

Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та
природокористування
Навчально-науковий інститут кібернетики, інформаційних
технологій та інженерії
Кафедра комп'ютерних наук та прикладної математики

04-01-88М

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання лабораторних робіт з навчальної дисципліни
«Алгоритми та обчислювальні методи
математичної фізики»
для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня
за освітньо-професійною програмою спеціальності
122 «Комп'ютерні науки»
денної та заочної форм навчання

Рекомендовано
науково-методичною радою
з якості ННІ КІТІ
Протокол № 3 від 06.01.2025 р.

Рівне – 2025

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з навчальної дисципліни «Алгоритми та обчислювальні методи математичної фізики» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» денної та заочної форм навчання [Електронне видання] / Остапчук О. П. – Рівне : НУВГП, 2025. – 33 с.

Укладач: Остапчук О. П., к.т.н., доцент кафедри комп'ютерних наук та прикладної математики.

Відповідальний за випуск: Турбал Ю. В., д.т.н, професор, завідувач кафедри комп'ютерних наук та прикладної математики.

Керівник групи забезпечення спеціальності 122 «Комп'ютерні науки»: к.т.н., доцент Каштан С. С.

Попередня версія методичних вказівок: 04-01-37

© О. П. Остапчук, 2025
© НУВГП, 2025

Зміст

Лабораторна робота 1. Чисельне розв'язання задачі Діріхле для рівняння Пуассона.	4
Лабораторна робота 2. Чисельне розв'язування змішаної крайової задачі для рівняння теплопровідності. Явна різницева схема.	7
Лабораторна робота 3. Чисельне розв'язування змішаної крайової задачі для рівняння теплопровідності. Неявна різницева схема.	11
Лабораторна робота 4. Числовий метод розв'язання крайових задач для рівняння теплопровідності зі змінними коефіцієнтами.	13
Лабораторна робота 5. Монотонна різницева схема для рівняння параболічного типу.	15
Лабораторна робота 6. Інтегро-інтерполяційний метод побудови різницевих схем.	17
Лабораторна робота 7. Різницевий метод розв'язування крайових задач для рівняння гіперболічного типу.	18
Лабораторна робота 8. Різницевий метод розв'язування багатовимірних нестационарних задач для рівняння теплопровідності. Явна різницева схема.	23
Лабораторна робота 9. Розв'язування задачі Діріхле для рівняння Лапласа методом скінченних елементів.	28
Рекомендована література	33

Лабораторна робота 1

Чисельне розв'язання задачі Діріхле для рівняння Пуассона

Теоретичні відомості

Знайдемо наближений розв'язок $U(x, y)$ задачі Діріхле для рівняння Пуассона:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = f(x, y), (x, y) \in G, \quad (1.1)$$

який задовольняє граничним умовам:

$$U|_{\Gamma} = \varphi(x, y), (x, y) \in \Gamma. \quad (1.2)$$

Для цього використаємо метод скінченних різниць на п'ятиточковому шаблоні “хрест”. Апроксимація похідних в рівнянні (1.1) має вигляд

$$\frac{\partial^2 U(x_i, x_j)}{\partial x^2} \approx \frac{U_{i+1,j} - 2U_{ij} + U_{i-1,j}}{h_1^2}, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial^2 U(x_i, x_j)}{\partial y^2} \approx \frac{U_{i,j+1} - 2U_{ij} + U_{i,j-1}}{h_2^2}. \quad (1.4)$$

$$\begin{cases} U_{i-1,j} + U_{i+1,j} + U_{i,j+1} - U_{i,j-1} - 4U_{ij} = h^2 f_{ij}, \\ i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, m-1} \end{cases} \quad (1.5)$$

$$\begin{cases} U_{i0} = \varphi_{i0}, U_{im} = \varphi_{im}, i = \overline{1, n-1}, \\ U_{0j} = \varphi_{0j}, U_{nj} = \varphi_{nj}, j = \overline{1, m-1} \end{cases} \quad (1.6)$$

Систему різницевих рівнянь (1.5) та граничні різницеві умови (1.6) називаються різницевою апроксимацією або різницевою схемою крайової задачі (1.1), (1.2).

Чисельні методи розв'язання різницевої схеми

Різницеву схему (1.5), (1.6) можна розв'язувати різними методами (прямими, ітераційними).

Ітераційний метод Лібмана

Знаходження значення функції на нульовій ітерації:

$$\begin{cases} U_{ij}(0) = \frac{1}{4}(U_{i0} + U_{im} + U_{0j} + U_{nj}), \\ i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, m-1}. \end{cases} \quad (1.6)$$

$$U_{ij}^{(k+1)} = \frac{1}{4}(U_{i-1,j}^{(k)} + U_{i+1,j}^{(k)} + U_{i,j-1}^{(k)} + U_{i,j+1}^{(k)}) - \left(\frac{h}{2}\right)^2 f_{ij}, \quad (1.7)$$
$$i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, m-1}.$$

Ітераційний метод Гауса-Зейделя

$$U_{ij}^{(k+1)} = \frac{1}{4}(U_{i-1,j}^{(k+1)} + U_{i+1,j}^{(k)} + U_{i,j-1}^{(k+1)} + U_{i,j+1}^{(k)}) - \left(\frac{h}{2}\right)^2 f_{ij}, \quad (1.8)$$
$$i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, m-1}.$$

Ітераційний метод послідовної верхньої релаксації

$$U_{ij}^{(k+1)} = \frac{\omega}{4}(U_{i-1,j}^{(k+1)} + U_{i+1,j}^{(k)} + U_{i,j-1}^{(k+1)} + U_{i,j+1}^{(k)}) + (1-\omega)U_{ij}^{(k)} - \left(\frac{h}{2}\right)^2 f_{ij}, \quad (1.9)$$
$$i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, m-1}.$$

де ω – релаксаційний параметр $\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2}}$, $1 \leq \omega \leq 2$,

ρ – найбільше по модулю власне значення матриці Якобі, яке для прямокутної області обчислюється $\rho = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{\pi}{m} \right)$.

Для методів Гауса-Зейделя та послідовної верхньої релаксації значення функції на нульовій ітерації заходиться за формулою (1.6).

Завдання

Провести чисельний розрахунок стаціонарного розподілу температури $T(x, y)$ у внутрішніх точках пластини, який описується рівнянням Лапласа в області G

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (x, y) \in G$$

і задовольняє граничним умовам $T|_{\Gamma} = \varphi(x, y), (x, y) \in \Gamma$.

Розрахунки проводити з точністю $\varepsilon = 0,1$. Область G має вигляд $G = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$.

