

Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства
та природокористування
Навчально-науковий інститут кібернетики, інформаційних
технологій та інженерії
Кафедра вищої математики

04-02-79М

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

та завдання до практичних занять та самостійного
вивчення навчальної дисципліни
**«МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ» і «МАТЕМАТИЧНИЙ
ТА ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ»**

для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського)
рівня за освітньо-професійними програмами
спеціальностей:

**F1 «Прикладна математика», F2 «Інженерія
програмного забезпечення», F3 «Комп'ютерні науки»,
F4 «Системний аналіз та наука про дані»**
денної та заочної форми навчання

Рекомендовано
науково-методичною радою з
якості ННІ КІТІ
протокол №8 від 28.08.2025

Рівне – 2025

Методичні вказівки та завдання до практичних занять та самостійного вивчення навчальної дисципліни «Математичний аналіз» і «Математичний та функціональний аналіз» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійними програмами «Комп'ютерне та математичне моделювання», «Інженерія програмного забезпечення», «Комп'ютерні науки», «Інженерія даних» спеціальностей: F1 «Прикладна математика», F2 «Інженерія програмного забезпечення», F3 «Комп'ютерні науки», F4 «Системний аналіз та наука про дані» денної та заочної форми навчання, частина 1. [Електронне видання] / Іващук Я. Г., Кушнір В. П. Рівне : НУВГП, 2025. 58 с.

Укладачі: Іващук Я. Г., канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої математики; Кушнір В. П., канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої математики.

Відповідальний за випуск: Тадеєв П. О., доктор педагогічних наук, канд. фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри вищої математики.

Керівники груп забезпечення спеціальностей:

- F1 «Прикладна математика» О. Ю. Дейнека,
к. т. н., доц., доц. кафедри вищої математики.
F2 «Інженерія програмного забезпечення» В. В. Жуковський,
к. т. н., доц. кафедри комп. наук та прикладної математики.
F3 «Комп'ютерні науки» С. С. Каштан,
к. т. н., доц., доц. кафедри комп. наук та прикладної математики.
F4 «Системний аналіз та наука про дані» О. В. Прищепя,
к. ф.-м. н., доц. кафедри комп. наук та прикладної математики.

Попередня версія методичних вказівок: 04-02-36 М

© Я. Г. Іващук,
В. П. Кушнір, 2025
© НУВГП, 2025

Зміст

Вступ

1. Вступ до математичного аналізу.....	3
2. Диференціальне числення функцій однієї змінної.....	9
3. Диференціальне числення функцій двох змінних.....	18
4. Інтегральне числення функцій однієї змінної.....	27
5. Завдання для самостійної роботи.....	37
<i>Список рекомендованої літератури.....</i>	<i>57</i>

Вступ

Курс математичного аналізу є одним із способів розвитку логічного і алгоритмічного мислення студентів, оволодіння основними методами дослідження та розв'язування математичних задач, вироблення умінь самостійно розширювати свої знання з математики і застосовувати математичний апарат до аналізу та розв'язання практичних задач.

Дисципліна спрямована на формування загальнонаукових, інструментальних, загально-професійних та спеціалізовано-професійних компетенцій.

1. Вступ до математичного аналізу

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі X точки x_0 , крім, можливо, самої точки x_0 . A - число чи символ ∞ .

A називають границею функції $y = f(x)$ в точці x_0 , якщо для довільної збіжної до x_0 послідовності $\{x_n\}$, де $x_n \in X$, $x_n \neq x_0$, послідовність $\{f(x_n)\}$ має границю, яка дорівнює числу A , і записують

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

Число A називають границею функції $y = f(x)$ при $x \rightarrow \infty$ і пишуть $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $M = M(\varepsilon) > 0$, що при $|x| > M$ виконується нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Функція $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ називається нескінченно великою функцією, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

Функція $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ називається нескінченно малою функцією, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

Основні теореми про границі.

Теорема 1. (про границю суми, добутку і частки). Якщо кожна з функцій $f(x)$ і $\varphi(x)$ має скінченну границю в точці x_0 , то в цій точці існують також границі функцій $f(x) \pm \varphi(x)$,

$$f(x) \cdot \varphi(x), \quad \frac{f(x)}{\varphi(x)} \quad (\text{остання за умови, що } \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \neq 0) \text{ і}$$

справедливі формули

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)}.$$

Наслідки з теореми 1:

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} c f(x) = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad c \in R;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^n, \text{ зокрема}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = \lim_{x \rightarrow x_0} x_0^n = x_0^n, \quad n \in N;$$

3) якщо $f(x)$ елементарна функція, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right) = f(x_0), \text{ якщо } f(x_0) \text{ існує.}$$

$$\text{Теорема 2. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$\text{Теорема 3. } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \text{ де } e - \text{іраціональне число,}$$

наближене значення якого, з точністю до 10^{-15} дорівнює 2,718281828459045.

Наслідки з теореми 3:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k_1}{x}\right)^{k_2 x} = e^{k_1 k_2}, \text{ де } k_1 \text{ і } k_2 - \text{дійсні числа;}$$

$$2) \lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e.$$

При обчисленні границь, пов'язаних з числом e , часто застосовують таке твердження: якщо існують границі

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x), \text{ і якщо не виходить степеневе}$$

невизначеність, то існує також границя

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{\varphi(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)}.$$

Приклад 1.1. Знайти границі:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^5 + 9x + 7}{3x^6 + x^3 + 1}; \quad б) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 5x + 1}{2x^2 + 3x - 7};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 10}{3x^2 - 5x - 2}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{3 - \sqrt{2x + 1}}.$$

$$\text{Розв'язання. а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^5 + 9x + 7}{3x^6 + x^3 + 1}.$$

Границі чисельника і знаменника існують і границя знаменника не дорівнює нулю, тому можна користуватися теоремою 1:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^5 + 9x + 7}{3x^6 + x^3 + 1} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (4x^5 + 9x + 7)}{\lim_{x \rightarrow 1} (3x^6 + x^3 + 1)} = \\ &= \frac{4 \lim_{x \rightarrow 1} x^5 + 9 \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 7}{3 \lim_{x \rightarrow 1} x^6 + \lim_{x \rightarrow 1} x^3 + \lim_{x \rightarrow 1} 1} = \frac{4 + 9 + 7}{3 + 1 + 1} = 4. \end{aligned}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 5x + 1}{2x^2 + 3x - 7}.$$

При $x \rightarrow \infty$ маємо невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$, тому

поділимо чисельник і знаменник на x^2 , а потім скористаємося відповідними властивостями границь. Матимемо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 5x + 1}{2x^2 + 3x - 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{3}{x} - \frac{7}{x^2}} = \left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x} = 0, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0 \end{array} \right| = \frac{6}{2} = 3.$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 10}{3x^2 - 5x - 2}.$$

Тут застосовувати теорему про границю частки не можна, тому що границя чисельника дорівнює нулю і границя знаменника дорівнює нулю, тобто маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$.

Розкладемо чисельник і знаменник на лінійні множники,

скориставшись формулою: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, де x_1 і x_2 – нулі квадратного тричлена.

$$2x^2 + x - 10 = 2(x - 2)\left(x + \frac{5}{2}\right) = (x - 2)(2x + 5),$$

$$3x^2 - 5x - 2 = 3(x - 2)\left(x + \frac{1}{3}\right) = (x - 2)(3x + 1).$$

Оскільки при знаходженні границі функцій в точці $x = 2$ розглядаються значення $x \neq 2$, то даний дріб можна скоротити на $x - 2$, тому

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 10}{3x^2 - 5x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(2x + 5)}{(x - 2)(3x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x + 5)}{(3x + 1)} = \frac{9}{7}.$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{3 - \sqrt{2x + 1}}.$$

При $x \rightarrow 4$ маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$. Помноживши чисельник і знаменник на вираз $(2 + \sqrt{x})(3 + \sqrt{2x + 1})$ та скориставшись формулою $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ отримаємо:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{3 - \sqrt{2x + 1}} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2 - \sqrt{x})(2 + \sqrt{x})(3 + \sqrt{2x + 1})}{(2 + \sqrt{x})(3 + \sqrt{2x + 1})(3 - \sqrt{2x + 1})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4 - x)(3 + \sqrt{2x + 1})}{(2 + \sqrt{x})(9 - 2x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4 - x)(3 + \sqrt{2x + 1})}{(2 + \sqrt{x})(8 - 2x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4 - x)(3 + \sqrt{2x + 1})}{(2 + \sqrt{x})(8 - 2x)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(3 + \sqrt{2x + 1})}{2(2 + \sqrt{x})} = \frac{6}{2 \cdot 4} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Приклад 1.2. Знайти границі:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3} \right)^{1-5x};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{\arctg 2x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} (6x+5)(\ln(3x+2) - \ln(3x-1)).$$

Розв'язання. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}.$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2} &= \left| \frac{0}{0}, 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 2x}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8 \sin 2x \sin 2x}{2x \cdot 2x} = 8 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right)^2 = 8 \cdot 1^2 = 8. \end{aligned}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3} \right)^{1-5x}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3} \right)^{1-5x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x-1}{2x+3} - 1 \right)^{1-5x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{2x+3} \right)^{1-5x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{2x+3}{-4}} \right)^{\frac{2x+3}{-4} \cdot \frac{-4}{2x+3} \cdot \frac{1-5x}{1}} = \end{aligned}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{20x-4}{2x+3}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{20 - \frac{4}{x}}{2 + \frac{3}{x}}} = e^{10}.$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{\arctg 2x}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{\arctg 2x} &= \left| \arctg 2x = t, \quad 2x = t \operatorname{tg} t, \right. \\ &\quad \left. x = \frac{1}{2} \operatorname{tg} t, \text{ при } x \rightarrow 0 \quad t \rightarrow 0 \right| = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{tg} t}{t} = 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t \cos t} = 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\cos t} = 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{r) } \lim_{x \rightarrow \infty} (6x+5) \left(\ln(3x+2) - \ln(3x-1) \right). \\
& \lim_{x \rightarrow \infty} (6x+5) \left(\ln(3x+2) - \ln(3x-1) \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} (6x+5) \ln \frac{3x+2}{3x-1} = \\
& = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3x+2}{3x-1} \right)^{6x+5} = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1+3}{3x-1} \right)^{6x+5} = \\
& = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{3x-1} \right)^{6x+5} = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3x-1}{3}} \right)^{\frac{3x-1}{3} \cdot \frac{3}{3x-1} (6x+5)} = \\
& = \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3x-1}{3}} \right)^{\frac{3x-1}{3}} \right)^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{18x+15}{3x-1}} = \ln e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{18x+15}{3x-1}} = \\
& = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{18x+15}{3x-1} \cdot \ln e = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{18 + \frac{15}{x}}{3 - \frac{1}{x}} = \frac{18}{3} = 6.
\end{aligned}$$

2. Диференціальне числення функцій однієї змінної

Нехай задано неперервну функцію $y = f(x)$ з областю визначення $D(y)$. Надамо аргументу x довільного приросту Δx такого, щоб точка $x + \Delta x$ також належала $D(y)$. Знайдемо приріст функції: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Похідною функції $y = f(x)$ в точці x називається границя відношення приросту функції Δy в цій точці до приросту аргументу Δx , коли приріст аргументу прямує до нуля, тобто

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Похідну функції $y = f(x)$ в точці x позначають ще й такими символами: y'_x ; $\frac{dy}{dx}$; $\frac{df}{dx}$; $f'(x)$.

