigma_2$  (12) підставимо (14) і тоді

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= A_{22}^{-1}\varepsilon_2 - A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}\varepsilon_1 + A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - \\ &- A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})A_{12}A_{22}^{-1}\varepsilon_2 = -A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}\varepsilon_1 + \\ &+ [A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})A_{12}A_{22}^{-1}]\varepsilon_2. \end{aligned} \quad (21)$$

Згідно з (21) і (18) маємо такий зв'язок між матрицями

$$B_{21} = -A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}, \quad (22)$$

$$B_{22} = A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}. \quad (23)$$

Таким чином, виразами (19) і (20) та (22) і (23) встановлено зв'язок між матрицями у двох формах запису (3) і (6) узагальненого закону Гука для прийнятого виду матеріалу.

На відміну від принципу Ху – Васідзу приймемо, що незалежними у функціоналі (1) будуть переміщення  $u_r$ ,  $u_\theta$ ,  $u_z$ , деформації  $\varepsilon_{zz}$ ,  $\varepsilon_{z\theta}$ ,  $\varepsilon_{\theta\theta}$  і напруження  $\sigma_{rr}$ ,  $\tau_{r\theta}$ ,  $\tau_{rz}$ . З рівнянь

$$\sigma_1 = B_{11} \cdot \varepsilon_1 + B_{12} \cdot \varepsilon_2, \quad (24)$$

$$\varepsilon_2 = A_{21} \cdot \sigma_1 + A_{22} \cdot \sigma_2 \quad (25)$$

знайдемо

$$\varepsilon_1 = B_{11}^{-1} \cdot \sigma_1 - B_{11}^{-1}B_{12} \cdot \varepsilon_2, \quad \sigma_2 = A_{22}^{-1} \cdot \varepsilon_2 - A_{22}^{-1}A_{21} \cdot \sigma_1. \quad (26)$$

Вираз для потенціала  $W(e_{ij})$  в нових позначеннях приведемо до вигляду

$$W(\varepsilon) = \frac{1}{2} (\varepsilon_1^T B_{11} \varepsilon_1 + \varepsilon_1^T B_{12} \varepsilon_2 + \varepsilon_2^T B_{12}^T \varepsilon_1 + \varepsilon_2^T B_{22} \varepsilon_2). \quad (27)$$

З виразу (27), враховуючи (26), виключимо  $\varepsilon_1$ . Тоді отримаємо

$$\begin{aligned} W(\sigma_1, \varepsilon_2) &= \frac{1}{2} [(B_{11}^{-1}\sigma_1 - B_{11}^{-1}B_{12}\varepsilon_2)^T B_{11} (B_{11}^{-1}\sigma_1 - B_{11}^{-1}B_{12}\varepsilon_2) + \\ &+ (B_{11}^{-1}\sigma_1 - B_{11}^{-1}B_{12}\varepsilon_2)^T B_{12}\varepsilon_2 + \varepsilon_2^T B_{12}^T (B_{11}^{-1}\sigma_1 - B_{11}^{-1}B_{12}\varepsilon_2) + \varepsilon_2^T B_{22}\varepsilon_2]. \end{aligned}$$

Після нескладних перетворень остаточно отримаємо:

$$W(\sigma_1, \varepsilon_2) = \frac{1}{2} \sigma_1^T B_{11}^{-1} \sigma_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_2^T (B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12}) \varepsilon_2. \quad (28)$$

Аналогічним чином перетворимо вираз  $\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$ . Після співставлення матричних виразів

$$\varepsilon_1 = A_{11}\sigma_1 + A_{12}\sigma_2 \text{ та } \sigma_1 = B_{11} \cdot \varepsilon_1 + B_{12} \cdot \varepsilon_2$$

неважко встановити, що  $B_{12}B_{22}^{-1} = -A_{11}^{-1}A_{12}$ .

