

Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та
природокористування
Навчально-науковий інститут автоматики, кібернетики та
обчислювальної техніки
Кафедра комп'ютерних наук та прикладної математики

04-01-90М

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання лабораторних робіт з навчальної дисципліни
«Комп'ютерна математика»
для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня
за освітньо-професійною програмою «Інтернет речей»
спеціальності F2 «Інженерія програмного забезпечення»
денної форми навчання

Рекомендовано
науково-методичною радою з якості
ННІ КІТІ
Протокол № 1 від 20.10.2025 р.

Рівне – 2025

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з навчальної дисципліни «Комп'ютерна математика» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою «Інтернет речей» спеціальності F2 «Інженерія програмного забезпечення» денної форми навчання. [Електронне видання] / Демчук О. С. – Рівне : НУВГП, 2025. – 53 с.

Укладач: Демчук О. С., доцент кафедри комп'ютерних наук та прикладної математики, кандидат технічних наук.

Відповідальний за випуск: Турбал Ю. В., завідувач кафедри комп'ютерних наук та прикладної математики, доктор технічних наук, професор.

Гарант освітньо-професійної програми «Інтернет речей»: Жуковський В. В., доцент кафедри комп'ютерних наук та прикладної математики, кандидат технічних наук, доцент.

© О. С. Демчук, 2025
© НУВГП, 2025

ЗМІСТ

1. Загальні положення	4
2. Методичні рекомендації до лабораторних робіт з навчальної дисципліни	
Тема 1. Розв'язання задач математичного аналізу в системі MAPLE	5
Тема 2. Розв'язання алгебраїчних рівнянь та систем рівнянь в системі MAPLE. Методи оптимізації в MAPLE	11
Тема 3. Розв'язання задач лінійної алгебри в системі MAPLE	27
Тема 4. Інтерполяція та апроксимація табличних даних в системі MAPLE	33
Тема 5. Математичне моделювання в MAPLE	44
3. Список рекомендованої літератури	53

1. ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Знання математики є фундаментом, на якому базується підготовка сучасних фахівців у галузі інформаційних технологій та розробки програмного забезпечення. Для автоматизації виконання як числових, так і аналітичних обчислень, математичного моделювання, наукових та інженерних розрахунків давно і успішно використовуються системи комп'ютерної математики. Вони дозволяють здійснювати обробку і аналіз даних з різних прикладних областей, акумулюють і надають користувачу можливості, накопичені за багатовіковий досвід розвитку математики, мають розвинену кольорову графіку, дозволяють готувати електронні уроки і книги з живими прикладами і становлять великий інтерес для системи освіти.

Однією з найбільш потужних розробок у галузі комп'ютерної математики є система комп'ютерної алгебри Maple, розроблена компанією Maplesoft для розв'язання математичних та інженерних задач, моделювання і візуалізації результатів обчислень. Вона містить зручний і повний електронний довідник з різних розділів математики, розлогу систему підказок з прикладами розв'язання типових математичних задач, а також власну мову програмування, що має елементи структурного та візуально-подійного програмування і навіть підтримує об'єктно-орієнтовану парадигму.

Вивчення курсу передбачає наявність систематичних та ґрунтовних знань з курсів: «Математичний аналіз», «Алгебра та геометрія», «Дискретна математика», «Теорія ймовірностей» та «Методи обчислень». Дана дисципліна буде корисною для вивчення таких дисциплін як «Методи оптимізації та дослідження операцій», «Математичне моделювання», «Аналіз даних та математична статистика», «Випадкові процеси та їх моделювання» тощо.

Лабораторні роботи виконуються здобувачами вищої освіти першого (бакалаврського) рівня на III курсі денної форми навчання, що навчаються за освітньо-професійною програмою «Інтернет речей» спеціальності F2 «Інженерія програмного забезпечення».

Виконання лабораторних робіт з дисципліни «Комп'ютерна математика» сприятиме формуванню загальних та фахових компетентностей, соціальних, «м'яких» навичок (soft skills) та забезпечуватиме програмні результати навчання здобувача вищої освіти відповідно до фаху та освітньо-професійної програми.

2. МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ З НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Тема 1. Розв'язання задач математичного аналізу в системі MAPLE

Мета: навчитись використовувати систему комп'ютерної математики MAPLE для розв'язання задач математичного аналізу.

Завдання

1. Засобами палітри Calculus системи MAPLE знайти границі функцій::

B.1 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x + 5}{7x^3 + x^2 + 1};$

B.2 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + x - 12};$

B.3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2};$

B.4 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 3}{2x + 5} \right)^{3x + 2};$

B.5 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 2x + 1}{7x^2 + 4x + 5};$

B.6 $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{20 + x} - \sqrt{30 - x}}{x^2 - 6x + 5}$

B.7 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 + x} - \sqrt{4 - x}}{3x};$

B.8 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{5x};$

B.9 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 7x + 1}{3x^2 + 2x + 3};$

B.10 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 8}{2x + 3} \right)^{4x + 3}$

2. Виконати покрокове відшукування границі з п.1 за допомогою команд меню Tools, ☐ Tutors, ☐ CalculusSingle Variables, ☐ Limit Methods ...

3. Засобами палітри Calculus системи MAPLE знайти перші і другі похідні функцій:

$$\text{B.1 } y = x^2 \cdot e^{\operatorname{tg}(x^2+1)} + \frac{x^2 + \ln x}{x^4 + 1}; \quad \text{B.2 } y = (3^{\sin 2x} - \cos^2 2x)^3;$$

$$\text{B.3 } y = \ln \operatorname{arctg}(x^6 + 8); \quad \text{B.4 } y = (1 + x^8)^{\arcsin x};$$

$$\text{B.5 } y = (5x^2 + 2) \cdot e^{3x}; \quad \text{B.6 } y = x^3 \cdot e^{2x} + \frac{x^2 + 5}{\sin x};$$

$$\text{B.7 } y = (5^{\cos 2x} - \operatorname{ctg}^2 3x)^6; \quad \text{B.8 } y = (3^{\arcsin 2x} + \ln(1 + 3x^2))^5;$$

$$\text{B.9 } y = (4 + x^9)^{\operatorname{arctg} x}; \quad \text{B.10 } y = x^7 \cdot \operatorname{tg} x + \frac{\cos 3x}{5x + 1};$$

4. Придумати функцію однієї змінної. За допомогою команд меню Tools, Tutors, Calculus-Single Variables, Derivatives... знайти її перші і другі похідні та побудувати їхні графіки.

5. Виконати покрокове диференціювання функції з п.4 за допомогою команд меню Tools, ☐ Tutors, ☐ Calculus-Single Variables, ☐ Differentiate Methods...

6. Засобами палітри Calculus системи MAPLE обчислити точне і наближене значення визначеного інтегралу:

$$\text{B.1. } \int_{-1}^0 (2x + 3) \cdot e^{-2x} dx;$$

$$\text{B.2 } \int_0^1 \left(x^3 + \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx$$

$$\text{B.3} \quad \int_0^1 x^2 \cdot (\sqrt{x}+1)^3 dx.$$

$$\text{B.4} \quad \int_0^1 x \arctg x dx;$$

$$\text{B.5} \quad \int_{-5}^5 e^{-x^2} dx;$$

$$\text{B.6} \quad \int_0^{\pi/2} (3x^2+1) \sin x dx;$$

$$\text{B.7} \quad \int_0^5 \frac{3 dx}{\sqrt{3x+1} + \sqrt[4]{(3x+1)}}.$$

$$\text{B.8} \quad \int_0^2 \ln(x^2+4) dx;$$

$$\text{B.9} \quad \int_1^{64} \frac{2 + \sqrt[6]{x}}{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}} dx.$$

$$\text{B.10} \quad \int_0^{\pi/4} x^2 \cos 2x dx;$$

Приклад:

```

> int(1..infinity, sin(x)/x^2) dx
                                     -Ci(1) + sin(1)
> evalf(%)
                                     0.5040670619

```

7. За допомогою команд меню Tools, ☐ Tutors, Calculus-Single Variables, ☐ Antiderivatives... побудувати графік функції із завд. 6 на заданому відрізку і її первісної.

8. Засобами палітри Calculus системи MAPLE обчислити невизначені інтеграли:

$$\text{B.1} \quad \int \left(x^2 + 3x + 5 + \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x^2} + \sqrt[5]{x} + 7e^x + 9^x + \frac{3}{x} \right) dx;$$

$$\text{B.2} \quad \int \frac{(x + \sqrt[3]{x})^2}{\sqrt{x}} dx;$$

$$\text{B.3} \quad \int \left(\sin x + 2 \cos x + \frac{6}{\sin x} + \frac{9}{\cos x} - \operatorname{tg} x - 6 \operatorname{ctg} x + \frac{4}{\cos^2 x} + \frac{8}{\sin^2 x} \right) dx;$$

$$\text{B.4} \quad \int \left(\frac{2}{1+x^2} + \frac{6}{9+x^2} + \frac{7}{25-x^2} + \frac{5}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{3}{\sqrt{49-x^2}} + \frac{2}{\sqrt{x^2-5}} \right) dx;$$

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx;$$

B.5

$$\text{B.6} \quad \int \sin 2x \cdot \sin 6x \cdot \cos 7x dx;$$

$$\text{B.7} \quad \int \sin^3 x \cdot \cos^6 x dx;$$

$$\text{B.8} \quad \int \sin^6 x dx;$$

$$\text{B.9} \quad \int \sin^2 x \cdot \cos^4 x dx;$$

$$\text{B.10} \quad \int \frac{\sin^6 x}{\cos^{10} x} dx;$$

9. Виконати покрокове інтегрування функції з п.8 за допомогою команд меню Tools, ☐ Tutors, ☐ CalculusSingle Variables, ☐ Integration Methods...