Граничні умови:

$$\begin{aligned} T(x, 0) &= T_1, & T(x, b) &= T_2, & 0 \leq x \leq a, \\ T(0, y) &= k_1 y^s + k_2, & T(a, y) &= k_1 y^s + k_2, & 0 \leq y \leq b, \end{aligned}$$

де
$$k_1 = \frac{T_2 - T_1}{b^s}, \quad k_2 = T_1, \quad s = 1, 2, 3 \dots$$

$$a = \begin{cases} 3, & 1 \leq n \leq 15, \\ 4, & 15 < n \leq 30; \end{cases} \quad b = \begin{cases} 4, & 1 \leq n \leq 15, \\ 3, & 15 < n \leq 30; \end{cases}$$

де

n – номер варіанту,

$h = 1$ – крок сітки,

T_1 – кількість букв прізвища,

T_2 – кількість букв імені студента за паспортом, що помножена на 30.

Лабораторна робота 2

Чисельне розв'язування змішаної крайової задачі для рівняння теплопровідності. Явна різницева схема

Теоретичні відомості

Процес поширення тепла в одновимірному випадку описується наступним рівнянням теплопровідності

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + F(x, t), \quad (2.1)$$

де ρ – густина матеріалу, λ – коефіцієнт теплопровідності, T – температура, t – час, $F(x, t)$ – функція джерела, c – питома теплоємність матеріалу.

Крайові умови задаються так:

$$T(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2.2)$$

$$T(0, t) = \varphi(t), \quad 0 \leq t \leq t_1, \quad (2.3)$$

$$T(l, t) = \psi(t), \quad 0 \leq t \leq t_1. \quad (2.4)$$

Оскільки температурний режим досліджується протягом деякого часу t_1 , то область задання рівняння (2.1) – це деяка фазова область

$$G = \{(x, t): 0 < x < l, \quad 0 < t < t_1\}.$$

Знайдемо розв'язок даної задачі методом сіток. Покриємо область G різницевою сіткою з кроками h по x та τ по часу. Таким чином маємо сіткову область

$$G_{h\tau} = \begin{cases} x_i = ih, & i = \overline{1, n-1}, \\ t_k = k\tau, & k = \overline{1, m-1}. \end{cases}$$

Для побудови різницевої схеми задачі проведемо апроксимацію похідних в (2.1):

$$\frac{\partial^2 T(x_i, t_k)}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i-1}^k - 2T_i^k + T_{i+1}^k}{h^2}, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial T(x_i, t_k)}{\partial t} \approx \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\tau} \quad (2.6)$$

або

$$\frac{\partial T(x_i, t_k)}{\partial t} \approx \frac{T_i^k - T_i^{k-1}}{\tau}. \quad (2.7)$$

Явна різницева схема

$$\frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\tau} = a^2 \frac{T_{i-1}^k - 2T_i^k + T_{i+1}^k}{h^2}, \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} T_i^{k+1} = (1 - 2\sigma)T_i^k + \sigma(T_{i-1}^k + T_{i+1}^k), & i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, m-1}, \\ T_i^0 = f_i, & i = \overline{0, n}, \\ T_0^k = \varphi_k, \quad T_n^k = \psi_k, & k = \overline{1, m}, \end{cases} \quad (2.9)$$

де $\sigma = \frac{a^2 \tau}{h^2}$.

Різницева схема є стійкою при $0 < \sigma \leq 0,5$.

Для ручного рахунку використовують наступні значення σ :

$$1. \quad \sigma = 0,5: \quad T_i^{k+1} = 0,5(T_{i-1}^k + T_{i+1}^k); \quad (O(h^2)) \quad (2.10)$$

$$2. \quad \sigma = \frac{1}{6}: \quad T_i^{k+1} = \frac{1}{6}(T_{i-1}^k + 4T_i^k + T_{i+1}^k). \quad (O(h^4)) \quad (2.11)$$

Завдання

Розрахувати розподіл температури в однорідному стержні (за допомогою явної різницевої схеми) довжиною l , що виготовлений з певного матеріалу з теплофізичними властивостями λ, c, ρ та температурою $T(x, t)$, яка задовольняє рівнянню теплопровідності

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < y < t_1,$$

при таких крайових умовах:

- відомо розподіл температури в початковий момент часу

$$T(x, 0) = f(x) = \frac{T_2 - T_1}{l^{s+1}} x^{s+1} + T_1, \quad 0 \leq x \leq l;$$

- теплові режими (підтримується задана температура) на кінцях стержня:

$$T(0, t) = \varphi(t) = T_1 = k,$$

$$T(l, t) = \psi(t) = T_2 = \begin{cases} 40k, & k \leq 5, \\ 30k, & 5 < k \leq 10, \\ 50k, & 10 < k \leq 30, \end{cases}$$

де k – № варіанту, s – номер підгрупи.

Для розрахунків взяти: $l = 0,5\text{м}$; $h = 0,1\text{м}$; $m = 3$. Теплофізичні властивості λ, c, ρ задані у наступній таблиці (табл.2.1) згідно варіанту k .

Таблиця 2.1

k	Матеріал	ρ	λ	$\tilde{n}$
1.	Скло звичайне	2500	0,74	0,670
2.	Оргскло	1180	0,984	1,43
3.	Олово	7300	66,3	0,222
4.	Свинець	11350	35,1	0,127
5.	Цинк	7150	0,113	0,384
6.	Мідь	8930	0,390	0,388
7.	Алюміній	2700	0,209	0,896
8.	Алюмінієві сплави	2800	0,163	1,13
9.	Бронза	8800	48,2	0,386
10.	Латунь	8500	0,109	0,392
11.	Дерево	825	0,20	2,39
12.	Магнітний сплав	1780	79,1	0,98
13.	Нікель	8900	67,5	0,427
14.	Шлак котельний	1000	0,29	0,76
15.	Фарфор	2400	1,04	1,09
16.	Текотоліт	1350	0,20	0,293
17.	Азбестовий картон	500	0,184	0,84
18.	Бетон з кам'яним щебнем	2000	1,28	0,84
19.	Мармур	2800	1,04	1,09
20.	Глина вогнетривка	1845	1,04	1,09
21.	Титан	4540	15,1	0,531
22.	Титанові сплави	4460	8,7	0,524
23.	Цегла червона	1800	0,77	0,878
24.	Цегла силікатна	1900	0,81	0,64
25.	Кварцове скло	2590	0,400	1,55
26.	Залізобетон	2200	1,55	0,840
27.	Залізо	7880	0,74	0,44
28.	Сталь 20	7830	51,0	0,494
29.	Сталь 45	7830	47,8	0,490
30.	Нержавіюча сталь	7860	16,8	0,494

Лабораторна робота 3

Чисельне розв'язування змішаної крайової задачі для рівняння теплопровідності. Неявна різницева схема

