

Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства
та природокористування

МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА ТЕОРІЯ, ЗАДАЧІ, ТЕСТИ

Навчальний посібник

Рівне – 2025

УДК 539.19(075.8)
М75

Авторський колектив: Мороз М. В., Соляк Л. В., Гаєвський В. Р., Рудик Б. П., Гаращенко О. В., Лебедь О. О., Рибалко А. В.

Рецензенти:

Василець С. В., доктор технічних наук, професор, професор кафедри автоматизації, електротехнічних та комп'ютерно-інтегрованих технологій Національного університету водного господарства та природокористування, м. Рівне;

Нечипорук Б. Д., кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри фізики, астрономії та методики викладання Рівненського державного гуманітарного університету.

*Рекомендовано Вченою радою Національного університету водного господарства та природокористування.
Протокол № 5 від 30 травня 2025 р.*

М75 Молекулярна фізика. Теорія, задачі, тести : навч. посіб. [Електронне видання]. – Рівне : НУВГП, 2025. – 306 с.

ISBN 978-966-327-663-2

Навчальний посібник складається з 5 розділів, де стисло викладено теоретичний матеріал, подано основні формули. Значну увагу приділено розкриттю фізичного змісту законів молекулярної фізики. Наведено приклади розв'язування типових задач, перелік тестових завдань та довідкові матеріали.

Посібник відповідає затвердженому си́лабусу дисципліни «Фізика» та призначений для студентів інженерно-технічних та природничих напрямів підготовки закладів вищої освіти.

Таблиця 6. Іл. 48. Бібліогр. 11 назв.

УДК 539.19(075.8)

ISBN 978-966-327-663-2

© М. В. Мороз, Л. В. Соляк,
В. Р. Гаєвський, Б. П. Рудик,
О. В. Гаращенко, О. О. Лебедь,
А. В. Рибалко, 2025
© Національний університет
водного господарства та
природокористування, 2025

Зміст

ПЕРЕДМОВА.....	5
ВСТУП	6
Розділ 1. Основи молекулярно-кінетичної теорії.....	7
1.1. Основні положення молекулярно-кінетичної теорії	7
Кількість речовини. Молярна маса. Розміри і маси молекул і атомів. Число Авогадро	7
1.3. Ідеальний газ. Рівняння стану ідеального газу. Ізопроееси.....	14
1.4. Об'єднаний газовий закон. Рівняння стану ідеального газу.....	20
1.5. Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу	24
1.6. Барометрична формула. Розподіл Больцмана	29
1.7. Розподіл Максвелла – розподіл молекул ідеального газу за швидкостями.....	31
1.8. Ефективний діаметр молекули. Середнє число зіткнень. Середня довжина вільного пробігу молекул	36
1.9. Явища перенесення.....	37
1.10. Основні закони та співвідношення молекулярної фізики.....	45
1.11. Приклади розв'язування задач. Молекулярна фізика	48
1.11.1. Рівняння стану ідеального газу. Газові закони	48
1.11.2. Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів, швидкості молекул	83
Розділ 2. Реальні гази і рідини. Фазові переходи	133
2.1. Реальний газ. Рівняння Ван-дер-Ваальса.....	133
2.2. Ізотерми реального газу. Ізотерми Амага. Ізотерми Ван-дер-Ваальса. Критичний стан речовини. Критична температура. Зрідження газів. Властивості насиченої пари	136
2.3. Зв'язок поправок Ван-дер-Ваальса з критичними параметрами. Зведене рівняння стану реального газу. Внутрішня енергія та теплоємність реального газу	143
2.4. Ефект Джоуля-Томсона.....	146
2.5. Поняття про фазу та фазові переходи. Фазові переходи I-го та II-го роду. Плавлення та кристалізація. Пароутворення, випаровування, конденсація	149
Плавлення та кристалізація.....	150

Пароутворення і конденсація. Випаровування. Питома теплота пароутворення	151
Кипіння. Залежність температури кипіння від тиску	152
2.6. Умови рівноваги фаз в однокомпонентній системі. Рівняння Клапейрона-Клаузіуса. Діаграма станів	153
2.7. Абсолютна і відносна вологість повітря. Гігрометри	158
2.8. Рідини. Поверхневий натяг	160
2.9. Основні закони та співвідношення. Реальні гази і рідини. Фазові переходи.....	166
2.10. Приклади розв'язування задач. Реальні гази та рідини. Фазові переходи. Явища перенесення	169
2.10.1. Реальні гази та рідини. Фазові переходи	169
2.10.2. Рідини. Поверхневий натяг	200
2.10.3. Явища перенесення в газах. Внутрішнє тертя. Теплопровідність. Дифузія.....	218
Розділ 3. Задачі для самостійного розв'язування	238
3.1. Молекулярна фізика	238
3.2. Реальні гази та рідини. Фазові переходи. Явища перенесення	250
3.3. Якісні задачі для самостійного розв'язування	261
Розділ 4. Тестові завдання	262
Тестові завдання №1	262
Тестові завдання №2	275
Тестові завдання №3	283
Відповіді до завдань на відповідність.....	292
Завдання №1	292
Завдання №2	293
Завдання №3	294
Розділ 5. Довідкові матеріали	296
Література	303
Предметний покажчик.....	304

ПЕРЕДМОВА

Молекулярна фізика є одним з розділів загальної фізики, що вивчає властивості речовини та явища, що зумовлені її мікроскопічною (молекулярною) будовою. Посібник відповідає вимогам до програми курсу фізика для студентів інженерних та природничо-технічних спеціальностей закладів вищої освіти та охоплює базові поняття й закономірності цього курсу. Матеріал подано у доступній формі, із врахуванням сучасних педагогічних підходів. Значну увагу приділено підготовці студентів до самостійного розв'язування задач з фізики в умовах обмеженої кількості аудиторних годин.

Мета посібника – не лише передати студентам необхідні знання, але й сприяти розвитку аналітичного мислення, вмінню узагальнювати причинно–наслідкові зв'язки та застосовувати набуті знання на практиці. Посібник може бути використаний як під час лекційних і практичних занять, так і для самостійної підготовки до модульного контролю чи іспиту.

Автори сподіваються, що посібник стане надійним помічником у вивченні курсу молекулярної фізики, сприятиме глибшому розумінню явищ навколишнього світу, формуванню інженерного та наукового мислення у читачів.

Колектив авторів висловлює подяку Щодро Марині Євгенівні, громадянці Канади, яка закінчила фізичний факультет Київського державного університету ім. Тараса Шевченка у 1988 році, та люб'язно надала матеріали з відповідного розділу фізики.

Автори.

ВСТУП

Мета посібника – засвоїти теоретичний матеріал із розділу «Молекулярна фізика» та закріпити набуті знання у вигляді вмінь та навичок розв’язування задач і тестів з використанням **традиційного алгоритму**:

1. Перш за все потрібно з’ясувати, до якого розділу відноситься задача, та ознайомитись з теорією цього розділу.
2. Умову задачі слід записати словесно і скорочено у загальноприйнятих символічних позначеннях (див. Приклади розв’язування задач). Дані задачі та необхідні константи привести до однієї системи одиниць (загальноприйнятою зараз є міжнародна система одиниць СІ).
3. Зробити малюнок до задачі або зобразити процес графічно (якщо в цьому є потреба); малюнок допомагає збагнути зміст задачі і зазвичай підказує ідею її розв’язання.
4. Метою розв’язування є зведення розрахункової фізичної задачі до математичної: необхідно скласти стільки алгебраїчних рівнянь, скільки є невідомих величин у задачі (включаючи й ті, які не фігурують в умові, але виникли в процесі розв’язування), інакше система не матиме однозначного розв’язку. Для цього розв’язок системи рівнянь необхідно починати з виключення тих невідомих величин, які не вимагається знайти за умовою задачі, і при цьому слідкувати, щоб їх число зменшувалось в процесі розв’язку. Розв’язання супроводжувати короткими поясненнями, які розкривають логіку міркувань.
5. Розв’язати задачу у символічному вигляді, одержавши **робочу формулу** шуканої величини.
6. Підставити у робочу формулу числові дані задачі та константи і обрахувати числове значення шуканої величини, вказавши її одиниці вимірювань. Точність обчислень не повинна перевищувати точність заданих величин.
7. Переконатись у «розумності» одержаного результату як з точки зору його розмірності, так і з точки зору відповідності до загальних законів природи.
8. Зауважимо, що при тестовому оцінюванні в задачі необхідно буде знайти лише **одну** невідому величину і, відповідно, у відповіді буде лише **одне число**. В даному посібнику значення шуканої величини пропонується представляти у відповіді як в загальноприйнятому (нормованому) вигляді, так і у вигляді, який використовується при незалежному тестовому оцінюванні (див. приклади розв’язування задач).

Розділ 1. Основи молекулярно-кінетичної теорії

1.1. Основні положення молекулярно-кінетичної теорії

Кількість речовини. Молярна маса. Розміри і маси молекул і атомів. Число Авогадро

Молекулярна фізика – розділ фізики, у якому вивчаються фізичні властивості і агрегатні стани тіл залежно від їх молекулярної будови, сил взаємодії і характеру теплового руху молекул.

Існує три основні положення молекулярно-кінетичної теорії (МКТ):

а) Усі речовини (тверді, рідкі, газоподібні) розглядаються як термодинамічні системи, котрі складаються з атомів та молекул.

Молекула – це найдрібніша частинка речовини, що зберігає її хімічні властивості.

Атом – це найдрібніша частинка простої речовини (хімічного елемента).

Атоми можуть об'єднуватися у молекули, хоча існують молекули, що складаються лише з одного атома.

2) Атоми і молекули знаходяться в неперервному хаотичному русі, який називають тепловим.

3) Між ними діють сили притягання та відштовхування, які мають електромагнітну природу.

Розглянемо ці положення.

1). Гіпотеза про *атом як найменшу неподільну одиницю* речовини висувалася ще давньогрецькими вченими (Левкипп, Демокріт 6-4 ст. до н.е.), проте тоді не мала дослідного обґрунтування. Згодом, це зробили вчені Авогадро, Перен (поч. 19 ст.). Було звернено увагу на такі дослідні факти:

а) здатність газів до необмеженого розширення пояснено хаотичним рухом молекул газа;

б) теплове розширення тіл пояснено збільшенням середніх відстаней між частинками при нагріванні.

У подальшому атомарна теорія розвивалася такими вченими як Дальтон (1803 р., ввів поняття атомної маси, закона кратних відношень при взаємодії елементів), Резерфорд (1908 р. Ядерна планетарна модель атома), Бор (теорія стаціонарних станів атома) та багатьма іншими.

2). До дослідних обґрунтувань *теплового руху* молекул відносяться явища дифузії, броунівський рух та інші явища.

Дифузія – це проникнення молекул однієї речовини в міжмолекулярні проміжки іншої, зумовлене хаотичним рухом молекул.

Прикладом дифузії в газах є поширення запахів; у рідинах – є розчинення у воді мідного купоросу (CuSO_4), у твердих тілах – дослід з золотою та свинцевою пластинками, які ретельно відшліфували та щільно припасували одну до одної, й залишили на кілька років. Виявилось, що границя

розділу між пластинами зникла та утворився тонкий прошарок сплаву цих елементів. Це свідчить про те, що структурні одиниці твердих тіл теж не знаходяться вічно в одних тих самих положеннях, а змінюють їх, хоч і з малою ймовірністю.

Броунівський рух – це хаотичний рух завислих у рідині або газі дрібних макрочастинок, зумовлений хаотичними ударами молекул об ці частинки.

Англійський ботанік Браун (Brown, 1827) спостерігав під мікроскопом хаотичний рух спор плауна в краплині води, і чим менша була частинка, тим хаотичніше вона рухалася. Це пояснюється малою масою (інертністю) частинки, бо чим менша її маса, тим менша інертність. Аналогічно можна спостерігати рух дисперсних частинок фарби, туші у воді.

Характер теплового руху молекул хаотичний, відрізняється для різних агрегатних станів речовини.

В газах – це хаотичний рух молекул, які рухаються з великими швидкостями.

В рідині – коливально-хаотичний: молекула певний час коливається біля одного положення, а потім стрибком змінює це положення під впливом ударів сусідніх молекул.

В твердих тілах – частинки коливаються біля положень стійкої рівноваги у вузлах кристалічної ґратки (решітки). При збільшенні температури збільшується амплітуда коливань.

3). *Сили взаємодії* між молекулами залежать від відстані між ними. Вони діють на відстанях, співмірних із розмірами самих молекул, за відстаней більших за 8-10 діаметрів молекул, взаємодія близька до нуля. У газах розмірами молекул можна знехтувати порівняно з відстанню між ними, тобто вважати молекули матеріальними точками, які в цілому електронейтральні, тому електричною взаємодією між ними можна знехтувати, а гравітаційне притягання нескінченно мале, бо малі маси молекул:

$$F_{ГРАВ} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \sim 8,87 \cdot 10^{-11} \frac{10^{-27} \cdot 10^{-27}}{r^2} \sim 10^{-65} \text{ (Н)}.$$

У результаті, молекули рухаються хаотично, пружно вдаряючись між собою та об стінки посудини. Тиск газу зумовлений саме *пружними* ударами молекул між собою та об стінку. Якби молекули вдарялись непружно, то припинився б будь-який рух молекул.

Оскільки молекул багато і вони рухаються хаотично, тому у середньому, тиск у газі однаковий за всіма напрямками. Саме через тепловий рух молекул, гази здатні до *необмеженого розширення* і займають будь-який об'єм, що їм надається.

Середня довжина вільного пробігу молекул в газі – це середня відстань від одного зіткнення молекул до іншого.

Ідеальний газ – це *механічна модель* газу, в якій нехтують розмірами молекул та силами міжмолекулярної взаємодії.

У моделі ідеального газу молекули приймаються за матеріальні точки, які абсолютно пружньо взаємодіють між собою та стінками ємності. Відповідно були зроблені наступні *спрощення*: а) молекули газу не мають власного об'єму, лише масу ($V_{\text{молек}} = 0$); б) сили міжмолекулярної взаємодії відсутні ($F_{\text{міжмолек}} = 0$). Модель добре описує реальні гази в умовах близьких до нормальних (н.у.), за високих тисків та температур спостерігаються відхилення від експериментальних даних.

У **рідинах** не можна нехтувати розмірами молекул порівняно з відстанню між ними. Тому електрони і ядра атомів однієї молекули опиняються в електричному полі електронів і ядер атомів сусідніх молекул, отже між ними існує електрична взаємодія.

За законом Кулона $F_{\text{Кул}} = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$ однойменні заряди відштовхуються, відстань між ними збільшується, а Кулонівські сили відштовхування зменшуються. Різнойменні заряди притягаються, відстань між ними зменшується, а $F_{\text{Кул}}$ збільшується. В результаті сили притягання переважають сили відштовхування. Отже, на кожен заряд всередині молекули діє сила електричного поля $\vec{F}_{\text{ел}} = \pm q \vec{E}$, зумовлена електромагнітним полем сусідніх молекул. Ця сила призводить до зміщення позитивних зарядів ($+q$) вздовж напрямку поля, співнапрявленого з вектором напруженості електричного поля $\vec{E}$, негативних зарядів ($-q$) – проти напрямку поля. Внаслідок цього кожна молекула поляризується: тобто, перетворюється на диполь (рис. 1.1), диполі притягуються різнойменними полюсами. Молекулярну структуру рідин вивчав нідерландський вчений Ван-дер-Ваальс, він встановив, що сила притягання диполів обернено пропорційна сьомому степені віддалі r між ними $\sim \frac{1}{r^7}$, тобто сила швидко змінюється при зміні r .

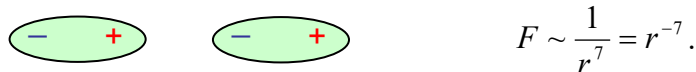


Рис. 1.1

У рідинах відстані між молекулами не занадто малі, тому Ван-дер-Ваальсові сили притягання не дуже великі. Вони помітні тільки між сусідніми молекулами та практично відсутні між віддаленими молекулами. Тому говорять, що в рідинах існує ближній порядок – впорядковане розташування по відношенню до довільної частинки найближчих сусідів. Це призводить до того, що рідина зберігає свій об'єм V , але не зберігає власної форми, практично не стискується та тече.

В **твердих тілах** відстані між частинками (атомами, молекулами, іонами) малі, тому Ван-дер-Ваальсові сили притягання великі. У кристалічних твердих тілах також діють інші сили притягання між частинками, природа яких пояснюється квантовою механікою. Про величину сил зв'язку (сил притягання)

у твердому тілі свідчить їх міцність, зберігання власної форми та утворення кристалічної ґратки, тобто, існування дальнього порядку – впорядкованого розташування структурних одиниць по відношенню до довільної частинки у межах значного об'єму.

Кожна частинка у твердому тілі займає таке положення, при якому сили притягання її до сусідніх частинок попарно скомпенсовані – «положення стійкої рівноваги» (рис. 1.2).



Рис. 1.2

Не слід вважати, що атоми або молекули твердих тіл *не* перебувають у тепловому русі, вони коливаються навколо положень рівноваги, у кристалічних тілах – це вузли кристалічної решітки.

Графік залежності сили $F(r)$, що діє на частинку у твердому тілі, від відстані між частинками має вигляд (рис. 1.3, а). При малих деформаціях (близько до r_0) залежність $F(r)$ лінійна – ділянка AB – область виконання закону Гука.

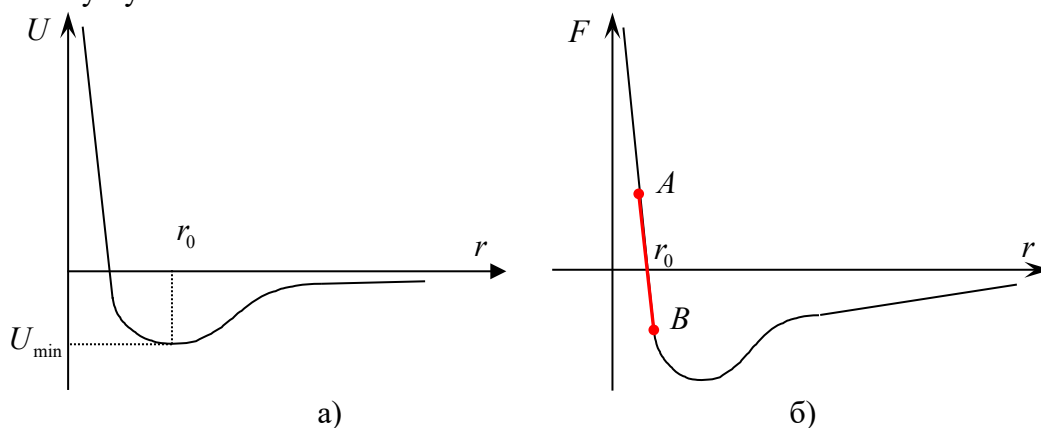


Рис. 1.3

Якщо прикласти силу таким чином, що $r > r_0$ (деформація розтягу), то виникають сили пружності – сили притягання $F < 0$, які намагаються відтворити форму тіла, та, при малих деформаціях, залежність – лінійна (область закону Гука). При $r < r_0$ (деформація стиску) виникають сили пружності – сили відштовхування $F > 0$, і відновлюють форму тіла.

Якщо $r \rightarrow 0$, то $F \rightarrow \infty$ – виникає сила відштовхування атомних ядер,

яка заважає їм злитися в одне ядро.

Якщо ж $r \rightarrow \infty$, то $F \rightarrow 0$ – тіло руйнується.

При $r = r_0$ $F = 0$, що відповідає положенню стійкої рівноваги частинки.

Графік потенціальної енергії взаємодіючих частинок має вигляд (рис. 1.3, а). При $r = r_0$, $U = U_{\min}$ – мінімум потенціальної енергії відповідає положенню стійкої рівноваги. Частинки, що розташовані у вузлах кристалічної ґратки знаходяться у енергетичних «потенціальних ямах» та перебувають у положенні стійкої рівноваги у постійному коливному русі.

Кількість речовини. Молярна маса. Розміри і маси молекул і атомів. Число Авогадро

Для характеристики мас атомів та молекул використовують відносну атомну масу елемента (скорочено – атомну масу) та відносну молекулярну масу речовини (скорочено – молекулярну масу).

Одиниця маси, що дорівнює 1/12 маси атома карбону C^{12} , називається атомною одиницею маси (а.о.м.), і рівна $m_{a.o.m.} \approx 1,66 \cdot 10^{-27}$ кг. Тоді маса атома, що виражається в кілограмах, буде дорівнювати $A_r m_{a.o.m.}$, а маса молекули $M_r m_{a.o.m.}$. Середні значення A_r та M_r вказані у таблиці періодичної системи хімічних елементів.

Відносною атомною масою (A_r) хімічного елемента називається відношення маси цього елемента до 1/12 маси атома ізотопу карбону C^{12} .

Відносною молекулярною масою речовини (M_r) називається відношення маси молекули цієї речовини до 1/12 маси атома ізотопу C^{12} .

1 моль – це така кількість речовини, яка містить стільки структурних елементів (атомів, молекул), скільки атомів міститься у 12 грамах ізотопу карбону C^{12} . Ця величина визначена експериментально та носить назву **число Авогадро**, $N_A = 6,0221415 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹. Отже:

1 моль будь-якої речовини містить $6,022 \cdot 10^{23}$ частинок. Використовуються також кратні одиниці: кіломоль (кмоль), мілімоль (ммоль), мікромоль (мкмоль).

Маса 1 моля речовини у грамах, дорівнює масі 1 молекули у а.о.м.

Маса одного моля речовини називається молярною масою (μ).

Кількість речовини ν – це кількість молей в речовині масою m .

Кількість речовини можна визначити за формулами: $\nu = \frac{m}{\mu}$ або $\nu = \frac{N}{N_A}$,

де m – маса речовини, N – число молекул або атомів в речовині масою m .
Одиницями у СІ є $[\nu] = \text{моль}$; $[M_r] = \text{а.о.м.}$; $[\mu] = \text{кг/моль}$.

