

Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства
та природокористування
Навчально-науковий інститут кібернетики, інформаційних
технологій та інженерії
Кафедра вищої математики

04-02-80M

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

та завдання до практичних занять та самостійного
вивчення навчальної дисципліни
**«МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ» і «МАТЕМАТИЧНИЙ
ТА ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ»**
для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського)
рівня за освітньо-професійними програмами
спеціальностей
**F1 «Прикладна математика», F2 «Інженерія
програмного забезпечення», F3 «Комп'ютерні науки»,
F4 «Системний аналіз та наука про дані»**
денної та заочної форм навчання

Рекомендовано
науково-методичною радою з
якості ННІ КІТІ
Протокол №8 від 28.08.2025

Рівне – 2025

Методичні вказівки та завдання до практичних занять та самостійного вивчення навчальної дисципліни «Математичний аналіз» і «Математичний та функціональний аналіз» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійними програмами «Комп'ютерне та математичне моделювання», «Інженерія програмного забезпечення», «Комп'ютерні науки», «Інженерія даних» спеціальностей: F1 «Прикладна математика», F2 «Інженерія програмного забезпечення», F3 «Комп'ютерні науки», F4 «Системний аналіз та наука про дані» денної та заочної форми навчання, частина 2. [Електронне видання] / Іващук Я. Г., Кушнір В. П. Рівне : НУВГП, 2025. 44 с.

Укладачі: Іващук Я. Г., канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої математики; Кушнір В. П., канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої математики.

Відповідальний за випуск: Тадесєв П. О., доктор педагогічних наук, канд. фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри вищої математики.

Керівники груп забезпечення спеціальностей:

- F1 «Прикладна математика» О. Ю. Дейнека,
к. т. н., доц., доц. кафедри вищої математики.
F2 «Інженерія програмного забезпечення» В. В. Жуковський,
к. т. н., доц. кафедри комп. наук та прикладної математики.
F3 «Комп'ютерні науки» С. С. Каштан,
к. т. н., доц., доц. кафедри комп. наук та прикладної математики.
F4 «Системний аналіз та наука про дані» О. В. Прищєпа,
к. ф.-м. н., доц. кафедри комп. наук та прикладної математики.

Попередня версія методичних вказівок: 04-02-36 М

© Я. Г. Іващук,
В.П. Кушнір, 2025
© НУВГП, 2025

Зміст

Вступ

1. Подвійний інтеграл	3
2. Криволінійний інтеграл другого роду	6
3. Ряди	8
4. Зразки виконання завдань.....	13
5. Завдання для самостійної роботи	26
6. Питання на екзамен	41
<i>Список рекомендованої літератури</i>	<i>43</i>

Вступ

Курс математичного аналізу є одним із способів розвитку логічного і алгоритмічного мислення студентів, оволодіння основними методами дослідження та розв’язування математичних задач, вироблення умінь самостійно розширювати свої знання з математики і застосовувати математичний апарат до аналізу та розв’язання практичних задач.

Дисципліна спрямована на формування загальнонаукових, інструментальних, загально-професійних та спеціалізовано-професійних компетенцій.

1. Подвійний інтеграл

Розглянемо функцію двох змінних $z = f(x, y)$, областю визначення якої є деяка квадрована область $\bar{D} \subset R_2$. Зауважимо, що коли межа області $\bar{D} \subset R_2$ складається із скінченного числа неперервних кривих, визначених рівняннями виду $y = f(x)$ або $x = \varphi(y)$, де $f(x)$ і $\varphi(y)$ – неперервні функції своїх аргументів, то така область буде квадровою, якщо вона обмежена (тобто існує її площа).

Діаметром замкненої області $\bar{D}$ називають найбільшу відстань між двома точками цієї області і позначають $diam \bar{D}$. Наприклад, діаметром плоского паралелограма є довжина його найбільшої діагоналі.

Геометричне тіло, обмежене зверху поверхнею $z = f(x, y)$, з боків – циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі Oz , а знизу – замкненою, обмеженою, квадратною областю $\bar{D}$, яка лежить у площині Oxy називають циліндричним.

Контур квадратної області $\bar{D}$ є прямою лінією циліндричної поверхні.

О-1. Подвійним інтегралом від функції $z = f(x, y)$ по області $\bar{D}$ називається границя

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max diam \bar{D}_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \Delta S_k = \iint_{\bar{D}} f(x, y) dS, \quad (1)$$

за умови, що вона є числом і не залежить від способу розбивання області D на частини, та вибору точок (x_k, y_k) в кожній частині області $\bar{D}_k$.

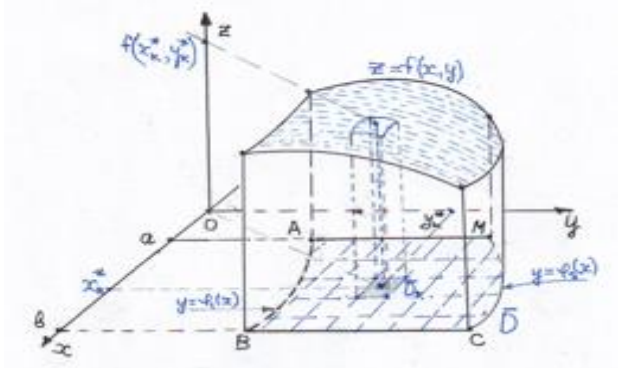


Рис. 1.

Область $\bar{D}$ на рис. 1 зображена у вигляді криволінійного чотирикутника $ABCM$. Область $\bar{D}_k$ має площу ΔS_k .

Якщо область $\bar{D}$ правильна (циліндрична) в напрямі осі Oy , як показано на рис. 1, то обчислення подвійного інтеграла зводиться до обчислення повторного інтегралу

$$\iint_{\bar{D}} f(x, y) dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \quad (2)$$

Інтеграл $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$ по змінній y називають

внутрішнім, а інтеграл $\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$ по змінній

x називають зовнішнім.

Якщо треба перейти в подвійному інтегралі до полярних координат ρ , φ , то користуємося формулами $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi. \quad (3)$$

Площа S плоскої області D обчислюється за формулою

$$S = \iint_D dx dy. \quad (4)$$

У полярній системі координат ρ і φ площа

$$S = \iint_E \rho d\rho d\varphi. \quad (5)$$

Об'єм циліндричного тіла V , обмеженою зверху неперервною поверхнею $z = f(x, y)$, де $f(x, y) \geq 0$, знизу – замкненою обмеженою областю D площини $z = 0$, з

боків – циліндричною поверхнею, напрямна якої збігається з межею області D , а твірні паралельні осі Oz

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (6)$$

Площа P поверхні σ , що проектується на площину Oxy в область D і задається функцією $z = f(x, y) \geq 0$

($f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ – неперервні функції в області D),

обчислюється за формулою

$$P = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy. \quad (7)$$

2. Криволінійний інтеграл II роду

Нехай на площині xOy матеріальна точка рухається під дією сили $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ вздовж плоскої кривої $L = AB$ від точки A до точки B .

Робота змінної сили $\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ по переміщенню матеріальної точки $M(x, y)$ вздовж кривої L

$$A = \lim_{\substack{\Delta x_i \rightarrow 0 \\ \Delta y_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n P(x_i^*, y_i^*) \Delta x_i + Q(x_i^*, y_i^*) \Delta y_i = \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Останній інтеграл є криволінійним інтегралом II роду. Якщо криву $L = \overset{\sim}{AB}$ задано рівнянням $y = y(x)$, $x \in [a; b]$, де функція $y(x)$ та її похідна $y'(x)$ неперервні на $[a; b]$ і функції $P(x, y)$, $Q(x, y)$ неперервні на L , то

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b (P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) y'(x)) dx.$$

Якщо крива $L = \bar{AB}$ задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$; похідні $x'_t(t)$, $y'_t(t)$ неперервні при $t \in [\alpha; \beta]$, а $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ неперервні при відповідних x і y , то

$$\begin{aligned} \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy &= \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t))x'_t(t) + Q(x(t), y(t))y'_t(t))dt. \end{aligned}$$

О-2. Область називається однозв'язною, якщо довільний замкнений контур, розміщений в ній, можна стягнути в точку не виходячи за межі області.