Теоретичні відомості

Знайдемо розв'язок задачі (2.1)-(2.4) з використанням неявної різницевої схеми:

$$\begin{cases} \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\tau} = a^2 \frac{T_{i-1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i+1}^{k+1}}{h^2}, & i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, m-1}, \\ T_i^0 = f_i, & i = \overline{0, n}, \\ T_0^k = \varphi_k, \quad T_n^k = \psi_k, & k = \overline{0, m-1}. \end{cases} \quad (3.1)$$

де
$$a_i = b_i = \sigma = \frac{a^2 \tau}{h^2}, \quad c_i = 1 + 2\sigma. \quad (3.2)$$

Розв'язок (3.1) знаходимо методом прогонки:

$$T_i^{k+1} = \alpha_{i+1} T_{i+1}^{k+1} + \beta_{i+1}, \quad (3.3)$$

де

$$\begin{aligned} \alpha_{i+1} &= \frac{b_i}{c_i - \alpha_i a_i}, & \beta_{i+1} &= \frac{a_i \beta_i + T_i^k}{c_i - \alpha_i a_i}, \\ i &= \overline{0, n-1}, \quad k = \overline{0, m-1}. \\ \alpha_1 &= 0, \quad \beta_1 = T_0^k. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Запис різницевої схеми в більш загальному вигляді для граничних умов різного роду має вигляд

$$\begin{cases} a_i T_{i-1}^{k+1} - c_i T_i^{k+1} + b_i T_{i+1}^{k+1} = -T_i^k, & i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, m-1}, \\ T_0^{k+1} = \chi_1 T_1^{k+1} + \mu_1, & T_n^{k+1} = \chi_2 T_{n-1}^{k+1} + \mu_2. \end{cases}$$

1. Граничні умови 1-го роду

$$T_0^{k+1} = \varphi((k+1)\tau), \quad T_n^{k+1} = \psi((k+1)\tau), \quad k = \overline{0, m-1},$$

$$\chi_1 = 0, \quad \mu_1 = \varphi((k+1)\tau), \quad k = \overline{0, m-1},$$

$$\chi_2 = 0, \quad \mu_2 = \psi((k+1)\tau), \quad k = \overline{0, m-1}$$

2. Граничні умови 2-го роду

$$q_1 = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0}, \quad q_2 = \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=l},$$

$$\chi_1 = 1, \quad \mu_1 = \frac{h}{\lambda} q_1,$$

$$\chi_2 = 1, \quad \mu_2 = \frac{h}{\lambda} q_2.$$

3. Граничні умови 3-го роду

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = -\alpha_1(T - T_c), -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=l} = -\alpha_2(T - T_c),$$

$$\chi_1 = \frac{\lambda}{\lambda + h\alpha_1}, \quad \mu_1 = \frac{h\alpha_1}{\lambda + h\alpha_1} T_c,$$

$$\chi_2 = \frac{\lambda}{\lambda + h\alpha_2}, \quad \mu_2 = \frac{h\alpha_2}{\lambda + h\alpha_2} T_c,$$

$$\alpha_1 = \chi_1, \quad \beta_1 = \mu_1.$$

Обернена прогонка:

$$\begin{cases} T_{n-1}^{k+1} = \alpha_n T_n^{k+1} + \beta_n, \\ T_n^{k+1} = \chi_2 T_n^{k+1} + \mu_2, \end{cases}$$

$$T_n^{k+1} = \frac{\chi_2 \beta_n + \mu_2}{1 - \chi \alpha_n}.$$

Умови застосування методу прогонки:

$$a_i \neq 0, \quad b_i \neq 0, \quad |c_i| \geq |a_i| + |b_i|, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad |\chi_1| \leq 1, \quad |\chi_2| < 1.$$

Завдання: виконати завдання з лабораторної роботи №2 з використанням неявної різницевої схеми.

Лабораторна робота 4

Числовий метод розв'язання крайових задач для рівняння теплопровідності зі змінними коефіцієнтами

Теоретичні відомості

Знайдемо розв'язок крайової задачі для рівняння теплопровідності зі змінними коефіцієнтами

$$\begin{aligned} \rho(x, t) \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(K(x, t) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + F(x, t), \\ U(x, 0) &= f(x), \\ U(0, t) &= \varphi(x), \\ U(l, 0) &= \psi(x). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Для даної задачі побудуємо різні різницьві схеми:

- 1) при $\sigma = 0$ отримаємо явну різницьву схему

$$\frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau} = \frac{1}{h^2} \left(a(x_{i+1}, t) (U_{i+1}^k - U_i^k) - a(x_i, t) (U_i^k - U_{i-1}^k) \right); \tag{4.2}$$

2) при $\sigma = 0,5$ отримаємо неявну різницеву схему

$$\begin{aligned} \frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau} = & \frac{0,5}{h^2} \left(a(x_{i+1}, t) (U_{i+1}^{k+1} - U_i^{k+1}) - a(x_i, t) (U_i^{k+1} - U_{i-1}^{k+1}) \right) + \\ & + \frac{0,5}{h^2} \left(a(x_{i+1}, t) (U_{i+1}^k - U_i^k) - a(x_i, t) (U_i^k - U_{i-1}^k) \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Прогоночний вигляд різницевої схеми (4.3) наступний:

$$aU_{i-1}^{k+1} - \left(a + b + \frac{1}{\gamma} \right) U_i^{k+1} + bU_{i+1}^{k+1} = -\frac{1}{\gamma} U_i^k - b(U_{i+1}^k - U_i^k) + a(U_i^k - U_{i-1}^k) \quad (4.4)$$

де $a_i = a(x_i, t) = 0,5(K(x_i, t) + K(x_{i-1}, t))$,

$$b_i = a(x_{i+1}, t) = 0,5(K(x_{i+1}, t) + K(x_i, t)), \quad \gamma = \frac{0,5\tau}{h^2}.$$

Завдання

Знайти розв'язок крайової задачі для рівняння теплопровідності зі змінними коефіцієнтами (початкові та граничні умови взяти з лабораторної роботи №2). Змінний коефіцієнт $K(x)$ вибрати згідно варіанту:

$$\begin{aligned} K(x) &= a_0 \exp^{-a_1 x}, & 0 < N \leq 4, \\ K(x) &= a_0 \exp^{-a_1(1-x)}, & 4 < N \leq 8, \\ K(x) &= a_0 \exp^{-a_1(x-x^*)}, & 8 < N \leq 12, \\ K(x) &= a_0(1 + \exp^{-a_1 x}), & 12 < N \leq 16, \\ K(x) &= a_0(1 - \exp^{-a_1 x}), & 16 < N \leq 20, \\ K(x) &= a_0(1 + \exp^{-a_1(1-x)}), & 20 < N \leq 24, \\ K(x) &= a_0(1 - \exp^{-a_1(1-x)}), & 24 < N \leq 28. \end{aligned}$$

де N - номер варіанту, $a_1 = \frac{1}{N}$, $a_0 = a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}$, $x_* = \frac{1}{N}$.