Масу однієї молекули визначають за формулою: $m_0 = \frac{\mu}{N_A}$,

де μ – молярна маса, тобто маса одного моля речовини, яка в грамах на моль (г/моль) чисельно дорівнює відносній молекулярній (або атомній) масі у а.о.м. Для прикладу, знайдемо масу молекули кисню (O_2):

$$\mu = 32 \text{ г} / \text{моль} = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг} / \text{моль};$$

$$m_0 = \frac{32 \cdot 10^{-3} \text{ кг} / \text{моль}}{6,02 \cdot 10^{+23} \text{ моль}^{-1}} \approx 5,3 \cdot 10^{-26} \text{ кг}.$$

Отже, маси атомів і молекул складають величину порядку $10^{-26} \div 10^{-27}$ кг, а розміри становлять величину порядку 0,1 нм або 10^{-10} м.

На сьогодні існують методи, що дозволяють отримувати детальні зображення атомних структур, один із них – HRTEM (електронна скануюча мікроскопія високої роздільної здатності). Для прикладу наведено HRTEM зображення політипічної плівки ZnO «вюртцит-сфалерит» вирощеної на підкладці з боросилікатного скла методом термічного осадження з діетилцинку $(C_2H_5)_2Zn$ і H_2O . Морфологія поверхні плівок складалася з конусів (основа – гексагональні призми ZnO) та трикутних призм, формуючим фактором яких, були зародки кубічної цинкової обманки нанометрових розмірів. На думку авторів (DOI:10.1016/j.actamat.2017.03.021), утворення зародку сфалериту (ZB) викликало зупинку росту стрижнеподібних кристалів ZnO вюртциту у вигляді наноколоні (WZ_1), що призводило до початку росту бокових структур вюртциту (WZ_2 та WZ_3).

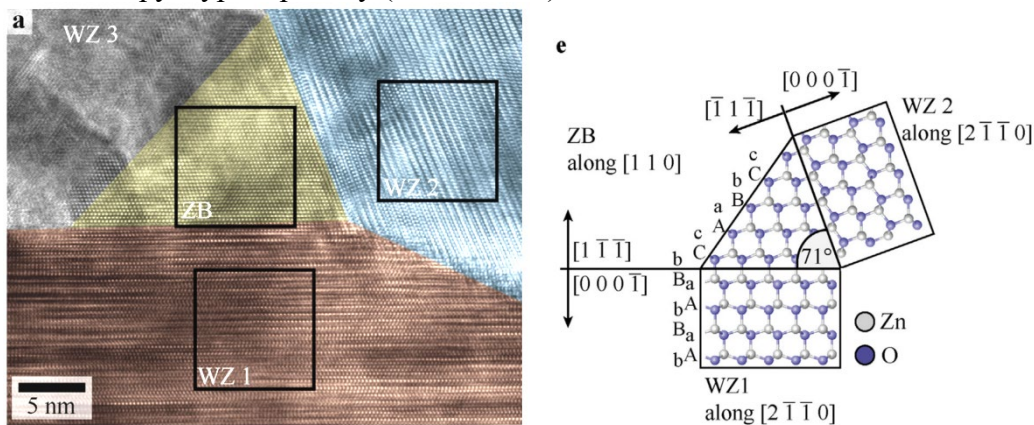


Рис. 1.4. Мікрофотографія зародка нанометрових розмірів цинкової обманки (ZB_{cubic}) всередині площин вюртциту (WZ_{hex}) (зліва). Модель «зшивання» кристалічних структур кубічного сфалериту та гексагонального вюртциту (справа)

1.2. Термодинамічні системи. Термодинамічний та статистичний (молекулярно-кінетичний) методи досліджень

Фізичні системи, які складаються з великої кількості частинок, називаються **термодинамічними системами (ТДС)**. До ТДС відносяться будь-які системи, які складаються з молекул, атомів, йонів – газ, рідина, тверде тіло. Молекули взаємодіють між собою з силами притягання або відштовхування електромагнітної природи і знаходяться в стані постійного теплового руху.

У газах напрямки руху молекул рівноймовірні, а сили міжмолекулярної взаємодії мізерні. Тому молекули розподіляються в об'ємі рівномірно. Величини швидкостей молекул лежать в необмежено широкому інтервалі.

Існує два взаємодоповнюючих методи дослідження ТДС: **термодинамічний та статистичний**.

1) **Термодинамічний метод**. Система розглядається як одне ціле і її стан описується такими термодинамічними макроскопічними параметрами:

Таблиця 1.1

p – тиск	T – температура	ρ – густина
V – об'єм	m – маса	ν – кількість речовини

та іншими (U – внутрішня енергія; Q – кількість теплоти).

Тиск $p = \frac{F}{S}$ ($H / m^2 = Pa$), $\vec{F} \perp S$; якщо сила тиску не перпендикулярна

площі, то беруть її проєкцію на нормаль до площі поверхні тиску. T – термодинамічна температура, значення якої визначається за шкалою Кельвіна ($T = t^{\circ}C + 273K$).

Рівняння, яке закономірно зв'язує ці параметри, називається **рівнянням стану**. В основі термодинамічного методу лежать закони (начала) термодинаміки.

2) **Статистичний (молекулярно-кінетичний) метод**. Розглядається рух, взаємодія, розподіл молекул, з яких складається термодинамічна система. Але прослідкувати за рухом окремої молекули в принципі неможливо, тому описують цей рух середніми статистичними величинами, до яких відносяться середня швидкість, середня кінетична енергія. Рівняння, яке зв'язує тиск з цими середніми величинами, називається **основним рівнянням молекулярно-кінетичної теорії (МКТ)**

1.3. Ідеальний газ. Рівняння стану ідеального газу. Ізопроцеси

Прикладом термодинамічної системи може бути ідеальний газ. З **молекулярно-кінетичної** точки зору **ідеальним газом** називається такий газ, в якому можна знехтувати розмірами молекул порівняно з відстанню між ними, і силами взаємодії між молекулами.

З **термодинамічної** точки зору **ідеальним газом** називається такий газ, який підкоряється рівнянню стану ідеального газу або трьом газовим законам: Бойля-Маріотта, Гей-Люссака, Шарля. Нижче буде показано, що ці два визначення взаємопов'язані.

Історично склалося так: дослідним шляхом були встановлені три газові закони, а з них Клапейрон вивів рівняння стану для 1 моля газу та узагальнив це рівняння на довільну масу газу. Реальний газ при достатньому розрідженні близький за своїми властивостями до ідеального. Деякі гази, такі як повітря, азот, кисень, навіть при нормальних умовах

($t_0 = 0^\circ \text{C} \rightarrow T = 273\text{K}$; $p_0 = 1 \text{ атм} = 10^5 \text{ Па}$; $V_\mu = V_0 = 22,4 \text{ л} = 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 / \text{моль}$ – за нормальних умов усі гази мають однаковий об'єм) мало відрізняються від ідеального.

При узагальненому підході розглядають для даної маси газу **рівняння стану ідеального газу**:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \text{ або } pV = \nu RT, \quad (1)$$

де p – тиск газу, V – об'єм, T – абсолютна температура, m – маса газу, μ – молярна маса, $\frac{m}{\mu} = \nu$ – кількість молів в даній масі газу, $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ – універсальна газова стала.

Універсальну газову сталу можна визначити з рівняння стану (1), записанного для 1 моля ідеального газу за нормальних умов ($t_0 = 0^\circ \text{C} \rightarrow T = 273\text{K}$; $p_0 = 760 \text{ мм. рт. ст.} = 1 \text{ атм} = 10^5 \text{ Па}$; $\nu = 1 \text{ моль}$; $V_\mu = V_0 = 22,4 \text{ л} = 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 / \text{моль}$ – за законом Авогадро молі будь-яких газів при однаковій температурі та тиску займають один і той же об'єм):

$$p_0 V_0 = RT_0 \Rightarrow R = \frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \cdot 22,4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}}{273\text{K}} = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}. \quad (\text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}).$$

Рівняння стану ідеального газу (1) дозволяє визначити **густину** ідеального газу:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\mu p}{RT}.$$

Якщо в об'ємі V при температурі T знаходиться суміш різних газів, то, за **законом Дальтона**, тиск суміші газів дорівнює сумі парціальних тисків її окремих компонентів:

$$p = \sum_i p_i = \frac{RT}{V} \sum_i \frac{m_i}{\mu_i},$$

де $p_i = \frac{RT}{V} \frac{m_i}{\mu_i}$ – парціальний тиск i -тої компоненти суміші, маса якої m_i , а

молярна маса μ_i ; $\frac{m_i}{\mu_i} = \nu_i$ – кількість молей i -тої компоненти суміші газів.

Якщо стан газу змінюється, то змінюються і його параметри. Можливі такі процеси в газі, коли для **заданої маси** газу один з параметрів залишається сталим, а два інших змінюються – це **ізопроеци**. До таких процесів відносяться ізотерічний (стала температура $T = \text{const}$), ізобарний (сталий тиск $p = \text{const}$), ізохорний (сталий об'єм $V = \text{const}$).

Ці ізопроеци описуються газовими законами. Ізотерічний процес характеризується дослідним законом Бойля-Маріотта. Ізобарний процес характеризується дослідним законом Гей-Люссака. Ізохорний процес характеризується дослідним законом Шарля.

Усі три закона можна отримати з рівняння стану ідеального газу (1).

Ізотерічний процес. Закон Бойля-Маріотта

$T = \text{const}$; p, V – змінюються; $m = \text{const}$.

Нехай $m = \text{const}$, тоді з рівняння стану (1) слідує $pV = \text{const}$ або

для двох станів $p_1 V_1 = p_2 V_2$ або $\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1}$.

Ці три вирази є **законом Бойля-Маріотта**: для даної маси ідеального газу за сталої температури добуток тиску на об'єм залишається сталим. Або: для даної маси газу за сталої температури тиск змінюється обернено пропорційно об'єму:

$$p = \frac{\text{const}}{V}.$$

Графік ізотерічного процесу (рис. 1.5) рівняння ізотери: $pV = \text{const}$;

$$p = \frac{\text{const}}{V};$$

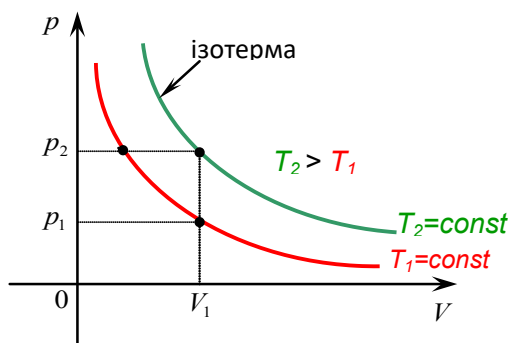


Рис. 1.5

$$p_2 > p_1; \quad p_2 = \frac{const_2}{V_1}; \quad p_1 = \frac{const_1}{V_1}.$$

Звідси $\Rightarrow const_2 > const_1$. Оскільки $const_2 = \frac{m}{\mu}RT_2$ і $const_1 = \frac{m}{\mu}RT_1$, то

$$T_2 > T_1. \quad V \rightarrow 0, \quad p \rightarrow \infty; \\ V \rightarrow \infty, \quad p \rightarrow 0.$$

Молекули при більшій температурі ($T_2 > T_1$) рухаються швидше і внаслідок цього тиск буде більшим $p_2 > p_1$ при тому самому об'ємі.

Ізобарний процес. Закон Гей-Люссака

$p = \text{const}; \quad V, T - \text{змінюються}; \quad m = \text{const}.$

Нехай $m = \text{const}$, тоді з рівняння стану (1) слідує

$$V = \frac{mR}{\mu p} T = \text{const} \cdot T$$

або для двох станів $\boxed{\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}}.$

Ці вирази є **законом Гей-Люссака**, котрий каже: для даної маси ідеального газу за сталого тиску об'єм змінюється прямо пропорційно температурі. Дослідний закон Гей-Люссака можна сформулювати і так: для даної маси ідеального газу за сталого тиску при нагріванні на 1°C об'єм

змінюється на $\frac{1}{273}$ частку того об'єму, який газ займав при 0°C :

$$\frac{V - V_0}{V_0 t^\circ} = \frac{1}{273} \text{град}^{-1} = \alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = V_0(1 + \alpha t^\circ)}.$$

Останній вираз отримується з рівняння стану ідеального газу (1). Для нормальних умов – н.у. – з врахуванням, що тиск $p_0 = \text{const}$, об'єм $V_\mu = V_0$ маси m ідеального газу при температурі 0°C , маємо два вирази рівняння стану для одного моля газу при різних температурах та об'ємах:

$$p_0 V_0 = RT_0 \quad (\text{за н.у.}) \quad \text{і} \quad p_0 V = RT.$$

Поділимо почленно перше рівняння на друге:

$$\frac{V_0}{V} = \frac{T_0}{T} \Rightarrow V = \frac{V_0 T}{T_0}.$$

Знайдемо різницю об'ємів $V - V_0$ та запишемо термодинамічну температуру $T = t^\circ \text{C} + 273\text{K}$. Тоді:

$$V - V_0 = \frac{V_0 T}{T_0} - V_0 = V_0 \left(\frac{t^0 + 273}{273} - 1 \right) = V_0 \frac{t^0}{273} \Rightarrow \frac{V - V_0}{V_0 t^0} = \frac{1}{273} \text{град}^{-1}.$$

Введемо поняття **термічного коефіцієнта** $\alpha = \frac{1}{273} \text{град}^{-1}$. Тоді з останнього рівняння $\frac{V - V_0}{V_0 t^0} = \frac{1}{273}$ знаходимо об'єм V : $V = V_0(1 + \alpha t^0)$.

Отже, для ізобарного процесу об'єм є лінійною функцією температури (рис. 1.6). Визначимо температуру, за якої об'єм дорівнює нулю:

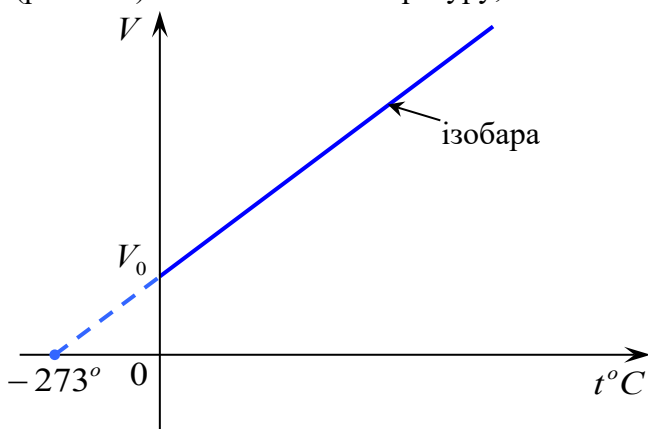


Рис. 1.6

$$0 = V_0(1 + \alpha t^0);$$

$$0 = 1 + \alpha t^0;$$

$$t^0 = -\frac{1}{\alpha} = -273^\circ \text{C}.$$

Абсолютним нулем вважають температуру -273°C , за якої речовина не містить жодної теплової енергії, а отже, це найнижча з можливих температур.

У тому факті, що при -273°C $V=0$ для даної маси газу, в якому нехтується

розмірами молекул, виявляється взаємозв'язок між двома визначеннями ідеального газу. Об'єм реального газу ніколи не може стати рівним нулю, оскільки молекули мають розміри.

Ще раз акцентуємо увагу на тому, що в багатьох задачах молекулярної фізики використовується термодинамічна температура за абсолютною температурною шкалою Кельвіна, в котрій за 0 прийнята така температура, за якої об'єм ідеального газу дорівнює нулю. Ціна поділки на шкалах Кельвіна та Цельсія однакова (рис. 1.7):

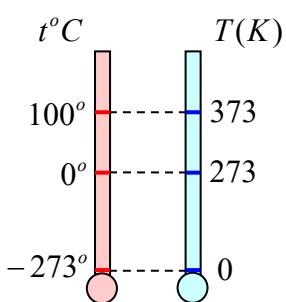


Рис. 1.7

$$T = t^0 + 273;$$

$$[\Delta T = T_2 - T_1 = (t_2^0 + 273^0) - (t_1^0 + 273^0) = t_2^0 - t_1^0 = \Delta t^0].$$

Підставимо вираз для абсолютної температури $T = t^0 + 273$ в формулу закону Гей-Люссака $V = V_0(1 + \alpha t^0)$:

$$V = V_0 \left(1 + \frac{t^0}{273} \right) = V_0 \frac{273 + t^0}{273} = \frac{V_0 T}{273} = \alpha V_0 T.$$

Отже, закон Гей-Люссака можна виразити через абсолютну температуру: $V = \alpha V_0 T$.

Графік ізобарного процесу – рівняння ізобари $\frac{V}{T} = \text{const}$ – закон Гей-Люссака для абсолютних температур: з першого виразу закона Гей-Люссака

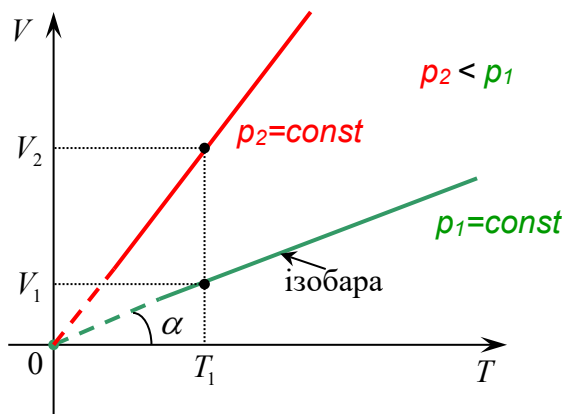


Рис. 1.8

$$\text{маємо: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{V}{T} = \frac{mR}{\mu p}.$$

Оскільки тиск p знаходиться в знаменнику, при його збільшенні тангенс кута нахилу прямої $V(T)$ буде зменшуватись. Тобто, $p_2 < p_1$. Такий же результат можна отримати з міркувань: $V = \text{const} \cdot T$.

З рис. 1.8 для двох станів ід. газу для температури T_1 маємо два об'єми: $V_2 > V_1$.

Тоді закон Гей-Люссака для цих двох станів: $V_1 = \text{const}_1 \cdot T_1$ та $V_2 = \text{const}_2 \cdot T_1$.

Оскільки $V_2 > V_1$, то $\text{const}_2 > \text{const}_1$. Враховуючи вираз для константи: $\frac{mR}{\mu p}$,

маємо: $\frac{mR}{\mu p_2} > \frac{mR}{\mu p_1} \Rightarrow p_2 < p_1$. Біля абсолютного нуля графік проводиться пунктиром, тому що в цій області газ не можна вважати ідеальним.

Ізохорний процес. Закон Шарля

$V = \text{const}$; p, T – змінюються; $m = \text{const}$.

Нехай $m = \text{const}$, тоді з рівняння стану (1) слідує

$$p = \frac{mR}{\mu V} T = \text{const} \cdot T$$

або для двох станів

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Ці вирази є **законом Шарля**: для даної маси ідеального газу при сталому об'ємі тиск змінюється прямо пропорційно температурі. Дослідний закон Шарля можна сформулювати і так: для даної маси ідеального газу при сталому об'ємі при нагріванні на 1° тиск змінюється

на $\frac{1}{273}$ частку того тиску, який газ мав при 0°C :

$$\frac{p - p_0}{p_0 t^\circ} = \frac{1}{273} \text{град}^{-1} = \alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{p = p_0(1 + \alpha t^\circ)}.$$

(Останній вираз отримується з рівняння стану ідеального газу (1) $pV = \frac{m}{\mu} RT$).

Для нормальних умов – н.у. – з врахуванням, що об'єм $V_0 = \text{const}$, тиск p_0 маси m ідеального газу при температурі 0°C (273K), маємо два вирази рівняння стану для одного моля газу при різних температурах та об'ємах:

$$p_0 V_0 = RT_0 \text{ (н.у.)} \quad \text{і} \quad p V_0 = RT.$$

Поділимо почленно перше рівняння на друге: $\frac{p_0}{p} = \frac{T_0}{T} \Rightarrow p = \frac{p_0 T}{T_0}$.

Знайдемо різницю тисків $p - p_0$ та запишемо термодинамічну температуру $T = t^\circ \text{C} + 273 \text{K}$. Тоді:

$$p - p_0 = \frac{p_0 T}{T_0} - p_0 = p_0 \left(\frac{t^\circ + 273}{273} - 1 \right) = p_0 \frac{t^\circ}{273} \Rightarrow \frac{p - p_0}{p_0 t^\circ} = \frac{1}{273} \text{град}^{-1}.$$

Термічний коефіцієнт $\alpha = \frac{1}{273} \text{град}^{-1}$. Тоді з останнього рівняння

$$\frac{p - p_0}{p_0 t^\circ} = \frac{1}{273} = \alpha \quad \text{знаходимо тиск } p: \quad p = p_0(1 + \alpha t^\circ).$$

Для отримання закону Шарля через абсолютну температуру підставимо вираз для абсолютної температури $T = t^\circ + 273$ в формулу закону Шарля $p = p_0(1 + \alpha t^\circ)$:

$$p = p_0 \left(1 + \frac{t^\circ}{273} \right) = p_0 \frac{273 + t^\circ}{273} = \frac{p_0 T}{273} = \alpha p_0 T.$$

Отже, закон Шарля можна записати через абсолютну температуру: $\boxed{p = \alpha \cdot p_0 T}$.

Для ізохорного процесу тиск є лінійною функцією температури (рис. 1.9).

Розглянемо графік ізохорного процесу в координатах p, T (рис. 1.10). З першого виразу закону Шарля

$$p = \frac{mR}{\mu V} T = \text{const} \cdot T \quad \text{маємо:} \quad \text{tg} \alpha = \frac{p}{T} = \frac{mR}{\mu V}.$$

Оскільки об'єм V знаходиться в знаменнику, при його збільшенні тангенс кута нахилу прямої $p(T)$ буде зменшуватись. Тобто, $V_2 < V_1$.