Нехай аргументом функції f є функція $u(x)$, тоді $y = f(u(x))$ - складена функція з проміжним аргументом u і кінцевим аргументом x . Похідна складеної функції обчислюється за формулою: $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Таблиця похідних

$$1. (u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$$

$$2. \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$$

$$3. \left(\frac{a}{u^2}\right)' = -\frac{a}{u^2} \cdot u'$$

$$4. (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$$

$$5. (\sqrt[n]{u})' = \frac{1}{n \sqrt[n]{u^{n-1}}} \cdot u'$$

$$6. (\sin u)' = \cos u \cdot u'$$

$$7. (\cos u)' = -\sin u \cdot u'$$

$$8. (\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$$

$$9. (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$$

$$10. (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$

$$11. (\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$

$$12. (\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

$$13. (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

$$14. (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$$

$$15. (\lg u)' = \frac{1}{u \ln 10} \cdot u'$$

$$16. (\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$$

$$17. (a^u)' = a^u \ln a \cdot u' \qquad 18. (e^u)' = e^u \cdot u'$$

Вважатимемо, що $u = u(x)$, $v = v(x)$ - диференційовні функції, C - стала величина.

Правила диференціювання:

$$1. C' = 0; \quad 2. (C \cdot u)' = C \cdot u'; \quad 3. (u \pm v)' = u' \pm v';$$

$$4. (uv)' = u'v + uv'; \qquad 5. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$$

$$6. y = f(x), \text{ обернена функція } x = \varphi(y), \text{ тоді } y'_x = \frac{1}{x'_y};$$

$$7. \text{ Функція задана параметрично: } y = y(t), \quad x = x(t), \text{ тоді}$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Приклад 2.1. Знайти похідні функцій:

$$\text{а) } y = \sin^3 x; \quad \text{б) } y = e^x \cdot \operatorname{tg} 2x; \quad \text{в) } y = \frac{x^5}{2^x};$$

$$\text{г) } y = \ln \operatorname{ctg} x^4; \quad \text{д) } x = a \cos t^2, \quad y = a \sin t^2.$$

$$\text{Розв'язання. а) } y' = 3 \sin^2 x \cdot \cos x$$

$$\text{б) } y' = (e^x)' \operatorname{tg} 2x + e^x \cdot (\operatorname{tg} 2x)' = e^x \cdot \operatorname{tg} 2x + \frac{2e^x}{\cos^2 2x};$$

$$\text{в) } y' = \frac{5x^4 \cdot 2^x - x^5 \cdot 2^x \ln 2}{(2^x)^2} = \frac{5x^4 - x^5 \ln 2}{2^x};$$

г)

$$y' = \frac{1}{\operatorname{ctg} x^4} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x^4} \right) \cdot 4x^3 = -\frac{4x^3}{\cos x^4 \sin x^4} = -\frac{8x^3}{\sin 2x^4};$$

$$\text{д) } y'_x = \frac{(a \cos t^2)'_t}{(a \sin t^2)'_t} = \frac{2at \cos t^2}{-2at \sin t^2} = -\operatorname{ctg} t^2.$$

Щоб продиференціювати неявно задану функцію, потрібно взяти похідну по x від обох частин рівності $F(x, y) = 0$, вважаючи y функцією від x , і одержане рівняння розв'язати відносно y'_x . Похідна неявної функції виражається через незалежну змінну x і саму функцію y .

Приклад 2.2. Знайти похідну y'_x , якщо

$$x^2 + y^2 - 2y + 3x = 1.$$

Розв'язання. $2x + 2yy' - 2y' + 3 = 0, \Rightarrow$

$$y'(2y - 2) = -2x - 3, \Rightarrow y' = \frac{-2x - 3}{2y - 2} = \frac{2x + 3}{2 - 2y}.$$

Похідні вищих порядків знаходять за формулами:

якщо функція $y = f(x)$, то $y'' = (y'(x))'$, $y''' = (y''(x))'$;

якщо задана параметрично, то

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}, \text{ або } y''_{xx} = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt}}{(x'_t)^3}, y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}.$$

З означення похідної $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ і властивостей

нескінченно малих величин випливає рівність:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha(x, \Delta x), \text{ де } \alpha(x, \Delta x) \rightarrow 0 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0, \text{ звідки}$$

$$\Delta y = y' \cdot \Delta x + \alpha(x, \Delta x) \cdot \Delta x.$$

Перший з доданків лінійний відносно Δx , а другий доданок — нескінченно мала вищого порядку, ніж Δx , при $\Delta x \rightarrow 0$, тому що

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x, \Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(x, \Delta x) = 0.$$

Цей доданок не є лінійним відносно Δx , тобто містить Δx в степені вищому від одиниці. Таким чином, перший доданок є головною частиною приросту функції.

Диференціалом dy функції $y = f(x)$ в точці називається головна, лінійна відносно Δx , частина приросту функції f в цій точці:

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x, \text{ або } dy = f'(x) \cdot dx, \text{ оскільки } dx = \Delta x.$$

Для достатньо малих значень Δx приріст $\Delta y \approx dy$. Дістанемо формулу наближеного обчислення значень функції:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x.$$

Приклад 2.3. Користуючись поняттям диференціала, знайти наближене значення функції $y = \sqrt[5]{\frac{2-x}{2+x}}$ в точці $x = 0,15$ та перевірити себе безпосередньо з калькулятором, вписавши результат з більшою кількістю десяткових знаків.

Розв'язання. Щоб скористатися формулою наближеного обчислення візьмемо за $x = 0$, а $\Delta x = 0,15$. Тоді

$$y' = \frac{1}{5} \left(\frac{2-x}{2+x} \right)^{-\frac{4}{5}} \cdot \left(\frac{2-x}{2+x} \right)' = \frac{1}{5} \sqrt[5]{\left(\frac{2+x}{2-x} \right)^4} \cdot \frac{(-4)}{(2+x)^2};$$

$$y'(0) = -\frac{1}{5}, \quad dy = -\frac{1}{5} \cdot 0,15 = -0,03.$$

Остаточно, маємо

$$y(0,15) \approx y(0) + dy = 1 - 0,03 = 0,97.$$

Точніше значення $y(0,15) \approx 0,97039$ з точністю до 10^{-5} .

Бачимо, що ми отримали результат з точністю до 10^{-3} .

Точки локального максимуму і локального мінімуму називаються точками локального екстремуму. Точки, в яких

похідна $f'(x)$ дорівнює нулю або не існує, називаються критичними точками.

Необхідна умова екстремуму:

в точках екстремуму похідна $f'(x)$ дорівнює нулю або не існує.

Достатні умови екстремуму:

I. Нехай функція f неперервна в деякому околі точки x_0 .

1) якщо при переході через точку x_0 похідна змінює знак з $+$ на $-$, то в точці x_0 функція досягає максимуму;

2) якщо при переході через точку x_0 похідна змінює знак з $-$ на $+$, то в точці x_0 функція досягає мінімуму;

3) якщо при переході через точку x_0 похідна не змінює знаку, то екстремуму немає.

II. Нехай в критичній точці x_0 функція f двічі диференційовна (це означає, що $f'(x_0) = 0$) і в околі точки x_0 існує друга неперервна похідна, причому $f''(x_0) \neq 0$. Тоді: якщо $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка локального максимуму; якщо $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка локального мінімуму.

Інтервали опуклості і вгнутості знаходять з умови.

Нехай функція $y = f(x)$ є двічі диференційовною на $(a; b)$, тоді: 1) якщо $f''(x) < 0$, то крива $y = f(x)$ опукла (опукла вгору) на $(a; b)$;

2) якщо $f''(x) > 0$, то крива $y = f(x)$ вгнута (опукла вниз) на $(a; b)$.

Якщо $f''(x_0) = 0$ або не існує, але $f(x)$ неперервна в точці x_0 , і при цьому, друга похідна $f''(x)$ змінює знак при переході

через точку x_0 , то точка $(x_0; f(x_0))$ є точкою перегину кривої.

Пряма лінія називається асимптотою для кривої $y = f(x)$, якщо відстань від точки М, що лежить на кривій, до цієї прямої прямує до нуля при русі точки М вздовж якої-небудь гілки кривої в нескінченність.

Є три види асимптот: вертикальні, горизонтальні і похилі:

1) якщо хоча б одна із односторонніх границь функції f в точці x_0 дорівнює нескінченності, то пряма $x = x_0$ — вертикальна асимптота;

2) якщо $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = A$, то пряма $y = A$ — горизонтальна асимптота (права при $x \rightarrow +\infty$ і ліва при $x \rightarrow -\infty$);

3) якщо існують границі

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k_1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - k_1 x) = b_1,$$

то пряма $y = k_1 x + b_1$ — похила асимптота (права).

Якщо існують границі

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = k_2, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - k_2 x) = b_2,$$

то пряма $y = k_2 x + b_2$ — похила асимптота (ліва).

Загальне дослідження функцій та побудову їх графіків зручно виконувати, наприклад, за такою схемою.

1. Знайти область існування функції.
2. Знайти точки перетину графіка з координатними осями, нулі та інтервали знакосталості функції. Дослідити функцію на періодичність, парність та непарність.
3. Вказати множину неперервності функції, точки розриву, їх рід та наявність вертикальних асимптот.
4. Знайти інтервали монотонності, точки локальних екстремумів та значення функції в цих точках.
5. Знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину, обчислити значення функції в цих точках.
6. Знайти асимптоти графіка функції на нескінченності.
7. Побудувати графік функції, враховуючи дослідження.

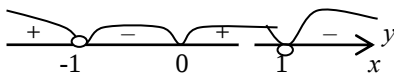
Вказати множину значень функції та чи обмежена функція на своїй області визначення.

Приклад 2.4. Дослідити та побудувати графік функції

$$y = \frac{x^3}{1-x^2}.$$

Розв'язання. 1. Область існування – вся числова вісь, крім точок $x = \pm 1$.

2. Якщо $x = 0$, то $y = 0$, тому графік перетинає осі координат в точці $O(0; 0)$.



Функція не періодична, бо точок розриву тільки дві. Оскільки

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{1-(-x)^2} = -\frac{x^3}{1-x^2} = -f(x), \text{ то функція непарна, тому}$$

досліджуватимемо її лише для $x \geq 0$.

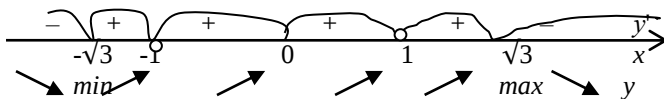
3. Функція елементарна, тому неперервна на своїй області визначення, тобто на $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$. В точці $x = 1$ (також в точці $x = -1$) є розрив другого роду, бо

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^3}{1-x^2} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^3}{1-x^2} = +\infty.$$

Пряма $x = 1$ – вертикальна асимптота кривої. Аналогічно, пряма $x = -1$ буде вертикальною асимптотою кривої.

$$4. \quad y' = \frac{3x^2(1-x^2) - x^3(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{3x^2 - 3x^4 + 2x^4}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2};$$

Похідна дорівнює нулю при $x = 0$, $x = \pm\sqrt{3}$, не існує в точках $x = \pm 1$.



В точці $x_3 = +\sqrt{3}$ функція має локальний максимум:

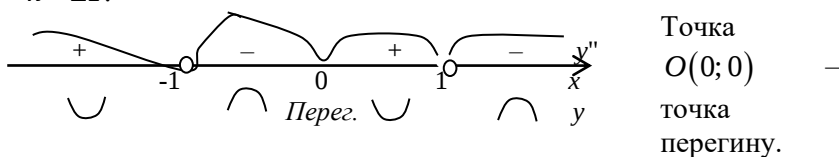
$y_{\max} = f(\sqrt{3}) \approx -2,6$; відповідно в точці $x_1 = -\sqrt{3}$ функція має локальний мінімум: $y_{\min} = f(-\sqrt{3}) \approx 2,6$.

5. Знаходимо другу похідну:

$$y'' = \left(\frac{3x^2 - x^4}{(1-x^2)^2} \right)' = \frac{(6x - 4x^3)(1-x^2)^2 - (3x^2 - x^4)2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4} =$$

$$= \frac{(1-x^2)(6x - 4x^3 - 6x^3 + 4x^5 + 12x^3 - 4x^5)}{(1-x^2)^4} = \frac{2x^3 + 6x}{(1-x^2)^3}.$$

$y'' = \frac{2x(x^2 + 3)}{(1-x^2)^3}$. Похідна $f''(x) = 0$ при $x = 0$ і не існує при $x = \pm 1$.