Лабораторна робота №5

Монотонна різницева схема для рівняння параболічного типу

Теоретичні відомості

Розглянемо крайову задачу для рівняння параболічного типу, що містить першу похідну

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + r(x) \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t}, \\ U(x, 0) = U_0(x), \\ U(0, t) = U_1(t), \\ U(l, t) = U_2(t), \end{array} \right. \quad (5.1)$$
$$0 < x < l, \quad 0 < t \leq t_1, \quad l = 1.$$

Побудуємо монотонну різницеву схему для рівняння (5.1). Монотонною схемою для $\forall \tau$ і h є чисто неявна різницева схема

$$\frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau} = \mu_i \frac{U_{i-1}^{k+1} - 2U_i^{k+1} + U_{i+1}^{k+1}}{h^2} +$$
$$r_+(x_i) \frac{U_{i+1}^{k+1} - U_i^{k+1}}{h} + r_-(x_i) \frac{U_i^{k+1} - U_{i-1}^{k+1}}{h}, \quad (5.2)$$

де

$$r_+(x_i) = 0.5(r(x_i) + |r(x_i)|) \geq 0, \quad r_-(x_i) = 0.5(r(x_i) - |r(x_i)|) \leq 0,$$

$$\mu_i = \frac{1}{1 + 0.5h |r(x_i)|}.$$

Дана схема має апроксимацію $O(h^2 + \tau)$. Щоб показати монотонність запишемо її в канонічному вигляді:

$$\left(\frac{\mu_i}{h^2} - \frac{r_-}{h}\right)U_{i-1}^{k+1} - \left(\frac{2\mu_i}{h^2} + \frac{1}{\tau} + \frac{r_+}{h} - \frac{r_-}{h}\right)U_i^{k+1} + \left(\frac{\mu_i}{h^2} + \frac{r_+}{h}\right)U_{i+1}^{k+1} = -\frac{1}{\tau}U_i^k. \quad (5.3)$$

де

$$a = \left(\frac{\mu_i}{h^2} - \frac{r_-}{h}\right) > 0, \quad b = \left(\frac{\mu_i}{h^2} + \frac{r_+}{h}\right) > 0, \\ c = \left(\frac{2\mu_i}{h^2} + \frac{1}{\tau} + \frac{r_+}{h} - \frac{r_-}{h}\right) > 0, \quad \frac{1}{\tau} > 0.$$

Отже, умови монотонності виконуються.

Розв'язок (5.3) знаходимо методом прогонки:

$$U_i^{k+1} = \alpha_{i+1}U_{i+1}^{k+1} + \beta_{i+1}, \quad (5.4)$$

де

$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - \alpha_i a_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{a_i \beta_i + f_i}{c_i - \alpha_i a_i}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = U_0^{k+1}.$$

Завдання

Знайти розв'язок крайової задачі для рівняння параболічного типу, що містить першу похідну з використанням монотонної різницевої схеми. Початкові та граничні умови взяти згідно варіантів (m - номер варіанту):

$$U_0(x) = \begin{cases} a_0 \exp^{-mx} & 0 < m \leq 10, \\ a_0 \sin^2 mx, & 11 \leq m \leq 20, \\ a_0 \cos^2 mx, & 21 \leq m \leq 30. \end{cases}$$

$$U_1(t) = \begin{cases} a_0, & 0 < m \leq 10, \\ a_0, & 10 < m \leq 20, \\ a_0, & 20 < m \leq 30. \end{cases} \quad U_2(t) = \begin{cases} a_0 \exp^{-m}, & 0 < m \leq 10, \\ a_0 \sin^2 m, & 10 < m \leq 20, \\ a_0 \cos^2 m, & 20 < m \leq 30. \end{cases}$$

$$r(x) = m \cos \pi x, \quad l = 1, \quad n = 5, \quad h = 0.2,$$

$$\tau = 1, \quad t_1 = 3\tau, \quad a_0 = 10, \quad f(x) = 0.$$

Лабораторна робота №6

Інтегро-інтерполяційний метод побудови різницевих схем

Теоретичні відомості

Розглянемо крайову задачу для рівняння параболічного типу із змінними коефіцієнтами:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(x) \frac{\partial U}{\partial x} \right), \quad (6.1)$$

$$U(x, 0) = \tilde{U}_0(x), \quad (6.2)$$

$$U(0, t) = \tilde{U}_1(t), \quad (6.3)$$

$$U(l, t) = \tilde{U}_2(t). \quad (6.4)$$

Знайдемо її розв'язок з використанням інтегро-інтерполяційного методу. Після апроксимації похідних отримаємо різницеву схему:

$$\frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau} = \frac{1}{h^2} \left(K_{i-\frac{1}{2}} U_{i-1}^{k+1} - (K_{i-\frac{1}{2}} + K_{i+\frac{1}{2}}) U_i^{k+1} + K_{i+\frac{1}{2}} U_{i+1}^{k+1} \right)$$

або

$$\frac{\tau}{h^2} K_{i-\frac{1}{2}}^{k+1} U_{i-1}^{k+1} - \left(\frac{\tau}{h^2} K_{i-\frac{1}{2}}^{k+1} + \frac{\tau}{h^2} K_{i+\frac{1}{2}}^{k+1} + 1 \right) U_i^{k+1} + \frac{\tau}{h^2} K_{i+\frac{1}{2}}^{k+1} U_{i+1}^{k+1} = -U_i^k \quad (6.5)$$

$$\text{де } a = \frac{\tau}{h^2} K_{i-\frac{1}{2}}^{k+1}; \quad b = \frac{\tau}{h^2} K_{i+\frac{1}{2}}^{k+1}; \quad c = \frac{\tau}{h^2} K_{i-\frac{1}{2}}^{k+1} + \frac{\tau}{h^2} K_{i+\frac{1}{2}}^{k+1} + 1.$$

Розв'язок (6.5) знаходимо методом прогонки:

$$U_i^{k+1} = \alpha_{i+1} U_{i+1}^{k+1} + \beta_{i+1}. \quad (6.6)$$

$$\text{де } \alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - \alpha_i a_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{a_i \beta_i + U_i^k}{c_i - \alpha_i a_i}, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad k = \overline{0, m-1}$$

Завдання

Побудувати різницеву схему з використанням інтегро-інтерполяційного методу для крайової задачі рівняння теплопровідності із змінними коефіцієнтами

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(x) \frac{\partial U}{\partial x} \right).$$

Початкові та граничні умови взяти з лабораторної роботи № 2. Змінний коефіцієнт $K(x)$ вибрати згідно варіанту:

$$K(x) = a_0 \exp^{-a_1 x}, \quad 0 < N \leq 4,$$

$$K(x) = a_0 \exp^{-a_1(1-x)}, \quad 4 < N \leq 8,$$

$$K(x) = a_0 \exp^{-a_1(x-x^*)}, \quad 8 < N \leq 12,$$

$$K(x) = a_0(1 + \exp^{-a_1 x}), \quad 12 < N \leq 16,$$

$$K(x) = a_0(1 - \exp^{-a_1 x}), \quad 16 < N \leq 20,$$

$$K(x) = a_0(1 + \exp^{-a_1(1-x)}), \quad 20 < N \leq 24,$$

$$K(x) = a_0(1 - \exp^{-a_1(1-x)}), \quad 24 < N \leq 28.$$

де N - номер варіанту, $a_1 = \frac{1}{N}$, $a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}$, $x_* = \frac{1}{N}$.