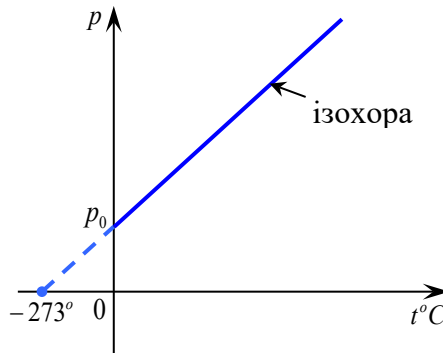


Рис. 1.9

Графік ізохорного процесу – рівняння ізохори $\frac{p}{T} = \text{const}$ – закон Шарля для абсолютних температур: рис. 1.10.

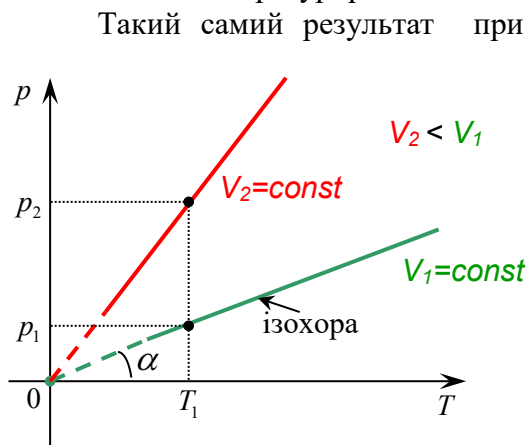


Рис. 1.10

Такий самий результат при $V_2 < V_1$ можна отримати з наступних міркувань: $p = \text{const} \cdot T$. З рис. 1.10 для двох станів ід. газу для температури T_1 маємо два тиски $p_2 > p_1$. Тоді закон Шарля для цих двох станів: $p_1 = \text{const}_1 \cdot T_1$ та $p_2 = \text{const}_2 \cdot T_1$. Оскільки $p_2 > p_1$, то $\text{const}_2 > \text{const}_1$. Враховуючи вираз для константи: $\text{const} = mR/\mu V$, отримаємо наступний вираз: $\frac{mR}{\mu V_2} > \frac{mR}{\mu V_1} \Rightarrow V_2 < V_1$.

Біля абсолютного нуля графік проводиться пунктиром, тому що в цій області гази не можна вважати ідеальними. Зауважимо (рис. 1.8 та рис. 1.10), що при $T = 0$, об'єм $V = 0$ та тиск $p = 0$ – це можливо тільки для ідеального газу, в якому знехтувано розмірами молекул (тому $V = 0$), і силами взаємодії між ними (тому $p = \frac{F}{S} = 0$). На відміну від моделі ідеального газу, молекули

реального газу звісно мають об'єм та присутня ненульова взаємодія між ними, тому при $T = 0\text{K}$ ні об'єм, ні тиск газу не будуть рівні нулю.

Експериментально досягнуті температури, що відрізняються від абсолютного нуля на декілька тисячних долей градуса Кельвіна. Вважається, що абсолютний нуль являє собою деяку умовну температуру, що відповідає стану систем з найменш можливою внутрішньою енергією, за якої молекулярний рух відбувається у формі так званих нульових коливань, що пояснюються законами квантової механіки.

1.4. Об'єднаний газовий закон. Рівняння стану ідеального газу

Розглянемо такий процес в ідеальному газі, при якому всі три параметри змінюються одночасно при сталій масі газу, такий процес описується об'єднаним газовим законом, виведемо його. Об'єднувати можна два будь-які ізопроцеси з трьох процесів, на рис. 1.11 наведено процес переходу системи зі стану 1 в стан 2 внаслідок довільного процесу.

Нехай p_1, V_1, T_1 – параметри початкового стану, p_2, V_2, T_2 – параметри кінцевого стану. Необхідно встановити зв'язок між параметрами цих станів. З

рис. 1.11 видно, що зі стану 1 в стан 2 можна потрапити через проміжковий стан 3: тобто $1 \rightarrow 3$ ізотермічним і $3 \rightarrow 2$ ізобарним процесами.

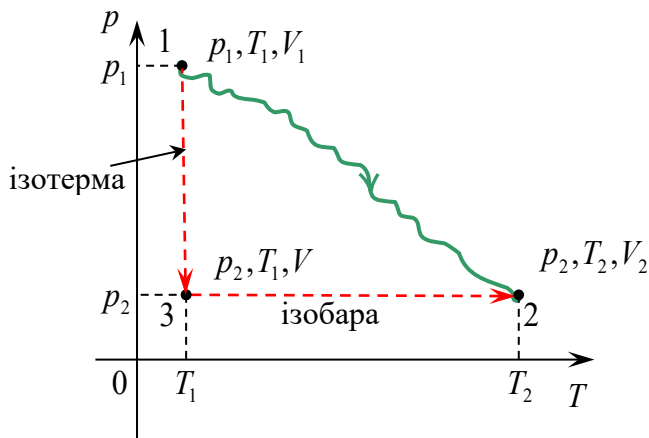


Рис.1.11

Для ізотермічного переходу $1 \rightarrow 3$ з закону Бойля-Маріотта ($T_1 = \text{const}$) маємо:

$$p_1 V_1 = p_2 V.$$

Звідси $V = \frac{p_1 V_1}{p_2}$ – об'єм

системи в проміжковому стані. Для ізобарного переходу $3 \rightarrow 2$ із закону Гей-Люссака ($p_2 = \text{const}$)

$$\text{маємо: } \frac{V}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Підставимо в цю

формулу отриманий вираз для проміжкового об'єму V :

$$\frac{p_1 V_1}{p_2 V_2} = \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow \boxed{\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}}.$$

Оскільки параметри початкового та кінцевого станів були вибрані довільно, можна зробити висновок, що для будь-яких процесів:

$$\boxed{\frac{pV}{T} = \text{const}} \text{ – Об'єднаний газовий закон – рівняння Клапейрона.}$$

Рівняння стану ідеального газу

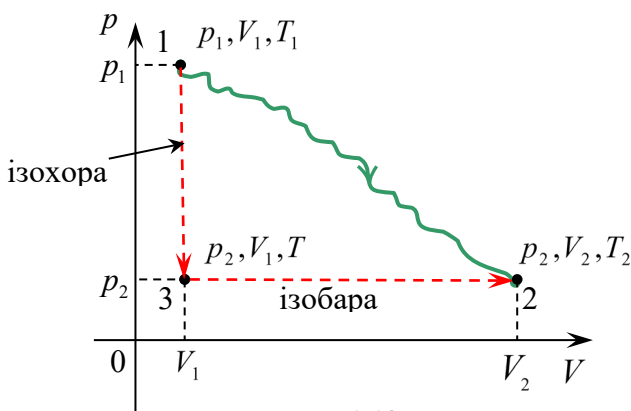


Рис. 1.12

Цей закон можна отримати при об'єднанні довільної пари законів: Бойля-Маріотта та Гей-Люссака; Бойля-Маріотта та Шарля; Гей-Люссака та Шарля.

Розглянемо як приклад, випадки об'єднання законів 1) Шарля та Гей-Люссака в координатах (p, V) та 2) Гей-Люссака і Бойля-Маріотта у координатах (p, V) .

Об'єднання законів Шарля та Гей-Люссака. З рис. 1.12 видно, що зі стану 1 (p_1, V_1, T_1) в стан 2

(p_2, V_2, T_2) можна потрапити через стан 3, тобто $1 \rightarrow 3$ ізохорним та $3 \rightarrow 2$ ізобарним процесами.

Для переходу $1 \rightarrow 3$ використаємо закон Шарля ($V_1 = \text{const}$):

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T} \Rightarrow T = \frac{p_2 T_1}{p_1}.$$

Для переходу $3 \rightarrow 2$ використаємо закон Гей-Люссака ($p_2 = \text{const}$):

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T}{T_2}; \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{p_2 T_1}{p_1 T_2} \Rightarrow \frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} - \text{об'єднаний газовий закон.}$$

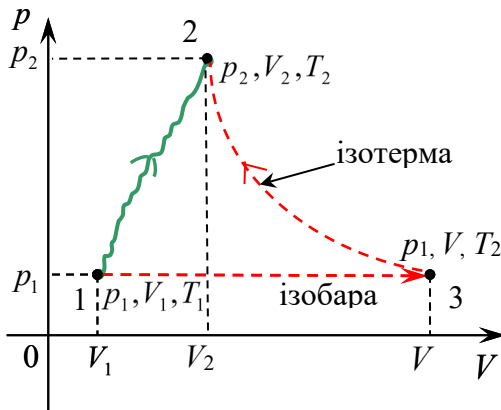


Рис. 1.13

2) Об'єднання законів Гей-Люссака і Бойля-Маріотта. З рис. 1.13 видно, що зі стану 1 з p_1, V_1, T_1 у стан 2 з p_2, V_2, T_2 можна потрапити через стан 3, тобто $1 \rightarrow 3$ ізобарним та $3 \rightarrow 2$ ізотермічним процесами. Для переходу $1 \rightarrow 3$ використаємо закон Гей-Люссака ($p_1 = \text{const}$):

$$\frac{V_1}{V} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Для $3 \rightarrow 2$ використаємо закон Бойля-Маріотта ($T_2 = \text{const}$):

$$p_1 V = p_2 V_2 \Rightarrow V = \frac{p_2 V_2}{p_1}.$$

Підставимо вираз для V в закон Гей-Люссака:

$$\frac{p_1 V_1}{p_2 V_2} = \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow \frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} - \text{об'єднаний газовий закон.}$$

Виведення рівняння стану ідеального газу

Клапейрон застосував свій закон $\frac{pV}{T} = \text{const}$ для одного моля газу та визначив значення константи в об'єднаному газовому законі, яка має назву – універсальна газова стала R .

Нехай, $V_\mu = V'$ – об'єм одного моля (штрих означає, що взято один моль). Таке позначення тут доцільне, щоб при нормальних умовах не ставити подвійний нижній індекс. $\frac{pV'}{T}$ – для одного моля газу в довільному стані;

$\frac{p_0 V'_0}{T_0}$ – для одного моля газу при нормальних умовах (н.у.). Тоді рівняння

Клапейрона (об'єднаний газовий закон):

$$\frac{pV'}{T} = \frac{p_0 V'_0}{T_0}.$$

В подальшому Клапейрон скористався законом Авогадро, згідно з яким 1 моль будь-якого газу за нормальних умов займає однаковий об'єм у 22,4 л.

$$V'_0 = 22.4 \text{ л/моль або } 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль за н.у. (} p_0 = 10^5 \text{ Па та } T_0 = 273 \text{ К)}.$$

Введемо позначення для правої частини $\frac{p_0 V'_0}{T_0} = R$ та обчислюємо (за н.у.):

$$\frac{p_0 V'_0}{T_0} = \frac{10^5 \text{ Н} \cdot 22.4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3}{\text{м}^2 \cdot \text{моль} \cdot 273 \cdot \text{К}} = 8.31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \equiv R - \text{універсальна газова стала.}$$

Отже, рівняння Клапейрона після підстановки R набуває вигляду:

$$\frac{pV'}{T} = R.$$

З цього рівняння слідує рівняння Клапейрона для одного моля газу:

$$pV' = RT.$$

Узагальнення цього рівняння для будь-якої маси газу m :

$$\underbrace{\frac{pV}{T}}_{\text{для довільного стану}} = \underbrace{\frac{p_0 V_0}{T_0}}_{\text{для нормальних умов}}.$$

Перетворимо праву частину та визначимо V_0 :

$$V_0 = \frac{m}{\mu} V'_0,$$

де $\frac{m}{\mu} = \nu$ – кількість молей, V'_0 – об'єм одного моля при нормальних умовах.

Тоді права частина набуває вигляду:

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_0 \frac{m}{\mu} V'_0}{T_0} = \frac{m}{\mu} \underbrace{\frac{p_0 V'_0}{T_0}}_R = \frac{m}{\mu} R.$$

Після підстановки правої частини:

$$\underbrace{\frac{pV}{T}}_{\text{для довільного стану}} = \frac{m}{\mu} R.$$

Отримаємо рівняння стану ідеального газу: $\boxed{pV = \frac{m}{\mu} RT}$ або $\boxed{pV = \nu RT}$.

1.5. Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу

Розглянемо стан ідеального газу з точки зору МКТ (молекулярно-кінетичної теорії). Тиск газу на стінки посудини виникає внаслідок ударів молекул об стінки посудини, оскільки при ударі молекули передають стінці подвійний імпульс, а з другого закону Ньютона ми знаємо, що швидкість зміни імпульсу ΔP за одиницю часу t рівна діючій силі F , а відношення сили до площі стінок і є тиск $p = F/S$.

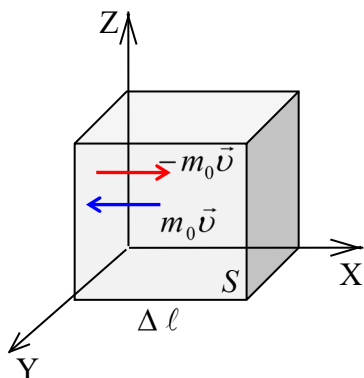


Рис. 1.14

Розглянемо детальніше утворення тиску, для цього уявно виділимо у об'ємі газу куб з довжиною ребра $\Delta \ell$, яка рівна середній довжині вільного пробігу молекули (довжина вільного пробігу – це шлях від одного зіткнення до іншого). Оскільки молекули газу рухаються хаотично, їх число значне $\sim 10^{25}$ у м^3 , вважаємо, що у середньому по кожному з трьох напрямків X, Y, Z рухається однакова кількість молекул. Нехай N – кількість молекул в об'ємі $\Delta \ell^3$:

$$N = n\Delta \ell^3,$$

де n – концентрація молекул (кількість молекул в одиниці об'єму). Тоді в **одному напрямку** (OX) рухається $N' = 1/6 N$ молекул; в напрямку, протилежному OX рухається така ж кількість молекул $1/6 N$.

А через площадку, **перпендикулярну** до осі OX рухається $1/3 N$ загальної кількості молекул в усьому об'ємі – половина молекул рухається вздовж осі OX, половина проти осі OX. Кожна молекула, вдаряючись об стінку, передає їй імпульс, що дорівнює зміні імпульсу молекули

$$\Delta \vec{P} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = m_0 \vec{v} - (-m_0 \vec{v}) = 2m_0 \vec{v},$$

де m_0 – маса однієї молекули, імпульс ми позначили великою літерою P , оскільки тиск будемо позначати p .

За другим законом Ньютона: $\vec{F}_1 \Delta t = \Delta \vec{P} = 2m_0 \vec{v}$, $F_1 \Delta t = 2m_0 v$, де $\vec{F}_1$ – сила, з якою одна молекула діє на стінку посудини. $\Delta t = \frac{2\Delta \ell}{v}$ – час руху молекули від однієї стінки до другої і назад (тобто, проміжок часу між двома зіткненнями об стінку).

Тоді сила, з якою молекула діє на стінку:

$$F_1 = \frac{2m_0 v}{\Delta t} = \frac{2m_0 v \cdot v}{2\Delta \ell} = \frac{2m_0 v^2}{2\Delta \ell}.$$

В цій формулі ми не скорочуємо цифру 2. Це потрібно для подальшого виведення основного рівняння МКТ (молекулярно-кінетичної теорії) газів. Сила, з якою N' молекул діють на стінку в одному напрямку:

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_{N'} = \frac{2}{\Delta \ell} \cdot \frac{m_0}{2} (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_{N'}^2).$$

Для того, щоб отримати вираз для тиску, розділимо обидві частини цього виразу на площу стінки $S = \Delta \ell^2$. Також помножимо та розділимо праву частину на N' :

$$\underbrace{\frac{F}{\Delta \ell^2}}_{p - \text{тиск}} = \frac{2}{\Delta \ell^3} \cdot \frac{m_0}{2} \underbrace{\frac{(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_{N'}^2)}{N'}}_{\langle v^2 \rangle} \cdot N',$$

де $p = \frac{F}{\Delta \ell^2}$ – тиск, $\langle v^2 \rangle = \overline{v^2} = \frac{(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_{N'}^2)}{N'}$ – середнє значення квадрата швидкості молекули, $N' = 1/3 N$ – кількість молекул, що рухаються в одному напрямку.

Перепишемо формулу для тиску з врахуванням цих позначень:

$$p = \frac{2m_0 \overline{v^2} \frac{1}{3} N}{\Delta \ell^3 2} = \frac{2}{3} n \overline{E_K^{(1)}},$$

де $\overline{E_K^{(1)}} = \frac{m_0 \overline{v^2}}{2}$ – середня кінетична енергія поступального руху однієї молекули; $n = N/\Delta \ell^3$ – концентрація молекул в одиниці об'єму.

Отже, маємо **основне рівняння МКТ** (молекулярно-кінетичної теорії) ідеального газу:

$$\boxed{p = \frac{2}{3} n \overline{E_K^{(1)}}}. \quad (2)$$

Отримаємо іншу форму запису основного рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу, для цього домножимо ліву і праву частини (2) на об'єм V :

$$p = \frac{2}{3} n \overline{E_K^{(1)}} \Rightarrow pV = \frac{2}{3} n V \overline{E_K^{(1)}} = \frac{2}{3} \frac{N}{V} V \overline{E_K^{(1)}} = \frac{2}{3} E_K,$$

де $E_K = \overline{E_K^{(1)}} N$ – кінетична енергія поступального руху **всіх** молекул ідеального газу, $n = N/V$ – концентрація молекул газу. Скоротимо об'єм V в правій частині. Отже, інша форма запису основного рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу: $pV = \frac{2}{3} E_K$.

Розглянемо **наслідки** з рівняння стану ідеального газу (1) $pV = \frac{m}{\mu} RT$ та основного рівняння молекулярно-кінетичної теорії (2) $p = \frac{2}{3} n \overline{E_K^{(1)}}$.

1) Виразимо $\overline{E_K^{(1)}} = \frac{m_0 \overline{v^2}}{2}$ середню кінетичну енергію поступального руху однієї молекули через температуру T .

$$\left\{ \begin{array}{l} p = \frac{2}{3} n \overline{E_K^{(1)}} \\ p = \frac{mR}{\mu V} T \end{array} \right. \Rightarrow \overline{E_K^{(1)}} = \frac{3mRT}{2\mu Vn} = \left[\begin{array}{l} \text{Врахуємо, що} \\ \frac{m}{Vn} = m_0 = \frac{\mu}{N_A}; \\ \frac{R}{N_A} = k - \text{ стала Больцмана} \end{array} \right] = \frac{3RT\mu}{2\mu N_A} = \frac{3}{2} kT.$$

При виведенні формули було враховано, що в газі масою m , який займає об'єм V знаходиться Vn молекул. Отже, маса однієї молекули $m_0 = m/V \cdot n$. Масу молекули можна виразити через молярну масу μ та сталу Авогадро N_A – число молекул в одному молі: $m_0 = \mu/N_A$. Після підстановки цього виразу в формулу для $\overline{E_K^{(1)}}$, скорочення μ та врахування, що $R/N_A = k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – стала Больцмана, отримаємо:

$$\overline{E_K^{(1)}} = \frac{3}{2} kT -$$

це залежність середньої кінетичної енергії поступального руху однієї молекули від температури T .

Таким чином, температура є мірою кінетичної енергії молекул. Звідси маємо визначення температури.

Температура – це фізична величина, яка характеризує ступінь нагрітості тіла, прямо пропорційна ($\sim$) середній кінетичній енергії теплового руху молекул.

Температура є однаковою для всіх складових системи, що знаходяться у тепловій рівновазі одна з однією, це використовується при її вимірюванні. Прилади для вимірювання температури – *термометри*. В основу дії термометра покладено однозначну залежність деякої фізичної величини від температури. Наприклад, в термісторах – залежність питомого опору напівпровідника від температури; у побутових термометрах – залежність об'єму рідини (ртуті, спирту) від температури, термопарах – залежність ЕРС спаю двох різних металів від температури. Існують різні шкали температур: Цельсія, Фаренгейта, Кельвіна, Реомюра та інші, вони відрізняються вибором реперних температур та різним розбиттям температурного інтервалу на градуси. Для прикладу, у шкалі Цельсія реперними точками вибрані

температури водо-льодяної суміші (0° С) та кипіння води (100° С) за нормального атмосферного тиску (760 мм.рт.ст.), отриманий температурний

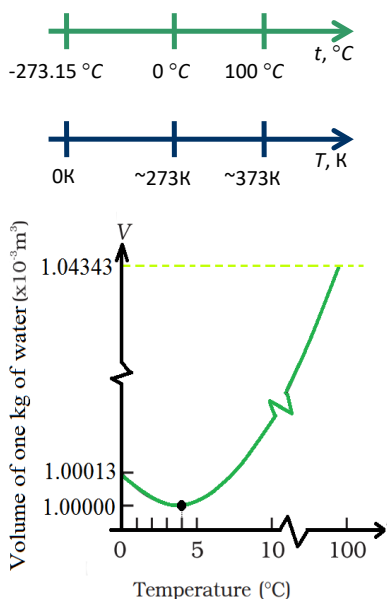


Рис. 1.15

проміжок розділено на сто рівних частин – градусів °С. У шкалі Кельвіна (або абсолютній температурній шкалі), за нуль прийнято температуру абсолютного нуля, найнижчої термодинамічної температури, яка рівна – 273,15° С, градус Кельвіна (К) дорівнює градусу Цельсія (°С), тому для переходу між шкалами °С → К використовується формула: $T = t + 273,15^\circ \text{C}$, або спрощена: $T = t + 273^\circ \text{C}$.

Для рідинного термометра підходить не кожна рідина, наприклад, використовувати воду не варто, оскільки у околі +4° С наявні зміни структури – утворення кластерів твердої фази, тому у цій ділянці *нелінійна* залежність об'єму від температури (рис. 1.15): мінімум $V(t)$ припадає якраз на максимум густини води при +4° С. Побутові спиртові термометри також мають деяку *похибку* через *нерівномірність* шкали, викликану нелінійністю термічного

розширення етилового спирту. Найкраща точність вимірювань серед рідинних термометрів та значний температурний діапазон (-32 ÷ 600° С) – у ртутних, проте недоліком є токсичність ртуті та складність використання у електричних схемах (наприклад, автоматичного контролю температури), на сьогодні вони повністю витіснені значно точнішими термопарами та термісторами й іншими типами сенсорів.