10. Засобами палітри Expression системи MAPLE обчислити суму нескінченного ряду:

$$\text{B.1} \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$$

$$\text{B.2} \quad \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

$$\text{B.3} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (n+1)^2 (n+2)^2}$$

$$\text{B.4} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$\text{B.5} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2 (n+1)^2}$$

$$\text{B.6} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$$

$$\text{B.7} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)}, m \in \mathbb{N}$$

$$\text{B.8} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (n+1)^2}$$

$$\text{B.9} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\text{B.10} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

11. Засобами системи MAPLE розкласти функцію в ряд Тейлора в околі т. $x=0$ і представити у вигляді многочлена $(N+5)$ -го степеня (N – номер варіанта).

$$\text{B.1} \quad y = e^{-x};$$

$$\text{B.2} \quad y = \sin x^2;$$

$$\text{B.3} \quad y = \cos 5x;$$

$$\text{B.4} \quad y = \ln(3 + 5x);$$

$$\text{B.5 } y = \arccos\left(\frac{x}{2}\right);$$

$$\text{B.6 } y = \cos 3x * \sin 2x;$$

$$\text{B.7 } y = \arcsin(x^2 - 1);$$

$$\text{B.8 } y = e^{2x-3}$$

$$\text{B.9 } y = \operatorname{arctg}(1 + x^3);$$

$$\text{B.10 } y = \cos(x^2 - 7).$$

Приклад: $y = \sin(x)$, $n=12$.

> `convert(taylor(sin(x), x = 0, 12), polynomial)`

$$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 - \frac{1}{39916800}x^{11}$$

12. За допомогою команд меню Tools, Tutors, CalculusSingle Variables, Taylor Approximation... провести графічну ілюстрацію розкладу функції із завд. 11 у ряд Тейлора.

13. За допомогою команд меню Tools, Tutors, Calculus-Single Variables, Approximate Integration... виконати інтерактивне наближене обчислення визначеного інтегралу із завд. 6 чисельними методами прямокутників (сум Рімана), трапецій, Сімпсона.

14. За допомогою команд меню Tools, Tutors, Calculus-Single Variables, ArcLench... обчислити довжину дуги підінтегральної функції із завд. 6 на відрізку інтегрування.

15. За допомогою команд меню Tools, Tutors, Calculus-Single Variables, Mean Value Theorem... для функції із завд. 6 наочно проілюструвати справедливість теореми про середнє:

Перша теорема про середнє: Якщо $f(x)$ – функція, що інтегрується, неперервна на відрізку $[a,b]$, то існує принаймні одне значення $x = \xi$ на інтервалі $[a,b]$, для якого:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

16. За допомогою команд меню Tools, Tutors, Calculus-Single Variables, Tangents... побудувати дотичну до графіка підінтегральної функції із завд. 6 в деякій точці.

17. За допомогою команд меню Tools, Tutors, Calculus-Single Variables, Secants... побудувати дотичну до деякої точки кривої підінтегральної функції із завд. 6 та ряд січних.

18. За допомогою команд меню Tools, Tutors, Calculus-Single Variables, Surface of Revolution... для підінтегральної функції із завд. 6 побудувати поверхню обертання кривої. За допомогою команд меню Tools, Tutors, Calculus-Single Variables, Volume of Revolution... обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням.

Тема 2. Розв'язання алгебраїчних рівнянь та систем рівнянь в системі MAPLE. Методи оптимізації в MAPLE

Мета: навчитись використовувати систему комп'ютерної математики MAPLE для розв'язання алгебраїчних рівнянь та систем рівнянь, а також задач пошуку екстремумів різних функцій.

Теоретичні відомості

Для розв'язання лінійних і нелінійних рівнянь та систем рівнянь в аналітичному вигляді служить універсальна і гнучка функція

solve(eqn, var) або **solve**({eqn1,eqn2,...},{var1,var2,...}),

де eqn – рівняння, що містить функцію ряду змінних, var – шукана змінна.

Якщо при записі eqn не використовується знак рівності чи знаки відношення, то вважається, що **solve()** шукає корені рівняння eqn=0. Якщо eqn – поліном, то **solve()** обчислює всі корені полінома – як дійсні, так і комплексні.

Примітка: Оскільки функція **solve()** намагається вивести розв’язок в аналітичному вигляді, то результат часто представлений через функцію **RootOf()**. Щоб отримати чисельні розв’язки рівняння, доводиться використовувати функції **evalf()** або **convert()**.

Завдання

1. Засобами MAPLE розв’язати нелінійне рівняння:

B.1 $2^x + 5x - 3 = 0;$

B.2 $\ln x + (x + 1)^3 = 0;$

B.3 $4(1 - x^2) - e^x = 0;$

B.4 $\operatorname{tg}(0.58x + 0.1) = x^2;$

B.5 $\sqrt{x} - \cos(0.387x) = 0;$

B.6 $\sqrt{x+1} = \frac{1}{x};$

B.7 $\lg x - \frac{7}{2x+6} = 0;$

B.8 $e^{-2x} - 2x + 1 = 0;$

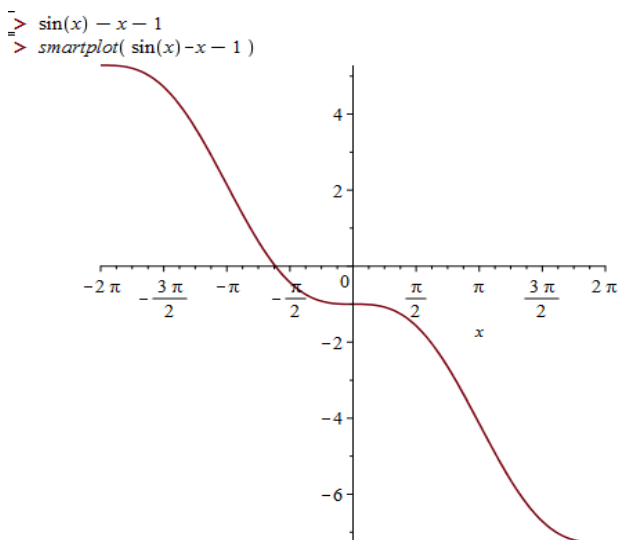
B.9 $(x - 1)^2 = \frac{1}{2}e^x;$

B.10 $2x^2 - 0.5^x - 3 = 0.$

Побудувати графік заданої функції.

Приклад: Розв’язати нелінійне рівняння: $\sin(x) - x = 1.$

```
> eq := sin(x) - x - 1 = 0 : solve(eq, x)
      RootOf(-sin(_Z) + _Z + 1)
> evalf(%)
      -1.934563211
```



2. Засобами MAPLE знайти корені полінома:

B.1 $2x^4 - x^3 + 4x^2 + 8x - 20 = 0$	B.2 $25x^4 + 12x^3 - 18x^2 + 2x - 3 = 0$
B.3 $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 4x - 8 = 0$	B.4 $-3x^4 + 2x^3 + x^2 - 4x + 2 = 0$
B.5 $4x^4 - 9x^3 + 12x^2 - 8x - 5 = 0$	B.6 $x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 2 = 0$
B.7 $-5x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 2x + 12 = 0$	B.8 $3x^4 - 9x^3 + 12x^2 - 2x - 12 = 0$
B.9 $1.1x^3 + 20x^2 - 10x - 300 = 0$	B.10 $x^3 - 1.1x^2 - 2.2x + 1.8 = 0$

Побудувати графік заданої функції

3. За допомогою функції **solve()** системи MAPLE розв'язати систему трьох лінійних рівнянь $Ax=b$, розширена матриця якої (A і b) подана згідно варіанту.

ВАРІАНТ 1

4.4 7.1 -2.0 3.2

4.1 5.5 12.5 -1.9

9.1 4.4 1.9 -5.3

ВАРІАНТ 2

1.9 7.1 3.0 5.8

6.4 1.0 4.3 -7.5

2.7 -1.9 6.2 -4.5

ВАРІАНТ 3

2.5 4.5 9.0 -6.8
 1.8 9.6 5.9 2.2
 4.1 -2.4 1.6 -0.9

ВАРІАНТ 5

3.3 9.1 -3.3 8.5
 5.2 0.4 -2.9 7.5
 2.4 -2.3 7.8 -1.2

ВАРІАНТ 7

3.0 5.7 -0.1 7.3
 6.8 -2.3 -3.3 -8.6
 2.2 -0.3 4.5 1.8

ВАРІАНТ 9

3.3 5.3 9.6 -8.3
 2.6 5.7 0.2 -0.5
 10.1 5.3 -3.5 -7.0

ВАРІАНТ 4

5.5 11.0 3.1 -7.1
 11.2 4.1 -5.6 6.7
 1.5 -0.9 4.1 3.5

ВАРІАНТ 6

1.6 4.0 0.1 -3.2
 4.9 1.9 -1.0 2.1
 3.3 5.4 10.4 -2.7

ВАРІАНТ 8

11.1 5.0 5.1 -3.0
 1.3 6.5 4.2 -7.6
 0.4 3.2 3.9 -3.7

ВАРІАНТ 10

7.1 1.1 5.2 2.5
 1.4 4.1 -1.6 1.0
 0.2 -2.3 4.0 7.2

Приклад:

`sys := {4·x1 + 7·x2 - x3 = 11, -2·x1 + 2·x2 - 6·x3 = 4, x1 - 3·x2 + 4·x3 = -3} : solve(sys, {x1, x2, x3});`
 $\left\{ x_1 = 3, x_2 = -\frac{2}{5}, x_3 = -\frac{9}{5} \right\}$

4. За допомогою функції **solve()** системи MAPLE розв'язати систему нелінійних рівнянь та у випадку двох невідомих побудувати графіки відповідних функцій (попередньо кожне рівняння системи необхідно звести до вигляду: $y=f(x)$).