6. Дослідимо криву на наявність похилої асимптоти.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{(1-x^2) \cdot x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x - x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2} - 1} = -1,$$

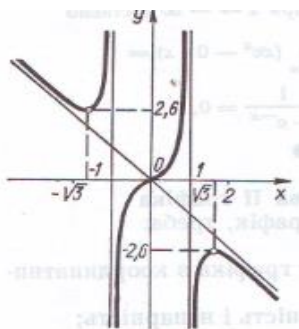
$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3}{1-x^2} - (-1) \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{1-x^2} = 0,$$

то при $x \rightarrow \pm\infty$ задана крива має похилу асимптоту $y = -x$

Горизонтальних асимптот немає, бо

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{1-x^2} = \pm\infty.$$

8. Враховуючи проведене дослідження будемо графік. З графіка отримуємо область значень функції $E(y) = (-\infty; +\infty)$. Функція не обмежена на свій ОДЗ.



3. Диференціальне числення функцій двох змінних

Якщо кожній точці $M(x; y) \in D$ за певним законом f відповідає одне і тільки одне дійсне значення z , то кажуть, що на множині D визначено функцію від двох незалежних змінних x і y , і записують $z = f(x, y)$, або $z = z(x, y)$.

При цьому множину D називають областю визначення функції, або областю існування функції $z = f(x, y)$.

Графіком функції двох змінних є геометричне місце точок $(x; y; z(x, y))$ тривимірного простору R_3 , тобто функція $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ визначає деяку поверхню, проекція якої на площину Oxy є областю визначення D .

Для уявлення графіка функції двох змінних вводять лінії рівня, які визначаються рівнянням $f(x, y) = c$, де c - довільні сталі взяті з множини $E(f)$ значень функції. Дане рівняння задає деяку однопараметричну (c - параметр) сім'ю кривих на площині Oxy - топологічну карту поверхні.

Геометрично, лінії рівня - це проекції ліній перерізу поверхні $z = f(x, y)$ площинами $z = c$ на площину Oxy .

Нехай функція $f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $(x_0; y_0)$. Величина $\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ називається повним приростом функції $f(x, y)$ в точці $(x_0; y_0)$.

Функція $f(x, y)$ називається неперервною в точці $(x_0; y_0)$, якщо повний приріст її в цій точці прямує до нуля,

при умові, що прирости її аргументів x та y прямують до нуля, тобто $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z(x_0, y_0) = 0$.

Частинною похідною функції $z = f(x, y)$ в точці $(x_0; y_0)$ по змінній x називають границю відношення частинного приросту $\Delta_x f$ до приросту Δx при прямуванні Δx до нуля і позначають: $\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}$, або $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$, або $z'_x(x_0, y_0)$.

Таким чином

$$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Частинною похідною функції $z = f(x, y)$ по змінній y в точці $(x_0; y_0)$ називається границя відношення частинного приросту $\Delta_y f$ до приросту Δy при прямуванні Δy до нуля і позначають: $\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y}$, або $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$, або $z'_y(x_0, y_0)$.

Таким чином

$$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Щоб знайти частинну похідну функції $z = f(x, y)$ по x , змінну y вважаємо сталою, а при знаходженні частинної похідної по y , змінну x вважаємо сталою. $\left| \frac{\partial z}{\partial x} \right|$ та $\left| \frac{\partial z}{\partial y} \right|$

визначають величину швидкості з якою відбувається зміна функції z при зміні тільки x , або тільки y , а знак частинної похідної $\frac{\partial z}{\partial x}$, або $\frac{\partial z}{\partial y}$ вказує на характер зміни (зростання чи спадання) функції в напрямі осі Ox , або Oy .

Функція $z = f(x, y)$ називається диференційовною в точці $(x; y) \in D$, якщо в деякому околі U цієї точки її повний приріст Δz можна подати у вигляді

$$\Delta z = \frac{\partial f(\tilde{o}, \acute{o})}{\partial \tilde{o}} \Delta \tilde{o} + \frac{\partial f(\tilde{o}, \acute{o})}{\partial \acute{o}} \Delta \acute{o} + \varepsilon_1 \Delta \tilde{o} + \varepsilon_2 \Delta \acute{o},$$

де $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)$ і $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)$ – нескінченно малі функції при $\Delta x \rightarrow 0$ і $\Delta y \rightarrow 0$.

Лінійну (головну) відносно Δx і Δy частину повного приросту диференційовної в точці $(x; y)$ функції $z = f(x, y)$ називають повним диференціалом функції в цій точці і позначають:

$$dz = \frac{\partial f(\tilde{o}, \acute{o})}{\partial \tilde{o}} d\tilde{o} + \frac{\partial f(\tilde{o}, \acute{o})}{\partial \acute{o}} d\acute{o}.$$

Диференціали незалежних змінних x та y назовемо прирости цих змінних $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$.

Геометричне тлумачення диференціала полягає в тому, що dz є приростом аплікати дотичної площини до поверхні $z = f(x, y)$ в точці дотику $(x; y)$.

Для функції $z = f(x, y)$ диференційовної в точці $(x; y)$ повний приріст $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

$$\text{Звідси } f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \Delta z.$$

Для достатньо малих Δx і Δy виконується наближена рівність: $\Delta z \approx dz$,

$$\text{де } dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Тоді отримаємо наближену рівність, яка застосовується при наближених обчисленнях:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Нехай в просторі R_3 задано поверхню неявним рівнянням $F(x, y, z) = 0$, і точку $P_0(x_0; y_0; z_0)$ на цій поверхні. Функція $F(x, y, z)$ є диференційовною в цій точці. Тоді рівняння дотичної площини до поверхні в цій точці матиме вигляд:

$$F'_x(P_0)(x - x_0) + F'_y(P_0)(y - y_0) + F'_z(P_0)(z - z_0) = 0,$$

а рівняння нормалі:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(P_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(P_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(P_0)}.$$

Якщо поверхню задано явним рівнянням $z = f(x, y)$, то рівняння дотичної площини буде таким:

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

а рівняння нормалі: $\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$.

Частинні похідні першого порядку $f'_x(x, y)$ і $f'_y(x, y)$ в загальному випадку також є функціями від двох змінних x і y . Якщо ці функції ще раз продиференціювати по x , або по y , то дістанемо похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = z''_{xx}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = z''_{yy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = z''_{xy}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = z''_{yx}.$$

Теорема 1. (Про рівність мішаних частинних похідних)

Якщо функція $z = f(x, y)$ та її частинні похідні другого порядку z''_{xy} та z''_{yx} неперервні в деякому околі точки $(x; y)$, то $z''_{xy} = z''_{yx}$ в точці $(x; y)$.

Формула диференціала другого порядку d^2z має вигляд:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

Функція $z = f(x, y)$ має локальний максимум в точці $(x_0; y_0)$, якщо $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ для всіх точок (x, y) , які належать деякому околу точки $(x_0; y_0)$.

Функція $z = f(x, y)$ має локальний мінімум в точці $(x_0; y_0)$, якщо $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ для всіх точок (x, y) , які належать деякому околу точки $(x_0; y_0)$.

Теорема 2. (Необхідні умови екстремуму). Якщо диференційовна функція $z = f(x, y)$ має в точці $(x_0; y_0)$ локальний екстремум, то в цій точці частинні похідні першого порядку по змінних x і y дорівнюють нулю:

$$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y} = 0.$$

Точка $M_0(x_0; y_0)$ для якої виконується необхідні умови називається стаціонарною.

Позначимо величини:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0, y_0).$$

$$\text{Обчислимо визначник: } \Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Теорема 3. (Достатні умови екстремуму). Якщо для функції $z = f(x, y)$ виконані необхідні умови екстремуму в деякій точці $M_0(x_0; y_0)$, то в цій точці функція:

1) має локальний екстремум якщо $\Delta > 0$, причому – має максимум, якщо $A < 0$, та мінімум, якщо $A > 0$;

2) не має локального екстремуму, якщо $\Delta < 0$.

Щоб знайти найбільше і найменше значення функції в замкненій області, необхідно:

1) знайти стаціонарні точки; якщо точки належать області, то обчислюють значення функції в цих точках; на екстремум ці точки досліджувати не треба;

2) знайти найбільше і найменше значення функції на межі області; якщо межа складається із кількох кривих – на кожній з них;

3) порівняти знайдені значення і встановити яке з них найбільше, а яке найменше.

Область простору, кожній точці M якої поставлено у відповідність значення деякої скалярної величини $u(M)$ називають скалярним полем.

Наприклад, поле температур, поле густин речовини.

Якщо функція $u(M)$ не залежить від часу, то скалярне поле називається *стаціонарним*. Якщо функція $u(M)$ змінюється з часом, то поле називається *нестационарним*. Якщо функція $u(M)$ залежить від двох змінних, то поле називається *плоским*, а від трьох змінних – *просторовим*.

Геометрично плоскі поля зображаються за допомогою ліній рівня, які визначаються рівняннями $u(x, y) = c$, а просторові – поверхонь рівня $u(x, y, z) = c$, де c – стала величина.

Важливою характеристикою скалярного поля є швидкість зміни поля в заданому напрямі.

Розглянемо плоске скалярне поле визначене функцією $z = f(x, y)$ в деякій області, що містить точку $M(x; y)$.

З цієї точки M проведемо вектор $\vec{l}$, напрямні косинуси якого $\cos \alpha$, $\cos \beta$.

На векторі $\vec{l}$ на відстані Δl від його початку візьмемо точку $M_1(x + \Delta x; y + \Delta y)$. Тоді $\Delta l = MM_1 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. При

переході від точки M до точки M_1 в напрямі вектора $\vec{l}$ функція $z = f(x, y)$ отримає приріст $\Delta z_l = z(M_1) - z(M)$.

Якщо існує границя відношення приросту функції Δz_l в даному напрямі до приросту довжини Δl , якщо Δl прямує до нуля, то цю границю називають похідною функції $f(x, y)$ в точці M за даним напрямом $\vec{l}$ і позначають $\frac{\partial z}{\partial l}$.

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta z_l}{\Delta l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta,$$

де $\cos \alpha = \frac{\Delta x}{\Delta l}$, $\cos \beta = \frac{\Delta y}{\Delta l}$ – напрямні косинуси вектора $\vec{l}$.

Вектор, координати якого є частинні похідні, називається градієнтом і позначається: $\overrightarrow{\text{grad}} z = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j}$.

Отже, похідна в скалярного поля в точці в напрямку деякого вектора є проекцією вектора-градієнта скалярного поля в точці на цей вектор-напрямок. Тому градієнт визначає напрям, в якому швидкість зміни скалярного поля в даній точці найбільша, і ця швидкість рівна довжині градієнта.

Тому градієнт поля в даній точці перпендикулярний до лінії рівня поля в цій самій точці та, якщо вектор $\vec{l} \perp \overrightarrow{\text{grad}} z$, то $\frac{\partial z}{\partial l} = 0$.

Приклад 3.1. Знайти похідну функції $z = f(x, y)$ в точці $A(x_A; y_A)$ за напрямом вектора проведеного від точки A до точки $B(x_B; y_B)$. З'ясувати характер зміни поля в даному напрямі. Знайти абсолютну величину градієнта цієї ж функції в точці A та перевірити себе за властивістю цієї величини.

Дано: функція $z = 2x^2 + 3y^2 - x - 4y$, $A(1; 2)$, $B(4; 6)$.