2) Другий наслідок. Знайдемо середню квадратичну швидкість молекул $v_{\text{кв}} = \sqrt{\overline{v^2}}$. Швидкість молекул газу залежить від температури

$$\overline{E_K^{(1)}} = \frac{m_0 \overline{v^2}}{2} \quad \text{та} \quad \overline{E_K^{(1)}} = \frac{3}{2} kT. \quad \text{Прирівняємо ці два вирази:}$$

$$\frac{m_0 \overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2} kT \Rightarrow \overline{v^2} = \frac{3kT}{m_0}. \quad \text{Врахуємо, що маса однієї молекули } m_0 = \frac{\mu}{N_A},$$

стала Больцмана $k = R/N_A$. Після підстановки в формулу для $\overline{v^2}$ та скорочення числа Авогадро маємо:

$$\overline{v^2} = \frac{3kT}{m_0} = \frac{3RT N_A}{N_A \mu} = \frac{3RT}{\mu}. \quad \text{Звідси } v_{\text{кв}} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}.$$

Отже: $\boxed{v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}}$ – середня квадратична швидкість молекул.

3 $\overline{v^2} = \frac{3kT}{m_0}$ середня квадратична швидкість визначається як: $v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}$.

3) Третій наслідок. Запишемо ще один вираз для рівняння стану ідеального газу через концентрацію (у деяких джерелах цей вираз називають однією з форм основного рівняння МКТ газів). У будь-якому випадку цей наслідок вказує на зв'язок рівняння стану ідеального газу та основного рівняння МКТ молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу.

Підставимо $\overline{E_K^{(1)}} = \frac{3}{2}kT$ – середню кінетичну енергію поступального руху молекули у формулу для основного рівняння МКТ (молекулярно-кінетичної теорії) ідеального газу $p = \frac{2}{3}n\overline{E_K^{(1)}}$: $p = \frac{2}{3}n\frac{3}{2}kT = nkT$.

$p = nkT$ – рівняння стану ідеального газу через концентрацію.

[Число Лошмідта: з рівняння стану ідеального газу слідує $n = \frac{p}{kT}$. При

нормальних умовах (н.у. $p_0 = 10^5 \text{ Па}$, $T_0 = 273 \text{ К}$) $n_0 = \frac{p_0}{kT_0} = 2,69 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ –

число Лошмідта, тобто число молекул в одиниці об'єма при нормальних умовах для будь-якого газу.]

4) Четвертий наслідок. Суміш газів, закон Дальтона. **Парціальним тиском** газу, що знаходиться в суміші, називається такий тиск, який створював би газ, якби він сам займав весь об'єм.

Закон Дальтона: тиск суміші газів дорівнює сумі парціальних тисків компонентів суміші:

$$p_{\text{сум}} = \sum_i p_i$$

Доведемо це. Запишемо рівняння стану ідеального газу через концентрацію для кожного парціального тиску окремих компонентів суміші та додамо ці тиски. Нехай $p_1 = n_1 kT$ – парціальний тиск одного газу у суміші; $p_2 = n_2 kT$ – іншого газу і т.ін. Додамо ці рівняння. Тобто:

$$+ \begin{cases} p_1 = n_1 kT \\ p_2 = n_2 kT \\ \vdots \\ p_N = n_N kT \end{cases} \Rightarrow \sum_{i=1}^N p_i = kT \underbrace{\sum_{i=1}^N n_i}_{n_{\text{сум}}} = n_{\text{сум}} kT.$$

Для суміші в цілому маємо: $p_{\text{сум}} = n_{\text{сум}} kT$. Праві частини двох останніх

рівнянь однакові, отже, ліві теж однакові: $p_{\text{сум}} = \sum_i p_i$.

1.6. Барометрична формула. Розподіл Больцмана

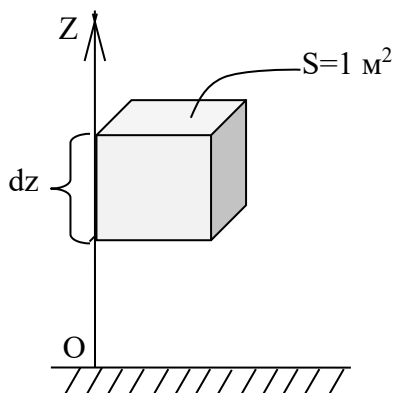


Рис. 1.16

Розглянемо ідеальний газ в полі тяжіння Землі (рис. 1.16) і виведемо барометричну формулу.

Оскільки на молекули газу діють сили тяжіння, то тиск не буде всюди постійним, а буде змінюватися з висотою. На висоті z над поверхнею Землі атмосферний тиск зумовлений вагою повітряного стовпа, що знаходиться на висотах, більших від z . Розглянемо зміну тиску атмосфери в залежності від висоти. Візьмемо дві площини $S = 1 \text{ м}^2$, перпендикулярні до осі OZ , на відстані dz одна від одної. Різниця тисків dp між цими площинами дорівнює сумарній силі тяжіння,

що діє на молекули в об'ємі $dV = dz \cdot 1 \text{ м}^2 = dz$. (Пам'ятаймо, $p = \frac{F}{S}$, але

$S = 1 \text{ м}^2$). Тобто, різниця тисків: $dp = F_z \cdot n \, dz$, де n – концентрація молекул, $n \, dz$ – кількість молекул в об'ємі dV , F_z – проекція сили тяжіння, що діє на молекули, на вісь OZ .

Виразимо силу F_z , використовуючи вираз для роботи сили та теорему про зміну потенціальної енергії. В полі сили тяжіння робота сили тяжіння дорівнює зменшенню потенціальної енергії, або зміні потенціальної енергії з протилежним знаком: $dA = -d\Pi$. З другої сторони робота сили $dA = F_z \cdot dz$.

Прирівняємо ці два вирази та отримаємо для сили: $F_z = -\frac{d\Pi}{dz}$. Підставимо в формулу для різниці тисків:

$$dp = -n \frac{d\Pi}{dz} dz = -n d\Pi. \quad (a)$$

Виразимо зміну тиску з основного рівняння МКТ (молекулярно-кінетичної теорії) ідеального газу

$$p = nkT: \quad \Rightarrow \quad dp = kTdn, \quad (б)$$

вважаючи $T = \text{const}$.

Прирівняємо (а) та (б): $kTdn = -n d\Pi$ та розділимо змінні: $\frac{dn}{n} = -\frac{d\Pi}{kT}$.

Проінтегруємо, вважаючи, що концентрація змінюється від n_0 біля поверхні Землі до n (зменшується), висота Z міняється від 0 до h , а потенціальна енергія – від 0 до m_0gh – потенціальна енергія тіла, піднятого на невелику висоту h над поверхнею Землі:

$$\int_{n_0}^n \frac{dn}{n} = -\frac{1}{kT} \int_0^{m_0gh} d\Pi \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{n}{n_0} = -\frac{m_0gh}{kT}.$$

Потенціюємо цей вираз, – тобто, підносимо e – основу натурального логарифма, в степінь з лівої та правої частини цього отриманого виразу, тоді маємо:

$$n = n_0 e^{-\frac{m_0gh}{kT}} = n_0 \exp\left(-\frac{m_0gh}{kT}\right) = n_0 \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT}\right), \quad (3)$$

– формула (розподіл) Больцмана

Оскільки тиск газу зв'язаний з концентрацією основним рівнянням МКТ $p = nkT$, то тиск прямо пропорційний концентрації $p \sim n$. Тому для тиску можна записати:

$$p = p_0 e^{-\frac{m_0gh}{kT}} = p_0 \exp\left(-\frac{m_0gh}{kT}\right) = p_0 \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT}\right), \quad (4)$$

– барометрична формула

Ця формула (4) дозволяє визначити висоту h за допомогою барометра, тому її називають барометричною: $h = \frac{kT}{m_0gh} \ln \frac{p_0}{p}$ (дивіться формулу, яку отримали при інтегруванні). Барометр, спеціально проградуйований для відліку висоти над рівнем моря, називають альтиметром. Він використовується в авіації, при сходженні в гори і т. п.

Потрібно чітко розуміти межі застосування барометричної формули. По-перше: $\Pi = mgh$ – вираз для потенціальної енергії, справедливий лише для малих висот у порівнянні з радіусом Землі. По-друге, ми вважали, що $T = \text{const}$. Відомо, що температура атмосфери різна на різних висотах. Тому формули (3), (4) можна застосовувати тільки для малих висот і в достатньо малих областях атмосфери, де зміною температури можна знехтувати.

Позначимо потенціальну енергію $\Pi = E_\Pi$. Тоді розподіл Больцмана за потенціальними енергіями:

$$n = n_0 e^{-\frac{E_\Pi}{kT}} = n_0 \exp\left(-\frac{E_\Pi}{kT}\right).$$

Больцман довів, що розподіл $n = n_0 e^{-\frac{E_\Pi}{kT}} = n_0 \exp\left(-\frac{E_\Pi}{kT}\right)$ справедливий не лише для випадку поля сил земного тяжіння, а й для іншого потенціального поля сил для сукупності однакових частинок, що знаходяться в стані хаотичного теплового руху, тому формула (3) носить назву **розподілу Больцмана**.

1.7. Розподіл Максвелла – розподіл молекул ідеального газу за швидкостями

Середня швидкість, яка є характеристикою всієї сукупності молекул, не має змісту стосовно однієї молекули або невеликої кількості молекул. Внаслідок хаотичного руху та обміну кінетичними енергіями при зіткненнях завжди існує скінченна ймовірність знайти в газі молекулу з будь-якою швидкістю – від 0 до ∞ .

Максвелл в 1860 році теоретично розв'язав задачу про розподіл молекул ідеального газу за швидкостями поступального руху.

Перш ніж перейти до наслідків теоретичних висновків Максвелла, повернемося до формули Больцмана (3): $n = n_0 e^{-\frac{m_0 g h}{kT}} = n_0 \exp(-\frac{m_0 g h}{kT})$. Вона дає нам розподіл за потенціальними енергіями $E_{II} = mgh$. Тут n – концентрація молекул ідеального газу. Тоді формула $dN = d n dV = n_0 e^{-\frac{m_0 g h}{kT}} dx dy dz$ дає кількість молекул в елементі об'єму $dx dy dz$, що мають енергію $E_{II} = m_0 g h$.

Максвелл аналогічно записав розподіл молекул за швидкостями. А саме: він визначив, яка кількість молекул dN від загального числа N молекул ідеального газу в посудині має при даній температурі швидкості, що лежать в інтервалі від v до $v + dv$, тобто від

$$v_x \text{ до } v_x + dv_x;$$

$$v_y \text{ до } v_y + dv_y;$$

$$v_z \text{ до } v_z + dv_z.$$

При цьому вважалось, що всі молекули однакові і відсутні зовнішні сили дії на газ.

Закон розподілу молекул за швидкостями при таких умовах має вигляд:

$$d n = \text{const} \cdot n \cdot e^{-\frac{m v^2}{2kT}} dv_x dv_y dv_z.$$

Статистична фізика дає значення $\text{const} = \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}}$.

Також перейдемо від $dv_x dv_y dv_z$ до елемента об'єму тонкого сферичного шару в просторі швидкостей v_x, v_y, v_z . А саме: $4\pi v^2 dv$. [Подібно тому, як елемент $dx dy dz$ можна замінити елементом об'єму кульового шару в тривимірному просторі: $4\pi r^2 dr$].

Отже, закон розподілу молекул за швидкостями:

$$dn = 4\pi \cdot n \cdot \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} v^2 dv - \text{розподіл Максвелла};$$

де m_0 – маса молекули, k – стала Больцмана, T – абсолютна температура, dn – число молекул газу, швидкості яких лежать в інтервалі від v до $v+dv$.

Далі Максвелл вводить **функцію розподілу молекул за швидкостями**:

$$f(v) = \frac{dn}{n \cdot dv} = 4\pi \cdot \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} v^2 - \text{явний вигляд функції розподілу}$$

молекул за швидкостями – це ймовірність знайти молекулу зі швидкістю v в одиниці об'єму. $\frac{dn}{n \cdot dv}$ – відносне число молекул газу при заданій температурі, швидкість яких лежить в діапазоні v до $v+dv$ – функція розподілу за швидкостями.

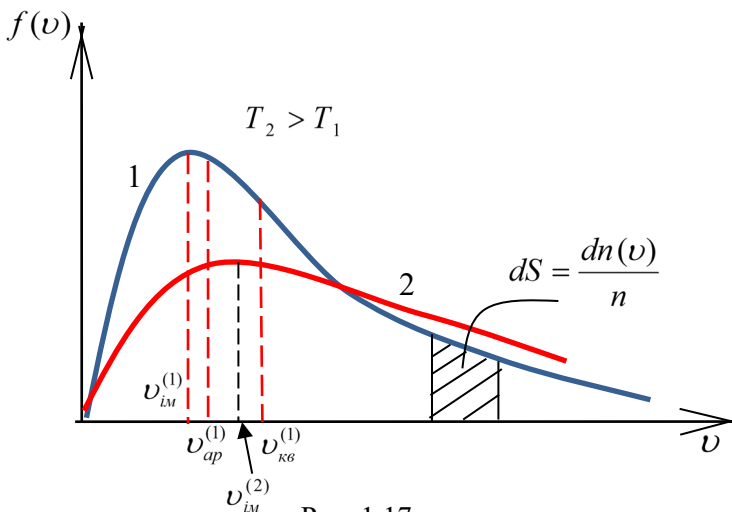


Рис. 1.17

Графік функції $f(v)$ має вигляд: рис. 1.17. Відносне число частинок dn/n , швидкості яких знаходяться в інтервалі від v до $v+dv$ рівне площі заштрихованої ділянки на рис. 1.17, а повне число молекул – площі фігури під кривою функції розподілу. При $v \rightarrow 0$ та $v \rightarrow \infty$ $f(v) \rightarrow 0$, тобто число

частинок, що рухаються з такими швидкостями є нехтовно малим.

Графік функції $f(v)$ має максимум при швидкості, яку називають найбільш ймовірною. Число частинок в околі цього максимуму є найбільшим, тому така назва швидкості.

1) v_{im} – найбільш імовірна швидкість – швидкість, яку має найбільша кількість молекул у газі. Для її визначення треба дослідити функцію розподілу молекул за швидкостями $f(v)$ на екстремум. Умова максимуму: $f'(v) = 0$, тому

$$f'(v) = const \cdot (2v e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} - v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \cdot \frac{2v m_0}{2kT}) = 0,$$

де $const = 4\pi \cdot \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}}$. Перепишемо вираз у дужках, виносячи за дужки експоненту, та поділимо почленно на $2v$:

$$2v - \frac{2v^3 m_0}{2kT} = 0 \quad | \cdot \frac{1}{2v} \Rightarrow 1 - \frac{m_0 v^2}{2kT} = 0 \Rightarrow v^2 = \frac{2kT}{m_0}.$$

Отже, одна з формул, що визначає найбільш імовірну швидкість: $v_{im} = \sqrt{2kT/m_0}$, де m_0 – маса молекули, k – стала Больцмана, T – абсолютна температура.

Виразимо v_{im} через молярну масу μ , враховуючи, що $R/N_A = k$ – стала Больцмана, $m_0 = \mu/N_A$ – маса однієї молекули, N_A – стала Авогадро. Тобто, $\frac{k}{m_0} = \frac{R}{N_A} \cdot \frac{N_A}{\mu} = \frac{R}{\mu}$, тоді:

$$v^2 = \frac{2kT}{m_0} = \frac{2RT}{\mu} \Rightarrow v_{im} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}.$$

Отже, функція розподілу досягає свого максимального значення при найбільш імовірних швидкостях, які має найбільша кількість молекул.

$$\boxed{v_{im} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}} \quad \boxed{v_{im} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}} \text{ – найбільш імовірна швидкість молекул газу.}$$

2) Вираз $\int_{v_1}^{v_2} f(v)dv$ дозволяє знайти імовірність руху молекули в інтервалі швидкостей.

3) В статистичній фізиці середнє арифметичне значення деякої величини x як функції від v : $x(v)$ визначається формулою:

$\bar{x}(v) = \int_0^{\infty} x(v)f(v)dv$. За допомогою функції $f(v)$ можна розрахувати середнє арифметичне значення абсолютної величини швидкості молекули:

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v \cdot f(v)dv = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} v^3 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}};$$

$$\boxed{\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}} \text{ – середня арифметична швидкість.}$$

За допомогою функції $f(v)$ можна розрахувати значення середньої квадратичної швидкості молекули:

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{v^2} = v_{\kappa\theta} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i^2 d n} = \int_0^\infty v^2 \cdot f(v) dv = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}};$$

$$v_{\kappa\theta} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} - \text{середня квадратична швидкість.}$$

Найбільш імовірна швидкість v_{im} , середня арифметична швидкість $\bar{v}$ та середня квадратична швидкість $v_{\kappa\theta}$ співвідносяться між собою: $\bar{v} = 1,13v_{im}$ та $v_{\kappa\theta} = 1,22v_{im}$. Отже, $v_{im} < \bar{v} < v_{\kappa\theta}$.

На графіку функції $f(v)$ рис. 1.17 показані v_{im} , $\bar{v} = v_{ap}$, та $v_{\kappa\theta}$. Формула $v_{im} = \sqrt{2kT/m_0}$ показує, що зі збільшенням температури T найбільш імовірна швидкість молекул газу збільшується. При цьому максимальне значення функції розподілу $f(v)$ з підвищенням температури зменшується. Це пояснюється тим, що зі збільшенням температури швидкості молекул загалом збільшуються, максимум кривої при цьому зміщується в бік більших швидкостей, при цьому площі фігур під графіком залежності $f(v)$ функції розподілу не змінюються. Це обумовлено тим, що число молекул не залежить від температури. Математично це впливає з умови нормування функції Максвелла.

4) За допомогою функції $f(v)$ можна визначити відносне число молекул $\frac{\Delta n}{n}$, швидкості яких лежать в інтервалі від v_1 до v_2 : $\frac{\Delta n}{n} = \int_{v_1}^{v_2} f(v) dv$.

Закон розподілу молекул ідеального газу за швидкостями $dn = 4\pi \cdot n \cdot \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} v^2 dv$ може бути записаний у вигляді функцій інших змінних, які в свою чергу залежать від швидкості, і тому також характеризують рух молекул. Зокрема, число молекул $dn(E_k)$ в одиниці об'єму газу, кінетична енергія яких лежить в інтервалі $(E_k, E_k + dE_k)$, можна записати:

$$dn(E_k) = \frac{2n}{\sqrt{\pi(kT)^2}} e^{-\frac{E_k}{kT}} \sqrt{E_k} dE_k. \quad (5)$$

[В цій формулі перехід від швидкостей до кінетичних енергій поступального руху молекул було здійснено шляхом заміни змінної v на змінну $E_k = \frac{m_0 v^2}{2}$: $v = (2E_k / m_0)^{1/2}$, $dv = (2E_k m_0)^{-1/2} \cdot dE_k$.]

Користуючись формулою (5), можна знайти середню кінетичну енергію $\overline{E_k}$ молекул ідеального газу, що підлягає розподілу Максвелла:

$$\overline{E_k} = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} E_k dn(E_k) = \frac{2}{\sqrt{\pi}(kT)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{E_k}{kT}} E_k^{\frac{3}{2}} dE_k = \frac{3}{2} kT.$$

З наведеної вище формули видно, що температура газу є кількісною мірою інтенсивності теплового руху молекул. Чим вища температура, тим швидше рухаються молекули газу, тобто мають більшу кінетичну енергію.

Оскільки в молекулярно-кінетичній теорії молекули вважаються симетричними кульками, то на один ступінь вільності поступального руху молекули припадає кінетична енергія $1/2kT$. Кількість ступенів вільності – це кількість незалежних координат, якими можна описати положення молекули в просторі. Для одноатомної молекули у вигляді кульки – це три координати, отже, вона має три ступені вільності. Питання кількості ступенів вільності буде розглянуто в параграфі «Внутрішня енергія ідеального газу» посібника «Термодинаміка».

Слід відмітити, що такі поняття як середня швидкість, найбільш імовірна швидкість, середня квадратична швидкість мають зміст для великої кількості молекул газу. Застосовувати ці поняття для системи, що складається з кількох часток, не має змісту.

Дослід Штерна

Розподіл Максвелла був вперше експериментально підтверджений дослідом німецького вченого Штерна у 1920 р. Розглянемо спрощену схему пристрою, вертикальна проекція якого зображена на

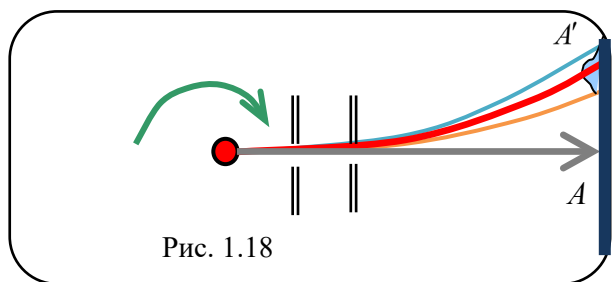


Рис. 1.18

рис. 1.18. Усередині пристрою створений високий вакуум (до 10^{-4} Па), на осі розміщена платинова дротина (червона точка) з напиленням на ній сріблом. До дротини підведений електричний струм, що нагрівав її до температур близьких до $t_{пл Ag} = 960$ °C, коли починалося помітне випаровування речовини. Це призводило до утворення потоку атомів срібла, направленого перпендикулярно дротині. Далі цей потік колімаструвався системою щілин у вузький пучок, який падав на стінку зовнішнього скляного циліндра, напилюючи у точці A вузьку риску із чітко окресленими краями. Таким чином, атоми у потоці мали вектор швидкості, що співпадав за напрямком стрілки на рисунку. При приведенні установки у обертання із частотою 2800 об/с (напрямок вказано зеленою стрілкою), спостерігалось зміщення плями на деяку відстань S (порядку 6 мм) у точку A'. При зміні напрямку обертання, відбувалося симетричне зміщення лінії на таку ж відстань S донизу (на рисунку не показано). Це пояснюється тим, що за час польоту атомів срібла t на відстань

від дротини до екрану, установка повертається на кут φ . Знаючи ці величини, Штерн обрахував швидкості руху атомів пари срібла, отримані експериментальні значення добре корелювали із значеннями швидкості, що дає МКТ.