Тоді

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \sigma_1^T B_{11}^{-1} \sigma_1 + \varepsilon_2^T (B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12}) \varepsilon_2. \quad (29)$$

Виключивши з виразу  $\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(u)$  складову вектора напружень

$\sigma_2$ , отримаємо

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(u) = (\varepsilon_1^T(u) + \varepsilon_2^T(u) B_{12}^T B_{11}^{-1}) \sigma_1 + \varepsilon_2^T(u) (B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12}) \varepsilon_2. \quad (30)$$

Збираючи вирази (28÷30), запишемо потенціал

$$W_1 = W(\sigma_1, \varepsilon_2) - \sigma_{ij} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}(u)) = -\frac{1}{2} \sigma_1^T B_{11}^{-1} \sigma_1 - \frac{1}{2} \varepsilon_2^T (B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12}) \varepsilon_2 + (\varepsilon_1^T(u) + \varepsilon_2^T(u) B_{12}^T B_{11}^{-1}) \sigma_1 + \varepsilon_2^T(u) (B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12}) \varepsilon_2. \quad (31)$$

В (1) символом  $T(u_i)$  представлена кінетична енергія. З погляду на прийняте позначення, запишемо її так

$$T(u_i) = \frac{1}{2} \iiint_V \rho (\dot{u}_r^2 + \dot{u}_\theta^2 + \dot{u}_z^2) dr d\theta dz, \quad (32)$$

де  $\dot{u}_r, \dot{u}_\theta, \dot{u}_z$  – швидкості в напрямку осей циліндричної системи координат  $r, \theta, z$  (рис. 1), а  $\rho$  – щільність матеріалу з якого виготовлена конструкція.

Отримані рівняння є рівняннями руху, так як після варіювання (32) та інтегрування частинами за часом, отримаємо варіацію кінетичної енергії анізотропної оболонки

$$\begin{aligned} \delta T = & \iint_{S_1} \rho [\dot{u}_r \delta \dot{u}_r + \dot{u}_\theta \delta \dot{u}_\theta + \dot{u}_z \delta \dot{u}_z] \Big|_{t_1}^{t_2} dS_1 - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V \rho (\ddot{u}_r \delta u_r + \ddot{u}_\theta \delta u_\theta + \ddot{u}_z \delta u_z) dt \cdot dV. \end{aligned} \quad (33)$$

Однак, при цьому слід врахувати, що було використано такі вирази для апроксимації переміщень [2]

$$u(r, \theta, z, t) = \rho \cdot u(r, \theta, z) \cdot e^{-i\omega t} \quad (34)$$

та напружень

$$\sigma_1^T = \sigma_1^T \cdot e^{-i\omega t} = [\sigma_r, \sigma_{r\theta}, \sigma_{rz}] \cdot e^{-i\omega t}. \quad (35)$$

В (34) та (35)  $\omega$  є частотою вільних коливань анізотропної оболонки. Виконавши операцію диференціювання (35) за часом, отримаємо вирази для прискорень



$$\ddot{u}(r, \theta, z, t) = -\rho \omega^2 \cdot u(r, \theta, z) \cdot e^{-i\omega t}. \quad (36)$$

З урахуванням того, що мета цієї роботи дослідження частот вільних коливань оболонок запишемо кінцевий вигляд функціоналу  $\Pi_1$ , що представлений в (1), у вигляді

$$\Pi_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iiint_V [W(\sigma_1, \varepsilon) - T(u_i)] dV \right\} dt. \quad (37)$$

Вираз для  $\Pi_1$  являє собою частину функціоналу (1), так як у ньому замінені кількість незалежних величин, внаслідок виконання співвідношень (28) і умови  $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(u)$ . Тоді варіація функціоналу (37), що обумовлена зміною компонентів вектора переміщень  $u$  і напружень  $\sigma_1$ , набирає вигляду

$$\begin{aligned} \delta \Pi_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iiint_V \left[ -\frac{1}{2} \sigma_1^T B_{11}^{-1} \sigma_1 + \left( \varepsilon_1^T(u) + \varepsilon_2(u) B_{11}^T B_{12}^{-1} \right) \sigma_1 \right] \delta \sigma_1 - \right. \\ \left. - \left[ \frac{1}{2} \varepsilon_2^T (B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12}) \varepsilon_2 \right] \delta \varepsilon_2 + \left[ \varepsilon_2^T(u) (B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12}) \varepsilon_2 \right] \delta u - \right. \\ \left. - T(u) \delta u \right\} dV \Bigg\} dt. \quad (38) \end{aligned}$$

В подальшому використаємо лінійні геометричні співвідношення, що приведені в [3]:

$$e_{rr}^i = \frac{\partial u_r^i}{\partial r}; \quad e_{rz}^i = \frac{\partial u_r^i}{\partial z} + \frac{\partial u_z^i}{\partial r}; \quad e_{r\theta}^i = \frac{\partial u_\theta^i}{\partial r} - \frac{1}{r} u_\theta^i + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta}. \quad (39)$$

Тут  $e_{rr}^i$  – відносні лінійні деформації за напрямком координатної осі  $r$ , а  $e_{rz}^i$ ,  $e_{r\theta}^i$  – дотичні до відповідних координатних поверхонь відносні зсувні деформації.