Розв'язання. Знайдемо вектор $\vec{\ell} = \overrightarrow{AB}$ і його напрямні косинуси: $\vec{\ell} = \overrightarrow{AB} = (4-1, 6-2) = (3, 4)$, $|\vec{\ell}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$,

$$\cos \alpha = \frac{\ell_x}{|\vec{\ell}|} = \frac{3}{5} = 0,6, \quad \cos \beta = \frac{\ell_y}{|\vec{\ell}|} = \frac{4}{5} = 0,8.$$

Знайдемо частинні похідні першого порядку $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x - 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 6y - 4.$$

Обчислимо значення частинних похідних в точці А:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(A) = 4 \cdot 1 - 1 = 3, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(A) = 6 \cdot 2 - 4 = 8.$$

Обчислимо похідну функції z в точці А за напрямом вектора $\vec{\ell}$ за формулою:

$$\frac{\partial z}{\partial \ell}(A) = \frac{\partial z}{\partial x}(A) \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y}(A) \cos \beta.$$

$$\text{Отже, } \frac{\partial z}{\partial \ell}(A) = 3 \cdot 0,6 + 8 \cdot 0,8 = 8,2.$$

Оскільки $\frac{\partial z}{\partial \ell}(A) = 8,2 > 0$, то задана функція

$z = -4 + 6x - x^2 - xy - y^2$ за напрямом вектора $\vec{\ell} = (3, 4)$ зростає.

Гradient функції обчислимо за формулою

$$\overrightarrow{\text{grad}} z(A) = \frac{\partial z}{\partial x}(A) \cdot \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}(A) \cdot \vec{j}.$$

Отже, $\overrightarrow{\text{grad}} z(A) = 3 \cdot \vec{i} + 8 \cdot \vec{j}$. Довжина градієнта є $\sqrt{9 + 64} \approx 8,544$ та $|8,2| \leq 8,544$.

Приклад 3.2. Функцію $z = -4 + 6x - x^2 - xy - y^2$ дослідити на екстремум.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні першого порядку $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6 - 2x - y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x - 2y.$$

Прирівняємо їх до нуля і розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 6 - 2x - y = 0, \\ -x - 2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2y, \\ 6 + 4y - y = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} y = -2, \\ x = 4. \end{cases}$$

Отже, функція має одну стаціонарну точку $M_0(4; -2)$.

Знайдемо частинні похідні другого порядку і їх значення у точці M_0 :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2.$$

Частинні похідні другого порядку є сталими величинами в будь-якій точці області визначення, в тому числі і в точці M_0 , тому

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0) = -2, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_0) = -1, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_0) = -2.$$

Визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = (-2)(-2) - (-1)^2 = 3 > 0.$$

Оскільки $\Delta > 0$ і одночасно $A < 0$, то в точці $M_0(4, -2)$ дана функція має максимум, причому

$$z_{\max} = z(M_0) = z(4, -2) = 8.$$

4. Інтегральне числення функцій однієї змінної

Таблиця інтегралів

- | | |
|--|--|
| 1. $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1.$ | 2. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C.$ |
| 3. $\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C.$ | 4. $\int \frac{du}{u} = \ln u + C.$ |
| 5. $\int e^u du = e^u + C.$ | 6. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C.$ |
| 7. $\int \sin u du = -\cos u + C.$ | 8. $\int \cos u du = \sin u + C.$ |
| 9. $\int \frac{du}{1+u^2} = \arctg u + C.$ | 10. $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C.$ |
| 11. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{u}{a} + C$ | 12. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$ |
| 13. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{u-a}{u+a} \right + C.$ | |
| 14. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a}} = \ln \left u + \sqrt{u^2 \pm a} \right + C$ | |

Властивості невизначеного інтегралу

- а) $\left(\int f(x) dx \right)' = f(x);$ б) $d \left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx;$
в) $\int df(x) = f(x) + C;$ г) $\int Af(x) dx = A \int f(x) dx,$ A – стала.
д) $\int [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx;$
е) $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C,$ де $\int f(x) dx = F(x) + C.$

Зразки знаходження невизначених інтегралів

Приклад 4.1. Знайти інтеграл $\int (2 \sin x + 3^x + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}) dx,$

скориставшись властивістю:

$$\int (k_1 f_1(x) \pm k_2 f_2(x)) dx = k_1 \int f_1(x) dx \pm k_2 \int f_2(x) dx.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int \left(2 \sin x + 3^x + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx &= 2 \int \sin x dx + \int 3^x dx + \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \\ &= -2 \cos x + \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2} + C. \end{aligned}$$

Приклад 4.2. Методом безпосереднього інтегрування знайти інтеграл $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$.

Розв'язання. Скористаємося такою формулою тригонометрії: $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$. Тоді

$$\begin{aligned} \int \cos^2 \frac{x}{2} dx &= \frac{1}{2} \int (1 + \cos x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos x dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \sin x + C. \end{aligned}$$

Приклад 4.3. Знайти інтеграл $\int \frac{x dx}{1+x^2}$ методом підстановки.

Розв'язання. Позначимо $t = 1 + x^2$, $dt = 2x dx$. Звідси $x dx = \frac{1}{2} dt$. Тоді $\int \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln |t| + C = \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C$.

Цей же інтеграл можна знайти методом підведення під знак диференціала, враховуючи, що $d(1+x^2) = 2x dx$, тобто

$$x dx = \frac{1}{2} d(1+x^2). \text{ Тоді } \int \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C.$$

Приклад 4.4. Методом інтегрування частинами знайти інтеграл $\int (x+2) \sin 3x dx$.

Розв'язання. Запишемо формулу інтегрування частинами:

$$\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du$$

$$\begin{aligned} \int (x+2) \sin 3x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x+2, \quad du = dx \\ dv = \sin 3x dx, \quad v = -\frac{1}{3} \cos 3x \end{array} \right| = \\ &= -\frac{1}{3}(x+2) \cos 3x - \left(-\frac{1}{3} \right) \int \cos 3x dx = \\ &= -\frac{1}{3}(x+2) \cos 3x + \frac{1}{9} \sin 3x + C. \end{aligned}$$

Приклад 4.5. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2 + 6x + 5}}$.

$$\begin{aligned} \text{Розв'язання.} \int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2 + 6x + 5}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{-4\left(x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{4}\right)}} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2 - 2 \cdot \frac{3}{4}x + \frac{9}{16} - \frac{9}{16} - \frac{5}{4})}} = \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x - \frac{3}{4}\right)}{\sqrt{\frac{29}{16} - \left(x - \frac{3}{4}\right)^2}} = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{Скористаємося табличним інтегралом} \\ \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C, / u = x - \frac{3}{4}, / a^2 = \frac{29}{16} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{29}}{4} \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \arcsin \frac{x - \frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{29}}{4}} + C = \frac{1}{2} \arcsin \frac{4x - 3}{\sqrt{29}} + C. \end{aligned}$$

Приклад 4.6. Знайти інтеграл $\int \frac{x-3}{x^2 + 2x + 4} dx$.

Розв'язання. $(x^2 + 2x + 4)' = 2x + 2$.

$$\int \frac{x-3}{x^2 + 2x + 4} dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2) + (-3-1)}{x^2 + 2x + 1 + 3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(2x+2) dx}{x^2 + 2x + 4} -$$

$$-4 \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 + 3} = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 2x + 4| - \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Приклад 4.7. Знайти інтеграл $\int \frac{x \, dx}{(x-2)(x+3)}.$

Розв'язання. Підінтегральна функція $\frac{x}{(x-2)(x+3)}$ є

правильним раціональним дробом. Розкладемо цей дріб на суму простих дробів:

$$\frac{x}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3) + B(x-2)}{(x-2)(x+3)}.$$

З рівності двох дробів випливає рівність:

$$A(x+3) + B(x-2) = x.$$

Знайдемо значення коефіцієнтів A і B :

якщо $x = 2$, то $5A = 2$, тобто $A = \frac{2}{5}$;

якщо $x = -3$, то $-5B = -3$, тобто $B = \frac{3}{5}$.

Таким чином, дріб $\frac{x}{(x-2)(x+3)} = \frac{\frac{2}{5}}{x-2} + \frac{\frac{3}{5}}{x+3}.$

Тоді

$$\int \frac{x \, dx}{(x-2)(x+3)} = \frac{2}{5} \int \frac{dx}{x-2} + \frac{3}{5} \int \frac{dx}{x+3} = \frac{2}{5} \ln |x-2| + \frac{3}{5} \ln |x+3| + C.$$

Приклад 4.8. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{2 \cos x - 3 \sin x + 1}.$

Розв'язання. Зведемо даний інтеграл до інтегралу від раціональної функції за допомогою універсальної тригонометричної підстановки $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Звідси $dx = \frac{2 \, dt}{1+t^2},$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Тоді інтеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2 \cos x - 3 \sin x + 3} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2 \frac{1-t^2}{1+t^2} - 3 \frac{2t}{1+t^2} + 3} = 2 \int \frac{dt}{2 - 2t^2 - 6t + 3 + 3t^2} = \\ &= 2 \int \frac{dt}{t^2 - 6t + 5} = 2 \int \frac{dt}{(t-3)^2 - 4} = 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot 2} \ln \left| \frac{t-3-2}{t-3+2} \right| + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-5}{t-1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{tg \frac{x}{2} - 5}{tg \frac{x}{2} - 1} \right| + C. \end{aligned}$$

Приклад 4.9. Знайти інтеграл $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cos^2 x \, dx &= \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x \, dx = - \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \, d(\cos x) = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{застосуємо} \\ \text{підстановку} \\ \cos x = t \end{array} \right| = - \int (1 - t^2) t^2 \, dt = \int (t^4 - t^2) \, dt = \\ &= \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + C = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C. \end{aligned}$$

Приклад 4.10. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{(1 + \sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$.

Розв'язання. Змінна x в підінтегральній функції стоїть у степені $1/3$ і $1/2$. Спільним знаменником цих дробів є число 6. Тому тут застосуємо підстановку $x = t^6$. Тоді $dx = 6t^5 dt$, $\sqrt[3]{x} = t^2$, $\sqrt{x} = t^3$, $t = \sqrt[6]{x}$. Підставляємо знайдені величини в інтеграл.

Маємо

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}} &= \int \frac{6t^5 dt}{(1+t^2)t^3} = 6 \int \frac{t^2 dt}{t^2+1} = 6 \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt = \\ &= 6 \int \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right) dt = 6(t - \arctg t) + C = 6(\sqrt[6]{x} - \arctg \sqrt[6]{x}) + C. \end{aligned}$$

Визначений інтеграл і його застосування Зразки розв'язування завдань

Приклад 4.11. Довести існування невласного інтегралу.

Обчислити невласний інтеграл першого роду $\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$, або встановити його розбіжність.

Розв'язання. ОДЗ підінтегральної функції $\in \mathbb{R}$, тому невласний інтеграл існує. За означенням, маємо

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \arctg x \Big|_1^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (\arctg b - \arctg 1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Отже, інтеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ збігається.

Приклад 4.12. Довести існування невласного інтегралу.

Обчислити невласний інтеграл другого роду $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$, або встановити його розбіжність.

Розв'язання. ОДЗ підінтегральної функції $y = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \in (1; +\infty)$, тому це є невласний інтеграл II роду з особливістю в точці $x=1$. Також підінтегральна функція має розрив другого роду в точці $x=1$, тому за означенням

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{b \rightarrow 1-0} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = - \lim_{b \rightarrow 1-0} 2\sqrt{1-x} \Big|_0^b =$$

$$= -2 \lim_{b \rightarrow 1-0} (\sqrt{1-b} - 1) = -2(-1) = 2. \text{ Інтеграл збігається.}$$

Приклад 4.13. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої параболою $y = \frac{1}{4}(x-2)^2$ і прямою $x + 2y - 14 = 0$.

Розв'язання. Знайдемо точки перетину даних ліній. З рівняння прямої $x + 2y - 14 = 0$ знаходимо $y = 7 - \frac{x}{2}$. Складемо

систему рівнянь
$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}(x-2)^2, \\ y = 7 - \frac{x}{2}. \end{cases}$$
 Підставляємо в перше рівняння

системи замість y різницю $7 - \frac{x}{2}$, отримаємо $7 - \frac{x}{2} = \frac{1}{4}(x-2)^2$,
 $\Rightarrow 28 - 2x = x^2 - 4x + 4, \Rightarrow x^2 - 2x - 24 = 0$.

За теоремою Вієта знаходимо корені квадратного рівняння: $x_1 = -4$, $x_2 = 6$. Відповідно, $y_1 = 7 - \frac{(-4)}{2} = 9$, а $y_2 = 4$.