$$\text{B.1} \begin{cases} x^2 + y^2 = 13; \\ x^2 - y = 7 \end{cases}$$

$$\text{B.2} \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9; \\ \sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{y} = 5 \end{cases}$$

$$\text{B.3} \begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} = 3; \\ \sqrt{y+z} + \sqrt{x+z} = 5; \\ \sqrt{x+z} + \sqrt{y+x} = 4 \end{cases}$$

$$\text{B.4} \begin{cases} y - 2 \sin(x) - x = 1; \\ y^2 - x^2 = 4 \end{cases}$$

$$\text{B.5} \begin{cases} 4x_1^2 + x_2^2 = 4; \\ x_1 - x_2^2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{B.6} \begin{cases} 4x_1^2 + x_2^2 = 8; \\ 10x_1 - x_2^2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{B.7} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 20.7; \\ x_1^2 + 2x_1x_2 + x_4^3 = 15.88; \\ x_1^3 + x_3^2 + x_4 = 21.218; \\ 3x_2 + x_3x_4 = 7.9 \end{cases}$$

$$\text{B.8} \begin{cases} \sin(x - 0.6) - y = 1.6; \\ 3x - \cos y = 0.9 \end{cases}$$

$$\text{B.9} \begin{cases} 2x_1^2 - x_1x_2 - 5x_1 + 1 = 0; \\ x_1 + 3 \lg x_1 - x_2^2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{B.10} \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1; \\ 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_3 = 0; \\ 3x_1^2 - 4x_2 + x_3^2 = 0 \end{cases}$$

Приклад:

$$\begin{aligned} &> \text{eqs} := \left\{ 2x + 4y = 6, y + \frac{1}{x} = 1 \right\} : r := \text{solve}(\text{eqs}, \{x, y\}) \\ & \quad r := \{x = -1, y = 2\}, \left\{ x = 2, y = \frac{1}{2} \right\} \end{aligned}$$

5. За допомогою функції `fsolve()` системи MAPLE знайти екстремуми функції від однієї змінної за нулями похідної. Побудувати графіки функції та її похідної.

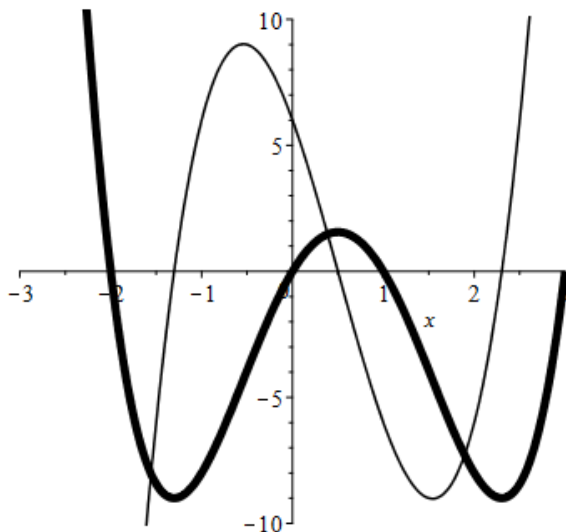
<i>Номер варіанту</i>	<i>Функція</i>
1	$y = x \sin x + \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$
2	$y = x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 72x + 90$
3	$y = x^6 + 3x^2 + 6x - 1$
4	$y = 10x \ln x - x/2$
5	$y = (x + 1)^4 - 2x^2$
6	$y = 3x^4 - 10x^3 - 21x^2 + 12x$
7	$y = \frac{2x}{\ln 2} - 2x^2$
8	$y = e^x - \frac{1}{3}x^3 - 2x$
9	$y = x^3 - 3 \sin x$
10	$y = \cos x - 2 \sin x$

Приклад: $y = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x$

```

> y := x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x
      y := x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x
=
> dy :=  $\frac{d}{dx}y$ 
      dy := 4x^3 - 6x^2 - 10x + 6
=
> extrem := fsolve(dy = 0, x)
      extrem := -1.302775638, 0.5000000000, 2.302775638
=
> plot( {y, dy}, x=-3..3, color = black, thickness = [1, 5])

```



= .

Теоретичні відомості

Функція **extrema()** дозволяє знайти екстремуми виразу **expr** (як максимуми, так і мінімуми) при обмеженнях **constrs** і змінних **vars**, по яким шукається екстремум:

- **extrema**(expr, constrs)
- **extrema**(expr, constrs, vars)
- **extrema**(expr, constrs, vars, 's')

Обмеження **constrs** і змінні **vars** можуть задаватися одиночними об'єктами чи списками. Знайдені координати точки екстремуму присвоюються змінній **'s'**. При відсутності обмежень у вигляді рівностей або нерівностей замість них записується порожній список **{ }**.

6. За допомогою функції **extrema()** системи MAPLE знайти екстремуми функції від двох змінних.

1. $f(X) = 7x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 + x_1 - 10x_2$.

2. $f(X) = 3x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2 - 2x_1 + x_2$.

3. $f(X) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 17x_2^2 + 5x_2$.

4. $f(X) = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 - x_1 - x_2$.

5. $f(X) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 17x_1$.

6. $f(X) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + x_1 - 3x_2$.

7. $f(X) = 10x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2 + 10x_2$.

8. $f(X) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 6x_2^2 + x_1 - x_2$.

9. $f(X) = (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2$.

10. $f(X) = 6x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2 - 17x_2$.

Приклад: $z(x, y) = 2(x - 5)^2 + (y - 3)^2 + 7xy - 3$.

```
> z := (x,y) -> 2*(x-5)^2 + (y-3)^2 + 7*x*y - 3
      z := (x,y) -> 2*(x-5)^2 + (y-3)^2 + 7*x*y - 3
> extrema(z(x,y), { }, {x,y}, 's')
      { 1928 }
      { 41 }
> s
      { { x = 2/41, y = 116/41 } }
```

Теоретичні відомості

Часто буває потрібно знайти мінімум чи максимум заданої функції. Для пошуку мінімумів і максимумів виразів (функцій) ехрг служать функції стандартної бібліотеки:

– **minimize**(expr, opt1, opt2, ..., optn);

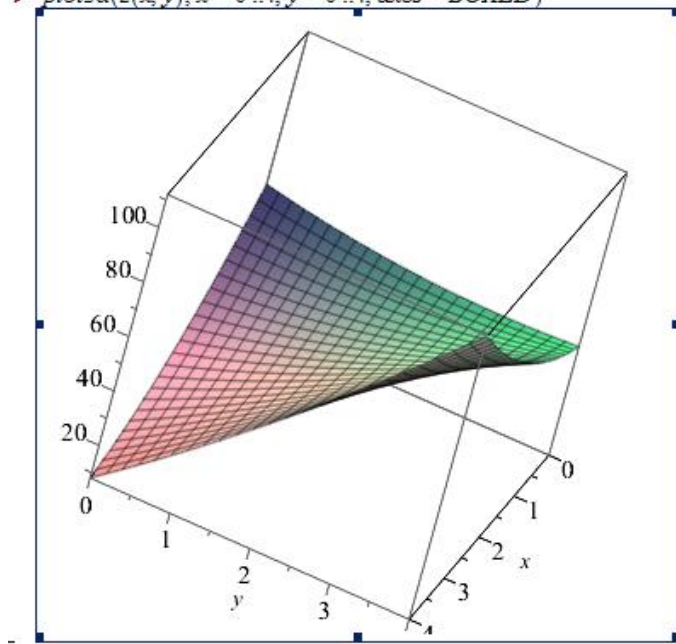
– **maximize**(expr, opt1, opt2, ..., optn).

Ці функції шукають максимуми і мінімуми функцій як однієї, так і декількох змінних. За допомогою опцій opt1, opt2, ..., optn можна вказувати додаткові дані для пошуку. Напр., параметр 'infinity' означає, що пошук мінімуму чи максимуму виконується по всій числовій осі, а параметр location (location=true) дає розширений вивід результатів пошуку – видається не тільки значення мінімуму (чи максимуму), а й значення змінних в цій точці.

7. Засобами MAPLE знайти мінімум (/максимум) функції від двох змінних із завд. 6. Побудувати відповідну поверхню.

Приклад:

```
> z := (x, y) -> 2*(x - 5)^2 + (y - 3)^2 + 7*x*y - 3
      z := (x, y) -> 2*(x - 5)^2 + (y - 3)^2 + 7*x*y - 3
=
> minimize(z(x, y), location)
      1928, { [ [ x = 2/41, y = 116/41 ], 1928 ] }
=
> plot3d(z(x, y), x = 0..4, y = 0..4, axes = BOXED)
```



8. Засобами MAPLE знайти мінімум/максимум функції від однієї змінної на заданому відрізку.

Номер варіанту	Функція	Відрізок [a;b]	Екст- ремум
1	$f(x) = x \sin x + \cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3})$	[-1;1]	min
2	$f(x) = x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 72x + 90$	[1;2]	min
3	$f(x) = x^6 + 3x^2 + 6x - 1$	[-1;0]	min
4	$f(x) = 10x \ln x - x/2$	[0;1]	min
5	$f(x) = (x + 1)^4 - 2x^2$	[-3;-1]	min
6	$f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 21x^2 + 12x$	[-1;1]	max
7	$f(x) = \frac{2x}{\ln 2} - 2x^2$	[0;2]	max
8	$f(x) = e^x - \frac{1}{3}x^3 - 2x$	[0;2]	min
9	$f(x) = x^3 - 3 \sin x$	[0;2]	min
10	$f(x) = \cos x - 2 \sin x$	[1;3]	min

Приклад: $F(x) = x^3 + 5x^2 - 10x, x \in [-2; 2], \min.$

```

> minimize(x^3 + 5·x^2 - 10·x, x=-2..2, location)

$$\left(-\frac{5}{3} + \frac{\sqrt{55}}{3}\right)^3 + 5\left(-\frac{5}{3} + \frac{\sqrt{55}}{3}\right)^2 + \frac{50}{3} - \frac{10\sqrt{55}}{3},$$


$$\left[\left\{x = -\frac{5}{3} + \frac{\sqrt{55}}{3}\right\}, \left(-\frac{5}{3} + \frac{\sqrt{55}}{3}\right)^3 + 5\left(-\frac{5}{3} + \frac{\sqrt{55}}{3}\right)^2 + \frac{50}{3} - \frac{10\sqrt{55}}{3}\right]$$

=
> evalf(%)
-4.28821606, [{x = 0.805399495}, -4.28821606]
=

```

Теоретичні відомості

Система Maple має потужний набір інструментів для розв'язування задач оптимізації: пакет розширення *Simplex* для розв'язування задач лінійного програмування симплекс-методом та пакет *Optimization*, що надає можливість розв'язувати не тільки задачі лінійного, але й квадратичного та нелінійного програмування з підвищеним ступенем візуалізації.