Аналізуючи вигляд утвореної широкої плями з розмитими краями, Штерн дійшов висновку, що атоми срібла, як і молекули газу, також мають певний розподіл за швидкостями. Якби усі атоми мали б однаку початкову швидкість, то пляма A' також була рисою з чітко окресленими краями, проте зміщеною на відстань S . За наявності різних початкових швидкостей атомів, краї смуги розмиваються, через те, що більш швидкі атоми срібла відхилялися менше (помаранчева лінія), напроतिагу більш повільним атомам, які відхилялися максимально (синя лінія).

1.8. Ефективний діаметр молекули. Середнє число зіткнень. Середня довжина вільного пробігу молекул

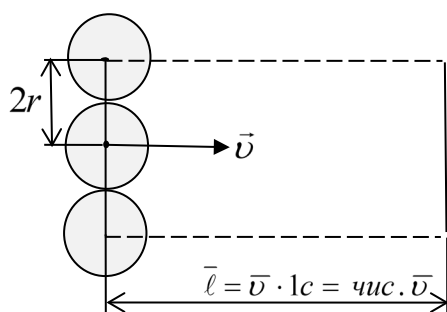


Рис. 1.19

Відстань, яку молекула «проходить» від одного зіткнення до іншого, називають довжиною вільного пробігу. При хаотичному русі молекул можна говорити тільки про **середню довжину вільного пробігу** $\bar{\lambda}$ або $\langle \lambda \rangle$, яка дорівнює відношенню середнього шляху, що проходить молекула за одиницю часу (рис. 1.19), до середньої кількості зіткнень $\bar{z}$ за 1 с:

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{z}}.$$

Підрахуємо кількість зіткнень $\bar{z}$. Будемо спочатку вважати, що дана молекула рухається, а всі інші знаходяться в стані спокою. Дана молекула зіткнеться з усіма молекулами, центри яких знаходяться в уявному циліндрі радіуса $2r$ (рис. 1.19), де r – радіус молекули.

Найменша відстань, на яку можуть наблизитися центри мас двох молекул, називається **ефективним діаметром молекули**: $d = 2r$ (Іноді ефективний діаметр молекул позначають буквою σ).

Тоді кількість зіткнень $\bar{z}$ за 1с в об'ємі V уявного циліндру радіусом d можна знайти за формулою: $\bar{z} = n \cdot V = n \cdot \pi d^2 \bar{\ell} = n \cdot \pi d^2 \bar{v}$, де n – концентрація молекул. Якщо врахувати, що насправді рухаються всі молекули, то, згідно з теорією імовірності, у цей вираз треба підставляти не середню арифметичну, а відносну швидкість молекул (рис. 1.20). Тоді кількість зіткнень буде у $\sqrt{2}$ разів більша.

Для середньої кількості зіткнень за одиницю часу маємо:

$$\bar{z} = n\sqrt{2} \cdot \pi d^2 \bar{v} \quad \text{— середня кількість зіткнень молекул за 1 с,}$$

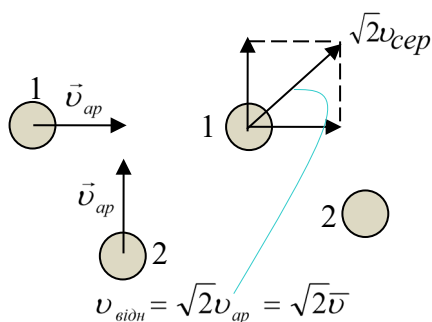


Рис. 1.20

де $\bar{v}$ — середня арифметична швидкість.

Якщо підставити цей вираз в формулу для середньої довжини вільного пробігу молекул $\bar{\lambda}$, отримаємо:

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{n\sqrt{2} \cdot \pi d^2 \bar{v}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot n \cdot \pi d^2},$$

де d — ефективний діаметр молекули, n — концентрація.

Отже,

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot n \cdot \pi d^2} \quad \text{— середня довжина}$$

вільного пробігу молекул.

Середню довжину вільного пробігу $\bar{\lambda}$ можна записати через тиск газу, враховуючи, що з рівняння стану ідеального газу (через концентрацію $p = nkT$): $n = p/kT$. Після підстановки в формулу для $\bar{\lambda}$, отримаємо:

$$\text{Середня довжина вільного пробігу молекул: } \bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2} \cdot p \cdot \pi d^2}.$$

Середня довжина вільного пробігу молекул прямопропорційна температурі та обернено пропорційна тиску.

1.9. Явища перенесення

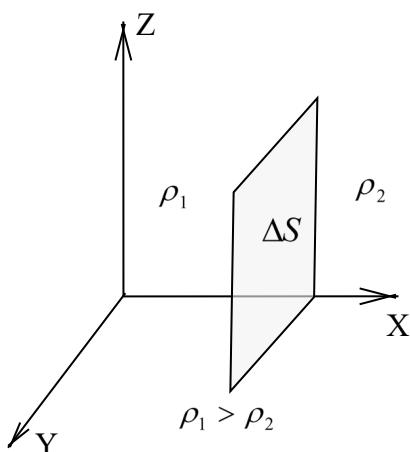


Рис. 1.21

Молекули газу, безперервно та безладно рухаючись, весь час переміщуються, обмінюючись швидкостями та енергіями. Цей процес переміщування зумовлює явища перенесення: дифузію, теплопровідність і внутрішнє тертя.

При дифузії переноситься маса, при внутрішньому терті — імпульс напрямленого руху молекул, при теплопровідності — кінетична енергія теплового руху молекул.

Перенесення маси (дифузія), імпульсу (внутрішнє тертя) і кінетичної енергії (теплопровідність) у певному напрямі в газі можливий тільки тоді, коли в цьому напрямі існує градієнт відповідно густини ρ , переносної швидкості u , температури T .

1. Дифузія – це явище проникнення молекул однієї речовини в міжмолекулярні проміжки іншої. В процесі дифузії переноситься певна маса рухомих молекул ΔM . Іншими словами, дифузія – це процес вирівнювання концентрацій або густини.

Нехай дифузія відбувається в напрямку осі ОХ через площадку ΔS (рис. 1.21). Зміна густини на одиницю довжини називається **градієнтом густини**: $\frac{\Delta \rho}{\Delta x}$ (або $\frac{d\rho}{dx}$). Дослід показує, що маса ΔM , яка переноситься за час

Δt через площу ΔS буде: $\Delta M = -D \frac{\Delta \rho}{\Delta x} \Delta S \Delta t$.

Рівняння дифузії в диференціальній формі – **закон Фіка** –

$$\boxed{dM = -D \frac{d\rho}{dx} dS dt}, \quad (6)$$

де D – коефіцієнт дифузії, що залежить від роду газу та від умов, в яких протікає дифузія, $\frac{d\rho}{dx}$ – градієнт густини в напрямку ОХ.

Нижче буде показано, що **коефіцієнт дифузії**:

$$\boxed{D = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda}}. \quad (7)$$

В формулі (6) знак «-» вводиться тому, що $\Delta \rho = \rho_2 - \rho_1 < 0$, а маса $\Delta M > 0$. Тобто дифузія відбувається в бік зменшення густини.

Фізичний зміст коефіцієнта дифузії отримаємо з (6): $D = \frac{dM}{\left| \frac{d\rho}{dx} \right| dS dt}$ –

це фізична величина, яка чисельно дорівнює масі речовини, що переноситься через одиничну площу за одиницю часу при одиничному градієнті густини.

$[D] = \text{м}^2 / \text{с}$ – одиниця вимірювання коефіцієнта дифузії.

Із закону Фіка також отримаємо швидкість дифузії: $\frac{dM}{dt} = -D \frac{d\rho}{dx} dS$.

Проаналізуємо, від чого вона залежить. Швидкість дифузії $\sim$ (прямо пропорційна) коефіцієнту дифузії. З (7) коефіцієнт дифузії D залежить від $\bar{v}$

– середня арифметична швидкість: $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}$, тобто, $\bar{v} \sim$ (прямо

пропорційна) $\sqrt{\frac{T}{\mu}}$. Отже, $D \sim \sqrt{T}$ – чим більша температура, тим більша

швидкість дифузії; $D \sim \sqrt{\frac{1}{\mu}}$ – коефіцієнт дифузії обернено пропорційний молярній масі, тобто залежить від роду газу і для легких газів швидкість дифузії більша.

З (7) коефіцієнт дифузії D залежить від $\bar{\lambda}$ – середньої довжини вільного пробігу молекул, яка обернено пропорційна ефективному діаметру молекули в квадраті $\bar{\lambda} \sim \frac{1}{d^2}$. Тому, $D \sim \frac{1}{d^2}$ – залежить від розмірів молекул: чим менше розміри молекул, тим більше швидкість дифузії.

2. Внутрішнє тертя

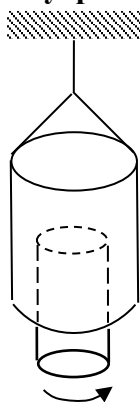


Рис. 1.22

При переміщенні одних шарів газу відносно сусідніх, виникають сили опору, дотичні до поверхні дотику шарів. Ці сили опору називають **силами внутрішнього тертя**. Їх можна виявити на досліді: якщо обертати внутрішній циліндр (рис. 1.22), то починає обертатись і зовнішній. Тому що внутрішній циліндр при обертанні призводить до руху ближчі до нього шари повітря, які завдяки внутрішньому тертю передають швидкість (імпульс напрямленого руху) сусіднім шарам, і так далі – до зовнішнього циліндра. Дослід показує, що сила внутрішнього тертя залежить від площі дотику шарів ΔS , від градієнту швидкості:

$$\frac{\Delta v}{\Delta z} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta z}.$$

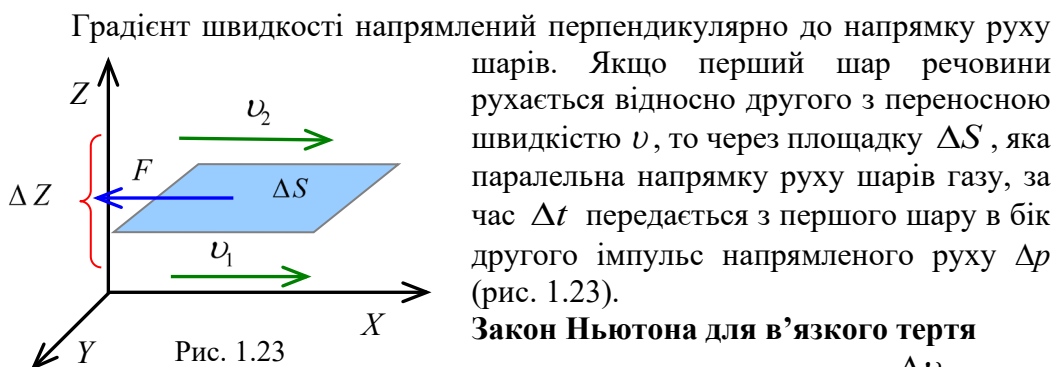


Рис. 1.23

Градієнт швидкості напрямлений перпендикулярно до напрямку руху шарів. Якщо перший шар речовини рухається відносно другого з переносною швидкістю v , то через площадку ΔS , яка паралельна напрямку руху шарів газу, за час Δt передається з першого шару в бік другого імпульс напрямленого руху Δp (рис. 1.23).

Закон Ньютона для в'язкого тертя

у інтегральній формі: $\Delta p = -\eta \frac{\Delta v}{\Delta z} \Delta S \Delta t$.

У диференціальній формі:

$$\boxed{dp = -\eta \frac{dv}{dz} dS dt}, \quad (8)$$

де η – коефіцієнт внутрішнього тертя або динамічна в'язкість.

Закон Ньютона для в'язкого тертя: елементарний імпульс dp , який переноситься через площадку dS за час dt , прямопропорційний градієнту швидкості впорядкованого руху $\frac{dv}{dz}$, добутку $dSdt$ та динамічній в'язкості η .

В МКТ (молекулярно-кінетичній теорії) доводиться:

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda} \quad (9)$$

коефіцієнт в'язкого тертя (динамічна в'язкість);

де ρ – густина, $\bar{v}$ – середня арифметична швидкість, $\bar{\lambda}$ – середня довжина вільного пробігу молекул.

Як і для дифузії, для в'язкого тертя $\eta \sim \sqrt{T}$ та $\eta \sim \sqrt{\frac{1}{\mu}}$. З (8) можна отримати за другим законом Ньютона вираз для **сили в'язкого тертя**:

$$F = \frac{d p}{dt} = \eta \left| \frac{dv}{dz} \right| dS.$$

З цього виразу сформулюємо фізичний зміст коефіцієнта в'язкого тертя:

$\eta = \frac{F}{\left| \frac{dv}{dz} \right| dS}$ – коефіцієнт в'язкого тертя чисельно дорівнює силі в'язкого тертя

між рухомими шарами рідини або газу одиничної площі при одиничному градієнті швидкості.

3. Теплопровідність – це явище перенесення кількості теплоти ΔQ з більш нагрітого шару до менш нагрітого. Тобто перенос теплоти відбувається в сторону меншої температури і залежить від градієнта температури $\frac{\Delta T}{\Delta x}$ в напрямку ОХ

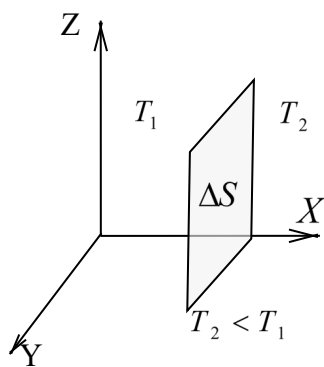


Рис. 1.24

(рис. 1.24). По аналогії з іншими явищами перенесення запишемо для теплопровідності:

$$dQ = -\kappa \frac{dT}{dx} dS dt, \quad (10)$$

закон Фур'є – рівняння теплопровідності;

де κ (каппа) – коефіцієнт теплопровідності.

Знак «-» вводиться тому, що $\Delta T = T_2 - T_1 < 0$,

відповідно: $\frac{dT}{dx} < 0$, а кількість теплоти $\Delta Q > 0$.

У МКТ (молекулярно-кінетичній теорії) доводиться, що коефіцієнт теплопровідності:

$$\text{коефіцієнт теплопровідності} - \boxed{\kappa = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda} c_v}, \quad (11)$$

де ρ – густина, $\bar{v}$ – середня арифметична швидкість, $\bar{\lambda}$ – середня довжина вільного пробігу молекул, c_v – питома теплоємність при сталому об'ємі.

Фізичний зміст коефіцієнта теплопровідності отримаємо з (10):

$$\kappa = \frac{dQ}{\left| \frac{dT}{dx} \right| dS dt} - \text{це фізична величина, яка чисельно дорівнює кількості теплоти,}$$

що переноситься через одиничну площу за одиницю часу при одиничному градієнті температури. $[\kappa] = \text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ – одиниця вимірювання коефіцієнта теплопровідності.

Згідно закону Фур'є (10) отримаємо формулу для швидкості теплопередачі:

$$\frac{dQ}{dt} = -\kappa \frac{dT}{dx} dS.$$

(Приклад теплопередачі з чаєм та цукром: коли скоріше охолоне чай – почекати 5 хвилин, а потім кинути в чай цукор; або спочатку кинути цукор і почекати 5 хвилин? В першому випадку різниця температур ΔT до прийнятої температури T_2 буде більше, ніж в другому випадку (бо кинули цукор, який знизив початкову температуру T_1), тому чай в першому випадку охолоне швидше).

4. Кінетичні коефіцієнти 1) D – коефіцієнт дифузії, 2) η – коефіцієнт в'язкості, 3) κ – коефіцієнт теплопровідності.

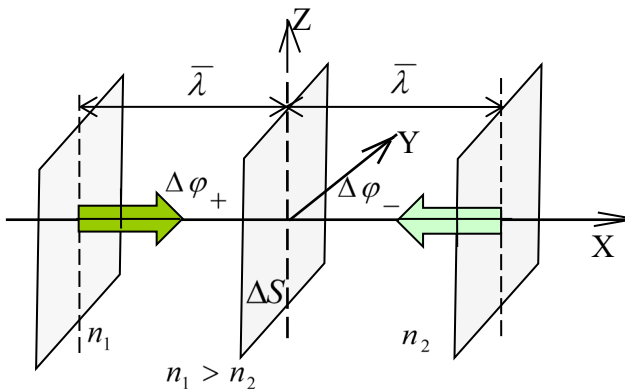


Рис. 1.25

Виведемо кінетичні коефіцієнти. Всі три явища: дифузія, внутрішнє тертя і теплопровідність виникають внаслідок теплового руху молекул в газі і зв'язані відповідно з переносом 1) маси, 2) імпульсу напрямленого руху молекул, 3) кінетичної енергії теплового руху молекул.

Кожна молекула є носієм кожної з цих властивостей.

Введемо загальне позначення цих властивостей: φ та розглядатимемо перенос цієї властивості вздовж осі OX через площу ΔS за час Δt , припускаючи, що

зліва від ΔS на відстані середньої довжини вільного пробігу $\bar{\lambda}$ концентрація молекул n_1 , а справа від ΔS – n_2 .

Нехай $n_1 > n_2$ (рис. 1.25). Вважаємо, що в напрямку осі ОХ рухається $1/3$ від загальної кількості молекул в газі (ще по $1/3$ рухається по осі ОУ та по осі ОZ). При цьому зліва направо нехай рухається половина молекул: $1/6 n_1$ і справа наліво: $1/6 n_2$.

Кількість властивості (загальна) $\Delta\varphi$, що переноситься тепловим рухом молекул через площу ΔS за час Δt із середньою арифметичною швидкістю $\bar{v}$, буде:

$$\Delta\varphi_+ = \frac{1}{6} n_1 \varphi \cdot \bar{v} \cdot \Delta S \Delta t \quad - \text{перенесення зліва направо};$$

$$\Delta\varphi_- = \frac{1}{6} n_2 \varphi \cdot \bar{v} \cdot \Delta S \Delta t \quad - \text{перенесення справа наліво}.$$

Повна кількість властивості, що переноситься тепловим рухом зліва направо:

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_+ - \Delta\varphi_- = \frac{1}{6} \bar{v} (n_1 \varphi - n_2 \varphi) \cdot \Delta S \Delta t. \quad (12)$$

Тепер розглянемо приріст властивості φ на шляху $\Delta x = 2\bar{\lambda}$ (рис.1.25):

$$n_1 \varphi - n_2 \varphi = -(n_2 \varphi - n_1 \varphi) = \Delta(n\varphi) = -\frac{\Delta(n\varphi)\Delta x}{\Delta x} = -\frac{\Delta(n\varphi)}{\Delta x} \cdot 2\bar{\lambda}. \quad \text{Або} \quad \text{приріст}$$

$$\text{властивості } \varphi \text{ в диференціальній формі: } n_1 \varphi - n_2 \varphi = -\frac{d(n\varphi)}{dx} \cdot 2\bar{\lambda}.$$

Підставимо отриманий вираз для приросту властивості в формулу (12):

$$\Delta\varphi = \frac{1}{6} \bar{v} (-2\bar{\lambda}) \cdot \frac{\Delta(n\varphi)}{\Delta x} \Delta S \Delta t = -\frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} \frac{\Delta(n\varphi)}{\Delta x} \Delta S \Delta t. \quad (13)$$

Тепер розглянемо кожне з явищ перенесення.

1) Дифузія – переноситься маса ΔM , а для кожної молекули φ відповідає масі молекули m_0 . Підставимо в (13) замість $\Delta\varphi \rightarrow \Delta M$, а замість $\varphi \rightarrow m_0$.

Тоді формула (13) приймає вигляд: $\Delta M = -\frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} \frac{\Delta(n m_0)}{\Delta x} \Delta S \Delta t$, де $n m_0 = \rho$ – густина. Остаточно маємо:

$$\Delta M = -\frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} \frac{\Delta\rho}{\Delta x} \Delta S \Delta t.$$

$$\text{У диференціальній формі: } dM = -\frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} \frac{d\rho}{dx} dS dt.$$

$$\text{Порівняємо цей вираз з рівнянням дифузії (6) } dM = -D \frac{d\rho}{dx} dS dt.$$

Отже, коефіцієнт дифузії: $D = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda}$.

2) Внутрішнє тертя – переноситься імпульс Δp направленого руху молекул в напрямку OZ (тому замість x будемо писати z) (рис. 1.25). Для кожної молекули φ відповідає імпульсу $m_0 \bar{v}$ молекули. Підставимо в (13) замість $\Delta \varphi \rightarrow \Delta p$, а замість $\varphi \rightarrow m_0 \bar{v}$. $n m_0 = \rho$ – густина.