Таким чином, парабола і пряма перетинаються в точках $A(-4;9)$ і $B(6;4)$ (рис.2).

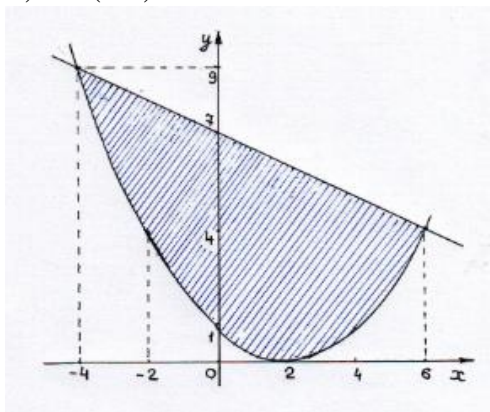


Рис. 2

Площа плоскої фігури, обмеженої зверху неперервною кривою $y = f(x)$, знизу – неперервною кривою $y = \varphi(x)$, зліва – прямою $x = a$ і справа – прямою $x = b$, обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b (f(x) - \varphi(x)) dx.$$

Оскільки зверху фігура обмежена прямою $y = 7 - \frac{x}{2}$, а знизу – параболою $y = \frac{1}{4}(x-2)^2$, то площа

$$\begin{aligned} S &= \int_{-4}^6 \left(7 - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}(x-2)^2 \right) dx = \int_{-4}^6 \left(7 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + x - 1 \right) dx = \\ &= \int_{-4}^6 \left(6 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} \right) dx = \left(6x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{12} \right) \Big|_{-4}^6 = \\ &= 36 + 9 - 18 + 24 - 4 - \frac{16}{3} = 41\frac{2}{3} \text{ (кв. од.)}. \end{aligned}$$

Приклад 4.14. Знайти площу фігури, обмеженої кривою $\rho = a \cos 2\varphi$.

Розв'язання. Оскільки $\rho \geq 0$, то $-\pi/2 + 2\pi k \leq 2\varphi \leq \pi/2 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Звідси $-\pi/4 + \pi k \leq \varphi \leq \pi/4 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Через парність косинуса достатньо побудувати криву при $\varphi \in [0; \pi/4]$.

$$\varphi \quad 0 \quad \pi/6 \quad \pi/4$$

$$\rho \quad a \quad a/2 \quad 0$$

Дана крива та плоска фігура симетрична відносно полярної осі і відносно полюса, складається з чотирьох рівновеликих частин (рис.3), тому площа згідно формули

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi \text{ дорівнює:}$$

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} a^2 \cos^2 2\varphi d\varphi = a^2 \int_0^{\pi/4} (1 + \cos 4\varphi) d\varphi =$$

$$= a^2 \left(\varphi + \frac{1}{4} \sin 4\varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi a^2}{4} \text{ (кв. од.)}.$$

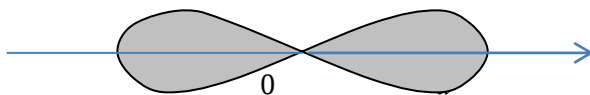


Рис. 3.

Приклад 4.15. Знайти довжину дуги кардіоїди

$$\rho = a(1 + \cos \varphi).$$

Розв'язання. Відома крива з алгебри та геометрії. Крива симетрична відносно полярної осі і $\rho' = -a \sin \varphi$, то довжину

дуги, обчислимо за формулою: $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi$.

Вся крива, складається з двох частин, рівних за довжиною, тому довжина дуги

$$\begin{aligned} L &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{a^2 (1 + \cos \varphi)^2 + (-a \sin \varphi)^2} d\varphi = \\ &= 2a \int_0^{\pi} \sqrt{1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} d\varphi = \\ &= 2\sqrt{2} a \int_0^{\pi} \sqrt{2} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 4a \left[2 \sin \frac{\varphi}{2} \right]_0^{\pi} = 8a \text{ (лін. од.)}. \end{aligned}$$

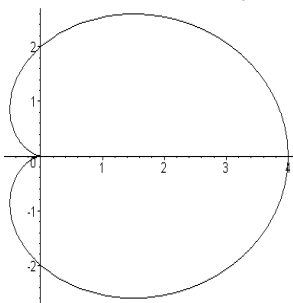


Рис. 4. Кардіоїда з параметром $a = 2$.

Приклад 4.16. Знайти центр маси однорідної плоскої

фігури обмеженої лініями $y = \sqrt{2x}$, $x = 2$ та віссю Ox .

Розв'язання. Координати центра маси однорідної криволінійної трапеції, що прилягає до осі Ox , знаходять за

формулами: $x_c = \frac{M_y}{m}$, $y_c = \frac{M_x}{m}$,

де $m = \int_a^b f(x) dx$ – маса плоскої фігури;

$M_y = \int_a^b x y dx$, де $y = f(x)$ – статичний момент плоскої

фігури відносно осі Oy ;

$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b (f(x))^2 dx$ – статичний момент плоскої фігури

відносно осі Ox .

Зробимо рисунок криволінійної трапеції.

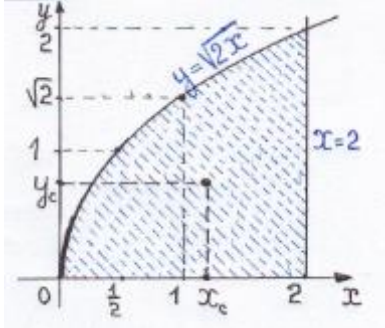


Рис. 5.

Знаходимо величини m , M_y , M_x :

$$m = \int_0^2 \sqrt{2x} dx = \frac{\sqrt{2} \cdot 2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = \frac{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}{3} = \frac{8}{3},$$

$$M_y = \int_0^2 x \sqrt{2x} dx = \frac{\sqrt{2} \cdot 2}{5} x^{\frac{5}{2}} \Big|_0^2 = \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 4}{5} = \frac{16}{5},$$

$$M_x = \frac{1}{2} \int_0^2 (\sqrt{2x})^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^2 2x dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^2 = 2.$$

Отже, координати центра мас будуть такі:

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{16}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{6}{5} = 1,2, \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{2 \cdot 3}{8} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

5. Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопітала.

$$1. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 - 2x}{5x^3 - 3x^2 + x + 4}; \quad 2. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 - 3x^2 + 5}{3x^5 + 4x^2 - x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 - 4x - 4}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - x - 6};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{7-x} - \sqrt{7+x}}{\sqrt{7} x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x + \sin 2x}{6x};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x} \right)^{2x+1}. \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{2x}.$$

$$3. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^6 - x + 5}{x^6 + 3x^2 + 1}; \quad 4. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^5 - 4x^2 + x}{2x^5 + 2x - 3};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{3x^2 - 8x - 3}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 14x - 5}{x^2 - 7x + 10};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{7x \sin 3x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^2 \sin x};$$

- д) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \frac{3x-1}{3x+2}.$
- д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+8} \right)^{-3x}.$
5. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 2x^2 + 4x}{2x^3 + 1};$ б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^4 + x^2 + x}{x^4 + 3x + 2};$
- б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 + 6x - 16};$ б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 7x + 6}{2x^2 + 5x - 7};$
- в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{\sqrt{3x+10} - 4};$ в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 16} - 4}{\sqrt{x^2 + 1} - 1};$
- г) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin 7x \operatorname{ctg} 5x;$ г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2(x-1)}{3x^2 - 6x + 3};$
- д) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{5}{x}+2}.$ д) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2 \sin x)^{\frac{5}{\sin x}}.$
7. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^4 + 6x^2 + 5}{4x^4 - 5x^2 + 3x};$ б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{6x^2 + 4x + 1};$
- б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 - x - 14}{x^2 + 8x + 12};$ б) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{2x^2 - 11x + 5};$
- в) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{\sqrt{x-1} - 2};$ в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4x-3} - 3}{x^2 - 9};$
- г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{4x \sin x};$ г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} 3x}{1 - \cos 6x};$
- д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{2x-3}.$ д) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{\frac{3}{\cos x}}.$
9. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 9}{7x^2 + 10x + 5};$ 10. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 10x^2 - 3}{2x^5 - x^3 + 8};$

$$\text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 - 7x + 6}} ; \quad \text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{3x^2 + 10x + 3}{2x^2 + 5x - 3} ;$$

$$\text{в)} \quad \lim_{x \rightarrow 6} \frac{2x^2 - 72}{x^2 - 7x + 6} ; \quad \text{в)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x^2 + 4}}{3x^2} ;$$

$$\text{г)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{3x \sin x} ; \quad \text{г)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 6x}{3x \sin 6x} ;$$

$$\text{д)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} 3x [\ln(x + 4) - \ln x] . \quad \text{д)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{1 + 2x} \right)^{-4x} .$$

$$11. \text{ а)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 - 4x^2 + 1}{2x^5 - 5x^2 - x} ; \quad 12. \text{ а)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^5 + 1}{3x^5 - 2x + 3} ;$$

$$\text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + x - 2} ; \quad \text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 14x - 5}{x^2 - 6x + 5} ;$$

$$\text{в)} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x + 1} - 4}{x - 3} ; \quad \text{в)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x + 4} - 3}{\sqrt{2x - 1} - 1} ;$$

$$\text{г)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 4x}{x \sin 3x} ; \quad \text{г)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{4x} ;$$

$$\text{д)} \quad (11) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x + 3) [\ln(2 + 4x) - \ln(1 + 4x)] ;$$

$$\text{д)} \quad (12) \quad \lim_{x \rightarrow 2} (7 - 3x)^{\frac{x}{2x - 4}} .$$

$$13. \text{ а)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 - 3x^2 - 2}{2x^6 + 4x + 5} ; \quad 14. \text{ а)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 5}{3x^3 + 2x^2 - x} ;$$

$$\text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 2x - 3} ; \quad \text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2x^2 - 13x - 7}{x^2 - 9x + 14} ;$$

$$\text{в)} \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{2x + 1} - 3} ; \quad \text{в)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{4x + 1} - 3} ;$$

$$\text{r)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \sin 2x \cdot \operatorname{ctg}^2 5x; \quad \text{r)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 7x;$$

$$\text{д)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} (3x-5)^{\frac{x^2}{x-2}}; \quad \text{д)} \quad \lim_{x \rightarrow 3} (3x-8)^{\frac{2}{x-3}}.$$

$$15. \text{ a)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 3x^2 - 1}{2x^3 - 3x + 1}; \quad 16. \text{ a)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{5x^4 - 3x - 2};$$

$$\text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 3x + 2}; \quad \text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - 5x + 6};$$

$$\text{в)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+3x} - \sqrt{4-3x}}{7x}; \quad \text{в)} \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{\sqrt{2x-1} - 3};$$

$$\text{r)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \sin 3x}; \quad \text{r)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{5x};$$

$$\text{д)} \quad (15) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (2x+3) [\ln(x+2) - \ln(x+3)];$$

$$\text{д)} \quad (16) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x+5) [\ln(2x-3) - \ln(2x)].$$

$$17. \text{ a)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^5 - 4x^4 + 2}{3x^5 - 2x - 1}; \quad 18. \text{ a)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^3 - 2x^2 - 1};$$

$$\text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 11x + 5}{x^2 - 7x + 10}; \quad \text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow 6} \frac{2x^2 - 9x - 18}{x^2 - 7x + 6};$$

$$\text{в)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - 3}{x^2 + x}; \quad \text{в)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x+10} - 4}{x-2};$$

$$\text{r)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x \operatorname{tg} 2x}; \quad \text{r)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sin 5x \cdot \operatorname{ctg} 3x;$$

$$\text{д)} \quad (17) \quad \lim_{x \rightarrow 2} (2x-3)^{\frac{x^2}{x-2}};$$

$$\text{д)} \quad (18) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} 3x [\ln(2x) - \ln(2x-3)].$$

19. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^5 - 3x^2 + 1}{2x^5 - 2x + 3}$; 20. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2}{2x^3 - 5x^2 - x}$;
- б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\arctg 6x}$; б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x + 1}{2x^2 + 5x + 3}$;
- в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{4x - 3} - 3}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 2x}{4x}$;
- г) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{3x^2 - 17x - 28}{x^2 - 9x + 14}$; г) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x + 3} - 3}{\sqrt{x - 2} - 1}$;
- д) (19) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + 2) [\ln(x - 1) - \ln(x + 1)]$;
- д) (20) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x + 1) [\ln(x + 3) - \ln(x)]$.