З умови стаціонарності (38) при використанні виразів для напружень  $\sigma_1^T = (\sigma_{rr}, \tau_{r\theta}, \tau_{rz})$ , переміщень  $u^T = (u_r, u_\theta, u_z)$ , геометричних співвідношень (39), залежностей для варіації кінетичної енергії (33), (34), (35), (36), а також варіацій роботи зовнішніх сил (38) і прирівнювання виразів при незалежних варіаціях напружень  $\delta \sigma_{rr}$ ,  $\delta \tau_{r\theta}$ ,  $\delta \tau_{rz}$  і переміщень  $\delta u_r$ ,  $\delta u_\theta$ ,  $\delta u_z$  в інтегралі за об'ємом  $V$ , отримаємо такі рівняння:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial r} = -\frac{c_{23}^i + 1}{r} \sigma_{rr}^i - \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}^i}{\partial \theta} + \frac{c_{22}^i}{r^2} u_r^i + \frac{c_{12}^i}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial z} + \frac{c_{26}^i}{r^2} \frac{\partial u_z^i}{\partial \theta} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{c_{26}^i}{r} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} + \frac{c_{22}^i}{r^2} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial \theta} + \rho^i \omega^2 u_r; \\
 \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial r} = & c_{13}^i \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial z} - \frac{1}{r} \tau_{rz}^i - \frac{c_{12}^i}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial z} - c_{11}^i \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z^2} - \frac{c_{66}^i}{r^2} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial \theta^2} - \\
 & - \frac{c_{12}^i + c_{66}^i}{r} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z \partial \theta} + \frac{c_{36}^i}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial \theta} - \frac{c_{26}^i}{r^2} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} - \frac{2c_{16}^i}{r} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z \partial \theta} - c_{16}^i \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z^2} - \\
 & - \frac{c_{26}^i}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial \theta^2} + \rho^i \omega^2 u_z; \\
 \frac{\partial \tau_{r\theta}^i}{\partial r} = & \frac{c_{23}^i}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \tau_{r\theta}^i - \frac{c_{22}^i}{r^2} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} - \frac{c_{12}^i + c_{66}^i}{r} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z \partial \theta} - c_{66}^i \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z^2} - \\
 & - \frac{c_{22}^i}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial \theta^2} + c_{36}^i \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial z} - \frac{c_{26}^i}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial z} - c_{16}^i \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z^2} - \frac{c_{26}^i}{r^2} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial \theta^2} - \\
 & - \frac{2c_{26}^i}{r} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z \partial \theta} + \rho^i \omega^2 u_\theta; \\
 \frac{\partial u_r^i}{\partial r} = & c_{33}^i \sigma_{rr}^i + \frac{c_{23}^i}{r} u_r^i + c_{13}^i \frac{\partial u_z^i}{\partial z} + \frac{c_{36}^i}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial \theta} + c_{36}^i \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} + \frac{c_{23}^i}{r} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial \theta}; \\
 \frac{\partial u_z^i}{\partial r} = & a_{55}^i \tau_{rz}^i + a_{45}^i \tau_{r\theta}^i - \frac{\partial u_r^i}{\partial z}; \\
 \frac{\partial u_\theta^i}{\partial r} = & a_{45}^i \tau_{rz}^i + a_{44}^i \tau_{r\theta}^i - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_\theta^i, \tag{40}
 \end{aligned}$$

де  $r$  – радіус циліндра, який не залежить від координат  $z$  та  $\theta$ ;  $\sigma_{rr}^i$ ,  $\tau_{rz}^i$ ,  $\tau_{r\theta}^i$  – компоненти тензора напружень (7);  $u_z^i$ ,  $u_\theta^i$ ,  $u_r^i$  – переміщення для кожного  $i$ -го шару оболонки за напрямками відповідно осей  $z$ ,  $\theta$ ,  $r$ ;  $\omega$  є частотою вільних коливань;  $\rho^i$  – щільність матеріалу з якого виготовлений  $i$ -й шар конструкції. Сталі  $c_{kl}^i$  ( $k, l=1, 2, 3, 6$ ) – це характеристики  $i$ -го шару, що визначаються за допомогою механічних констант  $a_{kl}^i$  [4] матеріалу оболонки відповідно до [5].