О-3. Напрям обходу вздовж замкнутого контура, який обмежує деяку однозв'язну область називається додатнім, якщо область при обході залишається зліва.

Теорема 1. (Гріна-Остроградського) Якщо функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ разом з похідними $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ неперервні в деякій замкненій області $\bar{G} = G \cup L$, а L – замкнена крива, границя області G , то

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (8)$$

Теорема 2. Нехай функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ разом з похідними $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ неперервні в деякій замкненій області $\bar{G} = G \cup L$. Тоді наступні чотири умови еквівалентні тобто виконання якої-небудь однієї з них тягне за собою виконання решти трьох:

1) для довільної замкненої кривої, що належить області $\bar{G}$ криволінійний інтеграл по замкненому контуру

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0;$$

2) для довільних двох точок A та B області $\bar{G}$ значення інтеграла $\int_{AB} Pdx + Qdy$ не залежить від форми

шляху інтегрування, який лежить в області $\bar{G}$;

3) вираз $Pdx + Qdy$ є повним диференціалом деякої функції $U(x, y)$, визначеної області $\bar{G}$, тобто

$$dU = Pdx + Qdy;$$

4) в усіх точках області $\bar{G}$ виконується рівність

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \quad (9)$$

3. Ряди

Нехай задано послідовність дійсних чисел

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}.$$

Вираз $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ називають *рядом*, а

число a_n — *загальним членом ряду*; $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ —

частинною сумою ряду. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ - число, то ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *збіжний*, а число S є *сумою* цього ряду.

Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ або не існує, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — *розбіжний*.

Геометричний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$, якщо $a \neq 0$, є збіжним при

$|q| < 1$, а його сума $S = \frac{a}{1-q}$, і розбіжним при $|q| \geq 1$.

Гармонічний ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

розбіжний, з сумою $+\infty$.

Теорема 3. (необхідна умова збіжності) Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Теорема 4. (достатня умова розбіжності) Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбіжний.

Теорема 5. (ознаки порівняння) Нехай маємо знакододатні ряди

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (10)$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad (11)$$

для всіх $n \geq n_0$, де n_0 – деяке натуральне число, виконується нерівність $a_n \leq b_n$.

Тоді із збіжності ряду (11) випливає збіжність ряду (10), а з розбіжності ряду (11) виливає розбіжність ряду (10).

Теорема 6. (гранична ознака порівняння) Якщо задано два ряди з додатними членами (10) і (11), причому існує скінченна, відмінна від нуля границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = A \quad (A \neq 0, \quad A \neq \infty),$$

то ряди одночасно збіжні, або одночасно розбіжні.

Теорема 7. (ознака Д'Аламбера) Якщо для знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$,

$0 \leq l \leq +\infty$, то 1) при $l < 1$ ряд збіжний;

2) при $l > 1$ ряд розбіжний;

3) при $l = 1$, ознака не дає відповіді: існують ряди збіжні, для яких $l = 1$, і існують ряди розбіжні, для яких теж $l = 1$.

Теорема 8. (радикальна ознака Коші) Якщо для знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = K$,

$0 \leq K \leq +\infty$, то: 1) ряд збіжний при $K < 1$;

2) ряд розбіжний при $K > 1$;

3) при $K = 1$ беруть іншу ознаку.

Теорема 9. (інтегральна ознака Коші) Нехай функція $f(x)$, визначена на проміжку $[1; +\infty)$, є додатною та монотонно спадною на цьому проміжку. Тоді невластний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$, збіжний або розбіжний одночасно із знакододатнім числовим рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \dots + f(n) + \dots$$

Для рядів, знаки членів яких строго чергуються, тобто для рядів

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots, \quad (12)$$

де $a_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$ справедливою є така достатня ознака.

Теорема 10. (ознака Лейбніца) Ряд (12) збіжний, якщо:

1) $a_n \geq a_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$;

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

При цьому сума ряду додатна і не перевищує першого його члена.

Наслідок. Абсолютна похибка від заміни суми збіжного ряду (12) його частинною сумою не перевищує модуля першого з відкинутих членів ряду, тобто

$$|S - S_n| \leq a_{n+1}.$$

Цей наслідок широко використовують при наближених обчисленнях.

Вираз виду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називають *функціональним рядом*, якщо $u_n(x)$ – функції.

Функціональний ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ називають *степеневим рядом*.

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збіжний при $x = x_0$, то він абсолютно збіжний для всіх значень x , що задовольняють нерівність $|x| < |x_0|$. Якщо при $x = x_1$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ розбіжний, то він розбіжний всюди, де $|x| > |x_1|$.

Для визначення радіусу збіжності степеневого ряду користуються формулами

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R, \text{ або } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = R.$$

Число R називають *радіусом збіжності степеневого ряду*, а інтервал $(-R; R)$ – його *інтервалом збіжності*. Питання збіжності ряду при $x = \pm R$ розв'язується для кожного ряду окремо. Якщо $R = +\infty$, то ряд є збіжним на всій числовій осі, а при $R = 0$ ряд збігається лише в точці $x = 0$.

Радіус збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ визначається за

тими самими формулами, що й ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Але інтервал збіжності знаходять з нерівності $|x - x_0| < R$, тобто він має вигляд $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Якщо функція $f(x)$ визначена в околі точки x_0 і має в цьому околі похідні всіх порядків, то степеневий ряд

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$

називається рядом Тейлора з центром в точці x_0 .

Якщо $x_0 = 0$, то степеневий ряд

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

називається рядом Маклорена.

Розглянемо ряди Маклорена деяких елементарних функцій:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!};$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!};$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-(m-1))}{n!} + \dots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n;$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n};$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \right);$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

Ряди функцій e^x , $\sin x$, $\cos x$ збігаються в інтервалі $(-\infty; +\infty)$, а функцій $(1+x)^m$, $\frac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, $\ln \frac{1+x}{1-x}$ збігаються в інтервалі $(-1; 1)$, і ряд функції $\operatorname{arctg} x$ збігається на відрізку $[-1; 1]$.

4. Зразки виконання завдань

Завдання 1. Змінити порядок інтегрування. Область інтегрування зобразити на рисунку.

$$\int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x f(x, y) dy.$$

Розв'язання. Даний інтеграл дорівнює подвійному інтегралу від функції $f(x, y)$ по області D , заданій нерівностями: $1 \leq x \leq 2$, $\frac{1}{x} \leq y \leq x$.

Отже, область D обмежена гіперболою $y = \frac{1}{x}$, прямою $y = x$ і вертикальними прямими $x = 1$ і $x = 2$. Оскільки пряма $x = 1$ проходить через точку перетину гіперболи $y = \frac{1}{x}$ з прямою $y = x$, то частина межі області

D , що лежить на прямій $x=1$, є точкою $A(1;1)$. Область D зображена на рис. 2.

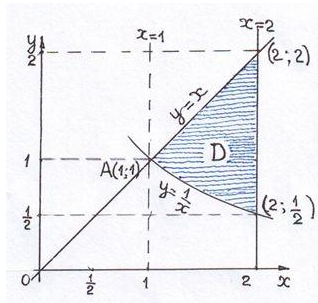


Рис. 2

Для зміни порядку інтегрування розіб'ємо область D на дві області D_1 і D_2 прямою, що проходить через точку $A(1;1)$ паралельно осі Ox (рис. 3). З рівняння гіперболи $y = \frac{1}{x}$ знаходимо $x = \frac{1}{y}$, а з рівняння прямої $y = x$ також знаходимо $x = y$. Області D_1 і D_2 визначаються такими нерівностями

$$D_1 \begin{cases} \frac{1}{2} \leq y \leq 1, \\ \frac{1}{y} \leq x \leq 2. \end{cases} \quad D_2 \begin{cases} 1 \leq y \leq 2, \\ y \leq x \leq 2. \end{cases}$$

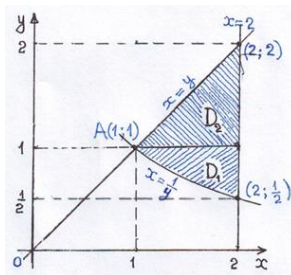


Рис. 3

Скориставшись властивістю:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy,$$

отримаємо

$$\int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x f(x, y) dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\frac{1}{y}}^2 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_y^2 f(x, y) dx.$$

Завдання 2. Обчислити подвійний інтеграл. Область інтегрування D зобразити на рисунку та обчислити її площу.

$$\iint_D (x + 2y) dx dy,$$

де область D обмежена параболою $y = x - x^2$, $y = 1 - x^2$ і віссю Oy (рис. 4).