Тоді з (13) маємо:

$$\Delta p = -\frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} \frac{\Delta \left(\overbrace{n \cdot m_0 \bar{v}}^{\rho} \right)}{\Delta Z} \Delta S \Delta t = -\frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} \rho \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta Z} \Delta S \Delta t.$$

Остаточно маємо:

$$\Delta p = -\frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} \rho \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta Z} \Delta S \Delta t.$$

У диференціальній формі:

$$d p = -\frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} \rho \frac{d \bar{v}}{d Z} d S d t.$$

Порівняємо цей вираз з законом Ньютона для в'язкого тертя (8)

$$d p = -\eta \frac{d \bar{v}}{d z} d S d t.$$

Отже, коефіцієнт в'язкості (динамічна в'язкість):

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda}.$$

3) Теплопровідність – переноситься теплота ΔQ за рахунок перенесення кінетичної енергії теплового руху молекул. Для кожної молекули φ відповідає кінетичній енергії $\frac{m_0 \bar{v}^2}{2}$. Підставимо в (13) замість $\Delta \varphi \rightarrow \Delta Q$, а замість $\varphi \rightarrow$

$$\frac{m_0 \bar{v}^2}{2}: \Delta Q = -\frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} \frac{\Delta \left(n \frac{m_0 \bar{v}^2}{2} \right)}{\Delta x} \Delta S \Delta t.$$

Врахуємо, що $n m_0 = \rho$ – густина; $\bar{v}^2 = \frac{3RT}{\mu}$ – квадрат середньої квадратичної

швидкості, $c_v = \frac{3R}{2\mu}$ – питома теплоємність при сталому об'ємі

(Подальші міркування випереджають вже викладений теоретичний матеріал – вони будуть розглянуті у посібнику «Термодинаміка»)

$$c_V = \frac{C_{\mu V}}{\mu} = \left[C_{\mu V} = \frac{iR}{2}; i = 3 \text{ для одноатомної молекули} \right] = \frac{3R}{2\mu},$$

де c_V – питома теплоємність при сталому об’ємі, $C_{\mu V}$ – молярна теплоємність

при сталому об’ємі, $c_V = \frac{C_{\mu V}}{\mu}$ – зв’язок між молярною та питомою

теплоємностями через молярну масу, $C_{\mu V} = \frac{iR}{2}$ – молярна теплоємність при

сталому об’ємі через кількість ступенів вільності молекули i та універсальну газову сталу R .

Отже, $c_V = \frac{3R}{2\mu}$). Тоді після підстановки для ΔQ маємо:

$$\Delta Q = -\frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} \rho \frac{\Delta \left(\frac{3RT}{2\mu} \right)}{\Delta x} \Delta S \Delta t = -\frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} \rho c_V \frac{\Delta T}{\Delta x} \Delta S \Delta t.$$

Остаточно маємо:

$$\Delta Q = -\frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} \rho c_V \frac{\Delta T}{\Delta x} \Delta S \Delta t$$

або в диференціальній формі:

$$dQ = -\frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} \rho c_V \frac{dT}{dx} dS dt.$$

Порівняємо цей вираз з рівнянням теплопровідності (законом Фур’є)
(10):

$$dQ = -\kappa \frac{dT}{dx} dS dt.$$

Отже, коефіцієнт теплопровідності

$$\kappa = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda} c_V.$$

Таким чином встановили, що *кінетичні коефіцієнти* для явищ перенесення:

$$D = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} \text{ – коефіцієнт дифузії;}$$

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda} \text{ – коефіцієнт в’язкості (динамічна в’язкість);}$$

$$\kappa = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda} c_V \text{ – коефіцієнт теплопровідності.}$$

Для зручності приведено таблицю:

Таблиця 1.2

№ з/п	Явище	Величина, що переноситься тепловим рухом	Рівняння перенесення	Формула кінетичного коефіцієнту
1	Дифузія	m (маса)	$\Delta M = -D \frac{d\rho}{dx} dS dt$	$D = \frac{1}{3} \overline{v\lambda}$
2	Внутрішнє тертя	$m\vec{v}$ (імпульс)	$f = \eta \left \frac{du}{dx} \right dS$	$\eta = \frac{1}{3} \overline{v\lambda} \rho$
3	Теплопровідність	$\frac{mv^2}{2}$ (кінет. енергія)	$dQ = -\kappa \frac{dT}{dx} dS dt$	$\kappa = \frac{1}{3} \overline{v\lambda} \rho c_v$

1.10. Основні закони та співвідношення молекулярної фізики

- **Кількість речовини:** $\nu = \frac{m}{\mu} = \frac{N}{N_A}$,

де m – маса речовини, μ – молярна маса, N – число молекул, N_A – стала Авогадро.

- **Зв'язок молярної маси μ з масою однієї молекули m_0 :**

$$\mu = m_0 N_A.$$

- **Рівняння стану ідеального газу (рівняння Клапейрона)**

для певної кількості ν газу: $\frac{pV}{T} = \text{const}$,

де p – тиск, T – абсолютна температура, V – об'єм газу.

При ізопроцесах:

$T = \text{const}$, $pV = \text{const}$ – рівняння ізотерми (закон Бойля-Маріотта);

$p = \text{const}$, $\frac{V}{T} = \text{const}$ – рівняння ізобари (закон Гей-Люссака);

$V = \text{const}$, $\frac{p}{T} = \text{const}$ – рівняння ізохори (закон Шарля).

- **Рівняння стану ідеального газу:**

$$pV = \nu RT,$$

де R – універсальна газова стала, ν – кількість молей (кількість речовини).

- **Зв'язок тиску з концентрацією молекул газу:**

$$p = nkT,$$

де $n = N/V$ – концентрація, $k = R/N_A$ – стала Больцмана.

- **Густина газу:** $\rho = \frac{\mu \cdot p}{RT} = m_0 \cdot n$.

- **Закон Дальтона:** $p = \sum_i p_i$,

де p – тиск суміші газів, p_i – парціальний тиск i -ї компоненти суміші.

- **Молярна маса суміші газів:** $\mu_c = \frac{m_c}{\sum_i \frac{m_i}{\mu_i}}$,

де m_c – маса суміші, m_i та μ_i – маса і молярна маса i -тої компоненти.

- **Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії (МКТ) ідеального газу:**

$$p = \frac{2}{3} n E_{\kappa}^{(1)}, \quad p = \frac{1}{3} n m_0 \overline{v^2}, \quad p = \frac{1}{3} \rho \overline{v^2},$$

де $E_{\kappa}^{(1)}$ – середня кінетична енергія поступального руху однієї молекули:

$$E_{\kappa}^{(1)} = \frac{m_0 v_{\kappa\bar{v}}^2}{2} = \frac{3}{2} kT,$$

де $v_{\kappa\bar{v}}$ – середня квадратична швидкість молекул:

$$v_{\kappa\bar{v}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}, \quad v_{\kappa\bar{v}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}.$$

- **Інша форма запису основного рівняння м.к.т. газів:**

$$pV = \frac{2}{3} E_{\kappa},$$

де E_{κ} – кінетична енергія поступального руху всіх молекул газу.

- **Середня арифметична швидкість хаотичного теплового руху молекул:**

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}, \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}.$$

- **Найімовірніша швидкість молекул:**

$$v_{iM} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}, \quad v_{iM} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}.$$

- **Зв'язок між швидкостями $\bar{v}$, $v_{\kappa\bar{v}}$, v_{iM} :**

$$v_{\kappa\bar{v}} = 1,22 \cdot v_{iM}; \quad \bar{v} = 1,13 \cdot v_{iM}.$$

- **Середня довжина вільного пробігу молекули:**

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{z}} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 n}, \quad \bar{z} = \sqrt{2} \pi \sigma^2 n \bar{v}.$$

де $\bar{v}$ – середня арифметична швидкість теплового руху частинки, $\bar{z}$ – середнє число зіткнень за одиницю часу, σ – ефективний діаметр молекули, n – концентрація молекул.

- **Характеристики речовини у процесах перенесення:**

$$\text{коефіцієнт дифузії} \quad D = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda};$$

$$\text{динамічна в'язкість речовини} \quad \eta = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda};$$

$$\text{теплопровідність речовини} \quad \kappa = \frac{1}{3} c_V \rho \bar{v} \bar{\lambda};$$

де ρ – густина, c_V – питома теплоємність газу за сталого об'єму.

- **Формула (розподіл) Больцмана:**

$$n = n_0 e^{-\frac{m_0 g h}{kT}} = n_0 \exp\left(-\frac{m_0 g h}{kT}\right), \quad n = n_0 e^{-\frac{E_{\Pi}}{kT}} = n_0 \exp\left(-\frac{E_{\Pi}}{kT}\right),$$

де n – концентрація молекул на висоті; h , n_0 – концентрація молекул біля поверхні Землі при $h = 0$, m_0 – маса однієї молекули, $E_{\Pi} = m_0 g h$ – потенціальна енергія молекули в гравітаційному полі Землі.

- **Барометрична формула:**

$$p = p_0 e^{-\frac{m_0 g h}{kT}} = p_0 \exp\left(-\frac{m_0 g h}{kT}\right) \quad \text{або} \quad p = p_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}} = p_0 \exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right).$$

де p – тиск газу на висоті; h , p_0 – тиск газу біля поверхні Землі при $h = 0$, m_0 – маса однієї молекули.

- **Розподіл Максвелла:**

$$d n = 4\pi \cdot n \cdot \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} v^2 dv,$$

де $d n$ – кількість (або концентрація) молекул газу, значення швидкостей яких лежать в діапазоні від v до $v + dv$, n – концентрація молекул, m_0 – маса молекули, k – стала Больцмана, T – абсолютна температура.

Нормальні умови :

$$T_0 = 273\text{K};$$

$$p_0 = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па} = 760 \text{ мм рт.ст.} = 1 \text{ атм.}$$

1.11. Приклади розв'язування задач. Молекулярна фізика

1.11.1. Рівняння стану ідеального газу. Газові закони

Приклад 1. Скільки молекул є в 1 м^3 води? Яка маса молекули води? Вважаючи, що молекули мають форму кульок, що дотикаються між собою, оцінити діаметр молекули.

Розв'язання

Дано: H_2O Для знаходження числа молекул N використаємо формулу для розрахунку кількості речовини (через масу і через число молекул):
 $V = 1 \text{ м}^3$

кульки
 n ? m_0 ? d ?

$$\frac{m}{\mu} = \frac{N}{N_A},$$

де μ – молярна маса, N_A – стала Авогадро. Звідси число молекул $N = \frac{mN_A}{\mu}$.

Щоб знайти кількість молекул в 1 м^3 , тобто **концентрацію** n молекул, розділимо праву і ліву частину одержаної рівності на об'єм (V) і врахуємо, що

$$N/V = n, \text{ а } m/V = \rho - \text{густина. Маємо шукану концентрацію } n = \frac{\rho N_A}{\mu}.$$

Для води густина $\rho = 1,00 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, молярна маса $\mu = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$.
 $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ – число Авогадро. Тому концентрація:

$$n = \frac{1,00 \cdot 10^3 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{18 \cdot 10^{-3}} = 3,34 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}.$$

Масу однієї молекули можна розрахувати або із її зв'язку з молярною масою ($\mu = m_0 N_A$), або із зв'язку густини з концентрацією ($\rho = m_0 n$).

Наприклад,

$$m_0 = \frac{\mu}{N_A},$$

$$m_0 = \frac{18 \cdot 10^{-3}}{6,02 \cdot 10^{23}} = 2,99 \cdot 10^{-26} \text{ кг}.$$

Щоб знайти діаметр молекули, наведемо два шляхи розв'язання.

1). Нехай на ділянці довжиною 1 м тісно вкладається ряд із z молекул. Тоді в об'ємі 1 м^3 будуть розміщені z^3 молекул, тобто $3,34 \cdot 10^{28}$ молекули (див. вище розраховану концентрацію). Тому кількість молекул на 1 м :

$$z = \sqrt[3]{3,34 \cdot 10^{28}} = 3,22 \cdot 10^9.$$

Отже, діаметр однієї молекули $d = \frac{1 \text{ м}}{z}$, $\rightarrow d = \frac{1}{3,22 \cdot 10^9} = 3,11 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

Або шлях 2): об'єм однієї молекули $V_0 = \frac{V}{N} = \frac{V}{n}$, тут кількість молекул дорівнює концентрації: $N = n$, бо об'єм 1 м^3 .

$$V_0 = \frac{V}{n} = \frac{1}{3,34 \cdot 10^{28}} \approx 0,3 \cdot 10^{-28} = 3 \cdot 10^{-29} \text{ м}^3.$$

Розміри молекули $d \approx \sqrt[3]{V_0} = \sqrt[3]{3 \cdot 10^{-29}} \approx 3,11 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

Відповідь: $n = 3,34 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$; $m_0 = 2,99 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$; $d = 3,11 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

При тестовому оцінюванні: 3.34E+28; 2.99E-26; 3.11E-10.

Приклад 2. Скільки молекул є в 10 мм^3 ртуті? Яка маса молекули ртуті? Який приблизно розмір молекули ртуті?

Розв'язання

Дано:

Hg

$$V = 10 \text{ мм}^3 = 10 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3$$

$$\mu = 200,59 \cdot 10^{-3} \text{ кг / моль}$$

$$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$$

$$N? m_0? d?$$

Маса молекули ртуті:

$$m_0 = \frac{\mu}{N_A} = \frac{200,59 \cdot 10^{-3}}{6,02 \cdot 10^{23}} \approx 3,3 \cdot 10^{-19} \text{ кг}$$

Для знаходження кількості молекул, визначимо спочатку масу 10 мм^3 ртуті:

$$m = \rho \cdot V = 13,6 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-9} = 1,36 \cdot 10^{-4} \text{ кг},$$

де густина ртуті $\rho = 13,6 \cdot 10^3 \text{ кг / м}^3$.

$$\text{Кількість молекул: } N = \frac{m}{m_0} = \frac{1,36 \cdot 10^{-4}}{3,3 \cdot 10^{-19}} \approx 4,1 \cdot 10^{14} \text{ молекул.}$$

Щоб визначити розміри молекули, визначимо спочатку її об'єм:

$$V_0 = \frac{V}{N} = \frac{10 \cdot 10^{-9}}{4,1 \cdot 10^{14}} = 2,4 \cdot 10^{-23} \text{ м}^3.$$

Приблизні розміри молекули знайдемо з формули:

$$d \approx \sqrt[3]{V_0} = \sqrt[3]{2,4 \cdot 10^{-23}} \approx 2,9 \cdot 10^{-8} \text{ м}.$$

Відповідь: $N \approx 4,1 \cdot 10^{14}$; $m_0 = 3,3 \cdot 10^{-19} \text{ кг}$; $d = 2,9 \cdot 10^{-8} \text{ м}$.

При тестовому оцінюванні: 4.1E+14; 3.3E-19; 2.9E-8.

Приклад 3. Скільки молекул газу буде знаходитися в 10 см^3 посудини при 1° C , якщо посудину відкачано до $p = 1 \cdot 10^{-11} \text{ мм рт.ст.}$?

Перш, ніж записувати умову задачі, переведемо в СІ тиск $p = 1 \cdot 10^{-11} \text{ мм рт.ст.}$

$$\begin{cases} 760 \text{ мм рт.ст} - 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па} \\ 1 \cdot 10^{-11} \text{ мм рт.ст} - x \text{ Па} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1,01 \cdot 10^5 \cdot 1 \cdot 10^{-11}}{760} = 0,0013310^{-6} = 1,33 \cdot 10^{-9} \text{ Па}$$

Дано:

$$V = 10 \text{ см}^3 = 10 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$$

$$t = 1^\circ\text{C} \Rightarrow T = 274 \text{ K}$$

$$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$$

$$p = 1 \cdot 10^{-11} \text{ мм рт.ст} = 1,33 \cdot 10^{-9} \text{ Па}$$

$N?$

Розв'язання

Число молекул $N = \nu N_A$,

де $\nu = m/\mu$ – це кількість молей (кількість речовини), яку знайдемо з рівняння стану:

$$pV = \nu RT \Rightarrow \nu = \frac{pV}{RT}.$$

Тоді число молекул: $N = \frac{pV}{RT} N_A$. Підставимо значення фізичних величин:

$$N = \frac{pV}{RT} N_A = \frac{1,33 \cdot 10^{-9} \cdot 10 \cdot 10^{-6} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{8,31 \cdot 274} = 3,52 \cdot 10^6.$$

[Альтернативний шлях розв'язання: $p = nkT = \frac{N}{V} kT$].

Відповідь: $N = 3,52 \cdot 10^6$ молекул.

При тестовому оцінюванні: 3.52E+6.

Приклад 4 У балоні місткістю $V = 5 \text{ л}$ знаходиться азот масою 10 г . Визначити кількість речовини ν газу і концентрацію n його молекул.

Дано:

$$V = 5 \text{ л} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$m = 10 \text{ г} = 10 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \quad (N_2)$$

$$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$$

$\nu? n?$

Розв'язання

Кількість молей знайдемо за формулою:

$$\nu = \frac{m}{\mu}.$$

Молярна маса азота:

$$\mu_{N_2} = 14 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}.$$

Тоді кількість молей (кількість речовини): $\nu = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{28 \cdot 10^{-3}} \approx 0,36 \text{ моль}.$

Концентрація молекул: $n = N/V$, де $N = N_A \cdot \nu$ – число молекул в балоні.

Тобто,
$$n = \frac{N_A \cdot \nu}{V} = \frac{6,02 \cdot 10^{23} \cdot 0,36}{5 \cdot 10^{-3}} = 4,3 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}.$$

Відповідь: $\nu = 0,36 \text{ моль}$; $n = 4,3 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$.

При тестовому оцінюванні: 0.36; 4.3E+25.

Приклад 5. Скільки молекул повітря виходить з кімнати об'ємом $V = 120 \text{ м}^3$ при підвищенні температури від $t_1 = 15^\circ\text{C}$ до $t_2 = 25^\circ\text{C}$. Атмосферний тиск нормальний: $p = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$. Молярна маса повітря 29 г/моль .

Розв'язання

Дано:

$$V = 120 \text{ м}^3$$

$$t_1 = 15^\circ\text{C} \Rightarrow T = 288 \text{ К}$$

$$t_2 = 25^\circ\text{C} \Rightarrow T = 298 \text{ К}$$

$$\mu_{\text{нов}} = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$R = 8,31 \text{ Дж/моль} \cdot \text{К}$$

$$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$$

$$p = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

$$N - ?$$

Вважаємо газ ідеальним. Рівняння стану ідеального газу для двох станів матиме вигляд:

$$\begin{cases} pV = \frac{m_1}{\mu} RT_1 \\ pV = \frac{m_2}{\mu} RT_2 \end{cases} \quad \text{Для кількості молей повітря у двох}$$

станах $\frac{m_1}{\mu}$ та $\frac{m_2}{\mu}$ будемо відповідно мати:

$$\begin{cases} \frac{m_1}{\mu} = \frac{pV}{RT_1} \\ \frac{m_2}{\mu} = \frac{pV}{RT_2} \end{cases}$$

Віднімемо від першого рівняння друге та врахуємо, що кількість молекул:

$$N = \nu N_A = \frac{m}{\mu} N_A.$$

Тоді кількість молекул, що вийшла:

$$N = \left(\frac{m_1}{\mu} - \frac{m_2}{\mu} \right) \cdot N_A = \frac{pV}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \cdot N_A.$$

Після приведення виразу в дужках до спільного знаменника маємо:

$$N = \frac{pVN_A(T_2 - T_1)}{RT_1T_2}.$$

Підставимо числові значення:

$$N = \frac{1,01 \cdot 10^5 \cdot 120 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} (298 - 288)}{8,31 \cdot 288 \cdot 298} \approx 10^{26} \text{ молекул.}$$

Відповідь: з кімнати вийшло $N = 10^{26}$ молекул.

При тестовому оцінюванні: 1E+26.

Приклад 6. В балоні об'ємом $V = 10 \text{ л}$ знаходиться гелій під тиском $p_1 = 1,0 \text{ МПа}$ при температурі $t_1 = 27^\circ \text{ С}$. Після того, як з балона було взято $\Delta m = 10 \text{ г}$ гелію, температура в балоні зменшилася до $t_2 = 17^\circ \text{ С}$. Визначити тиск p_2 гелію, що залишився.

Дано:

$$V = 10 \text{ л} = 10 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

Не

$$p_1 = 1,0 \text{ МПа} = 1 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

$$t_1 = 27^\circ \text{C} \Rightarrow T = 300 \text{ К}$$

$$\Delta m = 10 \text{ г} = 10 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$$

$$t_2 = 17^\circ \text{C} \Rightarrow T = 290 \text{ К}$$

$$p_2 ?$$

Розв'язання

Застосуємо рівняння стану ідеального газу до початкового і кінцевого станів газу:

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu} R T_1, \quad p_2 V = \frac{m_2}{\mu} R T_2,$$

де m_1 та m_2 – маси газу в обох станах, μ – молярна маса, T – абсолютна температура, R – універсальна газова стала. З цих рівнянь

$$\text{маємо: } m_1 = \frac{\mu p_1 V}{R T_1}, \quad m_2 = \frac{\mu p_2 V}{R T_2} \quad \text{або} \quad m_1 - m_2 = \frac{\mu V p_1}{R T_1} - \frac{\mu V p_2}{R T_2}.$$

Але за умовою задачі $m_1 - m_2 = \Delta m$,

$$\Delta m = \frac{\mu V}{R} \left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2} \right) \Rightarrow \frac{\Delta m R}{\mu V} = \frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2} \Rightarrow \frac{p_2}{T_2} = \frac{p_1}{T_1} - \frac{\Delta m R}{\mu V}$$

тому

$$p_2 = T_2 \left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{\Delta m R}{\mu V} \right).$$

Підготуємо необхідні фізичні величини до підстановки і виконаємо числовий розрахунок: $R = 8,31 \text{ Дж/моль} \cdot \text{К}$, $\mu = 4,0 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$.

$$p_2 = 290 \left(\frac{1,0 \cdot 10^6}{300} - \frac{1,0 \cdot 10^{-2} \cdot 8,31}{4,0 \cdot 10^{-3} \cdot 1,0 \cdot 10^{-2}} \right) = 3,6 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

Відповідь: $p_2 = 0,36 \text{ МПа}$.

При тестовому оцінюванні: 3.6E+5

Приклад 7. 10 г азоту знаходяться під тиском 3 атм при температурі 20° С. Після розширення внаслідок нагрівання при постійному тиску азот зайняв об'єм 10 л. Знайти: 1) об'єм газу до розширення; 2) густину газу до розширення; 3) температуру газу після розширення; 4) густину газу після розширення.