Лабораторна робота №7

Різницевий метод розв'язування крайових задач для рівняння гіперболічного типу

Теоретичні відомості

Розглянемо крайову задачу для рівняння гіперболічного типу

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad (7.1)$$

$$\begin{cases} U(0,t) = \mu_1(x), \\ U(l,t) = \mu_2(x), \end{cases} \quad (7.2)$$

$$(7.3)$$

$$\begin{cases} U(x,0) = \varphi(x), \\ \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \psi(x). \end{cases} \quad (7.4)$$

$$(7.5)$$

Введемо рівномірну сітку з кроками h і τ

$$\omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau,$$

$$\omega_h = \left\{ x_i = ih, \quad i = \overline{1, n}, \quad h = \frac{1}{n} \right\},$$

$$\omega_\tau = \left\{ t_n = k\tau, \quad k = \overline{0, K}, \quad \tau = \frac{T}{K} \right\},$$

та побудуємо різницеву схему для рівняння (7.1)

$$\frac{U_i^{k+1} - 2U_i^k + U_i^{k-1}}{\tau^2} = \frac{U_{i+1}^k - 2U_i^k + U_{i-1}^k}{h^2}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{1, K-1}. \quad (7.6)$$

Явна різницева схема

$$U_i^{k+1} = 2U_i^k - U_i^{k-1} + \gamma(U_{i+1}^k - 2U_i^k + U_{i-1}^k) \quad (7.7)$$

Крайові умови апроксимуються так:

$$(7.2) \rightarrow (7.8): U_0^{k+1} = \mu_1(t_{k+1}) = \mu_1^{k+1}, \quad k = \overline{0, K-1},$$

$$(7.3) \rightarrow (7.9): U_n^{k+1} = \mu_2(t_{k+1}) = \mu_2^{k+1}, \quad k = \overline{0, K-1},$$

$$(7.4) \rightarrow (7.10): U_i^{k+1} = \varphi(x_i) = \varphi_i, \quad i = \overline{0, n}, \quad (\text{при } k = 0),$$

$$(7.5) \rightarrow (7.11): \frac{U_i^1 - U_i^0}{\tau} = \psi_i \rightarrow U_i^1 = U_i^0 + \tau\psi_i, \quad i = \overline{0, n}, \quad (O(\tau^2)) \quad (\text{при } k = 1)$$

$$\text{або} \quad U_i^1 = U_i^0 + \tau\psi_i + \frac{\tau^2}{2} \cdot \frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{h^2}, \quad (O(\tau^2)), \quad (7.12)$$

Отже, (7.7) – (7.10), (7.12) – явна різницева схема задачі (7.1)–(7.5).

Стійкість різницевої схеми досягається при виконанні умови

$$\tau \leq h. \quad (7.13)$$

Завдання

Використовуючи метод сіток, знайти розв'язок змішаної крайової задачі для рівняння коливання струни $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ з крайовими умовами $U(x,0) = \varphi(x)$, $\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \psi(x)$, $0 \leq x \leq 1$; $U(0,t) = \mu_1(t)$, $U(1,t) = \mu_2(t)$, $0 \leq t \leq 0,5$. Розв'язок $U(x,t)$ знайти з чотирма десятковими знаками після коми із заданими кроками $h = 0,1$ і $\tau = 0,05$.

Вигляд відповідних функцій вибрати згідно варіанту з таблиці:

Варіант 1 $\varphi(x) = x(x+1)$, $\psi(x) = \cos(x)$, $\mu_1(t) = 0$, $\mu_2(t) = 2(t+1)$.	Варіант 2 $\varphi(x) = x \cos \pi x$, $\psi(x) = x(2-x)$, $\mu_1(t) = 2t$, $\mu_2(t) = -1$.	Варіант 3 $\varphi(x) = \cos \frac{\pi x}{2}$, $\psi(x) = x^2$, $\mu_1(t) = 1+2t$, $\mu_2(t) = 0$.
Варіант 4 $\varphi(x) = (x+0.5)(x-1)$, $\psi(x) = \sin(x+0.2)$, $\mu_1(t) = t-0.5$, $\mu_2(t) = 3t$.	Варіант 5 $\varphi(x) = 2x(x+1)+0.3$, $\psi(x) = 2 \sin(x)$, $\mu_1(t) = 0.3$, $\mu_2(t) = 4.3+t$.	Варіант 6 $\varphi(x) = (x+0.2) \sin \frac{\pi x}{2}$, $\psi(x) = 1+x^2$, $\mu_1(t) = 0$, $\mu_2(t) = 1.2(t+1)$.
Варіант 7 $\varphi(x) = x \sin \pi$, $\psi(x) = (x+1)^2$, $\mu_1(t) = 2t$, $\mu_2(t) = 0$.	Варіант 8 $\varphi(x) = 3x(1-x)$, $\psi(x) = \cos(x+0.5)$, $\mu_1(t) = 0$, $\mu_2(t) = 2t$.	Варіант 9 $\varphi(x) = x(2x-0.5)$, $\psi(x) = \cos(2x)$, $\mu_1(t) = t^2$, $\mu_2(t) = 1.5$.