Розв'язання. Параболи перетинаються в точці $A(1; 0)$.

Область інтегрування D є циліндричною в напрямку осі Oy і визнається нерівностями $0 \leq x \leq 1$, $x - x^2 \leq y \leq 1 - x^2$.

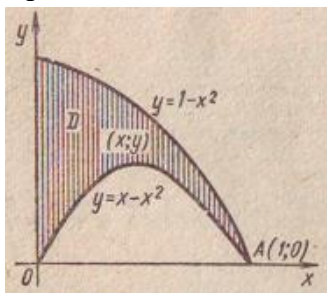


Рис. 4

Тоді

$$\iint_D (x + 2y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x-x^2}^{1-x^2} (x + 2y) dy.$$

При обчисленні внутрішнього інтеграла ми дивимося на змінну x як на сталу величину. В результаті отримаємо

$$\iint_D (x + 2y) dx dy = \int_0^1 (xy + y^2) \Big|_{x-x^2}^{1-x^2} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left(x(1-x^2) + (1-x^2)^2 - x(x-x^2) - (x-x^2)^2 \right) dx = \\
&= \int_0^1 (2x^3 - 4x^2 + x + 1) dx = \left(\frac{x^4}{2} - \frac{4}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Площу S області інтегрування D знайдемо за формулою:

$$S = \iint_D dx dy = \int_0^1 dx \int_{x-x^2}^{1-x^2} dy = \int_0^1 y \Big|_{x-x^2}^{1-x^2} dx = \int_0^1 (1-x) dx = \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Завдання 3. За допомогою подвійного інтеграла в полярних координатах обчислити площу плоскої області, обмеженою кривою $(x^2 + y^2)^3 = a^2 x y^3$. Параметр a додатний. Зобразити плоску область на рисунку.

Розв'язання. Сума квадратів $x^2 + y^2 \geq 0$, тому і $xy^3 \geq 0$. Це означає, що змінні x та y мають однакові знаки, тобто крива розміщена в першій і третій чверті. Крива симетрична відносно початку координат, оскільки рівняння кривої не зміниться при заміні x і y на $-x$ і $-y$.

Перейдемо до полярних координат. За формулами $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ маємо:

$$\begin{aligned}
\rho^6 &= a^2 \rho \cos \varphi \rho^3 \sin^3 \varphi; \Rightarrow \rho^2 = a^2 \sin^3 \varphi \cos \varphi \Rightarrow \\
\Rightarrow \rho &= a \sqrt{\sin^3 \varphi \cos \varphi}.
\end{aligned}$$

Із зростанням кута φ від 0 до $\frac{\pi}{2}$ точка з координатами (ρ, φ) опише дану лінію в першій чверті, а при зміні кута φ від π до $\frac{3\pi}{2}$ точка опише лінію у третій чверті. Зображення кривої на рис. 5.

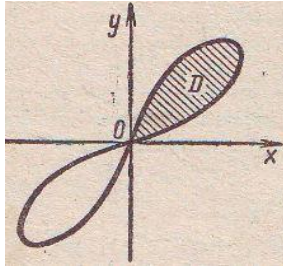


Рис. 5

Шукана площа S дорівнює подвійній площі області D :

$$\begin{aligned}
 S &= 2 \iint_D \rho \, d\rho \, d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin^3 \varphi \cos \varphi}} \rho \, d\rho = \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left. \frac{\rho^2}{2} \right|_0^{a\sqrt{\sin^3 \varphi \cos \varphi}} d\varphi = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi \cos \varphi \, d\varphi = a^2 \left. \frac{\sin^4 \varphi}{4} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{4}.
 \end{aligned}$$

Завдання 4. Знайти об'єм тіла обмеженого параболічним циліндром $z = \sqrt{x}$ і площинами $z = 0$, $y = x$, $x = 1$, $y = 0$. Дане тіло та область інтегрування (тобто його проекцію на Oxy) зобразити на рисунку.

Розв'язання. Областю D тут є плоский трикутник в площині xOy , зображений на рис. 6, тому $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq x\}$. Зверху геометричне тіло обмежене параболічним циліндром $z = \sqrt{x}$.

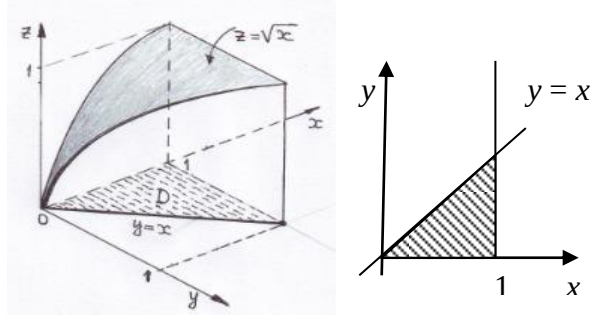


Рис. 6

Об'єм знайдемо за формулою $V = \iint_D f(x, y) dx dy$. Отже

$$\begin{aligned} V &= \iint_D \sqrt{x} dx dy = \int_0^1 \sqrt{x} dx \int_0^x dy = \int_0^1 \sqrt{x} \cdot y \Big|_0^x dx = \int_0^1 \sqrt{x} x dx = \\ &= \int_0^1 x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Завдання 5. Обчислити криволінійний інтеграл $I = \int_L (xy - 1) dx + x^2 y dy$ від точки $A(1; 0)$ до точки $B(0; 2)$ по дузі еліпса $x = \cos t$, $y = 2 \sin t$.

Розв'язання. Еліпс заданий параметричними рівняннями, а в декартовій системі координат його рівняння $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$.

В точці $A(1; 0)$ $x = 1$, $y = 0$, тому із системи $\begin{cases} 1 = \cos t, \\ 0 = 2 \sin t. \end{cases}$ знаходимо $t = 0$.

В точці $B(0; 2)$ $x = 0$, $y = 2$, тому із системи $\begin{cases} 0 = \cos t, \\ 2 = 2 \sin t. \end{cases}$ знаходимо $t = \frac{\pi}{2}$. Дуга L це дуга AB еліпса. Для кола параметр t є кутом повороту радіус-вектора, а для

еліпса – є ще стиск вздовж осі Ох чи Оу. Дуга еліпса зображена на рис. 7.

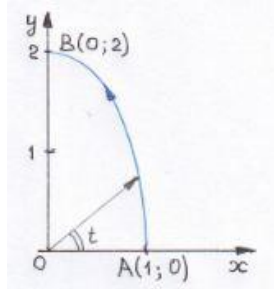


Рис. 7

Знайдемо диференціали dx і dy :

$$dx = x'_t dt = (\cos t)' dt = -\sin t dt ;$$

$$dy = y'_t dt = (2\sin t)'_t dt = 2\cos t dt .$$

$$\text{Тоді } I = \int_L (xy - 1) dx + x^2 y dy =$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t \cdot 2\sin t - 1)(-\sin t dt) + \cos^2 t \cdot 2\sin t \cdot 2\cos t dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\cos^3 t \cdot \sin t + \sin t - 2\sin^2 t \cdot \cos t) dt = -4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t d(\cos t) + \\ &\quad + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t d(\sin t) = \left(-\cos^4 t - \cos t - \frac{2}{3} \sin^2 t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= -\cos^4 \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \frac{\pi}{2} + \cos^4 0 + \cos 0 - \frac{2}{3} \sin^2 0 = \frac{4}{3} . \end{aligned}$$

Завдання 6. Обчислити криволінійний інтеграл

$$\oint_L xy dx + dy ,$$

де L - замкнений контур, утворений лініями $y = x^2$, $y = 1$, $x = 0$: а) безпосередньо;

б) за формулою Гріна-Остроградського.