Таким чином, при використанні варіаційного рівняння (38) виведена тривимірна система (40) з шести диференціальних рівнянь, що записана в частинних похідних, руху лінійної теорії пружності відносно шести компонентів векторів  $\sigma_1^T = (\sigma_{rr}, \tau_{r\theta}, \tau_{rz})$  і



$u^T = (u_r, u_\theta, u_z)$  для визначення частот вільних коливань анізотропної товстостінної композитної циліндричної оболонки. Головна відмінність отриманої системи рівнянь від представлених в літературі, наприклад [6] в тому, що вона є системою диференціальних рівнянь руху, для виведення якої було використано модифікований варіаційний принцип Ху – Васідзу. З неї можуть бути встановлені частоти вільних коливань в тривимірній постановці товстостінної композитної анізотропної циліндричної оболонки.

У випадку задачі визначення частот вільних коливань розв'язок системи (40) повинен відповідати умовам на бічних поверхнях при  $r = r_1$

$$\sigma_{rr}^0(r_1, z, \theta) = 0; \quad \tau_{rz}^0(r_1, z, \theta) = 0; \quad \tau_{r\theta}^0(r_1, z, \theta) = 0$$

і  $r = r_2$

$$\sigma_{rr}^n(r_2, z, \theta) = 0; \quad \tau_{rz}^n(r_2, z, \theta) = 0; \quad \tau_{r\theta}^n(r_2, z, \theta) = 0. \quad (41)$$

Умовам на торцях при  $z = 0, z = L$  (рисунок)

$$\sigma_{zz}^i = u_r^i = u_\theta^i = 0. \quad (42)$$

Та умовам жорсткого контакту шарів для напружень та переміщень:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^i(r_i) &= \sigma_{rr}^{i+1}(r_i); & \tau_{rz}^i(r_i) &= \tau_{rz}^{i+1}(r_i); & \tau_{r\theta}^i(r_i) &= \tau_{r\theta}^{i+1}(r_i); \\ u_r^i(r_i) &= u_r^{i+1}(r_i); & u_z^i(r_i) &= u_z^{i+1}(r_i); & u_\theta^i(r_i) &= u_\theta^{i+1}(r_i). \end{aligned} \quad (43)$$

де  $i$  – номер шару оболонки.

Умови (42) відповідають наявності на краях циліндра діафрагми абсолютно жорсткої в своїй площині та гнучкої з неї [5].

**Методика досліджень. Приведення тривимірної системи рівнянь теорії пружності до одновимірної.** Для розв'язку тривимірної системи рівнянь (40) при відповідних умовах на поверхнях і торцях відповідно (41), (42) скористаємося процедурою методу Бубнова – Гальоркіна. Згідно з нею, розкладемо всі функції в тригонометричні ряди [7] за координатою вздовж твірної циліндра  $z$  так, що б вони задовольняли крайовим умовам (42):

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{1,pk}(r) \cos k\theta + y_{1,mk}'(r) \sin k\theta] \sin l_m z; \\ \tau_{rz}(r, z, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{2,pk}(r) \cos k\theta + y_{2,mk}'(r) \sin k\theta] \cos l_m z; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta}(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ y_{3, pk}(r) \sin k\theta + y'_{3, mk}(r) \cos k\theta \right] \sin l_m z; \\ u_r(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ y_{4, pk}(r) \cos k\theta + y'_{4, mk}(r) \sin k\theta \right] \sin l_m z; \\ u_z(r, z, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ y_{5, pk}(r) \cos k\theta + y'_{5, mk}(r) \sin k\theta \right] \cos l_m z; \\ u_{\theta}(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ y_{6, pk}(r) \sin k\theta + y'_{6, mk}(r) \cos k\theta \right] \sin l_m z. \end{aligned} \quad (44)$$