Варіант 10 $\varphi(x) = (x+1)\sin \pi x$, $\psi(x) = x^2 + x$, $\mu_1(t) = 0$, $\mu_2(t) = 0,5t$.	Варіант 11 $\varphi(x) = (1-x)\cos \frac{\pi x}{2}$, $\psi(x) = 2x+1$, $\mu_1(t) = 2t+1$, $\mu_2(t) = 0$.	Варіант 12 $\varphi(x) = 0,5(x+1)$, $\psi(x) = x\cos(x)$, $\mu_1(t) = 2t^2$, $\mu_2(t) = 1$.
Варіант 13 $\varphi(x) = 0,5(1^x + 1)$, $\psi(x) = x\sin 2x$, $\mu_1(t) = 0.5 + 3t$, $\mu_2(t) = 1$.	Варіант 14 $\varphi(x) = (x+1)\sin \frac{\pi x}{2}$, $\psi(x) = 1+x^2$, $\mu_1(t) = 0,5t$, $\mu_2(t) = 2$.	Варіант 15 $\varphi(x) = x^2 \cos \pi x$, $\psi(x) = x^2(x+1)$, $\mu_1(t) = 0.5t$, $\mu_2(t) = t-1$.
Варіант 16 $\varphi(x) = (1-x^2)\cos \pi x$, $\psi(x) = 2x+0.6$, $\mu_1(t) = 1+0.4t$, $\mu_2(t) = 0$.	Варіант 17 $\varphi(x) = (x+0,5)^2$, $\psi(x) = (x+1)\sin(x)$, $\mu_1(t) = 0.5(0,5+t)$, $\mu_2(t) = 2,25$.	Варіант 18 $\varphi(x) = 1,2x - x^2$, $\psi(x) = (x+0,6)\sin x$, $\mu_1(t) = 0$, $\mu_2(t) = 0,2 + 0,5t$.
Варіант 19 $\varphi(x) = (x+0,5)(x+1)$, $\psi(x) = \cos(x+0,3)$ $\mu_1(t) = 0,5$, $\mu_2(t) = 3-2t$.	Варіант 20 $\varphi(x) = 0,5(x+1)^2$, $\psi(x) = (0,5+x)\cos \pi x$, $\mu_1(t) = 0,5$, $\mu_2(t) = 0,2-3t$.	Варіант 21 $\varphi(x) = (x+0,4)\sin \pi x$, $\psi(x) = x^2 + 0,6$, $\mu_1(t) = 0,5t$, $\mu_2(t) = 0,2$.

Варіант 22 $\varphi(x) = (2 - x) \sin \pi x$, $\psi(x) = 1 + x^2$, $\mu_1(t) = 0,6t$, $\mu_2(t) = 0$.	Варіант 23 $\varphi(x) = x \cos \frac{\pi x}{2}$, $\psi(x) = 2x^2$, $\mu_1(t) = 0$, $\mu_2(t) = t^2$.	Варіант 24 $\varphi(x) = (x + 0,4) \cos \frac{\pi x}{2}$, $\psi(x) = 0,3(x^2 + 1)$, $\mu_1(t) = 0,4$, $\mu_2(t) = 1,7t$.
Варіант 25 $\varphi(x) = (1 - x^2) + x$, $\psi(x) = 2 \sin(x + 0,6)$, $\mu_1(t) = 1$, $\mu_2(t) = (t + 1)^2$.	Варіант 26 $\varphi(x) = 0,4(x^2 + 0,5)$, $\psi(x) = x \sin(x + 0,4)$, $\mu_1(t) = 0,1 + 0,5t$, $\mu_2(t) = 0,9$.	Варіант 27 $\varphi(x) = (1 + x^2) \cos \pi x$, $\psi(x) = (x + 0,7)^2$, $\mu_1(t) = 0,4$, $\mu_2(t) = 2t - 1,5$.
Варіант 28 $\varphi(x) = (0,2 + x)(0,5x + 1)$, $\psi(x) = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, $\mu_1(t) = 4,5 + 3t$, $\mu_2(t) = 2$.	Варіант 29 $\varphi(x) = (1 + x^2)(1 - x)$, $\psi(x) = 1 - \sin 2x$, $\mu_1(t) = 1$, $\mu_2(t) = 0,5t$.	Варіант 30 $\varphi(x) = (0,2 + x) \sin \frac{\pi x}{3}$, $\psi(x) = 1 - 2x$, $\mu_1(t) = 0,7t$, $\mu_2(t) = 1,5$.

Лабораторна робота №8

Різницевий метод розв'язування багатовимірних нестационарних задач для рівняння теплопровідності. Явна різницева схема

Теоретичні відомості

Розглянемо першу крайову задачу для двовимірного рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}, \quad (x_1, x_2, t) \in \Omega, \quad (8.1)$$

$$U(x_1, x_2, 0) = U_0(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in G, \quad \bar{G} = G_T \cup \tilde{A}, \quad (8.2)$$

$$U(x_1, x_2, t) = \mu(x_1, x_2, t), \quad x \in G, \quad \bar{G} = G_T \cup \Gamma, \quad (8.3)$$

де

$$G = \{0 < x_1 < l_1, 0 < x_2 < l_2\}, \quad \Omega = G \times (0, T],$$

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^4 \Gamma_i, \quad U \in C_2^1(\Omega).$$

Для побудови різницевої схеми задачі (8.1)-(8.3) введемо різницеву сітку таким чином:

$$\Omega_{h\tau} = \Omega_h \times \omega_\tau,$$

$$\Omega_h = \{x_{ij} = (x_1^i, x_2^j), \quad x_1^i = ih_1, \quad x_2^j = jh_2\},$$

$$\text{ââ } i = \overline{0, n}, \quad h_1 n = \ell_1, \quad j = \overline{0, m}, \quad h_2 m = \ell_2;$$

$$\omega_\tau = \{t_k = k\tau; \quad k = \overline{0, K}; \quad K\tau = T\};$$

де

ω_h - множина внутрішніх вузлів Ω_h .

γ_h - множина граничних вузлів Γ .

Тоді різницева схема з вагами матиме вигляд:

$$\frac{U_{ij}^{k+1} - U_{ij}^k}{\tau} + \sigma AU_{ij}^{k+1} + (1 - \sigma)AU_{ij}^k = 0, \quad (8.4)$$

$$i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad k = \overline{0, K-1},$$

$$U_{ij}^0 = U_0(x_1^i, x_2^i), \quad x_{ij} \in \Omega_h, \quad (8.5)$$

$$U_{ij}^k = \mu(x_1^i, x_2^i, t_k), \quad x_{ij} \in \gamma_h. \quad (8.6)$$

Явна різницева схема

$$\frac{U_{ij}^{k+1} - U_{ij}^k}{\tau} + AU_{ij}^k = 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad k = \overline{0, K-1}, \quad (8.7)$$

$$\begin{aligned} AU_{ij}^k &= -\Lambda U_{ij}^k = -U_{x_1 x_1 ij}^k - U_{x_2 x_2 ij}^k = \\ &= -\frac{U_{i-1,j}^k - 2U_{ij}^k + U_{i+1,j}^k}{h_1^2} - \frac{U_{i,j-1}^k - 2U_{ij}^k + U_{i,j+1}^k}{h_2^2}, \quad (8.8) \\ i &= \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad k = \overline{0, K-1}, \end{aligned}$$

$$U_{ij}^{k+1} = U_{ij}^k + \tau \Lambda U_{ij}^k, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad k = \overline{0, K-1}, \quad (8.9)$$

$$\begin{aligned} U_{ij}^{k+1} &= U_{ij}^k + \gamma_1 (U_{i-1,j}^k - 2U_{ij}^k + U_{i+1,j}^k) + \gamma_2 (U_{i,j-1}^k - 2U_{ij}^k + U_{i,j+1}^k), \\ i &= \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad k = \overline{0, K-1}, \end{aligned} \quad (8.10)$$

де $\gamma_1 = \frac{\tau}{h_1^2}, \quad \gamma_2 = \frac{\tau}{h_2^2}.$

Завдання

Знайти розв'язок багатовимірної задачі для рівняння теплопровідності. Початкові та граничні умови змінити, згідно наведених нижче вказівок.