Розв'язання. Зобразимо на рисунку 8 замкнений контур.

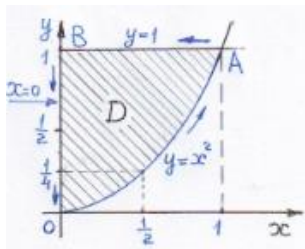


Рис. 8

а) Застосовуючи адитивність криволінійного інтеграла, маємо

$$\oint_L xy \, dx + dy = \int_{OA} xy \, dx + dy + \int_{AB} xy \, dx + dy + \int_{BO} xy \, dx + dy.$$

Шлях OA :

з рівняння $y = x^2$ частини параболи OA знаходимо $dy = 2x \, dx$, тому

$$\int_{OA} xy \, dx + dy = \int_0^1 x \cdot x^2 \, dx + 2x \, dx = \left(\frac{x^4}{4} + x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4};$$

Шлях AB :

з рівняння $y = 1$ лінії AB знаходимо $dy = 0$, тому

$$\int_{AB} xy \, dx + dy = \int_1^0 x \, dx = \frac{x^2}{2} \Big|_1^0 = -\frac{1}{2};$$

Шлях BO :

з рівняння $x = 0$ відрізка прямої BO знаходимо $dx = 0$, тому

$$\int_{BO} xy \, dx + dy = \int_1^0 dy = y \Big|_1^0 = -1;$$

Тоді $\oint_L xy \, dx + dy = \frac{5}{4} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{4}$;

б) скористаємося формулою Гріна-Остроградського

$$\oint_L P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx \, dy;$$

із заданого інтеграла видно, що $P(x, y) = xy$,
 $Q(x, y) = 1$,

тоді $\frac{\partial P}{\partial y} = x$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 - x = -x$;

$$\begin{aligned} \oint_L xy \, dx + dy &= \iint_D (-x) \, dx \, dy = - \int_0^1 x \, dx \int_{x^2}^1 dy = - \int_0^1 x \cdot y \Big|_{x^2}^1 dx = \\ &= - \int_0^1 x \cdot (1 - x^2) \, dx = - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Завдання 7. Переконатися, що вираз

$$(x^2 - 4xy - 2y^2) \, dx + (y^2 - 4xy - 2x^2) \, dy \quad \text{є повним}$$

диференціалом функції $u(x, y)$ і знайти цю функцію.

Розв'язання.

$$P(x, y) = x^2 - 4xy - 2y^2, \quad Q(x, y) = y^2 - 4xy - 2x^2.$$

Щоб заданий вираз був повним диференціалом, достатньо виконання умови $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Знаходимо

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -4x - 4y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -4x - 4y. \quad \text{Отже} \quad \text{заданий}$$

диференціальний вираз є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, тобто $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$.

1-й спосіб: оскільки $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$, то

$$u(x, y) = \int P(x, y) dx + \varphi(y),$$

де $\varphi(y)$ деяка функція від змінної y , яку ще треба буде знайти з умови $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$. Отже

$$u(x, y) = \int (x^2 - 4xy - 2y^2) dx + \varphi(y) = \frac{x^3}{3} - 2x^2y - 2y^2x + \varphi(y)$$

$$\text{З умови } \frac{\partial u}{\partial y} = -2x^2 - 4xy + \varphi'_y(y) = y^2 - 4xy - 2x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi'_y(y) = y^2, \Rightarrow \varphi(y) = \frac{y^3}{3} + C, \quad C \text{ — довільна}$$

стала.

$$\text{Отже, функція } u(x, y) = \frac{x^3}{3} - 2x^2y - 2y^2x + \frac{y^3}{3} + C;$$

2-й спосіб:

скористаємося формулою

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy,$$

де перший визначений інтеграл обчислюється при сталому значенні $y = y_0$, а другий — при сталому значенні $x = x$, $(x_0; y_0)$ — деяка фіксована точка з області визначення функцій $P(x, y)$ і $Q(x, y)$, наприклад точка $(0; 0)$:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x P(x, 0) dx + \int_0^y Q(x, y) dy + C = \int_0^x x^2 dx + \\ &+ \int_0^y (y^2 - 4xy - 2x^2) dy + C = \frac{x^3}{3} \Big|_0^x + \left(\frac{y^3}{3} - 4x \frac{y^2}{2} - 2x^2 y \right) \Big|_0^y + C = \\ &= \frac{x^3}{3} - 2x^2y - 2y^2x + \frac{y^3}{3} + C. \end{aligned}$$

Завдання 8. Дослідити на збіжність числові ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^n}{(2n+1)!}, \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{5n-2} \right)^n, \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}.$$

$$\text{а) Розв'язання. } a_n = \frac{n \cdot 3^n}{(2n+1)!}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1) \cdot 3^{n+1}}{(2n+3)!}.$$

Ряд додатний. Скористаємося ознакою Д'Аламбера:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot 3^{n+1}}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{n \cdot 3^n} = \\ &= 3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} = 3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} = \\ &= 3 \cdot 1 \cdot 0 = 0 < 1, \end{aligned}$$

отже, заданий ряд збіжний;

б) Розв'язання. Ряд додатний. Застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{5n-2} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{5n-2} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \frac{1}{5} < 1,$$

тобто заданий ряд збіжний ;

в) Розв'язання. Застосуємо інтегральну ознаку Коші:

візьмемо функцію $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$, де $x \in [1; +\infty)$, яка є додат-

ною та спадною на цьому проміжку, тоді матимемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4} = f(1) + f(2) + \dots + f(n) + \dots.$$

Дослідимо на збіжність невластний інтеграл

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} f(x) dx &= \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \arctg \frac{x}{2} \Big|_1^b = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\arctg \frac{b}{2} - \arctg \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Інтеграл збіжний, тому і даний ряд збіжний.

Завдання 9. Знайти радіус, інтервал та область збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3n+1}.$$

Розв'язання. Радіус збіжності знайдемо за формулою:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|. \text{ У прикладі } a_n = \frac{1}{3n+1}, \text{ а } a_{n+1} = \frac{1}{3n+4}.$$

$$\text{Тоді } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3n+4}{3n+1} \right| = 1.$$

Інтервал збіжності знаходимо з нерівності $|x-2| < R$, тобто $|x-2| < 1 \Rightarrow -1 < x-2 < 1 \Rightarrow 1 < x < 3$ – це інтервал збіжності ряду. Дослідимо збіжність даного степеневого ряду на кінцях інтервалу $(1; 3)$. При $x=1$ маємо такий числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots,$$

який є знакочергувальним, доданки по модулю спадають та прямують до нуля при $n \rightarrow \infty$, тому ряд є збіжним за ознакою Лейбніца. При $x=3$ дістаємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \dots,$$

який є додатним та розбіжним за ознакою порівняння з гармонічним рядом: $1/(3n+1) \sim 1/(3n)$, $n \rightarrow \infty$, або за інтегральною ознакою, бо функція $1/(3x+1)$ є додатною та спадною на $[1; +\infty)$, а інтеграл від неї є розбіжним. Таким чином, областю збіжності даного ряду є проміжок $[1; 3)$.

Завдання 10. Попередньо розкладіть підінтегральну функцію в степеневий ряд, а потім обчисліть визначений

інтеграл $\int_0^{0,5} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ із заданою точністю $\varepsilon = 0,001$.

Обґрунтуйте існування інтегралу (ОДЗ підінтегральної функції), можливість почленного інтегрування ряду (інтервал збіжності ряду) та точність обчислень (письмово перевірити всі умови ознаки Лейбніца). Перевірити результат з комп'ютерною програмою для визначених інтегралів.