Огляд засобів пакета лінійної оптимізації *simplex*

Команда, яка надає доступ до всіх команд пакета, має вигляд:
with(simplex);

Процедури пакету надають можливість користувачеві поетапно розв'язувати задачу лінійного програмування за симплекс-методом.

Для розв'язування задачі лінійного програмування використовуються функції **maximize()** і **minimize()**.

Синтаксис звернення до указаних команд має доволі простий вигляд

maximize(f, consts), minimize(f, consts),

де **f** – лінійний вираз, який описує цільову функцію задачі;
consts – множина або список лінійних обмежень задачі.

Процедури maximize та minimize повертають або множину рівностей, які описують оптимальний план або порожню множину, якщо система обмежень consts є несумісною.

9. Засобами пакету розширення *simplex* системи MAPLE розв'язати наступну задачу лінійного програмування.

$$\begin{array}{ll} 1. f = 2x_1 + x_2 \rightarrow \min(\max) & 2. f = -2x_1 + x_2 \rightarrow \min(\max) \\ \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \geq 12; \\ x_1 - 4x_2 \leq 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 18, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} & \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 \leq 12, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 3. f = x_1 + x_2 \rightarrow \min(\max) & 4. f = x_1 + 2x_2 \rightarrow \min(\max) \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 14, \\ -5x_1 + 3x_2 \leq 15, \\ 4x_1 + 6x_2 \geq 24, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} & \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \leq 12, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 16, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 5. f = -2x_1 + x_2 \rightarrow \min(\max) & 6. f = x_1 - 2x_2 \rightarrow \min(\max) \\ \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 12, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} & \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10, \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 13, \\ 4x_1 + 5x_2 \geq 20, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 7. f = -x_1 + 4x_2 \rightarrow \min(\max) & 8. f = -3x_1 + 2x_2 \rightarrow \min(\max) \\ \begin{cases} x_1 - 5x_2 \leq 5, \\ -x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + x_2 \geq 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} & \begin{cases} x_1 - 3x_2 \leq 3, \\ x_1 - x_2 \geq -2, \\ x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 9. f = -2x_1 - x_2 \rightarrow \min(\max) & 10. f = -x_1 - x_2 \rightarrow \min(\max) \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ 2x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_1 - 2x_2 \leq 0, \\ x_1 - x_2 \geq -1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} & \begin{cases} 2x_2 \geq 1, \\ x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 \leq 2, \\ x_2 \leq 2, \\ 2x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{array}$$

Приклад:

$$\begin{aligned} f &= 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \\ &\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 7, \\ 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_2 \leq 3, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

```
> with(simplex) :  
> sys := {x1 + 2*x2 ≤ 7, 2*x1 + x2 ≤ 8, x2 ≤ 3} :  
> maximize(3*x1 + 2*x2, sys, NONNEGATIVE)  
      {x1 = 3, x2 = 2}
```

Теоретичні відомості

Огляд засобів пакета оптимізації Optimization

Команди пакета підключаються за допомогою стандартної команди:

with (Optimization);

Для розв'язання задач лінійного програмування призначено функцію

LPSolve(obj, [constr,bd,opts]),

де obj – цільова функція;

constr – лінійні співвідношення системи обмежень;

bd – послідовність, що задає межі можливих значень однієї або кількох змінних;

opts – рівність, що задає одну із опцій команди LPSolve.

Для розв'язання задач нелінійного програмування призначена функція

NLPSolve (obj, [constr,bd,opts]).

Але для розв'язання задач квадратичного програмування рекомендується використовувати команду:

QPSolve (obj, [constr,bd,opts]).

10. Засобами пакету розширення *Optimization* системи MAPLE розв'язати наступну задачу нелінійного програмування.

$$1. f(x_1, x_2) = 9(x_1 - 5)^2 + 4(x_2 + 1)^2 \rightarrow \min(\max)$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 12, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$$2. f(x_1, x_2) = (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 3)^2 \rightarrow \min(\max)$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \leq 12, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 16, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$$3. f(x_1, x_2) = 25(x_1 - 9)^2 + (x_2 - 7)^2 \rightarrow \min(\max)$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 \leq 12, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$$4. f(x_1, x_2) = 25(x_1 - 9)^2 + (x_2 - 7)^2 \rightarrow \min(\max)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 14, \\ -5x_1 + 3x_2 \leq 15, \\ 4x_1 + 6x_2 \geq 24, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$$5. f(x_1, x_2) = 25(x_1 - 5)^2 + 9(x_2 - 5)^2 \rightarrow \min(\max)$$

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 \geq 7, \\ -2x_1 + x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 10, \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ 7x_1 + x_2 \geq 7, \\ x_1 \leq 6, \\ x_2 \leq 7, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$$6. f(x_1, x_2) = 1/4(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 10)^2 \rightarrow \min(\max)$$

$$\begin{cases} 2x_1 \geq 1, \\ x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 \leq 2, \\ x_2 \leq 2, \\ 2x_1 + x_2 \geq 2, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$$7. f(x_1, x_2) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 \rightarrow \min(\max)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ 2x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_1 - 2x_2 \leq 0, \\ x_1 - x_2 \geq -1, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$$8. f(x_1, x_2) = 8(x_1 + 2)^2 + 16(x_2 - 4)^2 \rightarrow \min(\max)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10, \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 13, \\ 4x_1 + 5x_2 \geq 20, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$9. f(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + x_2^2 \rightarrow \min(\max)$$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 \leq 5, \\ -x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + x_2 \geq 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$10. \quad f(x_1, x_2) = 9x_1^2 - 18x_1 + 9 + 16(x_2 - 12)^2 \rightarrow \min(\max)$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 \leq 3, \\ x_1 - x_2 \geq -2, \\ x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Приклад: $f(x_1, x_2) = 9(x_1 - 5)^2 + 4(x_2 + 1)^2 \rightarrow \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 7, \\ 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_2 \leq 3, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

> with(Optimization) :

> sys := {x1 + 2 x2 ≤ 7, 2 · x1 + x2 ≤ 8, x2 ≤ 3, x1 ≥ 0, x2 ≥ 0} :

> NLPsolve(9 · (x1 - 5)² + 4 · (x2 + 1)², sys)
[13., [x1 = 4., x2 = 0.]]

=

Тема 3. Розв'язання задач лінійної алгебри в системі MAPLE

Мета: навчитись використовувати систему комп'ютерної математики MAPLE для розв'язання задач лінійної алгебри.

Теоретичні відомості

Оскільки в ядро Maple введені дуже скромні і мінімально необхідні засоби для розв'язання задач лінійної алгебри, то основний упор в їх реалізації зроблено на пакети розширення linalg та LinearAlgebra.

Пакет linalg – один із самих потужних пакетів в області лінійної алгебри, що має широкий спектр різноманітних функцій, які можна побачити при його підключенні:

>with(linalg);

Розглянемо деякі функції *пакету linalg*.

– **augment**(A, B) або **concat**(A, B) – горизонтальне об'єднання матриць A і B;

– **stackmatrix**(A,B) – вертикальне об'єднання матриць A і B;

– **multiply**(A,B) – виконує множення матриць (/векторів);

– **inverse**(A) – повертає обернену матрицю;

– **linsolve**(A, b) – розв'язує систему лінійних рівнянь із матрицею коефіцієнтів A і вектором вільних членів b і т.д.

Пакет LinearAlgebra є відносно новим пакетом і, на відміну від пакету linalg, використовує набір швидких алгоритмів лінійної алгебри, запропонованих творцями Number Algorithm Group (NAG). Ці алгоритми давно застосовуються на великих ЕОМ і суперкомп'ютерах, забезпечуючи пришвидшення виконання чисельних матричних операцій. Застосування алгоритмів NAG особливо ефективно в тому випадку, коли використовується вбудована в сучасні мікропроцесори арифметика чисел з плаваючою крапкою. За допомогою спеціального прапорця таку арифметику можна підключать (/виключать):

> UseHardwareFloats := true;

Для завантаження пакету *LinearAlgebra* використовують команду:

>with(LinearAlgebra):

Розглянемо деякі функції пакету *LinearAlgebra*:

- **Matrix**(список) – формує матрицю на основі заданого списку значень елементів;

- **Vector**(список) – формує вектор на основі заданого списку значень елементів;

- **LinearSolve**(A,b) – розв’язує систему лінійних рівнянь із матрицею коефіцієнтів A і вектором вільних членів b;

- **Add**(A,B,k1,k2) – повертає матрицю вигляду $k1 \cdot A + k2 \cdot B$;

- **Rank**(A) – обчислює ранг матриці A;

- **Row**(A, L, options) – повертає L-ий рядок матриці A;

- **Column**(A, L, options) – повертає L-ий стовпець матриці A;

- **DotProduct**(v1, v2) – повертає скалярний добуток векторів v1 і v2;

- **CrossProduct**(v1, v2) – повертає векторний добуток векторів v1 і v2;

- **VectorAngle**(v1, v2) – повертає кут між векторами v1 і v2;

- **Trace**(A) – повертає слід матриці A (суму елементів головної діагоналі);

- **SubMatrix**(A, [ir, jr], [ic, jc]) – повертає підматрицю матриці A і т.д.