Введемо позначення:

$$x \rightarrow x_1, \quad y \rightarrow x_2, \quad (8.11)$$

Початкові умови:

$$U(x_1, x_2, 0) = N \cdot \sin \frac{\pi x_1}{l_1} \cdot \cos \frac{\pi x_2}{l_2}, \quad (8.12)$$

де N - номер варіанту, $l_1 = a$, $l_2 = b$.

Граничні умови вибираємо наступним чином:

$U|_{y=0}, U|_{y=l_2}$ - такі ж як і у варіантах завдань,

$U|_{x=0} =$ завдання згідно варіанту $+N \sin(\omega t)$,

$U|_{x=l_1} =$ завдання згідно варіанту $+k \cos(\omega t)$,

де N - номер варіанту, k - номер групи, $\omega = kN$.

На межах прямокутної області (рис. 1) і в точках розриву граничні умови брати наступним чином:

- в точках А, В використовувати умову $U|_{x=0}$,
- в точках С, D брати умову $U|_{x=l_1}$.

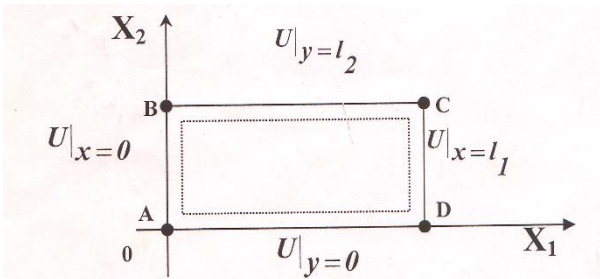


Рис.1. Прямокутна область

Варіант 1 $U _{x=0} = -y^2;$ $U _{x=4} = 16 - 8y - y^2;$ $U _{y=0} = x^2;$ $U _{y=3} = x^2 - 6x - 9;$	Варіант 2 $U _{x=0} = -y^2;$ $U _{x=4} = 16 + 8y - y^2;$ $U _{y=0} = x^2;$ $U _{y=3} = x^2 + 6x - 9;$	Варіант 3 $U _{x=0} = -y^3;$ $U _{x=3} = 0;$ $U _{y=0} = 48 - y^3;$ $U _{y=3} = 9x^2 - 27;$
Варіант 4 $U _{x=0} = 0;$ $U _{x=3} = 4y;$ $U _{y=0} = 0;$ $U _{y=3} = 3x;$	Варіант 5 $U _{x=0} = 4y - 12;$ $U _{x=4} = 4y;$ $U _{y=0} = 3x - 12;$ $U _{y=3} = 3x;$	Варіант 6 $U _{x=0} = 12 - 4y;$ $U _{x=4} = 0;$ $U _{y=0} = 12 - 3x;$ $U _{y=3} = 0;$
Варіант 7 $U _{x=0} = -y;$ $U _{x=3} = 5y;$ $U _{y=0} = 0;$ $U _{y=4} = 3x - 4;$	Варіант 8 $U _{x=0} = y^2;$ $U _{x=3} = 4y;$ $U _{y=0} = x^3 - 27x;$ $U _{y=3} = 64 - 12x^2;$	Варіант 9 $U _{x=0} = 0;$ $U _{x=4} = 64 - 12y^2;$ $U _{y=0} = x^3;$ $U _{y=3} = x^3 - 27x;$
Варіант 10 $U _{x=0} = -y^3;$ $U _{x=4} = 52 - y^3;$ $U _{y=0} = 0;$ $U _{y=3} = 9x^2 + 3x - 2;$	Варіант 11 $U _{x=0} = y^2;$ $U _{x=4} = 16 + y^2 - 4y;$ $U _{y=0} = x^2;$ $U _{y=3} = x^2 - 3x + 9;$	Варіант 12 $U _{x=0} = y^2;$ $U _{x=4} = y^2 + 14;$ $U _{y=0} = x^2 - 3x;$ $U _{y=3} = x^2 - 3x + 9;$

Варіант 13 $U _{x=0} = 12 - 4y;$ $U _{x=4} = 4y;$ $U _{y=0} = 12 - 3x;$ $U _{y=3} = 3x;$	Варіант 14 $U _{x=0} = 0;$ $U _{x=4} = 16y - 4y^2;$ $U _{y=0} = 3x;$ $U _{y=3} = 0;$	Варіант 15 $U _{x=0} = 0;$ $U _{x=4} = 12 - 4y;$ $U _{y=0} = 3x;$ $U _{y=3} = 0;$
Варіант 16 $U _{x=0} = y^2;$ $U _{x=4} = y^2 + 8y - 16;$ $U _{y=0} = -x^2;$ $U _{y=3} = 9 + 6x - x^2;$	Варіант 17 $U _{x=0} = y^2;$ $U _{x=4} = y^2 - 8y - 16;$ $U _{y=0} = -x^2;$ $U _{y=3} = 9 - 6x - x^2;$	Варіант 18 $U _{x=0} = y^3;$ $U _{x=4} = y^3 - 48y;$ $U _{y=0} = 0;$ $U _{y=3} = 27 - 9x^2;$
Варіант 19 $U _{x=0} = 0;$ $U _{x=4} = 5y;$ $U _{y=0} = 0;$ $U _{y=3} = \frac{20}{3}x;$	Варіант 20 $U _{x=0} = 0;$ $U _{x=4} = -4y;$ $U _{y=0} = 0;$ $U _{y=3} = -3x;$	Варіант 21 $U _{x=0} = 12 - 4y;$ $U _{x=4} = -4y;$ $U _{y=0} = 12 - 3x;$ $U _{y=3} = -3x;$
Варіант 22 $U _{x=0} = 4y - 12;$ $U _{x=4} = 0;$ $U _{y=0} = 3x - 12;$ $U _{y=3} = 0;$	Варіант 23 $U _{x=0} = 4y;$ $U _{x=4} = 0;$ $U _{y=0} = 0;$ $U _{y=3} = 12 - 3x;$	Варіант 24 $U _{x=0} = 4y;$ $U _{x=4} = 4y - 12;$ $U _{y=0} = -3x;$ $U _{y=3} = 12 - 3x;$