Розв'язання. Відомо, що первісна підінтегральної функції не є елементарною функцією. Підінтегральна функція є елементарною $\frac{\sin^2 x}{x}$ в точці 0 не визначена,

хоча її границя в цій точці існує:

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow +0} \sin x = 1 \cdot 0 = 0 - \text{розрив I роду, в}$$

інших точках функція визначена, то неперервна. Отже, визначений інтеграл існує.

$$\text{З тригонометрії відомо, що } \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x),$$

тому спочатку розкладемо функцію $\cos 2x$ у степеневий ряд в околі точки нуль, скориставшись розкладом функції

$$\cos x: \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, x \in \mathbb{R}.$$

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \dots, x \in \mathbb{R}.$$

Тоді підінтегральна функція розкладеться в ряд:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} \left(1 - 1 + \frac{2^2}{2!} x^2 - \frac{2^4}{4!} x^4 + \frac{2^6}{6!} x^6 - \dots \right) =$$

$$= x^2 - \frac{2^3}{4!} x^4 + \frac{2^5}{6!} x^6 - \frac{2^7}{8!} x^8 + \dots, x \in \mathbb{R}.$$

$$\frac{\sin^2 x}{x} = x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{2^5}{6!} x^5 - \frac{2^7}{8!} x^7 + \dots, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Тепер визначений інтеграл

$$\begin{aligned} \int_0^{0,5} \frac{\sin^2 x}{x} dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{2^5}{6!} x^5 - \frac{2^7}{8!} x^7 + \dots \right) dx = \\ &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \frac{2^5}{6!} \frac{x^6}{6} - \frac{2^7}{8!} \frac{x^8}{8} + \dots \right) \Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3 \cdot 2^6} + \frac{2^5}{6! \cdot 6 \cdot 2^6} - \frac{2^7}{8! \cdot 8 \cdot 2^8} + \dots = \frac{1}{8} - \frac{1}{192} + \frac{1}{8640} - \dots \end{aligned}$$

Отримали знакочергувальний ряд, доданки якого по модулю спадають та прямують до нуля при $n \rightarrow \infty$, тому ряд є збіжним за ознакою Лейбніца і оцінка похибки визначається з нерівності $|S - S_n| \leq a_{n+1}$. Третій член ряду

менший за ε : $\frac{1}{8640} < 0,001$, тому

$$\int_0^{0,5} \frac{\sin^2 x}{x} dx \approx \frac{1}{8} - \frac{1}{192} \approx 0,119. \quad 3 \quad \text{WolframAlpha}$$

отримуємо приблизно 0,119906.

5. Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Змінити порядок інтегрування. Область інтегрування зобразити на рисунку.

$$1. \text{ а) } \int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y) dy;$$

$$\text{б)} \int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^0 f(x,y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{-y}}^0 f(x,y) dx .$$

$$2. \text{ а)} \int_1^4 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y) dy ;$$

$$\text{б)} \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f(x,y) dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f(x,y) dx .$$

$$3. \text{ а)} \int_0^{0,5} dx \int_{x^2}^x f(x,y) dy ;$$

$$\text{б)} \int_0^1 dy \int_0^y f(x,y) dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y) dx .$$

$$4. \text{ а)} \int_1^2 dy \int_0^{y^2} f(x,y) dx ;$$

$$\text{б)} \int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{x^2} f(x,y) dy .$$

$$5. \text{ а)} \int_1^2 dy \int_0^{2y} f(x,y) dx ;$$

$$\text{б)} \int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^0 f(x,y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_x^0 f(x,y) dy .$$

$$6. \text{ а)} \int_0^1 dy \int_0^{2-y} f(x,y) dx ;$$

$$\text{б)} \int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f(x,y) dy + \int_{-\sqrt{3}}^0 dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^0 f(x,y) dy .$$

$$7. \text{ а)} \int_0^2 dx \int_0^{3-x} f(x,y) dy ;$$

$$\text{б)} \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} f(x,y) dx .$$

$$8. \quad a) \int_0^{0.5} dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx ;$$

$$б) \int_0^1 dx \int_{1-x^2}^1 f(x, y) dy + \int_1^e dx \int_{\ln x}^1 f(x, y) dy .$$

$$9. \quad a) \int_0^1 dx \int_0^{x^2+1} f(x, y) dy ;$$

$$б) \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx .$$

$$10. \quad a) \int_0^1 dx \int_0^{4-x^2} f(x, y) dy ;$$

$$б) \int_{-2}^{-1} dy \int_0^{\sqrt{2+y}} f(x, y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_0^{\sqrt{-y}} f(x, y) dx .$$

$$11. \quad a) \int_0^1 dx \int_{2x^2}^{3-x} f(x, y) dy ;$$

$$б) \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f(x, y) dx + \int_1^e dy \int_{-1}^{-\ln y} f(x, y) dx .$$

$$12. \quad a) \int_0^{1.5} dy \int_{2y^2}^{3+y} f(x, y) dx ;$$

$$б) \int_{-2}^{-1} dx \int_{-2-x}^0 f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_{\sqrt[3]{x}}^0 f(x, y) dy .$$

$$13. \quad a) \int_{-1}^0 dx \int_{2x^2}^{x+3} f(x, y) dy ;$$

$$б) \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x, y) dx .$$

$$14. \quad a) \int_0^1 dy \int_{2y^2}^{3-y} f(x, y) dx ;$$

$$\text{б)} \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy .$$

$$15. \text{ а)} \int_{-1,5}^0 dx \int_{2x^2}^{3-x} f(x, y) dy ;$$

$$\text{б)} \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 f(x, y) dx .$$

$$16. \text{ а)} \int_0^4 dy \int_{1,25y}^{\sqrt{9+y^2}} f(x, y) dx ;$$

$$\text{б)} \int_0^1 dx \int_0^{x^3} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy .$$

$$17. \text{ а)} \int_0^4 dx \int_{0,75x}^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy ;$$

$$\text{б)} \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{2-y}}^0 f(x, y) dx .$$

$$18. \text{ а)} \int_{-4}^0 dy \int_{-\sqrt{9+y^2}}^{1,25y} f(x, y) dx ;$$

$$\text{б)} \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^0 f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{2-x}}^0 f(x, y) dy .$$

$$19. \text{ а)} \int_0^1 dx \int_{-1}^{x^2+1} f(x, y) dy ;$$

$$\text{б)} \int_0^1 dy \int_{-y}^0 f(x, y) dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f(x, y) dx .$$

$$20. \text{ а)} \int_0^4 dy \int_{0,75y}^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y) dx ;$$

$$б) \int_0^1 dx \int_0^x f(x,y) dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y) dy.$$

Завдання 2. Обчислити подвійний інтеграл. Область інтегрування D зобразити на рисунку та обчислити її площу.

$$1. \iint_D (12x^2y + 16x^3y^3) dx dy, \quad D: \quad x=1, \quad y=x^2, \quad y=-\sqrt{x}.$$

$$2. \iint_D 48x^3y^3 dx dy, \quad D: \quad x=1, \quad y=\sqrt{x}, \quad y=-x^2.$$

$$3. \iint_D 36x^2y^2 dx dy, \quad D: \quad x=1, \quad y=\sqrt[3]{x}, \quad y=-x^3.$$

$$4. \iint_D 27x^2y^2 dx dy, \quad D: \quad x=1, \quad y=x^2, \quad y=-\sqrt[3]{x}.$$

$$5. \iint_D 18x^2y^2 dx dy, \quad D: \quad x=1, \quad y=x^3, \quad y=-\sqrt[3]{x}.$$

$$6. \iint_D 32x^3y^3 dx dy, \quad D: \quad x=1, \quad y=\sqrt[3]{x}, \quad y=-x^2.$$

$$7. \iint_D 18x^2y^2 dx dy, \quad D: \quad x=1, \quad y=x^2, \quad y=-\sqrt{x}.$$

$$8. \iint_D 27x^2y^2 dx dy, \quad D: \quad x=1, \quad y=\sqrt{x}, \quad y=-x^3.$$

$$9. \iint_D 4xy dx dy, \quad D: \quad x=1, \quad y=x^2, \quad y=-\sqrt{x}.$$

$$10. \iint_D 12xy dx dy, \quad D: \quad x=1, \quad y=\sqrt{x}, \quad y=-x^2.$$

$$11. \iint_D 8xy dx dy, \quad D: \quad x=1, \quad y=\sqrt[3]{x}, \quad y=-x^3.$$

$$12. \iint_D 24xy dx dy, \quad D: \quad x=1, \quad y=x^3, \quad y=-\sqrt[3]{x}.$$

$$13. \iint_D 12xy dx dy, \quad D: \quad x=1, \quad y=x^2, \quad y=-\sqrt[3]{x}.$$

$$14. \iint_D 8xy dx dy, \quad D: \quad x=1, \quad y=\sqrt[3]{x}, \quad y=-x^2.$$