Існує декілька способів завдання матриці (/вектору) у форматі *Matrix* (/Vector), з яким працює пакет *LinearAlgebra*:

Спосіб 1: Ввести матрицю (/вектор) за допомогою палітри *Matrix*.

```
> A :=  $\begin{bmatrix} 21 & 6 & -7 \\ 10.5 & 42 & -0.5 \\ 11 & -11 & 63 \end{bmatrix}$ ; b := Vector(3, {(1) = 12, (2) = 88, (3) = -37})
```

```
A :=  $\begin{bmatrix} 21 & 6 & -7 \\ 10.5 & 42 & -0.5 \\ 11 & -11 & 63 \end{bmatrix}$ 
```

```
b :=  $\begin{bmatrix} 12 \\ 88 \\ -37 \end{bmatrix}$ 
```

```
> whattype(A); whattype(b)
```

Matrix

Vector_{column}

Спосіб 2: Перетворити у матрицю (/вектор) заданий список за допомогою функцій **Matrix**(список) та **Vector**(список) пакету LinearAlgebra.

```
= > restart : with(LinearAlgebra) :
```

```
> A := Matrix([ [21, 6, -7], [10.5, 42, -0.5], [11, -11, 63] ])
```

```
A :=  $\begin{bmatrix} 21 & 6 & -7 \\ 10.5 & 42 & -0.5 \\ 11 & -11 & 63 \end{bmatrix}$ 
```

```
= > b := Vector([12, 88, -37])
```

```
b :=  $\begin{bmatrix} 12 \\ 88 \\ -37 \end{bmatrix}$ 
```

```
= > whattype(A); whattype(b);
```

Matrix

Vector_{column}

=

Спосіб 3: Задати матрицю (/вектор) в кутових дужках:

• $A := \langle \langle 21|6|-7 \rangle, \langle 10.5|42|-0.5 \rangle, \langle 11|-11|63 \rangle \rangle$; $b := \langle 12|88|-37 \rangle$

$$A := \begin{bmatrix} 21 & 6 & -7 \\ 10.5 & 42 & -0.5 \\ 11 & -11 & 63 \end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix} 12 & 88 & -37 \end{bmatrix}$$

• $\text{whattype}(A); \text{whattype}(b)$

Matrix

Vector_{row}

• $b := \text{convert}(b, \text{Vector}_{\text{column}})$

$$b := \begin{bmatrix} 12 \\ 88 \\ -37 \end{bmatrix}$$

Завдання

1. З використанням пакету LinearAlgebra системи MAPLE розв'язати систему трьох лінійних рівнянь $Ax=b$, розширена матриця якої (A і b) подана згідно варіанту (див. Тему 2, завдання 3).

2. З використанням контекстного меню для матриці A із завдання №1 знайти:

- визначник;
- обернену матрицю;
- транспоновану матрицю.
- власні значення;
- власні вектори.

3. З використанням пакету LinearAlgebra для матриці A із завдання №1:

- збільшити значення елементів в № разів, де № – номер варіанта;

- збільшити значення елементів на ($N-1$);
- знайти її квадрат.
- знайти її ранг;
- знайти скалярний добуток першого і другого стовпців;
- знайти векторний добуток другого і третього рядків;
- знайти кут між векторами, представленими першим рядком і третім стовпцем матриці A ;
- знайти її слід – суму елементів головної діагоналі;
- утворити нову матрицю з матриці A , відкинувши останній рядок і стовпець.

4. З використанням палітри **Matrix** згенерувати випадковим чином матрицю B розмірності 3×3 .

5. Над матрицями A і B виконати операції:

- додавання(+);
- віднімання(-);
- поелементного множення(*~);
- множення(·).

6. З використанням пакету **linalg** об'єднати матриці A і B в одну: а) горизонтальним об'єднанням; б) вертикальним об'єднанням.

7. З використанням пакету **linalg** на основі матричних перетворень знайти розв'язки системи лінійних алгебраїчних рівнянь $Ax=b$ із завд. 1.

8. З використанням пакету **linalg** розв'язати систему 3-ох лінійних рівнянь з трьома невідомими у символьному вигляді, де $A=[a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}]$, $b=[b_1, b_2, b_3]$.

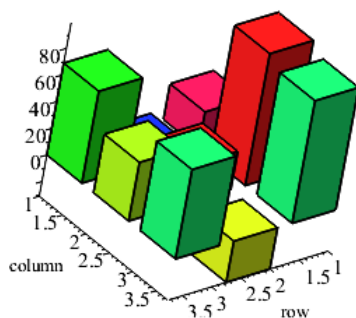
9. З використанням пакету **linalg** провести графічну візуалізацію матриці B із завд. 4.

$$> B := \begin{bmatrix} 27 & 99 & 92 \\ 8 & 29 & -31 \\ 69 & 44 & 67 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 27 & 99 & 92 \\ 8 & 29 & -31 \\ 69 & 44 & 67 \end{bmatrix}$$

> *with(plots) : with(linalg) :*

> $F := (x, y) \rightarrow \frac{\sin(x \cdot y)}{x}$: *matrixplot(B, heights = histogram, axes = frame, gap = 0.25, style = patch, color = F)*



10. Дослідити призначення та принципи роботи тьютора із розділу Linear Algebra згідно варіанту:

Варіант 1. Eigenvector Plot...

Варіант 2. Eigenvalues...

Варіант 3. Eigenvectors...

Варіант 4. Gauss-Jordan Elimination...

Варіант 5. Gaussian Elimination...

Варіант 6. Linear System Plot...

Варіант 7. Linear System Solving...

Варіант 8. Linear Transform Plot...

Варіант 9. Matrix Builder...

Варіант 10. Matrix Inverse...

Тема 4. Інтерполяція та апроксимація табличних даних в системі MAPLE

Мета: навчитись використовувати систему комп'ютерної математики MAPLE для розв'язання задач інтерполювання, екстраполювання та апроксимації табличних даних.

Теоретичні відомості

Інтерполяція табличних даних

Поліноміальна інтерполяція табличних даних в Maple здійснюється за допомогою вбудованої функції

interp(X,Y,v) в інертній формі, **Interp**(X,Y,v),

тут v – ім'я змінної інтерполяційного полінома. Вектори X і Y повинні містити $n + 1 = N$ координат точок вихідної залежності, де n – степінь інтерполюючого полінома.

Для *сплайн-інтерполяції* використовується Maple-функція

spline(X,Y,var,d),

де X і Y – одинірні вектори однакового розміру, що містять значення координат вузлових точок вихідної функції (при чому в довільному порядку), var – ім'я змінної, відносно якої обчислюється сплайн-функція, d – необов'язковий параметр, що задає вид сплайну. Він може мати цифрові 1, 2, 3, 4 або символічні значення:

- linear – лінійна функція, чи поліном першого порядку;
- quadratic – квадратична функція, чи поліном другого порядку;
- cubic – поліном третього порядку (по замовчуванню);
- quartic – поліном четвертого порядку.

Для більш глибоких операцій *чисельної апроксимації* служить пакет розширення *numapprox*:

>with(numapprox):

Тут є функції інтерполяції й апроксимації поліномами Чебишева, рядом Тейлора, відношенням поліномів (апроксимація Паде) та ін.

Для розкладу функції f в ряд Лорана з порядком n в околі точки $x = a$ (або $x = 0$) служить функція

laurent($f, x=a, n$) **laurent**(f, x, n).

При Паде-апроксимації задана функція наближається відношенням двох поліномів. Ця апроксимація здатна наблизити навіть точки розриву вихідної функції, де вона прямує до нескінченності (при нулях полінома знаменника). Реалізує Паде-апроксимацію функція

pade($f, x=a, [m,n]$) **pade**($f, x, [m,n]$).

Тут f – аналітичний вираз чи функція, x – змінна, відносно якої записується апроксимуюча функція, a – координата точки, відносно якої виконується апроксимація, m, n – максимальні степені поліномів чисельника і знаменника.

Паде-апроксимація з поліномами Чебишева –

chebpade($f, x=a..b, [m,n]$).

Мінімаксна апроксимація відрізняється від Паде-апроксимації мінімізацією максимальної абсолютної похибки у всьому інтервалі апроксимації. Вона використовує алгоритм Ремеза і реалізується функцією:

minimax($f, x=a..b, [m,n], w, 'maxerror'$)

Тут w – процедура або вираз, $maxerror$ – змінна, якій приписується значення мінімакс-норми.

Задачу наближення кривих в Maple вирішує пакет *CurveFitting*:

> **with**(CurveFitting):

На відміну від звичайних сплайнів, у яких точками стиковки сплайн-функцій являються вузлові точки, для наближення кривих використовують В-сплайни, які дозволяють отримати стиковку у довільно заданих точках. Тут k – порядок сплайну (ціле число), v – ім'я і opt – параметр у вигляді $knots=knotlist$, де $knotlist$ – список з $k+1$ елементів алгебраїчного типу.

Для побудови кривих В-сплайнів служить функція пакету *CurveFitting*

BSplineCurve($xydata, v, opts$)

або **BSplineCurve**(xdata, ydata, v, opts).

Тут xydata – список, масив чи матриця точок у формі [[x1,y1],[x2,y2],...,[xn,yn]]; xdata – список, масив чи вектор значень незалежної змінної [x1,x2,...,xn]; ydata – список, масив чи вектор значень залежної змінної у формі [y1,y2,...,yn]; v – ім'я незалежної змінної; opts – необов'язковий параметр у формі одного чи більше виразів вигляду order=k чи knots=knotlist.

Поліноміальну інтерполяцію реалізує функція пакету *CurveFitting*

PolynomialInterpolation(xydata, v)

або **PolynomialInterpolation**(xdata, ydata, v).

Завдання

1. Засобами MAPLE виконати інтерполяцію заданої функції $f(X)$ поліномом степеня $(N+2)$, де N – номер варіанта.