Завдання 2. Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ заданих функцій.

1. а) $y = \sqrt[3]{x^4 + 5x}$; б) $y = \frac{1 + \tg x}{1 - \tg x}$;
- в) $y = x^{\frac{2}{x}}$; г) $y = \arctg \sqrt{x} - \sqrt{x}$;
- д) $x \sin y - y \cos x = 0$; е) $\begin{cases} x = t - \ln t, \\ y = 3t^2 - 2t^3. \end{cases}$
2. а) $y = \frac{x}{\sqrt[3]{2 + x^3}} - \sqrt{2 + x}$; б) $y = \sin^3 2x$;
- в) $y = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$; г) $y = x^{e^x}$;
- д) $e^{xy} - x^2 + y^2 = 0$; е) $\begin{cases} x = t + \ln \cos t, \\ y = t - \ln \sin t. \end{cases}$
3. а) $y = \sqrt{\frac{1 + x^2}{1 - x^2}}$; б) $y = e^{1 + \ln x}$;

$$\text{в)} y = \arctg \frac{1}{x};$$

$$\text{г)} y = x^{\arcsin x};$$

$$\text{д)} y \sin x + \cos x = \cos y;$$

$$\text{е)} \begin{cases} x = 2t - \sin 2t, \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$$

$$4. \text{ а)} y = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x}};$$

$$\text{б)} y = tg \ln \sqrt{x};$$

$$\text{в)} y = 3^{\cos x};$$

$$\text{г)} y = x^{e-x};$$

$$\text{д)} \cos(x-y) - 2x + 4y = 0; \text{ е)} \begin{cases} x = t + 0,5 \sin 2t, \\ y = \cos^2 t. \end{cases}$$

$$5. \text{ а)} y = x + \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}};$$

$$\text{б)} y = \sin \sqrt{1+x^2};$$

$$\text{в)} y = \ln ctg \sqrt[3]{x};$$

$$\text{г)} y = x^{\frac{1}{x^2}};$$

$$\text{д)} x e^y + y e^y = x y;$$

$$\text{е)} \begin{cases} x = t^3 + 2t, \\ y = t^2 + 8t - 1. \end{cases}$$

$$6. \text{ а)} y = \frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}};$$

$$\text{б)} y = \cos \ln^2 x;$$

$$\text{в)} y = (e^{\sin x} - 1)^2;$$

$$\text{г)} y = 2x^{\sqrt{x}};$$

$$\text{д)} \cos(xy) = \frac{y}{x};$$

$$\text{е)} \begin{cases} x = 0,25t^4 + 0,5t^2 + t \\ y = 0,5t^2 + \frac{1}{t}. \end{cases}$$

$$7. \text{ а)} y = \frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}} + \frac{5}{\sqrt[4]{(x^3+2)^3}}; \text{ б)} y = \cos \ln^2 x;$$

$$\text{в)} y = (e^{\sin x} - 1)^2;$$

$$\text{г)} y = 2x^{\sqrt{x}};$$

$$\text{д)} \cos(xy) = \frac{y}{x};$$

$$\text{е)} \begin{cases} x = \arcsin(t^2 - 1), \\ y = \arccos 2t. \end{cases}$$

8. а) $y = x \sqrt[3]{\frac{2}{1+x}}$; б) $y = \frac{1+\sin 3x}{1-\sin 3x}$;
 в) $y = 2^{\frac{1-x}{1+x}}$; г) $y = (\ln x)^x$;
 д) $xy + \ln y - 2 \ln x = 0$; е) $\begin{cases} x = t^2 + t + 1, \\ y = t^3 + t. \end{cases}$
9. а) $y = \sqrt[3]{1+x\sqrt{x+3}}$; б) $y = \sqrt{1+\ln^2 x}$;
 в) $y = e^{\frac{1}{x^2}}$; г) $y = (\sin x)^{\cos x}$;
 д) $e^{x+y} = \sin \frac{y}{x}$; е) $\begin{cases} x = \operatorname{ctg} t, \\ y = \frac{1}{\cos^2 t}. \end{cases}$
10. а) $y = \frac{\sqrt{1+3x^2}}{2+3x^2}$; б) $y = e^{x^2} \cos^3(2x+3)$;
 в) $y = x \operatorname{arctg}^3 5x + \ln \operatorname{tg} x$; г) $y = (\sin 3x)^{\sqrt{x}}$;
 д) $y \ln x - x \ln y = x + y$; е) $\begin{cases} x = \frac{2-t}{2+t^2}, \\ y = \frac{t^2}{2+t^2} \end{cases}$
11. а) $y = 2\sqrt{4x+3} - \frac{3}{\sqrt{x^3+x+1}}$; б) $y = (e^{\cos x} + 3)^2$;
 в) $y = \ln \sin(2x+5)$; г) $y = x^{x^x}$;
 д) $\operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right) = 5x$; е) $\begin{cases} x = \cos\left(\frac{t}{2}\right), \\ y = t - \sin t. \end{cases}$
12. а) $y = x^2 \sqrt{1-x^2}$; б) $y = \frac{4 \sin x}{\cos^2 x}$

$$\text{в)} y = \operatorname{arctg} e^{2x};$$

$$\text{д)} x - y + \operatorname{arctg} y = 0;$$

$$\text{г)} y = x^{\frac{1}{x}};$$

$$\text{е)} \begin{cases} x = t^3 + 8t, \\ y = t^5 + 2t. \end{cases}$$

$$13. \text{ а)} y = x \sqrt{\frac{(1+x^2)}{(1-x)}};$$

$$\text{в)} y = \arcsin \sqrt{1-3x};$$

$$\text{д)} y \sin x = \cos(x-y);$$

$$\text{б)} y = \frac{1}{tg^2 2x};$$

$$\text{г)} y = x^{\ln x};$$

$$\text{е)} \begin{cases} x = \cos\left(\frac{t}{2}\right), \\ y = t - \sin t. \end{cases}$$

$$14. \text{ а)} y = \frac{(3+6x)}{\sqrt{x+5x^2}};$$

$$\text{в)} y = x^m \ln x;$$

$$\text{д)} \frac{y}{x} = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right);$$

$$\text{б)} y = x^2 \cos x;$$

$$\text{г)} y = x^{-tg x};$$

$$\text{е)} \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$$

$$15. \text{ а)} y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

$$\text{в)} y = \frac{(x \ln x)}{x-1};$$

$$\text{д)} (e^x - 1)(e^y - 1) - 1 = 0;$$

$$\text{б)} y = \frac{\sin^2 x}{(2+3\cos^2 x)};$$

$$\text{г)} y = (\operatorname{arctg} x)^{\ln x};$$

$$\text{е)} \begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = \cos t. \end{cases}$$

$$16. \text{ а)} y = \sqrt[3]{\frac{1+x^2}{1-x^2}};$$

$$\text{в)} y = \operatorname{arctg} \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}};$$

$$\text{б)} y = \left(\frac{1}{2}\right) tg^2 x + \ln \cos x;$$

$$\text{г)} y = (x+x^2)^x;$$

$$\text{д) } x^3 + y^3 - 3axy = 0;$$

$$\text{е) } \begin{cases} x = t + \ln \cos t, \\ y = t - \ln \sin t. \end{cases}$$

$$17. \text{ а) } y = 3 \sqrt[3]{x^5 + 5x^4 - \frac{5}{x}};$$

$$\text{б) } y = \ln \sqrt{\frac{(1 - \sin x)}{(1 + \sin x)}};$$

$$\text{в) } y = \arccos \frac{1}{x};$$

$$\text{г) } y = (\sin x)^{\ln x};$$

$$\text{д) } x - y + a \sin y = 0;$$

$$\text{е) } \begin{cases} x = \ln x, \\ y = \left(\frac{1}{2}\right) \left(t + \frac{1}{t}\right). \end{cases}$$

$$18. \text{ а) } y = \sqrt[3]{\frac{1 + x^3}{1 - x^3}};$$

$$\text{б) } y = \sqrt{1 + \ln^2 x};$$

$$\text{в) } y = \ln \arcsin \sqrt{1 - x^2}; \quad \text{г) } y = x^{\arctg x};$$

$$\text{д) } y \sin x + \cos(x - y) = \cos y; \text{ е) } \begin{cases} x = \tg t + \ctg t, \\ y = 2 \ln \ctg t. \end{cases}$$

$$19. \text{ а) } y = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt[3]{x^3 + 1};$$

$$\text{б) } y = \frac{1}{3} \tg^3 x - \tg x + x;$$

$$\text{в) } y = \arctg \sqrt{\frac{3 - x}{x - 2}};$$

$$\text{г) } y = (\ln x)^x;$$

$$\text{д) } x - y + e^y \arctg x = 0;$$

$$\text{е) } \begin{cases} x = at \cos t, \\ y = at \sin t. \end{cases}$$

$$20. \text{ а) } y = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}};$$

$$\text{б) } y = \frac{\ln x}{\sqrt{x^2 - 1}};$$

$$\text{в) } y = \arccos e^x;$$

$$\text{г) } y = x^{\arcsin x};$$

$$\text{д) } \ln y = \arctg \frac{x}{y};$$

$$\text{е) } \begin{cases} x = t^2, \\ y = \frac{1}{3} t^3 - t. \end{cases}$$

Завдання 3. Обчислити наближено за допомогою диференціалу значення функції $y = f(x)$ у точці x . Виписати для порівняння результат безпосереднього обчислення з допомогою калькулятора з більшою кількістю десяткових знаків.

1. $y = \sqrt[3]{x}$; $x = 7,76$. 2. $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 5}$; $x = 0,97$.

3. $y = \frac{1}{2}(x + \sqrt{5 - x^2})$; $x = 0,98$.

4. $y = \sqrt{x^2 + x + 3}$; $x = 1,97$.

5. $y = \arcsin x$; $x = 0,08$. 6. $y = \sqrt[3]{x}$; $x = 1,21$.

7. $y = \sqrt[3]{x}$; $x = 26,46$. 8. $y = \sqrt[3]{x^2}$; $x = 1,03$.

9. $y = x^{11}$; $x = 1,021$. 10. $y = \sqrt[3]{x}$; $x = 8,24$.

11. $y = x^{21}$; $x = 0,998$. 12. $y = \sqrt[3]{x}$; $x = 7,64$.

13. $y = x^6$; $x = 2,01$. 14. $y = x^5$; $x = 2,007$.

15. $y = \frac{1}{\sqrt{2x^2 + x + 1}}$; $x = 1,016$.

16. $y = x^7$; $x = 1,996$. 17. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; $x = 4,16$.

18. $y = \sqrt{4x + 1}$; $x = 2,06$.

19. $y = \sqrt{4x - 3}$; $x = 1,08$.

20. $y = \sqrt[3]{x}$; $x = 8,36$.

Завдання 4. Дослідити функції та побудувати їхні графіки.

1. а) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$;

б) $y = \frac{e^x}{x}$.