15. $\iint_D \frac{4}{5} x y dx dy$, $D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt{x}$.
16. $\iint_D (xy - 4x^3 y^3) dx dy$, $D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt{x}$.
17. $\iint_D 54 x^2 y^2 dx dy$, $D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt[3]{x}$.
18. $\iint_D (xy - 9x^5 y^5) dx dy$, $D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^2$.
19. $\iint_D 150 x^4 y^4 dx dy$, $D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt{x}$.
20. $\iint_D (6xy + 24x^3 y^3) dx dy$, $D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^2$.

Завдання 3. За допомогою подвійного інтеграла у декартових або у полярних координатах обчислити площі плоских областей, обмежених заданими лініями. Параметр a додатній. Зобразити плоскі області на рисунках.

1. а) $x + y = 4, x + 3y = 1, x = 2y$; б) $(x^2 + y^2)^5 = a^6 xy^3$.
2. а) $y = \sqrt{4 - x^2}, y = x^2$; б) $(x^2 + y^2)^5 = a^4 x^4 y^2$.
3. а) $3x^2 = 25y, 5y^2 = 9x$; б) $(x^2 + y^2)^3 = a^4 y^2$.
4. а) $xy = 4, x + y = 5$; б) $(x^2 + y^2)^3 = a^4 x^2$.
5. а) $y = x - x^2, y = 1 - x^2, x = 0$; б) $(x^2 + y^2)^5 = a^6 x^3 y$.
6. а) $y = 2^x, y = 2^{-2x}, y = 4$; б) $(x^2 + y^2)^7 = a^8 x^4 y^2$.
7. а) $y^2 = x^3, x = 4, y = 0$; б) $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (2x^2 + y^2)$.
8. а) $y = x^2 - 2x - 1, y = 1 - x$; б) $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 + 2y^2)$.
9. а) $y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}, x = 4$; б) $(x^2 + y^2)^3 = a^2 x^3 y$.
10. а) $xy = 1, y = x^2, y = 2, x = 0$; б) $(x^2 + y^2)^3 = a^2 x^2 y^2$.
11. а) $y = 2x - x^2, y = x^3$; б) $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 + 4y^2)$.
12. а) $4x = y^2 + 4, 16x = y^2 + 64$; б) $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (2x^2 + 3y^2)$.

13. а) $x = \ln y - y^2$, $x + y = 6$; б) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(5x^2 + 3y^2)$.
 14. а) $x = y^2 - 2y$, $x + y = 0$; б) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(7x^2 + 5y^2)$.
 15. а) $y^2 = 4x + 4$, $y = 2 - x$; б) $x^4 = a^2(x^2 - y^2)$.
 16. а) $y = e^x$, $y = e^{2x}$, $x = 1$; б) $x^6 = a^2(x^2 + y^2)(x^2 - 3y^2)$.
 17. а) $y^2 = 4 + x$, $x = 5$; б) $x^6 = a^2(3x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$.
 18. а) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$; б) $(x^2 + y^2)^2 = 2ay^3$.
 19. а) $y^2 = 3x$, $y^2 = 6x - x^2$; б) $(x^2 + y^2)^2 = a^2xy$.
 20. а) $y = 2x$, $2y = x$, $x + y - 6 = 0$; б) $(x^2 + y^2)^3 = a^2x^4$.

Завдання 4. Обчислити об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями. Дане тіло і область інтегрування зобразити на окремих рисунках.

1. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 2$, $y = \sqrt{1 - z}$.
2. $z = 0$, $z = 1 - x^2$, $y = 0$, $y = 3 - x$.
3. $z = 0$, $z = 1 - y$, $y = x^2$.
4. $z = 0$, $z = 2 - x$, $x = 1$, $x = y^2$.
5. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 1$, $z = x^2 + 3y^2$.
6. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $x + y = 2$, $z = x^2 + \frac{1}{2}y^2$.
7. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y + z = 1$, $x = y^2 + 1$.
8. $z = 0$, $z = 1 - y^2$, $x = y^2$, $x = 2y^2 + 1$.
9. $z = 0$, $z = \sqrt{1 - y}$, $y = x^2$.
10. $z = 0$, $z = x^2$, $x + y = 2$, $y = 0$.
11. $z = 0$, $z = x$, $x = \sqrt{4 - y^2}$.
12. $z = 0$, $x^2 + y^2 = 9$, $z = 5 - x - y$.
13. $z = 0$, $z = x^2 + y^2$, $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$.
14. $z = 0$, $z = 2y$, $y = \sqrt{9 - x^2}$.

15. $z = 0, \quad z = 3x, \quad y^2 = 2 - x.$
16. $z = 0, \quad z = \sqrt{y}, \quad y = 3x, \quad x = 2.$
17. $z = 0, \quad z = y^2, \quad y = 2x, \quad x = 3.$
18. $z = 0, \quad z = \sqrt{y}, \quad y = 2x, \quad y = 3, \quad x = 0.$
19. $2z = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0.$
20. $y = x^2, \quad y = 1, \quad x + y + z = 2, \quad z = 0.$

Завдання 5. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду. Зробити рисунок.

1. $\int_L (x + y)dx + (x - y)dy$ по дузі L кола $x = 5 \cos t, y = 5 \sin t, \quad t \in [0; \pi].$

2. $\int_{AB} (x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy,$ вздовж дуги параболи $y = x^2$ від точки $A(1;1)$ до точки $B(2;4).$

3. $\int_L (xy - x^2)dx + xdy,$ де L - дуга параболи $y = 2x^2$ від точки $A(0;0)$ до точки $B(1;2).$

4. $\int_{AB} 2ydx + (3x - y)dy,$ по дузі параболи $y = \sqrt{x}$ від точки $A(1;1)$ до точки $B(4;2).$

5. $\int_{AB} (x^2 - y)dx + (y^2 - x)dy$ по відрізку прямої від точки $A(0;0)$ до точки $B(3;4).$

6. $\int_{AB} ydx - 3xydy$ по відрізку прямої від точки $A(1;0)$ до точки $B(3;2).$

7. $\int_{AB} 2xy^2dx - 3x^2dy$ по відрізку прямої від точки $A(0;0)$ до точки $B(2;4).$

8. $\int_{AB} 3y dx - 2x \sqrt{x} dy$ по дузі параболи $y = 2\sqrt{x}$ від точки A(0;0) до точки B(1;2).

9. $\int_{AB} (y^2 + x)dx + \frac{2x}{y} dy$ по дузі кривої $y = e^x$ від точки A(0;1) до точки B(1;e).

10. $\int_{AB} \frac{2y}{x} dx + x dy$ по дузі кривої $y = \ln x$ від точки A(1;0) до точки B(e;1).

11. $\int_L y dx + \frac{x}{y} dy$ по дузі кривої $y = e^{-x}$ від точки (0;1) до точки $(-1; e)$.

12. $\int_{AB} x dy + y dx$ по дузі кривої $y = x^3$ від точки A(0;0) до точки B(1;1).

13. $\int_{AB} 2x dy + 5y dx$ по дузі параболи $y^2 = x$, від точки A(1;1) до точки B(4;2).

14. $\int_{AB} (y^2 + 1)dx - x dy$ по відрітку прямої від точки A(1;1) до точки B(3;3).