Тут  $y_{i, pk}$ ,  $y'_{i, mk}$  ( $i=1 \div 6$ ) – компоненти, розкладених за тригонометричними рядами Фур'є, складових напружено-деформованого стану оболонки:  $\sigma_{rr}$ ,  $\tau_{rz}$ ,  $\tau_{r\theta}$ ,  $u_r$ ,  $u_z$ ,  $u_{\theta}$ , а  $p$ ,  $m$ ,  $k$  – хвильові числа в рядах. Параметр  $l_m = m\pi/L$ , де  $L$  – довжина твірної циліндра (рисунок).

Після математичних перетворень і розділення змінних в рівняннях (40) за допомогою співвідношень (44), отримуємо для кожного  $i$ -го шару нескінчену систему звичайних диференціальних рівнянь в нормальній формі Коші

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{y}^i}{dr} &= \left( T^i(r) - \omega^2 C^i(r) \right) \bar{y}^i, \quad T^i(r) = t_{n,l}^i(r), \quad C^i(r) = c_{n,l}^i(r), \\ n &= \overline{1, \infty}, \quad l = \overline{1, \infty}, \end{aligned} \quad (45)$$

де  $\bar{y}^i = \left\{ y_{1,p}^i; y_{2,p}^i; y_{3,p}^i; y_{4,p}^i; y_{5,p}^i; y_{6,p}^i; y_{1,m}^{i/}; y_{2,m}^{i/}; y_{3,m}^{i/}; y_{4,m}^{i/}; y_{5,m}^{i/}; y_{6,m}^{i/} \right\}$  – розв'язуюча вектор-функція,  $T^i(r)$  – квадратна матриця із змінними коефіцієнтами, що залежить від аргументу  $r$ ,  $C^i(r)$  – матриця, що характеризує інерційні властивості оболонки. Ненульові елементи матриці  $T^i(r)$ , коефіцієнти при невідомих системи (45)  $t_{n,l}^i(r)$ , без докритичних напружень, приведені в [7].

Ненульові елементи матриці  $C^i(r)$  мають вигляд:

$$c_{1,4}^i = \rho, \quad c_{2,5}^i = \rho, \quad c_{3,6}^i = \rho, \quad c_{7,10}^i = \rho, \quad c_{8,11}^i = \rho, \quad c_{9,12}^i = \rho. \quad (46)$$

До системи рівнянь (45) необхідно приєднати відповідні рівняння, що характеризують умови закріплення поверхонь оболонки, перпендикулярних напрямку інтегрування:



$$B_1 \bar{y}(r, \lambda) = 0; \quad r = r_1; \quad (47)$$

$$B_2 \bar{y}(r, \lambda) = 0; \quad r = r_2, \quad (48)$$

де  $B_1, B_2$  – прямокутні матриці, що формуються на основі прийнятих граничних умов на поверхнях оболонки (41).

Розв'язок крайової задачі (45), (47)–(48) полягає у знаходженні власних частот вільних коливань  $\omega$  та відповідних їм форм  $\bar{y}(r_i)$ ,  $i=1, 2$  як гармонійних складових динамічного стану. В матриці  $T$  розкладання шуканих векторів в ряди Фур'є за коловою координатою враховується параметром  $n=0, 1, 2, \dots$  колового хвилеутворення оболонки. Внаслідок чого задача (45), (47), (48) призводиться до розв'язку послідовності одновимірних крайових задач на власні значення виду:

$$\frac{d\bar{y}_n^i}{dr_1} = (T_n^i(r_1) - \omega_n^2 C^i(r_1)) \bar{y}_n^i. \quad (49)$$

Таким чином, для однорідної крайової задачі (49), (47), (48) необхідно знайти величину параметра  $\omega$ , при якому задача має нетривіальний розв'язок  $y \neq 0$ .

Реалізація отриманої одновимірної задачі (49) про вільні коливання товстостінної циліндричної оболонки проводилась при використанні чисельного методу дискретної ортогоналізації [6; 8]. Він також був використаний в [7; 9], де метод був відповідно адаптований для розв'язання задач розрахунків анізотропних товстостінних і тонких композитних циліндричних оболонок.