2. а) $y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$;

б) $y = \ln(2x^2 + 3)$.

$$3. a) y = \frac{x}{(x-1)^3};$$

$$4. a) y = \frac{2x-1}{(x-1)^2};$$

$$5. a) y = \frac{x^2}{x^2-1};$$

$$6. a) y = \frac{x^3}{2(x+1)^2};$$

$$7. a) y = \frac{x^2+16}{x};$$

$$8. a) y = \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^2;$$

$$9. a) y = \frac{x^3-1}{4x^2};$$

$$10. a) y = \frac{2}{x^2+x+1};$$

$$11. a) y = \frac{x^2+1}{x};$$

$$12. a) y = \frac{1}{1+x^2};$$

$$13. a) y = \frac{(x-1)^2}{x^2+1};$$

$$14. a) y = \frac{x^3+1}{x^2};$$

$$15. a) y = \frac{x}{3-x^2};$$

$$16. a) y = \frac{1}{1-x^2};$$

$$б) y = x^3 e^{-x}.$$

$$б) y = \frac{1}{e^x - 1}.$$

$$б) y = x - \ln(x+1).$$

$$б) y = e^{\frac{1}{x+2}}.$$

$$б) y = \frac{1}{e^{2x} - 1}.$$

$$б) y = x^2 \ln x.$$

$$б) y = \ln \frac{x+1}{x+2}.$$

$$б) y = x - \ln x.$$

$$б) y = \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

$$б) y = x e^{-x}.$$

$$б) y = e^{\frac{1}{x}}.$$

$$б) y = \frac{\ln x}{x}.$$

$$б) y = x \ln x.$$

$$б) y = \ln(x^2 - 4).$$

$$17. \text{ а) } y = \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^2 ;$$

$$\text{б) } y = x^2 - 2 \ln x .$$

$$18. \text{ а) } y = \frac{x}{(x-1)^2} ;$$

$$\text{б) } y = (x-1) \cdot e^{3x+1} .$$

$$19. \text{ а) } y = \frac{x^3}{x^2+1} ;$$

$$\text{б) } y = (2+x^2) e^{-x^2} .$$

$$20. \text{ а) } y = \frac{x^3}{2(x+1)^2} ;$$

$$\text{б) } y = x + \ln(x^2 - 1) .$$

Завдання 5. Знайти напрям і значення (абсолютне) градієнта функції $z = f(x, y)$ в точці $A(x_A; y_A)$ та похідну функції в цій точці за напрямом від точки A до точки $B(x_B; y_B)$. З'ясувати характер зміни поля в даному напрямку $\overrightarrow{AB}$ та перевірити себе за властивістю абсолютного значення градієнта.

$$1. \ z = \ln(y^2 + 4y + x^2),$$

$$A(1;1), \quad B(4;5).$$

$$2. \ z = x^2 - 2xy + 2y^2,$$

$$A(0;1), \quad B(3;5).$$

$$3. \ z = 5 \operatorname{arctg}(xy),$$

$$A(1;0), \quad B(7;8).$$

$$4. \ z = 10y \arccos x,$$

$$A(0;-5), \quad B(4;-2).$$

$$5. \ z = x^3 + x + y^3 - 16y,$$

$$A(-2;-1), \quad B(3;11).$$

$$6. \ z = \ln(y^2 + 5x^2),$$

$$A(1;0), \quad B(-2;-4).$$

$$7. \ z = -x^2 + 3xy + 2y^2 + 8x - 5y, \quad A(2;3), \quad B(-3;15).$$

$$8. \ z = \arcsin \frac{x}{y},$$

$$A(0;-2), \quad B(4;-2).$$

$$9. \ z = -x^2 + 5xy + y^2 + x - 2y,$$

$$A(1;2), \quad B(2;2).$$

$$10. \ z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x},$$

$$A(-1;1), \quad B(-4;5).$$

$$11. \ z = \ln(y^2 + xy + x^2),$$

$$A(0;1), \quad B(-3;5).$$

$$12. z = 3x^2y^4 - 2x^3y^2 - 3y, \quad A(2;1), \quad B(7;-11).$$

$$13. z = x \arcsin y, \quad A(5;0), \quad B(1;-3).$$

$$14. z = 2x^3y^2 - xy + 4y + x, \quad A(1;-1), \quad B(4;3).$$

$$15. z = \frac{y^2}{x}, \quad A(1;1), \quad B(-2;-3).$$

$$16. z = xy - y^2, \quad A(1;3), \quad B(4;7).$$

$$17. z = 2x^2 - 3y^2, \quad A(4;2), \quad B(1;6).$$

$$18. z = x^2y, \quad A(0;2), \quad B(3;-2).$$

$$19. z = x^2 + 4y^2, \quad A(1;2), \quad B(-2;-2).$$

$$20. z = x^2 - 3xy, \quad A(3;1), \quad B(-1;4).$$

Завдання 6. Функцію $z = f(x, y)$ дослідити на екстремум.

$$1. z = x^2 + y^2 - 8x + 6y + 24.$$

$$2. z = 4(x - y) - x^2 - y^2 - 6.$$

$$3. z = -2x^2 - y^2 + 8x - 4y - 9.$$

$$4. z = x^2 + y^2 - 2x - 5y - xy - 31.$$

$$5. z = -x^2 - 4y^2 + 2x - 8y.$$

$$6. z = 4x^2 + y^2 + 16x - 6y + 31.$$

$$7. z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y + 14.$$

$$8. z = 2x^2 + y^2 - 8x + 6y + 9.$$

$$9. z = -x^2 - y^2 + 4x - 8y.$$

$$10. z = 6(x - y) - 3x^2 - 3y^2 + 4.$$

$$11. z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y.$$

$$12. z = -3x^2 - y^2 + 6x + 2y + 8.$$

$$13. z = x^2 + y^2 + xy - 3x - 6y.$$

$$14. z = -x^2 - 2y^2 + 2xy + 4x + 2y + 1.$$

$$15. z = x^2 - 4x + y^2 - 12y.$$

$$16. z = -x^2 + 2x - 2y^2 + 4y - 2.$$

$$17. z = x^2 + 6x + y^2 - 4y + 2.$$

$$18. z = -x^2 - 2x - y^2 + 6y - 3.$$

$$19. z = x^2 + 2x + y^2 - 10y + 3.$$

$$20. z = -x^2 + 4x - 2y^2 + 8y - 1.$$

Завдання 7. Знайти інтеграли.

$$1. 1. \int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx. \quad 2. \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx. \quad 3. \int tg^7 x dx.$$

$$4. \int \left(\sqrt{t^3} + \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} \right) dx. \quad 5. \int \frac{(3x-1)dx}{x^2-4x+8}. \quad 6. \int \frac{(x^2+1)dx}{(x-1)^2(x+3)}.$$

$$2. 1. \int \arccos x dx. \quad 2. \int \frac{e^{tg x}}{\cos^2 x} dx. \quad 3. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$$

$$4. \int \sin^2 \frac{x}{2} dx. \quad 5. \int \frac{(2x+5)dx}{\sqrt{x^2+3x+7}}. \quad 6. \int \frac{x dx}{x^3+1}.$$

$$3. 1. \int (4x-2) \cos 2x dx. \quad 2. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^3}}. \quad 3. \int \frac{dx}{\sin^6 x}.$$

$$4. \int \frac{d\varphi}{\sqrt{16-\varphi^2}}. \quad 5. \int \frac{(x-2)dx}{3x^2+5x+6}. \quad 6. \int \frac{x^2+x-1}{x(x-1)(x+2)} dx.$$

$$4. 1. \int x \ln x dx. \quad 2. \int \frac{2x dx}{\sqrt{x^4-1}}. \quad 3. \int \sin^2 x \cos^4 x dx.$$

$$4. \int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx. \quad 5. \int \frac{dx}{5x^2+10x-2}. \quad 6. \int \frac{x^2 dx}{(x-1)^2(x+1)}.$$

$$5. 1. \int (x^2+3) \cos x dx. \quad 2. \int \frac{x^3 dx}{5x^4+7}. \quad 3. \int \sin^{\frac{5}{7}} x \cos^3 x dx.$$

$$4. \int \frac{x-16}{\sqrt{x+4}} dx. \quad 5. \int \frac{(4-3x)dx}{5x^2+6x+18}. \quad 6. \int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}.$$

6. 1. $\int \ln(x^2 + 2) dx$. 2. $\int \frac{x^2 dx}{x^6 + 4}$. 3. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^4 x}$.
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 4x^2}}$. 5. $\int \frac{x dx}{2x^2 + 2x + 5}$. 6. $\int \frac{dx}{(x+1)(2x-3)}$.
7. 1. $\int x^2 \cos^2 x dx$. 2. $\int x \cdot 2^{-x^2} dx$. 3. $\int \sin^2 3x \cdot \cos 3x dx$.
4. $\int 5^{x-1} \cdot e^x dx$. 5. $\int \frac{(3x+2)dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$. 6. $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)x}$.
8. 1. $\int x \cdot 5^x dx$. 2. $\int \sqrt{1 - e^{2x}} \cdot e^{2x} dx$. 3. $\int \cos^5 x dx$.
4. $\int (3^x - 2)(3^x + 2) dx$. 5. $\int \frac{2x+5}{4x^2 + 2x + 5} dx$. 6. $\int \frac{dx}{x^3 - 1}$.
9. 1. $\int \sqrt{x} \ln x dx$. 2. $\int \cos(7 - 3x^2) x dx$. 3. $\int \sin^4 2x dx$.
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1}}$. 5. $\int \frac{dx}{3x^2 + 5x - 1}$. 6. $\int \frac{x dx}{x^3 + 1}$.
10. 1. $\int x^2 \ln x dx$. 2. $\int 3^{\ln x + 5} \frac{dx}{x}$. 3. $\int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x} dx$.
4. $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx$. 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 3x + 5}}$. 6. $\int \frac{(1-x^2)dx}{x(x^2 + 4)}$.
11. 1. $\int x \sin 4x dx$. 2. $\int \sqrt{\sin^5 x} \cdot \cos x dx$. 3. $\int \sin^4 x dx$.
4. $\int \frac{3^{2x} - 2}{\sqrt{3^x}} dx$. 5. $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} dx$. 6. $\int \frac{x^4 dx}{x^2 - 3}$.
12. 1. $\int x \arcsin x dx$. 2. $\int x^2 \cdot 5^{x^3} dx$. 3. $\int \frac{\cos^4 x dx}{\sin^2 x}$.
4. $\int \frac{x^4 dx}{x^2 + 1}$. 5. $\int \frac{4x+7}{\sqrt{3x^2 - 5x + 4}} dx$. 6. $\int \frac{x^2 dx}{(x^2 - 4)(x+1)}$.
13. 1. $\int \arccos x dx$. 2. $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx$. 3. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

4. $\int \frac{x^3-1}{x-1} dx$. 5. $\int \frac{(3x+4)dx}{7x^2-4x+5}$. 6. $\int \frac{x dx}{(x^2-1)(x+2)}$.
14. 1. $\int x \cos 2x dx$. 2. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{tg x + 4}}$. 3. $\int \sin^5 x dx$.
4. $\int ctg^2 x dx$. 5. $\int \frac{x+1}{x^2+x+1} dx$. 6. $\int \frac{x dx}{(x^2+1)(x-4)}$.
15. 1. $\int x^2 arctg x dx$. 2. $\int \frac{ctg^3 x}{\sin^2 x} dx$. 3. $\int \frac{dx}{3 \sin x + 5}$.
4. $\int tg^2 x dx$. 5. $\int \frac{(3x-4)dx}{\sqrt{-x^2+6x-8}}$. 6. $\int \frac{x dx}{x^3+8}$.
16. 1. $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$. 2. $\int e^{\sqrt[5]{x}} \frac{dx}{\sqrt[5]{x^4}}$. 3. $\int \sin 5x \sin 2x dx$.
4. $\int \frac{5-\cos x}{\cos x} dx$. 5. $\int \frac{(3x-1)dx}{2x^2-3x+5}$. 6. $\int \frac{dx}{(x^2+2)x}$.
17. 1. $\int (x^2-2x) \ln x dx$. 2. $\int \frac{x dx}{\sqrt{25-x^4}}$. 3. $\int \frac{dx}{1-3 \cos x}$.
4. $\int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx$. 5. $\int \frac{(3x-2)dx}{x^2-7x}$. 6. $\int \frac{(x+1)dx}{x^3+27}$.
18. 1. $\int x arctg 2x dx$. 2. $\int x 5^{4x^2} dx$. 3. $\int \cos^2 x \sin^4 x dx$.
4. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \cos 2x}$. 5. $\int \frac{2x-8}{\sqrt{x^2+x}} dx$. 6. $\int \frac{dx}{x(x^2-4)}$.
19. 1. $\int x^2 \cos 2x dx$. 2. $\int \frac{dx}{x \cos^2(\ln x)}$. 3. $\int tg^5 x dx$.
4. $\int \frac{1-5x^2}{x^2(1-x^2)} dx$. 5. $\int \frac{4x+3}{x^2+3x+4} dx$. 6. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$.
20. 1. $\int x \cos 5x dx$. 2. $\int \sqrt[7]{8-2x} dx$. 3. $\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x}$.