15. $\int_L 2xy^3 dx + 3x^2 y^2 dy$ по будь-якій дузі L, що з'єднує точку A(1;2) з точкою B(2;4).

16. $\int_{AB} 2xy dx + x^2 dy$ по дузі параболи $y = \sqrt{2x}$ від точки A(0;0) до точки B(2;2).

17. $\int_{AB} 2xy dx - x^2 dy$ по дузі параболи $y = 0,5x^2$ від точки A(0;0) до точки B(2;2).

18. $\int_L y^2 dx + 2xy dy$ по колу $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$.

19. $\int_L y dx - x dy$ по дузі еліпса $x = 5 \cos t$, $y = 3 \sin t$.

20. $\int_L dy - dx$ по дузі астроїди $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$.

Завдання 6. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду (номер інтегралу вибирати за варіантом по колу):

1) $\oint_L (2x^2 + 3y + 1) dx + (y^2 + 4x) dy$;

2) $\oint_L (4xy + 2y - 1) dx + (2x^2 + 3x + y) dy$

3) $\oint_L (2xy - y + 11) dx + (x^2 - 2 + y^2) dy$;

4) $\oint_L (x + y + 4) dx + (2x + y - 3) dy$;

5) $\oint_L (x + 2y - 5) dx + (3x - 2y) dy$,

де L - замкнений контур трикутника ABC .

Інтегрування виконати в додатному напрямку, тобто у напрямку проти руху стрілки годинника двома способами:

а) безпосередньо;

б) за формулою Гріна-Остроградського.

Вершини трикутника ABC лежать в точках:

1. $A(1;1)$, $B(3;1)$, $C(3;3)$.

2. $A(0;0)$, $B(2;2)$, $C(0;2)$.

3. $A(-2;-2)$, $B(0;0)$, $C(-2;0)$.

4. $A(-3;1)$, $B(-1;1)$, $C(-3;3)$.

5. $A(0;0)$, $B(0;2)$, $C(-2;2)$.

6. $A(-3;-3)$, $B(-1;-3)$, $C(-1;-1)$.

7. $A(1;-1), B(3;-3), C(3;-1)$.
8. $A(-1;1), B(-1;3), C(-3;3)$.
9. $A(-2;-2), B(0;-2), C(0;0)$.
10. $A(0;-2), B(2;-2), C(0;0)$.
11. $A(1;1), B(3;3), C(1;3)$.
12. $A(-3;-3), B(-1;-1), C(-3;-1)$.
13. $A(0;0), B(2;0), C(2;2)$.
14. $A(-2;0), B(0;0), C(-2;2)$.
15. $A(0;0), B(0;2), C(-2;2)$.
16. $A(2;2), B(4;2), C(4;4)$.
17. $A(-4;4), B(-2;-2), C(-4;-2)$.
18. $A(1;1), B(5;1), C(5;5)$.
19. $A(-2;2), B(-2;4), C(-4;4)$.
20. $A(0;0), B(3;1), C(3;3)$.

Завдання 7. Знайти функцію $u(x, y)$ за її повним диференціалом $du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$.

1. $du = (x - y)dx - (x - 2y)dy$.
2. $du = (x^2 - 2y)dx - (2x - 5)dy$.
3. $du = (2x - 3y)dx - (3x - 4y)dy$.
4. $du = (1 + 2xy)dx + (x^2 - y)dy$.
5. $du = (4 + xy^2)dx + (x^2y - 3y^2)dy$.
6. $du = (2xy + 5)dx + (1 + x^2)dy$.
7. $du = (3x - 2y)dx - (2x + y)dy$.
8. $du = (5x - 2y)dx - (2x - y)dy$.

9. $du = (3x^2 - y)dx - (x + 2y)dy$.
10. $du = (y^2 - 2x)dx + (2xy - 1)dy$.
11. $du = (x + 3y)dx - (y^2 - 3x)dy$.
12. $du = (2x - 5y)dx - (y + 5x)dy$.
13. $du = (y + 1)dx + (x - 3)dy$.
14. $du = (2 + y^2)dx + (2xy - 3)dy$.
15. $du = (x - 3y)dx - (3x - y^2)dy$.
16. $du = (x - y)dx + (2y - x)dy$.
17. $du = (4x + 2xy)dx + (x^2 + y)dy$.
18. $du = y^2dx + (2xy + 5)dy$.
19. $du = (5y + x)dx + (5x - y)dy$.
20. $du = (x - 2y^2)dx - 4xydy$.
21. $du = (2y^2 + 3x)dx + (1 + 4xy)dy$.
22. $du = x^2dx + (y^2 + 4)dy$.

Завдання 8. Дослідити на збіжність числові ряди
Вказати ознаки, за якими зроблено висновки, письмово перевіряти всі умови ознак.

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-1}{5n+2} \right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}}$.
2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2n-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-5}{n} \right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1}$.
3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-1} \right)^n$; в) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.
4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{6n-1} \right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+4}$.

5. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{5n+1} \right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$.
6. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+2} \right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{6n+1}}$.
7. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n+1} \right)^n$; в) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$.
8. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+7}{5n} \right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+9}$.
9. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{5n-1} \right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$.
10. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{8^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-3}{5n+4} \right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1}$.
11. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6n}{3n+2} \right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.
12. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{7^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{8n+1} \right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$.
13. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+3)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-2}{4n+7} \right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n+1}$.
14. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+5}{n} \right)^n$; в) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^3 n}$.
15. a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{6^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3} \right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2}{n^3+1}$.

$$\begin{aligned}
16. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n+1)!}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{4n-3} \right)^n. \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+2}. \\
17. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{3^n(2n-1)}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+4}{2n} \right)^n; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}. \\
18. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(3n)!}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6n}{7n-5} \right)^n; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)^2}. \\
19. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n-1}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{5n-4} \right)^n; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+2}. \\
20. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{2n+5} \right)^n. \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+4}.
\end{aligned}$$

Завдання 9. Знайти радіус, інтервал та область збіжності степеневого ряду. При дослідженні на кінцях вказати ознаки, за якими зроблено висновки, письмово перевіряти всі умови ознак.

$$\begin{aligned}
1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^3}. \quad 2. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^n}{2^n}. \quad 3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n 3^n}. \\
4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}. \quad 5. \sum_{n=1}^{\infty} n (x+3)^n. \quad 6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^{n+1}}. \\
7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3n+1}. \quad 8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}}. \quad 9. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}. \\
10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{3^n}. \quad 11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^5}. \quad 12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}. \\
13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n+1}}. \quad 14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{4^{n+1}}. \quad 15. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n}.
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
 16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}. & 17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n 2^n}. & 18. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{5^{n+1}}. \\
 19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n}. & 20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{n+6}. & 21. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n^2+1}.
 \end{array}$$

Завдання 10. Попередньо розкладіть підінтегральну функцію в степеневий ряд, а потім обчисліть визначений інтеграл із заданою точністю $\varepsilon = 0,001$. Обґрунтуйте існування інтегралу (ОДЗ підінтегральної функції), можливість почленного інтегрування ряду (інтервал збіжності ряду) та точність обчислень (письмово перевірити всі умови ознаки Лейбніца). Перевірити результат з комп'ютерною програмою для визначених інтегралів.

$$\begin{array}{lll}
 1. \int_0^{0,5} \frac{x dx}{\sqrt{1+x^3}}. & 2. \int_0^{0,5} \frac{\sin x^2}{x^2} dx. & 3. \int_0^{0,5} \sqrt{1+x^2} dx. \\
 4. \int_0^{0,5} \arctg x^2 dx. & 5. \int_0^1 \sqrt{x} e^{-x} dx. & 6. \int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^5}. \\
 7. \int_0^1 \sin x^2 dx. & 8. \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx. & 9. \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}. \\
 10. \int_0^{0,25} e^{-x^2} dx. & 11. \int_0^{0,5} \frac{\sin 2x}{x} dx. & 12. \int_0^{0,5} \ln(1+x^4) dx. \\
 13. \int_0^{0,25} \cos \sqrt{x} dx. & 14. \int_0^1 x^3 \sin x dx. & 15. \int_0^{0,5} \frac{\sin^2 x}{x} dx. \\
 16. \int_0^{0,25} \frac{\sin 4x}{x} dx. & 17. \int_0^1 x^2 \cos \sqrt{x} dx. & 18. \int_0^{0,25} x \ln(1+x) dx. \\
 19. \int_0^{0,25} x e^{-\sqrt{x}} dx. & 20. \int_0^1 \sqrt{x} \sin x dx. & 21. \int_0^1 x^2 e^{-x^2} dx.
 \end{array}$$