B.1. $f(x) = \ln(1 + x^2)$

B.2. $f(x) = \frac{x}{2+x}$

B.3. $f(x) = \sqrt{x^3 + x + 6}$

B.4. $f(x) = \sin(5x) \cdot x^2$

B.5. $f(x) = \cos^2(3x)$

B.6. $f(x) = 2\sin(4x) \cdot e^{\sqrt{x}}$

B.7. $f(x) = 3^{\cos(4x)}$

B.8. $f(x) = \operatorname{arctg}(5x^2 - 6)$

B.9. $f(x) = \sin(2x)\cos(3x)$

B.10. $f(x) = \sqrt[8]{\sin(6x)}$

Приклад:

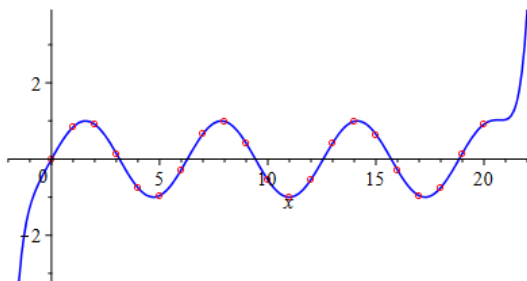
> *convert(taylor(exp(x), x, 5), polynom)*

$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$

2. Засобами MAPLE виконати поліноміальну інтерполяцію функції $f(X)$ із завд. 1, заданої у вузлах $X=0,1, \dots, 20$. Побудувати графік.

Приклад:

```
> with(plots) : N := 20 : X := [seq(i, i = 0..N)] : Y := [seq(sin(i), i = 0..N)] : Digits := 40 : f := interp(X, Y, x) :
> g1 := plot(f(x), x = -2..N+2, color = blue) :
> g2 := plot([ [X[i], Y[i]]$i = 1..N+1], x = -2..N+2, style = POINT, symbol = CIRCLE, color = red) :
> display(g1, g2)
```



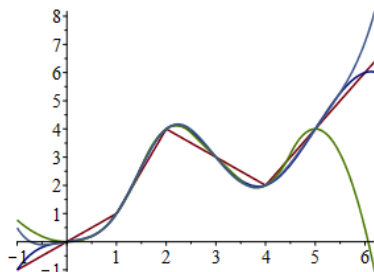
3. Засобами MAPLE виконати інтерполяцію функції $f(X)$ із завд. 1 сплайнами різних видів. Побудувати графіки сплайнів.

Приклад:

```
> restart : readlib(spline) : X:=X: Y:='Y':
> X := [0, 1, 2, 3, 4, 5] : Y := [0, 1, 4, 3, 2, 4] :
> f1 := spline(X, Y, x, linear) : fc := spline(X, Y, x, cubic) : fq := spline(X, Y, x, quadratic) : fq1 := spline(X, Y, x, quartic) :
```

$$f_c := \begin{cases} \frac{169}{209}x^3 + \frac{40}{209}x & x < 1 \\ -\frac{427}{209}x^3 + \frac{1788}{209}x^2 - \frac{92}{11}x + \frac{596}{209} & x < 2 \\ \frac{15}{11}x^3 - \frac{2484}{209}x^2 + \frac{6796}{209}x - \frac{5100}{209} & x < 3 \\ \frac{123}{209}x^3 - \frac{54}{11}x^2 + \frac{2422}{209}x - \frac{66}{19} & x < 4 \\ -\frac{150}{209}x^3 + \frac{2250}{209}x^2 - \frac{10682}{209}x + \frac{16746}{209} & \text{otherwise} \end{cases}$$

```
> plot([f1, fc, fq, fq1], x = -1..6.2)
```



4. Засобами MAPLE виконати розклад функції $f(X)$ із завд. 1 в ряд Лорана в околі точки $x=0$ з порядком $(N+2)$, де N – номер варіанта.

Приклад:

> *laurent*(*exp*(*x*), *x*, 5);

$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^5)$$

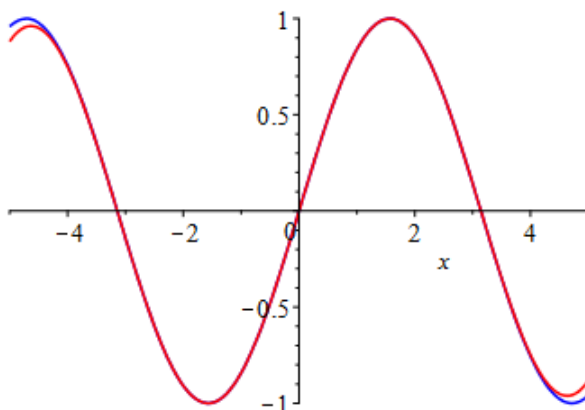
5. Засобами MAPLE виконати Паде-апроксимацію для функції $f(X)$ із завд. 1 в околі точки $x=0$ при $m=N+1$, $n=N+2$, де N – номер варіанта. Побудувати графіки вихідної функції і її апроксимації.

Приклад:

> *f* := *x* → *sin*(*x*) : *with*(*numapprox*) : *fp* := *pade*(*f*(*x*), *x*, [5, 6]);

$$fp := \frac{\frac{12671}{4363920}x^5 - \frac{2363}{18183}x^3 + x}{1 + \frac{445}{12122}x^2 + \frac{601}{872784}x^4 + \frac{121}{16662240}x^6}$$

> *fu* := *x* → *fp* : *plot*([*f*(*x*), *fp*(*x*)], *x* = -5 .. 5, *color* = [*blue*, *red*]);



6. Засобами MAPLE виконати мінімаксну апроксимацію для функції $f(X)$ із завд. 1.

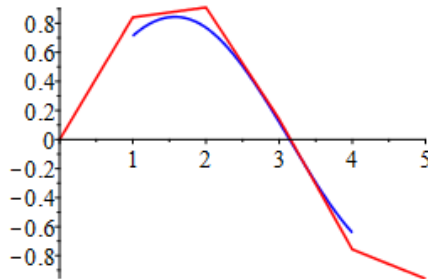
Приклад:

```
> minimax(cos(x), x=-3..3, [2, 3], 1, 'minmax')
0.5458304183 + (5.043168283 10-10 - 0.2308484266 x) x
0.5217186404 + (1.561920527 10-9 + 0.1062847466 x) x
:
> minmax
0.04621605600
```

7. Засобами пакету *CurveFitting* системи MAPLE виконати В-сплайнове наближення для кривої функції $f(X)$ із завд. 1. Побудувати графіки.

Приклад:

```
> with(CurveFitting) :
> xydata := [[0., sin(0.)], [1., sin(1.)], [2., sin(2.)], [3., sin(3.)], [4., sin(4.)], [5., sin(5.)]] :
> c1 := BSplineCurve(xydata, v) : plot({c1, xydata}, color = [blue, red])
```



8. Засобами пакету *CurveFitting* системи MAPLE виконати поліноміальну інтерполяцію функції $f(X)$ із завд. 1.

Приклад:

```
> PolynomialInterpolation([[0., sin(0.)], [1., sin(1.)], [2., sin(2.)], [3., sin(3.)], [4., sin(4.)], [5., sin(5.)]], z)
-0.005411092239 z5 + 0.08613667631 z4 - 0.3919359713 z3 + 0.2671952916 z2 + 0.8854860804 z
```

Теоретичні відомості

Апроксимація табличних даних

Для проведення регресійного аналізу в MAPLE і побудови *апроксимаційних поліномів* різних степенів за допомогою пакету *stats* служить функція

fit[leastsquare[vars,eqn,parms]](data),

де *data* – список даних, *vars* – список змінних для представлення даних, *eqn* – рівняння, що задає апроксимуючу залежність (по

замовчуванню лінійну), *parms* – множина параметрів, які будуть замінені обчисленими значеннями.

На жаль функція **fit()** з пакету *stats* не спрацює для нелінійної регресії. Суттєво розширює можливості проведення регресії, в том числі нелінійної, пакет *Statistics*. Він містить наступні функції для проведення регресії:

- **ExponentialFit()** – експоненціальна регресія;
- **LinearFit()** – лінійна регресія загального виду;
- **LogarithmicFit()** – логарифмічна регресія;
- **NonlinearFit()** – нелінійна регресія;
- **PolynomialFit()** – поліноміальна регресія;
- **PowerFit()** – степенева регресія.

У всіх цих функціях, крім **NonlinearFit()**, використовується алгоритм лінійної регресії із застосуванням лінеаризуючих перетворень.

9. Засобами пакету *stats* системи MAPLE побудувати лінійну, квадратичну та кубічну регресійні моделі для наступних табличних даних. Побудувати графіки вихідної функції, заданої таблично, та регресійних поліномів.

B.1

x	6	9	12	15	17	37	41	43
y	24	43	66	69	78	177	199	208

B.2

x	11	14	16	17	21	38	41	47
y	13	14	13	20	24	38	45	47

B.3

x	7	11	17	20	22	29	45	48
y	-13	-24	-31	-42	-42	-54	-87	-87

B.4

x	5	23	25	32	38	42	46	47
y	24	116	132	165	199	218	241	247

B.5

x	13	14	20	24	27	28	36	45
y	14	12	19	23	25	27	28	40

B.6

x	5	12	19	27	38	41	42	48
y	-10	-22	-31	-45	-64	-69	-74	-84

B.7

x	16	19	25	28	39	42	46	47
y	-19	-22	-27	-30	-39	-39	-50	-50

B.8

x	5	9	17	20	30	40	45	47
y	-8	-18	-28	-34	-58	-78	-91	-93

B.9

x	15	22	24	32	33	36	45	46
y	-20	-26	-26	-33	-31	-32	-43	-47

B.10

x	12	15	18	20	21	28	31	36
y	31	39	51	55	57	75	86	92

Приклад:

```

> with(stats):
> r1 := rhs(fit[leastsquare][[x,y]]([ [1, 2, 3, 4], [3, 3.5, 3.9, 4.8]]));

r1 := 0.58000x + 2.3500

> r2 := rhs(fit[leastsquare][[x,y],y=a*x^2+b*x+c]([ [1, 2, 3, 4], [3, 3.5, 3.9, 4.8]]));

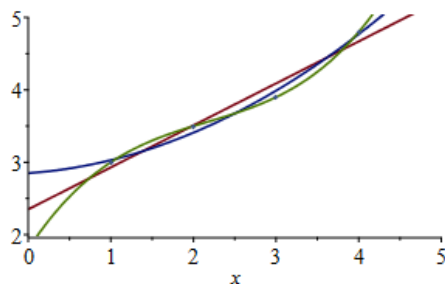
r2 := 0.10000x^2 + 0.080000x + 2.8500

> r3 := rhs(fit[leastsquare][[x,y],y=a*x^3+b*x^2+c*x+d]([ [1, 2, 3, 4], [3, 3.5, 3.9, 4.8]]));

r3 := 0.10000x^3 - 0.65000x^2 + 1.7500x + 1.8000

> plot([r1, r2, r3, [[1, 3], [2, 3.5], [3, 3.9], [4, 4.8]]], x=0..5, style=[line, line, line, point])

```



10. Засобами пакету CurveFitting системи MAPLE виконати В-сплайнове наближення для наступних табличних даних. Побудувати графіки.