Дано:

$$m = 10 \text{ г} = 10 \cdot 10^{-3} \text{ кг} (N_2)$$

$$p_{\text{атм}} = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

$$p = 3 \text{ атм} = 3,03975 \cdot 10^5 \text{ Па} = \text{const}$$

$$t_1 = 20^\circ \text{C} \Rightarrow T_1 = 293 \text{ К}$$

$$V_2 = 10 \text{ л} = 10 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$\mu = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$V_1 ? \quad \rho_1 ? \quad T_2 ? \quad \rho_2 ?$$

Розв'язання

З рівняння стану 1 ідеального газу знайдемо V_1 :

$$p V_1 = \frac{m}{\mu} R T_1 \Rightarrow V_1 = \frac{m R T_1}{p \mu};$$

$$V_1 = \frac{10 \cdot 10^{-3} \cdot 8,31 \cdot 293}{3,03975 \cdot 10^5 \cdot 28 \cdot 10^{-3}} = 0,002860703 \text{ м}^3.$$

Звичайно, варто заокруглити: $V_1 = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$.

Але рекомендуємо отримане з точністю до 9-го знака після коми значення V_1 записати до комірки пам'яті інженерного калькулятора для подальших обчислень. При використанні заокруглених значень Ви не отримаєте наведених відповідей.

Густину азота до розширення знайдемо з того ж рівняння стану 1:

$$pV_1 = \frac{m}{\mu} RT_1 \Rightarrow \rho_1 = \frac{m}{V_1} = \frac{p\mu}{RT_1};$$

$$\rho_1 = \frac{p\mu}{RT_1} = \frac{3,03975 \cdot 10^5 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}{8,31 \cdot 293} \approx 3,496 \text{ кг/м}^3 \approx 3,5 \text{ кг/м}^3.$$

Перевіримо: $\rho_1 = \frac{m}{V_1} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{0,002860703} \approx 3,496 \approx 3,5 \text{ кг/м}^3$.

Для знаходження температури T_2 скористаємося законом Гей-Люссака,

бо $p = \text{const}$ – процес ізобарний: $\frac{V}{T} = \text{const} \Rightarrow$ для двох станів

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \Rightarrow T_2 = \frac{V_2}{V_1} T_1. \quad T_2 = \frac{V_2}{V_1} T_1 = \frac{10 \cdot 10^{-3} \cdot 293}{0,002860703} = 1024 \text{ К}.$$

Густину газу після розширення можна знайти як з рівняння стану 2, так і з формули, яка визначає густину:

$$\rho_2 = \frac{p\mu}{RT_2} = \frac{3,03975 \cdot 10^5 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}{8,31 \cdot 1024} \approx 1,0002 \approx 1 \text{ кг/м}^3;$$

$$\rho_2 = \frac{m}{V_2} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-3}} = 1 \text{ кг/м}^3.$$

Відповідь: $V_1 = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$; $\rho_1 = 3,5 \text{ кг/м}^3$; $T_2 = 1024 \text{ К}$; $\rho_2 = 1 \text{ кг/м}^3$.

При тестовому оцінюванні: 2.9E-3; 3.5; 1024; 1

Приклад 8. Балон місткістю 10 л був заповнений киснем при температурі 12°C . Коли частину кисню витратили, тиск у балоні знизився на $206,5 \text{ кПа}$. Яку масу кисню було витрачено?

Дано:

$$V = 10 \text{ л} = 10 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$\mu = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$t_1 = 12^\circ \text{C} \Rightarrow T_1 = 285 \text{ К}$$

$$\Delta p = 206,5 \text{ кПа} = 206,5 \cdot 10^3 \text{ Па}$$

Розв'язання

Процес ізотермічний. Запишемо Рівняння стану ідеального газу для двох станів газу та віднімемо від першого рівняння друге:

$\Delta m?$

$$\left. \begin{aligned} p_1 V &= \frac{m_1}{\mu} RT \\ p_2 V &= \frac{m_2}{\mu} RT \end{aligned} \right\} \Rightarrow (p_1 - p_2) V = \frac{(m_1 - m_2)}{\mu} RT$$

Оскільки $m_1 > m_2$ та $p_1 > p_2$, позначимо $\Delta m = m_1 - m_2$ та $\Delta p = p_1 - p_2$.

Тоді різницю двох рівнянь станів можна записати:

$$\Delta p V = \frac{\Delta m}{\mu} RT \Rightarrow \Delta m = \frac{\Delta p V \mu}{RT}.$$

Підставимо значення фізичних величин:

$$\Delta m = \frac{\Delta p V \mu}{RT} = \frac{206,5 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{8,31 \cdot 285} = 0,0279 \text{ кг}.$$

Відповідь: $\Delta m = 0,0279 \text{ кг}$

При тестовому оцінюванні: 2.79E – 2

Приклад 9. Балон місткістю 20л був наповнений киснем, температура якого 15°C . Коли частину кисню витратили, тиск у балоні знизився на 5 атм. Скільки було витрачено кисню?

Дано:

$$V = 20 \text{ л} = 20 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$t = 15^\circ \text{C} \Rightarrow T = 288 \text{ K}$$

$$\Delta p = 5 \text{ атм} = 5 \cdot 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

$$\Delta m = ?$$

Розв'язання

Об'єм та температура газу в обох випадках (до і після витрати кисню) залишалися сталими.

Запишемо рівняння стану ідеального газу для

двох станів: 1. $p_1 V = \frac{m_1}{\mu} RT$ – до витрати

кисню; 2. $p_2 V = \frac{m_2}{\mu} RT$ – після витрати кисню. Щоб визначити витрати кисню

Δm , віднімемо від першого рівняння друге:

$$V(p_1 - p_2) = \frac{(m_1 - m_2)}{\mu} RT \quad \text{або} \quad \Delta p V = \frac{\Delta m}{\mu} RT \Rightarrow \Delta m = \frac{\mu \Delta p V}{RT}.$$

Підставимо значення фізичних величин, враховуючи, що для кисню

$$\mu = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}; \text{ універсальна газова стала } R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{K}}:$$

$$\Delta m = \frac{\mu \Delta p V}{RT} = \frac{32 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 1,01 \cdot 10^5 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{8,31 \cdot 288} = 0,135 \text{ кг}$$

Відповідь: $\Delta m = 0,135 \text{ кг}$.

При тестовому оцінюванні 0.135.

Приклад 10. З балону зі стиснутим воднем місткістю 10 л внаслідок пошкодження вентиля витікає газ. При 7° С манометр показує тиск 5 МПа. Покази манометра не змінилися і при 17° С. Визначити, скільки витікло газу.

Дано:

$$V = 10 \text{ л} = 10 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$t_1 = 7^\circ \text{C} \Rightarrow T_1 = 280 \text{ К}$$

$$p = 5 \text{ МПа} = 5 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

$$t_2 = 17^\circ \text{C} \Rightarrow T_2 = 290 \text{ К}$$

$$\Delta m - ?$$

Розв'язання

З рівняння стану ідеального газу $pV = \frac{m_1}{\mu} RT_1$ знайдемо початкову масу водню:

$$m_1 = \frac{pV\mu}{RT_1}. \text{ Аналогічно знайдемо залишкову масу}$$

$$m_2 \text{ водню у балоні після витікання: } m_2 = \frac{pV\mu}{RT_2}.$$

$$\text{Маса газу, що витік: } \Delta m = m_1 - m_2 = \frac{pV\mu}{RT_1} - \frac{pV\mu}{RT_2} = \frac{pV\mu}{R} \cdot \frac{(T_2 - T_1)}{T_1 T_2}.$$

$$\text{Молярна маса водню } \mu = 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг / моль}.$$

Підставимо значення фізичних величин до формули Δm :

$$\Delta m = \frac{pV\mu}{R} \cdot \frac{(T_2 - T_1)}{T_1 T_2} = \frac{5 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-3} (290 - 280)}{8,31 \cdot 290 \cdot 280} \approx 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ кг}.$$

$$\text{Відповідь: } \Delta m \approx 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ кг}.$$

При тестовому оцінюванні 1.5Е–3.

Приклад 11. Всередині закритого з обох кінців горизонтального циліндра міститься поршень, що може рухатися без тертя і поділяє циліндр на дві частини. В одній частині циліндра знаходиться 3 г водню, а в другій – 16 г кисню. Яку частину об'єму циліндра займає водень? Об'єм поршня вважаємо дуже малим, гази – ідеальними.

Розв'язання

Дано:

$$m_1 = 3 \text{ г} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ кг} (H_2)$$

$$m_2 = 16 \text{ г} = 16 \cdot 10^{-3} \text{ кг} (O_2)$$

$$\mu_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг / моль}$$

$$\mu_2 = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг / моль}$$

$$\frac{V_1}{V} ? \quad \frac{V_2}{V} ?$$

З умови задачі випливає, що температура і тиск обох газів однакові. Коли б ці гази містили однакову кількість молекул, то і їх об'єми були б однакові (закон Авогадро).

Проте, вони різні: кількість молей кисню

$$\nu_2 = \frac{m_2}{\mu_2} = \frac{16 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}} = \frac{1}{2} \text{ моля (кисень)}.$$

Кількість молей водню:

$$\nu_1 = \frac{m_1}{\mu_1} = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} = \frac{3}{2} \text{ моля (водень), внаслідок}$$

чого об'єми газів O_2 / H_2 повинні відноситися як $1/2 : 3/2 = 1/3$. З умови

$$p_1 = p_2 = p. \text{ Рівняння стану ідеального газу: } pV_1 = \frac{m_1}{\mu_1} RT - \text{ для водню;}$$

$pV_2 = \frac{m_2}{\mu_2} RT$ – для кисню. Або $pV_1 = \nu_1 RT$ та $pV_2 = \nu_2 RT$. Звідси: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2} = 3$

. $V_1 = 3V_2 = 3(V - V_1) \Rightarrow 4V_1 = 3V$; $V_1 = 3/4V$; $V_2 = 1/4V$

або: $V_1/V = 3/4$; $V_2/V = 1/4$.

Відповідь: $V_1/V = 3/4$; $V_2/V = 1/4$.

Приклад 12. Один кіломоль вуглекислого газу має масу 44 кг. Визначити густину вуглекислого газу за нормальних умов і масу молекули.

Розв'язання

Дано:	Один моль CO_2 – вуглекислого газу має масу
$\mu = 44 \cdot 10^{-3} \text{ кг / моль}$	$\mu = 44 \cdot 10^{-3} \text{ кг / моль}$.
$V = 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$	А один кіломоль – $\mu = 44 \text{ кг / моль}$.
$\rho?$ $m_0?$	При нормальних умовах один моль будь-якого газу, отже, і вуглекислого газу займає об'єм $V = 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$.

При нормальних умовах один кіломоль будь-якого газу, отже, і вуглекислого газу (44 кг) займає об'єм $22,4 \text{ м}^3$.

Тоді густина газу: $\rho = \frac{m}{V} = \frac{44}{22,4} \approx 1,96 \text{ кг / м}^3$.

В одному молі будь-якої речовини знаходиться кількість молекул, що дорівнює числу Авогадро $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$. В кіломолі – $N_0 = 6,02 \cdot 10^{26} \text{ молекул}$.

Отже, маса однієї молекули: $m_0 = \frac{m}{N_0} = \frac{44}{6,02 \cdot 10^{26}} = 7,3 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$.

Відповідь: $\rho = 1,96 \text{ кг / м}^3$, $m_0 = 7,3 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$.

При тестовому оцінюванні: 1.96; 7.3E-26.

Приклад 13. Визначити масу кисню, який міститься в посудині об'ємом 3л, якщо концентрація молекул газу $2 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3}$.

Розв'язання

Дано:	
$\mu = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг / моль}$	Маса газу: $m = \mu \nu = \mu \frac{N}{N_A}$,
$V = 3 \text{ л} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$	
$n = 2 \cdot 10^{24} \text{ м}^{-3}$	де ν – кількість молей, N_A – стала Авогадро, N –
$m?$	кількість молекул в об'ємі V : $N = nV$,
	де n – концентрація молекул.

Підставимо вираз для N в першу формулу для маси:

$$m = \mu \frac{nV}{N_A} = \frac{32 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{24} \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{6,02 \cdot 10^{23}} = 3,2 \cdot 10^{-4} \text{ кг}.$$

Відповідь: $m = 3,2 \cdot 10^{-4} \text{ кг}$.

При тестовому оцінюванні: 3.2E-4.

Приклад 14. Скільки електронів міститься в 1 см^3 свинцю? Густина свинцю 11300 кг/м^3 , атомна маса 207, номер в періодичній системі 82.

Дано:

$z = 82$ – зарядове число,

$A = 207$ – масове число,

$\mu = 207 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$,

$V = 1 \text{ см}^3 = 10^{-6} \text{ м}^3$,

$\rho = 11300 \text{ кг/м}^3$;

N_E ?

Розв'язання

Номер свинцю в періодичній системі або зарядове число 82. Це означає, що навколо ядра атома свинцю обертаються 82 електрони. Отже, щоб визначити число електронів в 1 см^3 свинцю, потрібно спочатку визначити число атомів свинцю в 1 см^3 .

Число атомів: $N_{Am} = \frac{m}{\mu} N_A$, де

$N_A = 6,025 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ – стала Авогадро, $m/\mu = \nu$ – число молей. Маса

свинцю: $m = \rho V$. Тоді число атомів $N_{Am} = \frac{\rho V}{\mu} N_A$.

Кількість електронів: $N_E = N_{Am} \cdot 82 = \frac{\rho V N_A \cdot 82}{\mu}$;

$$N_E = \frac{11300 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-6} \cdot 6,025 \cdot 10^{23} \cdot 82}{207 \cdot 10^{-3}} \approx 2,69 \cdot 10^{24} = 27 \cdot 10^{23} \text{ електронів}.$$

Відповідь: $N_E = 27 \cdot 10^{23}$ електронів.

При тестовому оцінюванні: 27E+23.

Приклад 15. Чому дорівнює густина повітря в посудині, якщо вона відкачана до найвищого розрідження, якого можна досягнути сучасними лабораторними методами тиск $10^{-11} \text{ мм.рт.ст.}$ Температура повітря 15° C .

Дано:

$p = 133,3 \cdot 10^{-11} \text{ Па}$

$t = 15^\circ \text{ C} \Rightarrow T = 288 \text{ К}$

$\mu_{\text{пов}} = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$

$R = 8,31 \text{ Дж/моль} \cdot \text{К}$

ρ – ?

Розв'язання

Рівняння стану ідеального газу:

$$pV = \nu RT,$$

де $\nu = m/\mu$ – кількість молей повітря в посудині.

Домножимо рівняння стану на $1/V$. Врахуємо, що

$m/V = \rho$. Отримаємо вираз для тиску:

$$p = \frac{\rho RT}{\mu}, \text{ звідки випливає, що } \rho = \frac{p\mu}{RT}.$$

Після підстановки числових значень отримаємо:

$$\rho = \frac{133,3 \cdot 10^{-11} \cdot 29 \cdot 10^{-3}}{8,31 \cdot 288} = 1,6 \cdot 10^{-14} \text{ кг/м}^3.$$

Відповідь: $\rho = 1,6 \cdot 10^{-14} \text{ кг/м}^3$.

При тестовому оцінюванні 1.6E-14

Приклад 16. До якої температури потрібно ізобарно нагріти ідеальний газ, щоб його густина зменшилася у три рази порівняно з густиною цього газу при $t = 10^\circ\text{C}$?

Дано:

$$t_1 = 10^\circ\text{C} \Rightarrow T_1 = 283 \text{ K}$$

$$\frac{\rho_1}{\rho} = 3$$

$$T - ?$$

Розв'язання

Густина ідеального газу знайдемо з рівняння стану ідеального газу:

$$pV = \frac{m}{\mu}RT \Rightarrow \rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}$$

Отже, для двох станів при T_1 та T відповідно

маємо: $\rho_1 = \frac{p\mu}{RT_1}$ та $\rho = \frac{p\mu}{RT}$. Використаємо умову задачі:

$$\frac{\rho_1}{\rho} = \frac{T}{T_1} = 3 \Rightarrow T = 3T_1$$

$$T = 3T_1 = 3 \cdot 283 = 849 \text{ K}$$

Відповідь: $T = 849 \text{ K}$

При тестовому оцінюванні 849

Приклад 17. Поршень у компресорі, рухаючись зверху вниз, щоразу забирає $4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ повітря при температурі 270 K і нормальному атмосферному тиску ($p_0 = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$) та нагнітає його в резервуар об'ємом $1,5 \text{ м}^3$. Температура в резервуарі стала і дорівнює 318 K . Скільки рухів повинен зробити поршень у компресорі, щоб тиск у резервуарі підвищився на $2,02 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$.

Дано:

$$V_0 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$T_0 = 270 \text{ K}$$

$$p_0 = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па (Н/м}^2\text{)}$$

$$V_1 = 1,5 \text{ м}^3$$

$$T_1 = 318 \text{ K}$$

$$\Delta p = 2,02 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$$

$$n - ?$$

Розв'язання

Масу повітря m , яку забирає поршень компресора під час кожного руху зверху вниз, можна визначити з рівняння стану ідеального газу:

$$p_0 V_0 = \frac{m}{\mu} R T_0.$$

Потрапляючи в резервуар, ця маса повітря створює в ньому парціальний і додатковий

тиск $p_1 = \frac{m}{\mu V_1} R T_1$, що ми визначили з

рівняння для другого стану. Виключимо з системи цих двох рівнянь масу повітря m . Для цього знайдемо m з першого рівняння: $m = \frac{p_0 V_0 \mu}{RT_0}$,

підставимо в формулу для p_1 та обчислимо тиск після одного руху поршня:

$$p_1 = \frac{p_0 V_0 T_1}{V_1 T_0}. \text{ З кожним рухом поршня тиск у резервуарі буде збільшуватись}$$

на $\Delta p = n p_1$, де n – кількість рухів поршня зверху вниз.

$$\text{Звідси: } n = \frac{\Delta p V_1 T_0}{p_0 V_0 T_1} = \frac{2,02 \cdot 10^5 \cdot 1,5 \cdot 270}{1,01 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot 318} = 640 \text{ рухів.}$$

Відповідь: $n = 640$.

При тестовому оцінюванні 640.

Приклад 18. Знайти кількість ходів поршня n вакуумного насоса, щоб з балону об'ємом V відкачати газ від тиску p_0 до тиску p . Об'єм циліндра насоса становить ΔV , систему вважати ідеалізованою.

Дано:

V

p_0

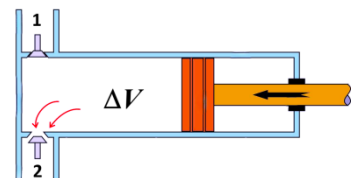
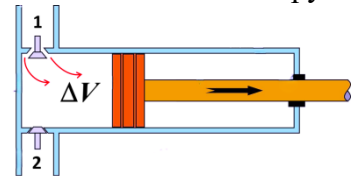
p

ΔV

$n - ?$

Розв'язання

Спрощена схема поршневого вакуумного насоса складається з циліндра з поршнем та блоку клапанів: впускного 1 та випускного 2. Під час процесу, поршень рухаючися вперед-назад відкачує порціями ΔV газ із балону об'ємом V (ємність на рисунку не показана). Розглянемо детальніше: цикл починається із такту впуску: поршень рухається вправо, відкривається впускний клапан 1 і з балону газ під тиском p_0 надходить до циліндру об'ємом ΔV . При такому розширенні, газ займає увесь об'єм системи «циліндр+балон». Очевидно, що у кінці такту впуску об'єм газу становитиме: об'єм балону + об'єм циліндра: $V + \Delta V$, а тиск газу зменшиться від початкового значення p_0 до деякого значення p_1 .



Під час такту випуску, поршень рухається вліво, стискаючи газ у циліндрі; впускний клапан 1 закривається, відкривається випускний клапан 2, випускаючи об'єм газу ΔV у атмосферу.

Цикл повторюється n -разів до досягнення у балоні необхідного тиску p .

Для спрощення розрахунків, вважаємо систему «циліндр+балон» ідеалізованою: а) відсутній «мертвий об'єм» насоса, б) температура системи не змінюється ($T = const$). Отже, застосуємо закон Бойля-Маріотта $pV = const$:

$$p_0 V = p_1 (V + \Delta V),$$

і знайдемо тиск у балоні p_1 у кінці першого циклу ($n = 1$):

$$p_1 = \frac{p_0 V}{(V + \Delta V)}.$$

Під час другого циклу ($n = 2$) початковий тиск становить вже значення p_1 , отже знайдемо тиск у балоні p_2 у кінці другого циклу ($n = 2$):

$$p_1 V = p_2 (V + \Delta V) \Rightarrow p_2 = \frac{p_1 V}{V + \Delta V} = p_0 \left(\frac{V}{V + \Delta V} \right)^2.$$

Аналогічно у кінці третього циклу ($n = 3$) тиск: $p_3 = p_0 \left(\frac{V}{V + \Delta V} \right)^3$.

Отже, після n циклів: $p_n = p_0 \left(\frac{V}{V + \Delta V} \right)^n$. Врахуємо, що за умовою $p_n = p$, тоді маємо:

$$p = p_0 \left(\frac{V}{V + \Delta V} \right)^n, \text{ або } \frac{p}{p_0} = \left(\frac{V}{V + \Delta V} \right)^n$$

Щоб знайти кількість ходів поршня n , прологарифмуємо цей вираз:

$$\lg \frac{p}{p_0} = n \cdot \lg \left(\frac{V}{V + \Delta V} \right) \Rightarrow n = \frac{\lg \frac{p}{p_0}}{\lg \left(\frac{V}{V + \Delta V} \right)}.$$

Приклад 19. Балон з повітрям, тиск якого 100 кПа , сполучений з поршневим повітряним насосом. Після п'яти ходів поршня тиск повітря в балоні став 32 кПа . Визначити відношення об'ємів балона та циліндра поршневого насоса.