**Реалізація запропонованої методики щодо надійного встановлення частот вільних коливань циліндричних оболонок тунелів.** В якості прикладу розглянемо задачу знаходження частот вільних коливань циліндричної оболонки, що моделює тунельну споруду. Геометричні параметри конструкції (рисунок) такі: радіус внутрішньої бокової поверхні  $r_1=4,7$  м, зовнішньої –  $r_2=5,3$  м, а довжина елемента  $L=10,0$  м.

Розглянемо та порівняємо два варіанти виконання цієї конструкції. У першому випадку розглянемо одношарову сталеву оболонку з такими механічними характеристиками матеріалу:  $E_{11}=20,6E_0$ ,  $\nu_{21}=0,25$ ,  $E_0=10000$  МПа, густина  $7800$  кг/м<sup>3</sup>. У другому – двошарову, де в якості зовнішнього шару виступає композитний волокнистий матеріал боропластик головні напрямки пружності якого можуть бути повернуті на кут  $\psi$  відносно напрями твірної оболонкової конструкції. Таке використання волокнистого матеріалу водночас покращує механічні характеристики конструкції, а також

слугує ізоляційним шаром, що захищає метал від корозійних впливів. Механічні характеристики боропластику наступні:  $E_{11}=280E_0$ ,  $E_{22}=E_{33}=31E_0$ ,  $G_{12}=G_{23}=10,5E_0$ ,  $G_{13}=21,2E_0$ ,  $\nu_{21}=0,25$ ,  $\nu_{12}=0,0277$ , густина  $2118 \text{ кг/м}^3$ . Геометрія за товщиною така: сталевий шар  $r_{1s}=4,7 \text{ м}$ ;  $r_{2s}=5,25 \text{ м}$ , шар боропластику:  $r_{1b}=5,25 \text{ м}$ ;  $r_{2b}=5,3 \text{ м}$ , довжина така ж.

В таблиці представлено результати проведених за пропонуваним підходом досліджень та проведене порівняння частот вільних коливань двох розглядуваних варіантів виконання оболонкових конструкцій.

Таблиця

Частоти вільних коливань сталевіої циліндричної оболонки тунельної споруди

Частота вільних коливань	Сталева оболонка	Двошарова циліндрична оболонка						
		Кут повороту головних напрямів пружності шару боропластику, $\psi^0$						
		0	15	30	45	60	75	90
$\omega, \text{с}^{-1}$	3,93	4,91	4,96	5,01	4,88	4,61	4,41	4,35

Аналізуючи представлені в таблиці результати дослідження вільних коливань сталевіої циліндричної оболонки тунельної споруди зробимо такі висновки. Використання волокнистого композитного матеріалу дозволяє підвищити величини частот вільних коливань конструкції. У випадку кута укладання композиту  $\psi = 0^0$  частоти зростають порівняно із випадком повністю сталевіої оболонки на 25%. Також з результатів таблиці видно, що максимальні значення частот вільних коливань мають місце при куті  $\psi = 30^0$ , де ці значенні більші за отримані для повністю сталевіої конструкції на 28%.

**Висновки.** В роботі, спираючись на отриману тривимірну систему диференціальних рівнянь руху в частинних похідних лінійної теорії пружності анізотропного тіла в циліндричній системі координат, досліджено можливість надійного корегування частотами вільних коливань циліндричної сталевіої оболонкової конструкції тунельної споруди. Проаналізовано випадок підсилення сталевіої оболонки волокнистим композитним матеріалом при різних кутах його укладання на зовнішній поверхні конструкції та встановлено відповідні їм частоти.

1. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М. : Мир, 1987. 542 с.
2. Рассказов А. О., Соколовская Н. И., Шульга Н. А. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. Киев : Вища шк., 1986. 191 с.
3. Новожилов В. В. Теория упругости. Л. : Судпромгиз, 1958. 374 с.