B.1

x	1	1.11	1.22	1.32	1.44	1.54
y	6	6.76	7.64	8.51	9.69	10.85

B.2

x	1.1	1.22	1.34	1.44	1.58	1.69
y	13.34	15.23	17.41	19.45	22.69	25.59

B.3

x	1.05	1.16	1.26	1.39	1.5	1.6
y	117.42	167.35	230.89	350.91	499.96	689.83

B.4

x	0.1	0.24	0.36	0.46	0.57	0.78
y	2.72	4.31	6.33	8.79	12.49	19.85

B.5

x	1	1.8	2.7	3.5	4.4	5.2
y	0.3	0.7	1.2	1.7	2.3	3

B.6

x	1.05	1.19	1.29	1.43	1.57	1.71
y	16.31	21.61	26.4	34.89	46.22	61.15

B.7

x	1.52	1.62	1.77	1.91	2.03	2.21
y	5.44	5.51	5.53	5.63	5.73	5.8

B.8

x	1	1.11	1.23	1.35	1.54	1.67
y	5.02	5.34	5.6	5.92	6.29	6.49

B.9

x	2	2.2	2.5	2.8	3.1	3.4
y	1.4	1.7	1.9	2.2	2.4	2.7

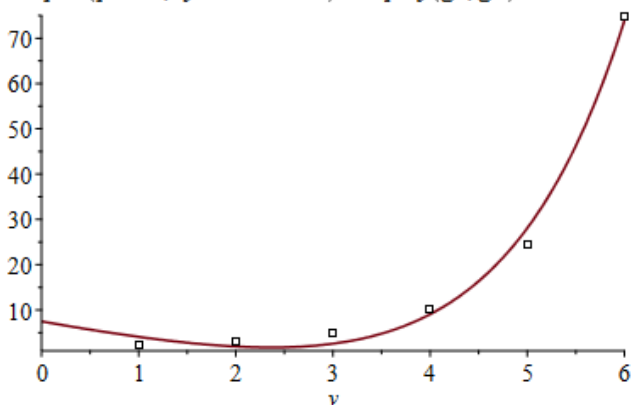
B.10

x	0.1	0.23	0.35	0.49	0.69	0.74
y	4.4	5.01	5.66	6.46	7.29	8.39

11. Для табличних даних із завд. 10 підібрати найбільш підходящий вид нелінійної регресійної моделі та обчислити її коефіцієнти, використовуючи пакет Statistics системи MAPLE. Побудувати графіки на основі даних вихідної таблиці та функції регресії.

Приклад:

- > with(Statistics) :
- > $X := \text{Vector}([10, 20, 30, 40, 50, 60], \text{datatype} = \text{float}) :$
- > $Y := \text{Vector}([2, 3, 3.5, 3.7, 4, 6], \text{datatype} = \text{float}) :$
- > $\text{LogarithmicFit}(X, Y, x)$
 $-2.33650366062269 + 1.77589826114363 \ln(x)$
- > restart; with(Statistics) :
- > $X := \text{Vector}([1, 2, 3, 4, 5, 6], \text{datatype} = \text{float}) : Y := \text{Vector}([2.2, 3, 4.8, 10.2, 24.5, 75.0], \text{datatype} = \text{float}) :$
- > $r := \text{NonlinearFit}(a + b \cdot v + \exp(c \cdot v), X, Y, v)$
 $r := 6.49670407384335 - 4.54643947753519 v + e^{0.758384141232909 v}$
- > with(plots) : $g1 := \text{plot}(r(v), v = 0..6) : \text{pldata} := \text{zip}((x, y) \rightarrow [x, y], X, Y) :$
- > $g2 := \text{pointplot}(\text{pldata}, \text{symbol} = \text{BOX}) : \text{display}(g1, g2)$



Тема 5. Математичне моделювання в MAPLE

Мета: навчитись використовувати систему комп'ютерної математики MAPLE для розв'язання деяких науково-технічних задач шляхом математичного моделювання

Завдання

1. З використанням пакету DEtools системи MAPLE виконати математичне моделювання процесу вільних коливань, розв'язавши звичайне диференціальне рівняння другого порядку

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + p \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + q y(t) = 0 \quad (1)$$

при заданих початкових умовах

$p=(-1)^N/(N+1)$, $q=N$, $y(0)=2*N$, $y'(0)=2*(N-2)$, де N – номер варіанту.

Побудувати графік та фазовий портрет коливань. Останній задається графіком у параметричній формі, при якому по одній осі відкладається залежність $y(t)$, а по другій – її похідна.

Приклад:

> # завдання диференціального рівняння

> restart; with(DEtools) : DE := diff(y(t), t, t) + p*diff(y(t), t) + q*y(t) = 0 : DE;

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + p \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + q y(t) = 0$$

> # розв'язання рівняння в загальному вигляді

> dsolve(DE, y(t))

$$y(t) = _C1 e^{\left(-\frac{p}{2} + \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}\right)t} + _C2 e^{\left(-\frac{p}{2} - \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}\right)t}$$

> # завдання початкових умов: $p = \frac{1}{4}$, $q = 3$, $y(0) = 10$, $y'(0) = 7$

> p := 1/4 : q := 3 : a := 10 : b := 7 : IC := y(0) = a, D(y)(0) = b :

> # виділення одного розв'язку

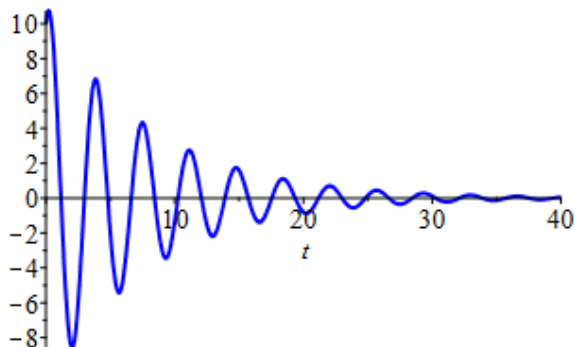
> exal := dsolve({DE, IC}, y(t))

$$exal := y(t) = \frac{66\sqrt{191} e^{-\frac{t}{8}} \sin\left(\frac{\sqrt{191} t}{8}\right)}{191} + 10 e^{-\frac{t}{8}} \cos\left(\frac{\sqrt{191} t}{8}\right)$$

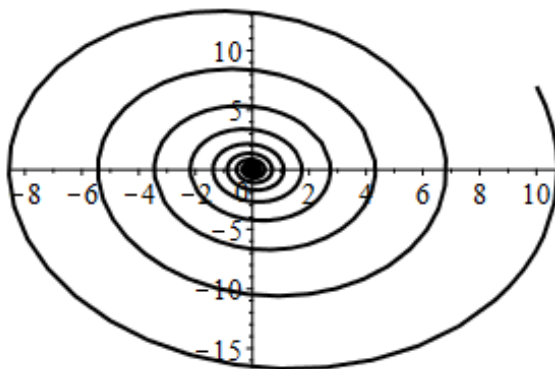
> Digits := 5 : out := evalf(rhs(exal))

$$out := 4.7755 e^{-0.12500 t} \sin(1.7275 t) + 10. e^{-0.12500 t} \cos(1.7275 t)$$

```
> plot(out, t = 0 ..40, thickness = 2, color = blue)
```



```
> plot([out, diff(out, t)], t = 0 ..40], thickness = 2, color = black)
```



2. З використанням пакету DEtools системи MAPLE виконати математичне моделювання процесу коливань із завд. 1 при синусоїдальному збуренні (в правій частині рівняння (1) 0 замінюється на $\sin(N \cdot t)$, де N – номер варіанту). Побудувати графік функції та синусоїдального збурення, а також фазовий портрет коливань.

3. За допомогою функції **dsolve()** системи MAPLE розрахувати траєкторію руху каменя маси m , кинутого під кутом α до горизонту, з початковою швидкістю V_0 з урахуванням опору повітря A . Математична модель описується системою звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} m \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) = -A \left(\frac{d}{dt} x(t) \right), \\ m \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) = -A \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) - m g \end{cases}$$

при початкових умовах

$$\begin{cases} x(0) = 0, x'(0) = V_{0x}, \\ y(0) = 0, y'(0) = V_{0y}. \end{cases}$$

Вихідні дані до задачі:

$$m=N*0.1(\kappa 2), \alpha=\pi/(N+2), V_0=N+15, A=N*0.05.$$

> restart; with(plots) :

> # завдання проекцій швидкості на осі координат

> $V_{0x} := V_0 \cdot \cos(\alpha); V_{0y} := V_0 \cdot \sin(\alpha)$

$$V_{0x} := V_0 \cos(\alpha)$$

$$V_{0y} := V_0 \sin(\alpha)$$

> # завдання системи 2-ох ЗДР 2-го порядку

> $sys := m \cdot diff(x(t), t\$2) = -A \cdot diff(x(t), t), m \cdot diff(y(t), t\$2) = -A \cdot (diff(y(t), t)) - m \cdot g$

$$sys := m \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) = -A \left(\frac{d}{dt} x(t) \right), m \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) = -A \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) - m g$$

> # завдання вихідних даних

> $V_0 := 20; m := .5; A := .1; \alpha := \frac{\pi}{4}; g := 9.8$

$$V_0 := 20$$

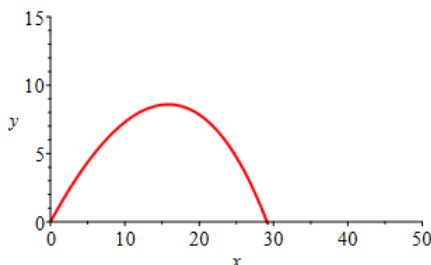
$$m := 0.5$$

$$A := 0.1$$

$$\alpha := \frac{\pi}{4}$$

$$g := 9.8$$

- > # розв'язання задачі Коші для заданої системи ЗДР
- > `p1 := dsolve( {sys, x(0) = 0, D(x)(0) = Vox, y(0) = 0, D(y)(0) = Voy}, {y(t), x(t)}, type = numeric, output = listprocedure) :`
- > `a1 := odeplot(p1, [x(t), y(t)], 0 .. 3, color = red, view = [0 .. 50, 0 .. 15], thickness = 2) : display(a1)`



4. Розв'язати задачу із завд. 3, нехтуючи опором повітря. Побудувати та порівняти графіки розв'язків задач із завдань 3,4, пояснити їх фізичний зміст.