6. Питання на екзамен

1. Поняття функції кількох змінних. Область визначення, лінії рівня і поверхні рівня.
2. Границя функції двох змінних. Неперервність.
3. Частинні похідні першого порядку функції двох змінних їх геометричний зміст.
4. Повний приріст і повний диференціал функції двох змінних.
5. Застосування повного диференціала до наближених обчислень.
6. Похідні та диференціали вищих порядків функції двох змінних.
7. Похідна складеної функції. Повна похідна.
8. Інваріантність форми повного диференціала.
9. Похідна від функції заданої неявно.
10. Дотична площина і нормаль до поверхні.
11. Частинні похідні і диференціал вищих порядків.
12. Скалярне поле. Похідна за напрямом функції двох змінних.
13. Градієнт функції двох змінних.
14. Екстремум функції двох змінних.
15. Найбільше і найменше значення функції двох змінних в замкненій області.
16. Задача про об'єм циліндричного тіла, означення подвійного інтеграла.
17. Задача про масу матеріальної пластинки.
18. Властивості подвійного інтеграла .
19. Умови існування подвійного інтеграла і його обчислення в декартовій системі координат.
20. Обчислення подвійних інтегралів в полярній системі координат.
21. Застосування подвійних інтегралів до задач геометрії.
22. Обчислення статичних моментів плоскої фігури.
23. Обчислення координат центра маси плоских фігур.
24. Обчислення моментів інерції плоскої області.

25. Поняття потрійного інтеграла в декартових координатах. Умови його існування та властивості.
26. Обчислення потрійного інтеграла.
27. Потрійний інтеграл у циліндричних координатах.
28. Застосування потрійного інтеграла.
29. Поняття криволінійного інтеграла першого роду.
30. Обчислення криволінійних інтегралів першого роду.
31. Застосування криволінійного інтеграла першого роду.
32. Поняття криволінійного інтеграла другого роду.
33. Обчислення криволінійного інтеграла другого роду і його властивості.
34. Формула Гріна-Остроградського.
35. Умова рівності нулю криволінійного інтеграла другого роду по замкнутому контуру.
36. Умова при якій вираз $P(x, y) \cdot dx + Q(x, y) \cdot dy$ є повним диференціалом
37. Незалежність криволінійного інтеграла другого роду від форми шляху інтегрування.
38. Поняття числового ряду. Збіжність і сума ряду.
39. Геометричний ряд. Наведіть приклад геометричного ряду.
40. Гармонічний ряд. Необхідна ознака збіжності та достатня ознака розбіжності числових рядів.
41. Необхідна і достатня умова збіжності знакододатнього ряду. Ознака порівняння.
42. Ознака Д'Аламбера та радикальна ознака Коші.
43. Інтегральна ознака Коші-Маклорена.
44. Знакозмінні і знакопозаперіжні числові ряди. Теорема Лейбніца.
45. Абсолютно та умовно збіжні ряди, їхні властивості.
46. Поняття функціонального ряду і його області збіжності.
47. Степеневі ряди. Теорема Абеля.
48. Інтервал і радіус збіжності степеневого ряду.
49. Основні властивості степеневих рядів.
50. Ряди Тейлора і Маклорена .

51. Необхідна і достатня умови розкладу функції в ряд Тейлора.
52. Розклад в степеневий ряд функцій: e^x , $\sin x$, $\cos x$.
53. Розклад в степеневий ряд функцій $\frac{1}{1+x}$, $\ln(1+x)$, $\ln(1-x)$, $\ln \frac{1+x}{1-x}$.
54. Розклад в степеневий ряд функції $(1+x)^\alpha$.
55. Застосування степеневих рядів до наближеного обчислення значень функцій і логарифмів.
56. Застосування степеневих рядів до наближеного обчислення коренів.
57. Застосування степеневих рядів до наближеного обчислення визначених інтегралів.
58. Застосування степеневих рядів до наближеного інтегрування диференціальних рівнянь.
59. Гармонічні коливання. Ортогональні системи функцій. Тригонометричний ряд Фур'є.
60. Достатні умови подання функції через ряд Фур'є.
61. Ряд Фур'є для парних і непарних функцій.
62. Ряд Фур'є для функції з періодом $2l$.
63. Ряди Фур'є для функцій заданих на відрізку $[0; l]$ або на відрізку $[a; b]$.
64. Ряд Фур'є для неперіодичної функції.
65. Комплексна форма ряду Фур'є. Інтеграл Фур'є.

Список рекомендованої літератури

1. Paluszynski M. Calculus for Computer Scientists. Lecture notes. 2013. (Конспект лекцій основний англійською та українською). URL: http://www.math.uni.wroc.pl/~mpal/academic/2013/lecture_notes.pdf
<https://exam.nuwm.edu.ua/course/view.php?id=4917#section-7>
2. Кушнір В. П. Конспект лекцій у двох частинах. URL: https://drive.google.com/file/d/0B9X16RYY_h37SF9HdXBkZnpwbXc/view
https://drive.google.com/file/d/0B9X16RYY_h37RHZ5TXIFekxYRIU/view
3. Кушнір О. О. Математичний аналіз: конспект лекцій для

- студентів фаху «Прикладна математика». Частина 1. 085-123. Рівне : УДУВГП, 2003. 96 с. URL: <https://exam.nuwm.edu.ua/course/view.php?id=4917>
4. Давидов М. О. Курс математичного аналізу. Ч. 1–3. Київ : Вища школа. Ч.1 1990. 381 с.; ч.2. 1991. 366с.; ч.3. 1979. 383с.
 5. Ярмуш Я. І., Самолюк І. В. Вища математика. Практикум : навч. посіб. Рівне : НУВГП, 2015. 148 с. URL: <http://ep3.nuwm.edu.ua/id/eprint/5632>
 6. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз: у двох частинах. Київ: Либідь, 1993-1994. Ч.1 1993. 320 с.; ч.2. 1994. 304с.
 7. Richard A. Silverman. Modern Calculus and Analytic Geometry. New York: The Macmillan Company, London: Collier-Macmillan Limited, 1969. 1034 p.
 8. Murray R. Spiegel. Schaum's Outline of Advanced Mathematics for Engineers and Scientists. The McGraw-Hill Companies, 1971. 407 p. URL: <https://exam.nuwm.edu.ua/course/view.php?id=4917#section-10>
 9. Шкіль М. І., Колесник Т. В., Котлова В. М. Вища математика. Аналітична геометрія з елементами алгебри. Вступ до математичного аналізу. Книга 1. Київ : Либідь, 1994. 391 с.
 10. Шкіль М. І., Колесник Т. В. Вища математика: Визначений інтеграл, функції багатьох змінних, диференціальні рівняння, ряди. Книга 2. Київ : Вища школа, 1986. 512 с.
 11. Рудавський Ю. К. та ін. Збірник задач з математичного аналізу. Частина 1. Львів : Видавництво Національного університету "Львівська політехніка", 2008. 352 с.
 12. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика : навчальний посібник. Київ : А.С.К., 2006. 648 с.
 13. Брушковський О. Л. Вища математика : навчальний посібник. Частина 2. Рівне : НУВГП, 2008. 266 с.
 14. Кушнір О. О., Кушнір В. П. Друга визначна границя для матриць. Вісник ННІАКОТ, № 9, 2021. С. 22–28.
 15. Кушнір О. О., Кушнір В. П. Застосування нерівності про одностонні послідовності до розв'язування олімпіадних задач. Вісник ННІАКОТ, № 10, 2022. С. 17–25.