$$4. \int \frac{(8 - \sqrt{x}) dx}{\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[6]{x} + 4}. \quad 5. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x}}. \quad 6. \int \frac{5x^2 - 1}{x^3 - 1} dx.$$

Завдання 8. Довести існування (знайти ОДЗ підінтегральної функції) та обчислити визначені інтеграли.

$$1. \text{ а) } \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}; \quad \text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin x \, dx; \quad \text{в) } \int_0^1 x^2 \sqrt{1+x^3} \, dx.$$

$$2. \text{ а) } \int_{-1}^5 x^5 \, dx; \quad \text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos x \, dx; \quad \text{в) } \int_0^1 \frac{x^9}{1+x^{10}} \, dx.$$

$$3. \text{ а) } \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{5x}}; \quad \text{б) } \int_1^e \ln x \, dx; \quad \text{в) } \int_1^{\frac{1}{e}} \frac{e^x}{x^2} \, dx.$$

$$4. \text{ а) } \int_0^1 (4x^3 - 2x + 1) dx; \quad \text{б) } \int_0^1 x e^{-x} dx; \quad \text{в) } \int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x} \, dx.$$

$$5. \text{ а) } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}; \quad \text{б) } \int_0^1 \arctg x \, dx; \quad \text{в) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x \, dx.$$

$$6. \text{ а) } \int_1^8 \frac{1+2\sqrt[3]{x}}{x^3} \, dx; \quad \text{б) } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \, dx}{\sin^2 x}; \quad \text{в) } \int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln x)^{1.5}}.$$

$$7. \text{ а) } \int_0^1 e^{2x} \, dx; \quad \text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos 3x \, dx; \quad \text{в) } \int_0^1 x^2 \sin(1+x^3) \, dx.$$

$$8. \text{ а) } \int_1^2 2^x \, dx; \quad \text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x \, dx; \quad \text{в) } \int_1^e x^2 \ln x \, dx.$$

$$9. \text{ a) } \int_0^2 3^{2x} dx; \quad \text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x \cos 4x dx; \quad \text{в) } \int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx.$$

$$10. \text{ a) } \int_0^1 x e^x dx; \quad \text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \sin 7x dx; \quad \text{в) } \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 - e^{-2x}} dx.$$

$$11. \text{ a) } \int_1^2 (3x^2 - 2x + 1) dx; \quad \text{б) } \int_0^1 \arcsin x dx; \quad \text{в) } \int_0^1 \sqrt{1+x} dx.$$

$$12. \text{ a) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}; \quad \text{б) } \int_1^{\frac{e}{2}} \ln 2x dx; \quad \text{в) } \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx.$$

$$13. \text{ a) } \int_0^1 (e^x - 1)^4 e^x dx; \quad \text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx; \quad \text{в) } \int_0^1 \frac{x dx}{1 + \sqrt{x}}.$$

$$14. \text{ a) } \int_1^2 \frac{dx}{x^2 + x}; \quad \text{б) } \int_0^1 x 2^{-x} dx; \quad \text{в) } \int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} dx.$$

$$15. \text{ a) } \int_0^1 \frac{x dx}{(x^2 + 1)^2}; \quad \text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \cos x dx; \quad \text{в) } \int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5 - 4x}}.$$

$$16. \text{ a) } \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x dx; \quad \text{б) } \int_0^1 x^2 e^{2x} dx; \quad \text{в) } \int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{x+4}}.$$

$$17. \text{ a) } \int_0^{\frac{\pi}{16}} \cos 4x dx; \quad \text{б) } \int_1^e x \ln^2 x dx; \quad \text{в) } \int_0^1 \frac{x^3 dx}{x^4 + 1}.$$

$$18. \text{ a) } \int_0^{\frac{\pi}{12}} \sin 6x dx; \quad \text{б) } \int_0^3 \ln(x+3) dx; \quad \text{в) } \int_1^9 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x} - 1}.$$

$$19. \text{ a) } \int_1^2 (3x^2 - x + 1) dx; \quad \text{б) } \int_0^1 x^2 e^{3x} dx; \quad \text{в) } \int_1^5 \frac{x dx}{\sqrt{2x-1}}.$$

$$20. \text{ а) } \int_1^6 \frac{dx}{\sqrt{3x-2}}; \quad \text{б) } \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arcsin x \, dx; \quad \text{в) } \int_3^8 \frac{x \, dx}{\sqrt{x+1}}.$$

Завдання 9. Довести існування (знайти ОДЗ підінтегральної функції), обчислити невласні інтеграли та встановити характер їх збіжності.

$$\begin{array}{ll} 1. \text{ а) } \int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}; & \text{б) } \int_2^3 \frac{x \, dx}{4\sqrt{x^2-4}}. \\ 2. \text{ а) } \int_0^{\infty} \frac{x \, dx}{(x^2+3)^2}; & \text{б) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}. \\ 3. \text{ а) } \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^3} \, dx; & \text{б) } \int_0^1 \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}}. \\ 4. \text{ а) } \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}; & \text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} x \, dx. \\ 5. \text{ а) } \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} \, dx; & \text{б) } \int_3^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2-7x+10}}. \\ 6. \text{ а) } \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}; & \text{б) } \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx. \\ 7. \text{ а) } \int_3^{\infty} \frac{dx}{x \ln^5 x}; & \text{б) } \int_1^2 \frac{dx}{(2-x)^2}. \\ 8. \text{ а) } \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} e^{\frac{-1}{x}} \, dx; & \text{б) } \int_{-2}^0 \frac{dx}{(x+2)^2}. \\ 9. \text{ а) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}; & \text{б) } \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}. \\ 10. \text{ а) } \int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{x \, dx}{x^4+9}; & \text{б) } \int_1^2 \frac{dx}{x^2+2x-3}. \end{array}$$

$$11. \text{ а) } \int_1^{\infty} \frac{dx}{(2x-1)^3} ;$$

$$\text{б) } \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} .$$

$$12. \text{ а) } \int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{(x^2+1)^2} ;$$

$$\text{б) } \int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}} .$$

$$13. \text{ а) } \int_2^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^4+1}} ;$$

$$\text{б) } \int_0^3 \frac{dx}{(x-3)^2} .$$

$$14. \text{ а) } \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{x^8+1} ;$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{x dx}{(x^2-1)^{\frac{4}{5}}} .$$

$$15. \text{ а) } \int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-1}} ;$$

$$\text{б) } \int_1^5 \frac{dx}{x \ln x} .$$

$$16. \text{ а) } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} ;$$

$$\text{б) } \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} .$$

$$17. \text{ а) } \int_0^{\infty} e^{-x} dx ;$$

$$\text{б) } \int_3^4 \frac{dx}{(x-3)^2} .$$

$$18. \text{ а) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+1}} ;$$

$$\text{б) } \int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} .$$

$$19. \text{ а) } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x+2} ;$$

$$\text{б) } \int_3^4 \frac{dx}{(3-x)^2} .$$

$$20. \text{ а) } \int_3^{\infty} \frac{dx}{x \ln^5 x} ;$$

$$\text{б) } \int_4^6 \frac{dx}{x-4} .$$

Завдання 10. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою і прямою, рівняння яких задані. Зробити рисунок.

$$1. \quad y = \frac{1}{3}(x-1)^2, \quad y = x+5.$$

$$2. \quad y = -x^2 - 4x, \quad y = -2x.$$

$$3. \quad y = -x^2 - 4x - 1, \quad y = -x - 1.$$

4. $y = -x^2 - 2x + 2$, $y = -2x + 1$.
5. $y = -x^2 + 2x + 3$, $y = 2x + 2$.
6. $y = x^2 + 4x + 1$, $y = x + 1$.
7. $y = x^2 + 2x - 2$, $y = 2x - 1$.
8. $y = x^2 - 2x - 3$, $y = x - 3$.
9. $y = -x^2 - 4x$, $y = -x$.
10. $y = -x^2 - 4x - 1$, $y = -3x - 3$.
11. $y = -x^2 - 2x + 2$, $y = x + 2$.
12. $y = -x^2 + 2x + 3$, $y = -2x + 6$.
13. $y = x^2 + 4x$, $y = -x$.
14. $y = x^2 + 4x + 1$, $y = -x - 3$.
15. $y = x^2 + 2x - 2$, $y = 3x$.
16. $y = x^2 - 2x - 3$, $y = 2x - 6$.
17. $y = -x^2 - 4x$, $y = x$.
18. $y = -x^2 - 4x - 1$, $y = x + 3$.
19. $y = -x^2 - 2x + 2$, $y = -3x$.
20. $y = -x^2 + 2x + 3$, $y = x + 1$.

Список літератури

1. Paluszynski M. Calculus for Computer Scientists. Lecture notes. 2013. (Конспект лекцій основний англійською та українською). URL: http://www.math.uni.wroc.pl/~mpal/academic/2013/lecture_notes.pdf
<https://exam.nuwm.edu.ua/course/view.php?id=4917#section-7>
2. Кушнір В. П. Конспект лекцій у двох частинах. URL: https://drive.google.com/file/d/0B9X16RYY_h37SF9HdXBkZnpwbXc/view
https://drive.google.com/file/d/0B9X16RYY_h37RHZ5TXIFekxYRIU/view
3. Кушнір О. О. Математичний аналіз: конспект лекцій для студентів фаху «Прикладна математика». Частина 1. 085-123. Рівне: УДУВГП, 2003. 96 с. URL: <https://exam.nuwm.edu.ua/course/view.php?id=4917>
4. Давидов М. О. Курс математичного аналізу. Ч. 1–3. Київ :

- Вища школа. Ч.1 1990. 381 с.; ч.2. 1991. 366с.; ч.3. 1979. 383с.
5. Ярмуш Я. І., Самолюк І. В. Вища математика. Практикум : навч. посіб. Рівне : НУВГП, 2015. 148 с. URL: <http://ep3.nuwm.edu.ua/id/eprint/5632>
6. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз: у двох частинах. Київ: Либідь, 1993-1994. Ч.1 1993. 320 с.; ч.2. 1994. 304с.
7. Richard A. Silverman. Modern Calculus and Analytic Geometry. New York: The Macmillan Company, London: Collier-Macmillan Limited, 1969. 1034 p.
8. Murray R. Spiegel. Schaum's Outline of Advanced Mathematics for Engineers and Scientists. The McGraw-Hill Companies, 1971. 407 p. URL: <https://exam.nuwm.edu.ua/course/view.php?id=4917#section-10>
9. Шкіль М. І., Колесник Т. В., Котлова В. М. Вища математика. Аналітична геометрія з елементами алгебри. Вступ до математичного аналізу. Книга 1. Київ : Либідь, 1994. 391 с.
10. Шкіль М. І., Колесник Т. В. Вища математика: Визначений інтеграл, функції багатьох змінних, диференціальні рівняння, ряди. Книга 2. Київ : Вища школа, 1986. 512 с.
11. Рудавський Ю. К. та ін. Збірник задач з математичного аналізу. Частина 1. Львів : Видавництво Національного університету "Львівська політехніка", 2008. 352 с.
12. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика : навчальний посібник. Київ : А.С.К., 2006. 648 с.
13. Брушковський О. Л. Вища математика : навчальний посібник. Частина 2. Рівне : НУВГП, 2008. 266 с.
14. Кушнір О. О., Кушнір В. П. Друга визначна границя для матриць. Вісник ННІАКОТ, № 9, 2021. С. 22–28.
15. Кушнір О. О., Кушнір В. П. Застосування нерівності про одномонотонні послідовності до розв'язування олімпіадних задач. Вісник ННІАКОТ, № 10, 2022. С. 17–25.