5. За допомогою функції **pdsolve()** системи MAPLE виконати математичне моделювання розподілу температур стержня довжиною L із запресованими кінцями, що задається диференціальним рівнянням в частинних похідних

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = 0.1 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \right)$$

при початкових і крайових умовах

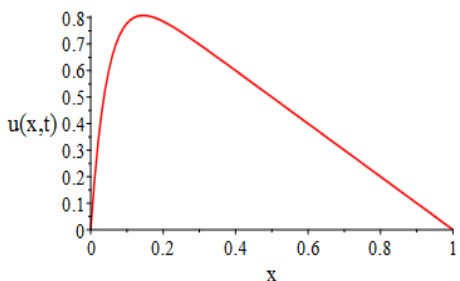
$$\begin{cases} u(0, t) = u(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

Тут $D=0.1 \cdot N$ (м²/добу), $L=1$ (м), $u_0(x)=(1-x)(1-e^{-2Nx})$, де N – номер варіанту.

```

> with(VectorCalculus):
> # завдання рівняння теплопровідності в одновимірному випадку
> Heat_Eqn := {diff(u(x,t),t) = Laplacian(u(x,t),cartesian[x]) * 0.1}
Heat_Eqn := {d/dt u(x,t) = 0.1 (d^2/dx^2 u(x,t))}
=
> # завдання початкової і крайових умов
> gx := {u(x,0) = (1-x) * (1 - exp(-20*x)), u(0,t) = 0, u(1,t) = 0}
gx := {u(0,t) = 0, u(1,t) = 0, u(x,0) = (1-x) * (1 - exp(-20*x))}
=
> # розв'язання крайової задачі
> Heat_Solution := pdsolve(Heat_Eqn, gx, numeric, timestep = 0.01, spacestep = 0.01):
> # анімація розв'язку
> Heat_Solution := animate(u(x,t), t = 0..1.5, frames = 50, labels = ["x", "u(x,t)"], labelfont = [TIMES, ROMAN, 14])

```



6. За допомогою функції **pdsolve()** системи MAPLE виконати математичне моделювання коливання струни довжиною l , затиснутої на кінцях, рух якої задається рівнянням

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)$$

при початкових і крайових умовах

$$\begin{cases} u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \\ u''(x,0) = 0. \end{cases}$$

Тут $c = \sqrt{2 * N}$ (м²/добу), $l = 1$ (м), $u_0(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 0.1 * N \\ 1 - x, & 0.1 * N < x \leq 1 \end{cases}$

де N – номер варіанту.

```

> restart : with(VectorCalculus) :
> # завдання хвильового рівняння при  $c=\sqrt{10}$ 
> Cord_Eqn := {diff(u(x, t), t, t) = Laplacian(u(x, t), 'cartesian'[x]) * 0.1}
Cord_Eqn := {  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = 0.1 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \right) }$  }

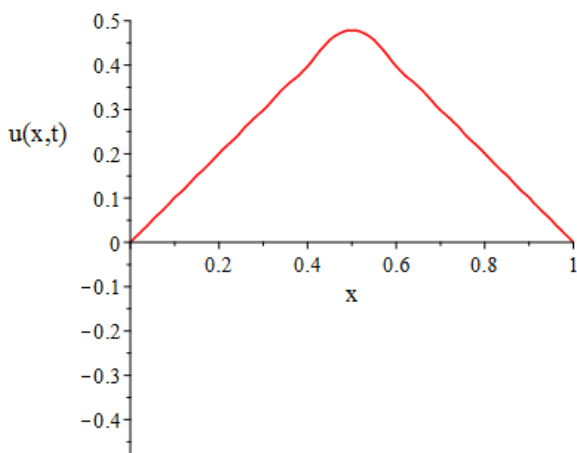
> # завдання початкової і крайових умов
> BC1 := {u(0, t) = 0, u(1, t) = 0, D[2](u)(x, 0) = 0}
BC1 := {u(0, t) = 0, u(1, t) = 0,  $D_2(u)(x, 0) = 0$ }

> # струна відхиляється в центрі
> BC2 := {u(x, 0) = piecewise( $x \geq 0$  and  $x \leq \frac{1}{2}, x, x > \frac{1}{2}$  and  $x \leq 1, 1 - x$ ) }

BC2 := {u(x, 0) =  $\begin{cases} x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - x & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$  }

> sol := pdsolve(Cord_Eqn, BC1 union BC2, numeric, timestep =  $\frac{1}{200}$ , spacestep =  $\frac{1}{100}$ ) :
> sol := -animate(u(x, t), t = 0..2 * Pi, frames = 30, labels = ["x", "u(x, t)"], labelfont = [TIMES, ROMAN, 14], scaling = constrained)

```



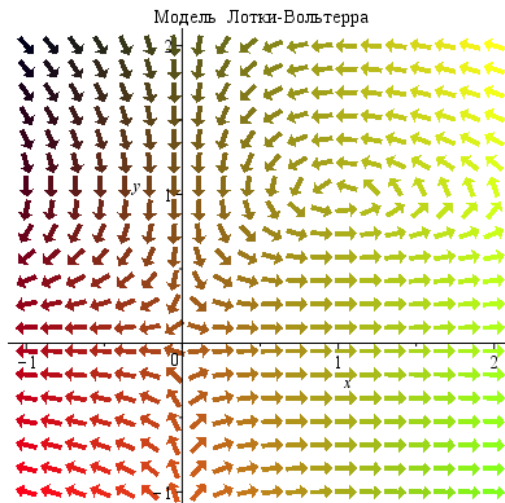
7. Виконати завд. 6 при умові початкового відхилення струни у формі функції $\sin(N\pi x)/2$, де N – номер варіанту.

8. Графічними засобами пакету DEtools системи MAPLE виконати математичне моделювання динаміки популяцій за допомогою системи рівнянь Лотки-Вольтера, що описує зміну популяції у біологічному середовищі “хижак–жертва”:

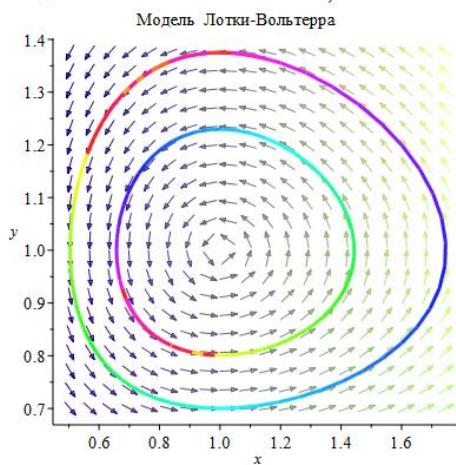
$$\begin{aligned}x'(t) &= x(t) (1 - y(t)), \\ y'(t) &= 0,3 y(t) (x(t) - 1).\end{aligned}$$

Побудувати графіки часових залежностей числа хижаків і жертв та переконатися у тому, що вони носять коливний характер.

```
> with(DEtools):
> DEplot([diff(x(t), t) = x(t) · (1 - y(t)), diff(y(t), t) = 3 · y(t) · (x(t) - 1)], [x(t), y(t)], t = -2 .. 2, x = -1 .. 2, y = -1 .. 2,
        arrows = LARGE, title = "Модель Лотки-Вольтера", color = [3 · y(t) · (x(t) - 1), x(t) (1 - y(t)), 1])
```



```
> DEplot([diff(x(t), t) = x(t) * (1 - y(t)), diff(y(t), t) = .3 * y(t) * (x(t) - 1)], [x(t), y(t)], t = -7 .. 7, [[x(0) = 1.2, y(0) = 1.2], [x(0) = 1, y(0) = .7]], stepsize = .2, title = "Модель Лотки-Вольтерра", color = [y(t) * (x(t) - 1), x(t) * (1 - y(t))], .5], linecolor =  $\frac{t}{10}$ , arrows = MEDIUM, method = rk45)
```



3. СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. <https://www.maplesoft.com/support/training/PDF/MapleFundamentalsGuide.pdf>
2. <https://sites.math.rutgers.edu/~zeilberg/EM12/Garvan2002.pdf>
3. <https://www.maplesoft.com/view.aspx?SF=3033/Maple11GettingStartedGuide.pdf>
4. <https://www.maplesoft.com/support/training/quickstart.aspx>
5. Дрозденко В. О. Maple в математиці: навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів III та IV рівнів акредитації. Біла Церква, 2019. 328 с.
6. Кобильник Т. П. Системи комп'ютерної математики: Maple, Mathematica, Maxima. Дрогобич : Редакційно-видавничий відділ ДДПУ імені Івана Франка, 2008. 315 с.
7. Білоусова Л. І., Горонескуль М. М.. Курс вищої математики у середовищі Maple. X. : УЦЗУ, КП «Міська друкарня», 2009. 412 с.
8. Попов Б. О. Розв'язування математичних задач у системі комп'ютерної алгебри Maple V. Київ : ViP, 2001. 312 с. ISBN 966-7897-03-6.
9. Popov B., Laushnyk O. A package of function approximation. Waterloo Maple, 2001. 40 p.