Варіант 25 $U _{x=0} = 0;$ $U _{x=4} = 12y^2 - 64;$ $U _{y=0} = -x^3;$ $U _{y=3} = 27x - x^3;$	Варіант 26 $U _{x=0} = y^3;$ $U _{x=4} = 4y - 16 - y^2;$ $U _{y=0} = -x^2;$ $U _{y=3} = 3x - x^2 - 9;$	Варіант 27 $U _{x=0} = y^3;$ $U _{x=4} = y^3 - 52y;$ $U _{y=0} = 0;$ $U _{y=3} = 27 - 9x^2 - 3x;$
Варіант 28 $U _{x=0} = -y^2;$ $U _{x=4} = -14 - y^2;$ $U _{y=0} = 3x - x^2;$ $U _{y=3} = 3x - x^2 - 9;$	Варіант 29 $U _{x=0} = 3y - 12;$ $U _{x=4} = -3y;$ $U _{y=0} = 4x - 12;$ $U _{y=3} = -4x;$	Варіант 30 $U _{x=0} = 0;$ $U _{x=4} = 4y^3 - 16;$ $U _{y=0} = 0;$ $U _{y=3} = 9x + 24;$

Лабораторна робота № 9

Розв'язування задачі Діріхле для рівняння Лапласа методом скінченних елементів

Теоретичні відомості

Знайдемо розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in G, \quad (9.1)$$

який задовольняє граничним умовам:

$$T|_{\Gamma} = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma. \quad (9.2)$$

Рівняння методу Гальоркіна:

$$T \approx \bar{\varphi} = \sum_{m=1}^{20} \varphi_m N_m, \quad (9.3)$$

Апроксимація розв'язку:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial y^2} \right) N_e dx dy = 0, \quad (9.4)$$

де φ_m – значення у вузлах, N_m – глобальні лінійні базисні функції, які дорівнюють 1 в i -му вузлі та дорівнюють нулю в інших вузлах.

(9.3) на основі формули Гріна запишеться так

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_e}{\partial x} \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial N_e}{\partial y} \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y} \right) dx dy = 0. \quad (9.5)$$

$$\text{З (9.1)-(9.4)} \rightarrow \text{СЛАР :} \quad K\varphi = f, \quad (9.6)$$

де $f = 0$, K – матриця, що визначається асамблюванням (сумуванням вкладів) окремих елементів.

$$K^e \varphi^e = 0, \quad K_{im}^e = \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial N_l}{\partial x} \frac{\partial N_m}{\partial x} + \frac{\partial N_l}{\partial y} \frac{\partial N_m}{\partial y} \right) dx dy,$$

де

$$\frac{\partial N_e}{\partial x} = \text{const} \rightarrow K_{lm} = \left(\frac{\partial N_l}{\partial x} \frac{\partial N_m}{\partial x} + \frac{\partial N_l}{\partial y} \frac{\partial N_m}{\partial y} \right) \cdot \Delta^e,$$

$$\Delta^e = \frac{1}{2} - (\text{площа елемента}).$$

Вклади елементів

Вклад 1-го елемента

$$K^1 \varphi^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_6 \\ \varphi_7 \end{pmatrix}.$$

Вклад 2-го елемента

$$K^2 \varphi^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_7 \\ \varphi_2 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}.$$

.....

Вклад 24-го елемента

$$K^{24} \varphi^{24} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{20} \\ \varphi_{15} \\ \varphi_{14} \end{pmatrix}.$$

Для граничних умов покладемо:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = \varphi_5 = 200;$$

$$\varphi_6 = \varphi_{10} = 130; \varphi_{11} = \varphi_{15} = 60;$$

$$\varphi_{16} = \varphi_{17} = \varphi_{18} = \varphi_{19} = \varphi_{20} = -10.$$

Глобальна матриця вкладів має наступний вигляд:

φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{15}	φ_{16}	φ_{17}	φ_{18}	φ_{19}	φ_{20}	
2	-1				-1															φ_1
-1	4	-1				-2														φ_2
	-1	4	-1				-2													φ_3
		-1	2					-2												φ_4
				4	-2				-1											φ_5
-1				-2	8	-2				-1										φ_6
	-2				-2	8	-2				-2									φ_7
		-2				-2	8	-2				-2								φ_8
			-2				-2	4					-2							φ_9
				-1					4	-2				-1						φ_{10}
					-1				-2	8	-2				-1					φ_{11}
						-2				-2	8	-2				-2				φ_{12}
							-2				-2	8	-2				-2			φ_{13}
								-2				-2	4					-2		φ_{14}
									-1					-2	4					φ_{15}
										-1					2	-1				φ_{16}
											-2				-1	4	-1			φ_{17}
												-2				-1	4	1		φ_{18}
													-2				-1	4		φ_{19}
														-1				-1		φ_{20}

В результаті перетворень глобальної матриці (викреслюючи рядки, що відповідають відомим φ_i , та замінюючи відомі φ_i їхніми значеннями) отримаємо СЛАР:

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 8 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 8 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_7 \\ \varphi_8 \\ \varphi_9 \\ \varphi_{12} \\ \varphi_{13} \\ \varphi_{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\varphi_2 + 2\varphi_6 \\ 2\varphi_3 \\ 2\varphi_4 + 2\varphi_{10} \\ 2\varphi_{11} + 2\varphi_{17} \\ 2\varphi_{18} \\ 2\varphi_{15} + 2\varphi_{18} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_7 \\ \varphi_8 \\ \varphi_9 \\ \varphi_{12} \\ \varphi_{13} \\ \varphi_{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 330 \\ 200 \\ 330 \\ 50 \\ -10 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Розв'язок цієї системи:

$$\varphi_7 = \varphi_8 = \varphi_9 = 130;$$

$$\varphi_{12} = \varphi_{13} = \varphi_{14} = 60;$$

що повністю співпадає з точним розв'язком поставленої задачі.

Завдання

Знайти розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа методом скінченних елементів. Завдання взяти з лабораторної роботи №1. Порівняти результати, отримані двома методами: скінченних різниць та скінченних елементів.

Рекомендована література

1. Samarskii A. A. The Theory of Difference Schemes. Marcel Dekker, 2001. 761 p.
2. Samarskii, A. A., Vabishchevich, Petr N. Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics, Berlin, New York: De Gruyter, 2007. 452 p.
3. Перестюк М. О., Маринець В. В. Теорія рівнянь математичної фізики. К. : Либідь, 2006. 424 с.
4. Савула Я. Г. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами. Львів : ЛНУ ім. І.Франка, 2004. 221 с.
5. Фельдман. Л. П., Петренко А. І., Дмитрієва О. А. Чисельні методи в інформатиці. Київ, 2006. 480 с.
6. Цегелик Г. Г. Чисельні методи: Підручник. Львів : Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2004. 408 с.
7. Шахно С. М., Дудикевич А. Т., Левицька С. М. Практикум з чисельних методів : навч. посібник. Л. : ЛНУ ім. І. Франка, 2013. 431 с.