4. Лехницький С. Г. Теорія упругості анізотропного тела. 2-е изд., испр. и доп. М. : Наука, 1977. 415 с. 5. Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Панкратова Н. Д. Задачи теории упругости неоднородных тел. К. : Наук. думка, 1991. 216 с. 6. Григоренко Я. М., Влайков Г. Г., Григоренко А. Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей : монографія. К. : Академперіодика, 2006. 472 с. 7. Podvornyi A. V., Semenyuk N. P., Trach V. M. Stability of inhomogeneous cylindrical shells under distributed external pressure in a three-dimensional statement. *Int. Appl. Mech.* 2017. Vol. 53, N 6. P. 623–638. 8. Григоренко Я. М., Крюков Н. Н. Численные решения задач статики гибких слоистых оболочек с переменными параметрами. К. : Наук. думка, 1988. 264 с. 9. Баженов В. А., Семенюк М. П., Трач В. М. Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок : монографія. К. : Каравела, 2010. 352 с.

#### REFERENCES:

1. Vasydzu K. Varyatsyonnye metody v teoryy uprugosti y plastychnosti. М. : Myr, 1987. 542 s. 2. Rasskazov A. O., Sokolovskaia N. Y., Shulha N. A. Teoryia y raschet sloystykh ortotropnykh plastyn y obolochek. Kyev : Vyshcha shk., 1986. 191 s. 3. Novozhylov V. V. Teoryia uprugosti. L. : Sudpromhyz, 1958. 374 s. 4. Lekhnytskyi S. H. Teoryia uprugosti anyzotropnoho tela. 2-e yzd., yspr. y dop. М. : Nauka, 1977. 415 s. 5. Hryhorenko Ya. M., Vasylenko A. T., Pankratova N. D. Zadachy teoryy uprugosti neodnorodnykh tel. К. : Nauk. dumka, 1991. 216 s. 6. Hryhorenko Ya. M., Vlaikov H. H., Hryhorenko A. Ya. Chyslenno-analytycheskoe reshenye zadach mekhanyky obolochek na osnove razlychnykh modelei : monohrafiia. К. : Akademperryodyka, 2006. 472 s. 7. Podvornyi A. V., Semenyuk N. P., Trach V. M. Stability of inhomogeneous cylindrical shells under distributed external pressure in a three-dimensional statement. *Int. Appl. Mech.* 2017. Vol. 53, N 6. P. 623–638. 8. Hryhorenko Ya. M., Kriukov N. N. Chyslennye resheniya zadach statyky hybkykh sloystykh obolochek s peremennymy parametramy. К. : Nauk. dumka, 1988. 264 s. 9. Bazhenov V. A., Semeniuk M. P., Trach V. M. Neliniine deformuvannia, stiikist i zakrytychna povedinka anizotropnykh obolonok : monohrafiia. К. : Karavela, 2010. 352 s.

---

**Trach V. M., Doctor of Engineering, Professor, Podvornyi A. V., Doctor of Engineering, Associate Professor** (National University of Water and Environmental Engineering, Rivne)

#### **INFLUENCE OF REINFORCEMENT OF STEEL SHELLS OF TUNNEL STRUCTURES WITH ANISOTROPIC COMPOSITES ON THE RELIABILITY OF THEIR FREE VIBRATION PARAMETERS**

**An approach to constructing a system of six differential equations of motion of the spatial linear theory of elasticity describing free vibrations of cylindrical thick-walled anisotropic shells has been developed. The approach is based on a modification of the Hu – Washidzu variational principle, which allows obtaining the corresponding equations in a three-dimensional formulation. Based on the spatial system of equations of motion, using the procedure of the Bubnov – Galerkin analytical method, an approach to obtaining an infinite one-dimensional system of differential equations is presented, which allows determining the frequencies of free vibrations of thick-walled layered anisotropic cylindrical shell structures. To implement a one-dimensional system of differential equations on free vibrations of anisotropic cylindrical shells, a numerical method of discrete orthogonalization, appropriately adapted, is used. On this basis, a software package for personal computers has been created, allowing the implementation of problems on finding the frequencies of free vibrations.**

**The problem of determining the parameters of free vibrations of steel shell structures of tunnel structures has been solved. The obtained results are compared with those calculated in the case of reinforcing the outer surface of steel shells with a fibrous composite material at different angles of its laying. An analysis is carried out and conclusions are made about the influence of a fibrous composite, as a reinforcing layer of shell structures of tunnel structures, on the reliable correction of the parameters of their free vibrations.**

***Keywords:* cylindrical shell; tunnel structure; free vibrations; three-dimensional formulation; fiber composite.**