Дано:

$$p_0 = 100 \text{ кПа} = 10^5 \text{ Па}$$

$$p = 32 \text{ кПа} = 0,32 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

$$n = 5$$

$$\frac{V_1}{V_2} - ?$$

Розв'язання

Нехай V_1 та V_2 – об'єми балона та циліндра поршневого насоса. Після першого сполучення циліндра з балоном за законом Бойля-Маріотта маємо:

$$p_0 V_1 = p_1 (V_1 + V_2) \Rightarrow p_1 = \frac{p_0 V_1}{V_1 + V_2}.$$

Після другого сполучення циліндра з балоном:

$$p_1 V_1 = p_2 (V_1 + V_2) \Rightarrow p_2 = \frac{p_1 V_1}{V_1 + V_2} \Rightarrow p_2 = \frac{p_0 V_1^2}{(V_1 + V_2)^2} = p_0 \left(\frac{V_1}{V_1 + V_2} \right)^2.$$

Аналогічно після п'ятого сполучення: $p_5 = p_0 \left(\frac{V_1}{V_1 + V_2} \right)^5$.

Для знаходження відношення об'ємів перетворимо цей вираз:

$$\frac{p_5}{p_0} = \left(\frac{V_1}{V_1 + V_2} \right)^5 \text{ або } \frac{p_0}{p_5} = \left(\frac{V_1 + V_2}{V_1} \right)^5.$$

Візьмемо десятичний логарифм:

$$\lg \frac{p_0}{p_5} = 5 \cdot \lg \left(\frac{V_1 + V_2}{V_1} \right) \Rightarrow \lg \left(\frac{V_1 + V_2}{V_1} \right) = \frac{1}{5} \lg \frac{p_0}{p_5}.$$

Підставимо значення тисків та знайдемо десятичний логарифм:

$$\lg \left(\frac{V_1 + V_2}{V_1} \right) = \frac{1}{5} \lg \frac{10^5}{0,32 \cdot 10^5} = \frac{1}{5} \lg 3,125 \approx \frac{1}{5} \cdot 0,4949 = 0,09898$$

Щоб знайти $\frac{V_1 + V_2}{V_1}$, потенціюємо 0,09898:

$$10^{\lg \left(\frac{V_1 + V_2}{V_1} \right)} = \frac{V_1 + V_2}{V_1} = 10^{0,09898} = 1,256.$$

Отже, $\frac{V_1 + V_2}{V_1} = 1,256$.

$$V_1 + V_2 = 1,256V_1 \Rightarrow 0,256V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{0,256} = 3,91$$

Відповідь: $\frac{V_1}{V_2} = 3,91$.

При тестовому оцінюванні 3.91.

Приклад 20. При нагріванні деякої маси газу на 1° при сталому тиску об'єм газу збільшився на $1/300$ частину його попереднього значення. Визначити початкову температуру газу.

Дано:

$$\Delta V = \frac{V_1}{300}$$

$$\Delta T = 1^\circ = 1K$$

$$p = \text{const}$$

$$T_1 - ?$$

Розв'язання

$p = \text{const}$ – процес ізобарний, застосуємо закон Гей-

Люссака:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}. \text{ Врахуємо, що за умовою } V_2 = V_1 + \frac{V_1}{300}; T_2 = T_1 + 1$$

Перепишемо для зручності закон Гей-Люссака: $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$ та

підставимо вирази для V_2 та T_2 та скоротимо V_1 :

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_1 + \frac{V_1}{300}}{T_1 + 1} \Rightarrow \frac{1}{T_1} = \frac{301}{300(T_1 + 1)} \Rightarrow T_1 = 300K.$$

Відповідь: $T_1 = 300K$.

При тестовому оцінюванні 300.

Приклад 21. 5 л кисню, що знаходиться в закритій посудині місткістю 5 л при температурі $20^\circ C$, нагрівають до температури $40^\circ C$. Знайти тиск газу до і після нагрівання.

Дано:

$$m = 5\text{г} = 5 \cdot 10^{-3}\text{кг}$$

$$O_2 \Rightarrow \mu = 32 \cdot 10^{-3}\text{кг/моль}$$

$$V = 5\text{л} = 5 \cdot 10^{-3}\text{м}^3$$

$$t_1 = 20^\circ C \Rightarrow T_1 = 293K$$

$$t_2 = 40^\circ C \Rightarrow T_2 = 313K$$

$$p_1 - ? \quad p_2 - ?$$

Розв'язання

$V = \text{const}$ – процес ізохорний, застосуємо закон Шарля для знаходження тиску газу після нагрівання:

$$\frac{p}{T} = \text{const}; \quad \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \Rightarrow p_2 = T_2 \frac{p_1}{T_1}.$$

Для знаходження тиску газу p_1 до нагрівання

$$\text{використаємо рівняння стану: } p_1 V = \frac{m}{\mu} RT_1.$$

$$\text{До нагрівання тиск } p_1 = \frac{m RT_1}{\mu V} = \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 8.31 \cdot 293}{32 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 7,6 \cdot 10^4 \text{Па}.$$

$$\text{Після нагрівання тиск } p_2 = T_2 \frac{p_1}{T_1} = \frac{313 \cdot 7,6 \cdot 10^4}{293} = 8,1 \cdot 10^4 \text{Па}.$$

Цю задачу можна розв'язати в одну дію: $p_2 = mRT_2 / (\mu V)$.

Відповідь: $p_1 = 7,6 \cdot 10^4 \text{Па}$, $p_2 = 8,1 \cdot 10^4 \text{Па}$.

При тестовому оцінюванні 7.6E+4; 8.1E+4.

Приклад 22. У скільки разів маса повітря взимку ($0^\circ C$) більша за його масу влітку ($22^\circ C$)? Тиск однаковий

Дано:

$$t_1 = 0^\circ C \Rightarrow 273K - \text{зима}$$

$$t_2 = 22^\circ C \Rightarrow 295K - \text{літо}$$

$$p = \text{const}$$

$$\frac{m_1}{m_2} - ?$$

Розв'язання

Взимку повітря стискається, його густина збільшується. Відповідно, збільшується вага 1 м^3 повітря. Щоб знайти, в скільки разів більша вага повітря взимку у порівнянні з літом, треба знайти відношення густини повітря взимку ρ_1 до густини повітря влітку ρ_2 .

Скористаємося рівнянням стану ідеального газу для знаходження густини:

$$pV_1 = \frac{m_1}{\mu} RT_1 - \text{взимку}; \quad pV_2 = \frac{m_2}{\mu} RT_2 - \text{влітку}.$$

Поділимо перше рівняння на друге:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{V_1 T_2}{V_2 T_1} \Rightarrow \frac{m_1 V_2}{m_2 V_1} = \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{T_2}{T_1},$$

де $\rho_1 = \frac{m_1}{V_1}$ – густина повітря взимку; $\rho_2 = \frac{m_2}{V_2}$ – густина повітря влітку.

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{295}{273} \approx 1,08 \approx 1,1.$$

Відповідь: 1,1.

При тестовому оцінюванні 1.1.

Приклад 23. З колби об'ємом $V = 200 \text{ см}^3$, відкачали повітря до деякого тиску p та закрили пробкою з краном. Для вимірювання тиску в колбі шийку колби занурили у воду на незначну глибину і відкрили кран. В результаті у колбу увійшла вода масою $m = 192 \text{ г}$. Визначити початковий тиск p у колбі, якщо атмосферний тиск $p_0 = 100 \text{ кПа}$.

Дано:

$$V = 200 \text{ см}^3 = 200 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$$

$$m = 192 \text{ г} = 192 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$$

$$p_0 = 100 \text{ кПа} = 100 \cdot 10^3 \text{ Па}$$

$$p - ?$$

Розв'язання

Температура при маніпуляціях з колбою не змінювалась, тому вважаємо процес ізотермічним $T = \text{const}$, використаємо закон Бойля-Маріотта для двох станів:

$$pV = p_0 V_1,$$

де p – тиск розрідженого повітря в колбі, який треба знайти; V – об'єм закритої колби при початковому стані; p_0 – тиск повітря в колбі з водою, що зрівнявся з зовнішнім атмосферним тиском, бо вода заходила в колбу доти, поки ці тиски не зрівноважились; V_1 – об'єм стиснутого повітря в колбі після заходження води. $V_1 = V - \Delta V$, де зміну об'єма ΔV знайдемо, використовуючи зв'язок між масою води та її густиною:

$$\Delta V = \frac{m}{\rho} = \frac{192 \cdot 10^{-3}}{10^3} = 192 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Тут $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$ – густина води.

З закона Бойля-Маріотта маємо: $p = \frac{p_0 V_1}{V} = \frac{p_0 (V - \Delta V)}{V}.$

Підставимо значення фізичних величин:

$$p = \frac{p_0(V - \Delta V)}{V} = \frac{100 \cdot 10^3 (200 \cdot 10^{-6} - 192 \cdot 10^{-6})}{200 \cdot 10^{-6}} = 0,04 \cdot 10^5 = 4 \cdot 10^3 \text{ Па або } 4 \text{ кПа}$$

Відповідь: $p = 4 \cdot 10^3 \text{ Па або } 4 \text{ кПа}$.

При тестовому оцінюванні 4Е+3.

Приклад 24. Об'єм повітряної бульбашки під час її піднімання з дна озера на поверхню збільшується втричі. Яка глибина озера?

Дано:

$$\frac{V_2 = 3V_1}{h - ?}$$

Розв'язання

Для спрощення, прийемо, що температура води на будь-якій глибині стала, отже процес ізотермічний, за законом Бойля-Маріотта для двох станів повітря у бульбашці:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2,$$

де p_1, p_2 – тиски повітря у бульбашці біля дна та на поверхні озера відповідно; V_1, V_2 – об'єми бульбашки біля дна та на поверхні озера.

Тиск p_2 повітря у бульбашці біля поверхні озера дорівнює атмосферному тиску p_0 . Тоді з врахуванням збільшення об'єму: $p_1 V_1 = 3p_0 V_1 \Rightarrow p_1 = 3p_0$ – тиск біля дна.

Отже, збільшення тиску біля дна озера $\Delta p = p_1 - p_0 = 3p_0 - p_0 = 2p_0$.

З гідростатики відомо, що гідростатичний тиск для нерухомої рідини (див. посібник «Фізика. Теорія і практика. Частина I. Механіка», стор. 143):

$$\Delta p = \rho g h,$$

де ρ – густина води; h – глибина озера.

Прирівняємо праві частини двох останніх рівнянь:

$$2p_0 = \rho g h \Rightarrow h = \frac{2p_0}{\rho g};$$

$$h = \frac{2p_0}{\rho g} = \frac{2 \cdot 1,01 \cdot 10^5}{10^3 \cdot 9,8} \approx 20,5 \text{ м}.$$

Відповідь: $h = 20,5 \text{ м}$.

При тестовому оцінюванні 20.5.

Приклад 25. Скільки молекул повітря знаходиться в кімнаті об'ємом 240 м^3 при температурі 15°C та тиску 10^5 Па ?

Дано:

$$\frac{V_1 = 240 \text{ м}^3}{N - ?}$$

Розв'язання

Приклад розв'язування такого типу задач із застосуванням рівняння стану ідеального газу вже було розглянуто (приклад №3). Наведемо ще один спосіб з використанням об'єднаного газового закону – рівняння Клапейрона.

Порівняємо стани даної маси повітря при заданих (p_1, V_1, T_1) та нормальних (p_0, V_0, T_0) умовах: $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_0 V_0}{T_0}$ (1). Об'єм повітря за нормальних умов:

$$V_0 = \frac{m}{\rho_0},$$

де ρ_0 – густина повітря за н.у. Після підстановки в рівняння (1):

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_0 m}{T_0 \rho_0} \Rightarrow m = \frac{p_1 V_1 T_0 \rho_0}{p_0 T_1} - \text{знайдемо масу повітря.}$$

Кількість молей в цій масі повітря рівна:

$$\nu = \frac{m}{\mu} = \frac{p_1 V_1 T_0 \rho_0}{p_0 T_1 \mu}.$$

Оскільки 1 моль будь-якого газу містить число молекул рівне сталій Авогадро N_A , то знайдемо кількість молекул в кімнаті:

$$N = N_A \cdot \nu = N_A \frac{p_1 V_1 T_0 \rho_0}{p_0 T_1 \mu},$$

де $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$; $\rho_0 = 1,29 \text{ кг} / \text{м}^3$ – густина повітря при нормальних умовах; $p_0 = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$ – тиск повітря при нормальних умовах; $\mu = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг} / \text{моль}$ – молярна маса повітря, $T_0 = 273 \text{ К}$ – температура при нормальних умовах.

$$N = N_A \frac{p_1 V_1 T_0 \rho_0}{p_0 T_1 \mu} = 6,02 \cdot 10^{23} \frac{10^5 \cdot 240 \cdot 273 \cdot 1,29}{1,01 \cdot 10^5 \cdot 288 \cdot 29 \cdot 10^{-3}} \approx 6 \cdot 10^{27}.$$

Існує більш раціональний спосіб розв'язування цієї задачі використавши рівняння стану ідеального газу через концентрацію:

$$p = nkT = \frac{N}{V} kT \Rightarrow N = \frac{pV}{kT} - \text{кількість молекул у кімнаті.}$$

Тут $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} / (\text{моль} \cdot \text{К})$ – стала Больцмана.

$$N = \frac{pV}{kT} = \frac{10^5 \cdot 240}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 288} = 6 \cdot 10^{27}.$$

Відповідь: $N = 6 \cdot 10^{27}$.

При тестовому оцінюванні 6E+27.

Приклад 26. У запаяній з одного кінця скляній трубці довжиною $\ell = 90 \text{ см}$ знаходиться стовпчик повітря, закритий зверху стовпчиком ртуті висотою $h = 30 \text{ см}$. Стовпчик ртуті доходить до верхнього края трубки. Трубку обережно перевертають відкритим кінцем вниз над іншою посудиною.

Частина ртуті виливається. Яка висота стовпчика ртуті, що залишиться в трубці, якщо атмосферний тиск становить $H = 750 \text{ мм рт.ст.}$?

Дано:

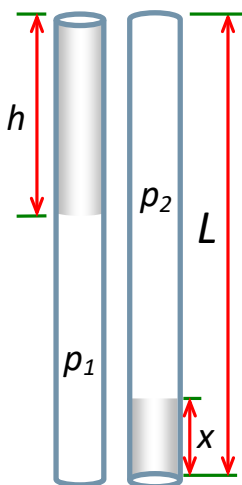
$$T = \text{const}$$

$$\ell = 90 \text{ см} = 900 \text{ мм}$$

$$h = 30 \text{ см} = 300 \text{ мм}$$

$$H = 750 \text{ мм рт.ст.}$$

$$x - ?$$



Розв'язання

Розглянемо умову задачі. У запаяній вертикальній трубці тиск повітря p_1 створений сумою тисків: атмосферного H та стовпу ртуті висотою h :

$$p_1 = (H + h) \text{ мм рт.ст.}$$

Знайдемо об'єм цього повітря V_1 :

$$V_1 = S(\ell - h).$$

Після того, як трубку перевернули, лише атмосферний тиск не дає вилитися ртуті повністю, а результируючий тиск p_2 буде рівний різниці тисків: атмосферного та стовпу ртуті висотою x ,

$$p_2 = (H - x) \text{ мм рт.ст.},$$

знайдемо об'єм повітря V_2 у в трубці:

$$V_2 = S(\ell - x).$$

Вважаємо, що процес ізотермічний $T = \text{const}$, за законом Бойля-Маріотта:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2. \quad (1)$$

Підставимо отримані вище вирази з p та V до (1):

$$(H + h)S(\ell - h) = (H - x)S(\ell - x).$$

Виконаємо скорочення S , розкриємо дужки, та

врешті отримаємо квадратне рівняння:

$$H\ell - Hh + h\ell - h^2 = H\ell - Hx - x\ell + x^2 \Rightarrow x^2 - (H + \ell)x + h(H - \ell + h) = 0.$$

Нагадаємо, що квадратне рівняння має вигляд: $ax^2 + bx + c = 0$, у нашому випадку коефіцієнти рівні: $a = 1$; $b = -(H + \ell)$; $c = h(H - \ell + h)$.

Корені квадратного рівняння знайдемо за формулою: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$,

$$\text{Дискримінант рівний } D = \sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{(H + \ell)^2 - 4h(H - \ell + h)}.$$

Враховуючи, що $a = 1$, корені

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \left[(H + \ell) \pm \sqrt{(H + \ell)^2 - 4h(H - \ell + h)} \right].$$

Перший корінь (коли дискримінант додається) не задовольняє умові задачі, бо висота стовпчика x виходить більшою за довжину трубки ℓ . Обчислимо другий корінь:

$$x_2 = \frac{1}{2} \left[(750 + 900) - \sqrt{(750 + 900)^2 - 4 \cdot 300(750 - 900 + 300)} \right] \approx 27,7 \text{ мм} \approx 30 \text{ мм}.$$

Відповідь: $x = 30 \text{ мм}$.

При тестовому оцінюванні 0.03.

Приклад 27. Два балони з'єднані трубкою з краном. В першому знаходиться газ під тиском $p_1 = 10^5 \text{ Па}$, а в другому $p_2 = 0,6 \cdot 10^5 \text{ Па}$. Ємність першого балона $V_1 = 1 \text{ л}$, другого $V_2 = 3 \text{ л}$. Який тиск встановиться в балонах (в *мм.рт.ст.*), якщо відкрити кран. Температура *const*, об'ємом трубки знехтувати.

Дано:

$$T = \text{const}$$

$$p_1 = 10^5 \text{ Па}$$

$$p_2 = 0,6 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

$$V_1 = 1 \text{ л} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$V_2 = 3 \text{ л} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$p - ?$$

$$\left. \begin{aligned} p_1 V_1 &= \frac{m_1}{\mu} RT \\ p_2 V_2 &= \frac{m_2}{\mu} RT \end{aligned} \right\} \text{додамо} \Rightarrow p_1 V_1 + p_2 V_2 = \frac{RT}{\mu} (m_1 + m_2)$$

Запишемо рівняння стану ідеального газу для системи балонів при відкритому крані, враховуючи, що спільний об'єм став $V = V_1 + V_2$, відповідно, – маса $m = m_1 + m_2$:

$$p(V_1 + V_2) = \frac{(m_1 + m_2)}{\mu} RT,$$

де p – тиск, що встановився у системі з'єднаних балонів.

Оскільки праві частини рівнянь стану при закритому та відкритому крані рівні, прирівняємо і ліві частини та знайдемо тиск, що встановився у системі з'єднаних балонів:

$$p(V_1 + V_2) = p_1 V_1 + p_2 V_2 \Rightarrow p = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{(V_1 + V_2)}.$$

Підставимо значення фізичних величин, при цьому отримаємо значення тиску в Па:

$$p = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{(V_1 + V_2)} = \frac{10^5 \cdot 1 \cdot 10^{-3} + 0,6 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{(1 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-3})} = 0,7 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Щоб отримати тиск у мм рт. ст., врахуємо, що 1 мм рт. ст. = 133,3 Па:

$$\frac{0,7 \cdot 10^5}{133,3} \approx 525 \text{ мм рт. ст.} \quad \text{Відповідь: } p = 525 \text{ мм рт. ст.}$$

Приклад 28. В посудині знаходиться 14 г азоту та 9 г водню при температурі 10°C і тиску 1МПа . Знайти молярну масу суміші та об'єм посудини.

Дано:

$$m_1 = 14\text{г} = 14 \cdot 10^{-3}\text{кг} (N_2)$$

$$m_2 = 9\text{г} = 9 \cdot 10^{-3}\text{кг} (H_2)$$

$$\mu_1 = 28 \cdot 10^{-3}\text{кг/моль}$$

$$\mu_2 = 2 \cdot 10^{-3}\text{кг/моль}$$

$$t = 10^{\circ}\text{C} \Rightarrow T = 283\text{K}$$

$$p = 1\text{МПа} = 1 \cdot 10^6\text{Па}$$

$$\mu_{\text{сум}} ? V ?$$

Розв'язання

За законом Дальтона тиск суміші газів дорівнює сумі парціальних тисків компонентів суміші:

$$p = p_1 + p_2 \quad (1)$$

Парціальні тиски p_1 та p_2 знайдемо з рівняння стану ідеального газу:

$$\left. \begin{aligned} p_1 V &= \frac{m_1}{\mu_1} RT - \text{для } N_2 \quad (2) \\ p_2 V &= \frac{m_2}{\mu_2} RT - \text{для } H_2 \quad (3) \end{aligned} \right\} +$$

$$\text{Для суміші рівняння стану: } pV = \left(\frac{m_1 + m_2}{\mu_{\text{сум}}} \right) RT \quad (4)$$

$$\text{Додамо рівняння (2) та (3) системи: } (p_1 + p_2)V = RT \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \right) \quad (5)$$

Тоді з врахуванням закону Дальтона (1) ліві частини виразів (4) та (5) рівні:

$$pV = (p_1 + p_2)V.$$

$$\text{Звідси слідує рівність правих частин: } \left(\frac{m_1 + m_2}{\mu_{\text{сум}}} \right) RT = RT \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \right).$$

Молярна маса суміші:

$$\mu_{\text{сум}} = \frac{m_1 + m_2}{\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}} = \frac{14 \cdot 10^{-3} + 9 \cdot 10^{-3}}{\frac{14 \cdot 10^{-3}}{28 \cdot 10^{-3}} + \frac{9 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}}} = \frac{23 \cdot 10^{-3}}{0,5 + 4,5} = 4,6 \cdot 10^{-3}\text{кг/моль}.$$

$$\text{Зауважимо, що корисною є формула: } \mu_{\text{сум}} = \frac{m_1 + m_2}{\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}} = \frac{m_1 + m_2}{\nu_1 + \nu_2}, \text{ яку можна}$$

$$\text{отримати так: } \nu_{\text{сум}} = \nu_1 + \nu_2; \quad \frac{m_1 + m_2}{\mu_{\text{сум}}} = \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \Rightarrow \mu_{\text{сум}} = \frac{m_1 + m_2}{\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}}.$$

де $\nu_1 = \frac{m_1}{\mu_1}$; $\nu_2 = \frac{m_2}{\mu_2}$ – кількість молей речовини масою m_1 та m_2 відповідно.

З (4) знайдемо об'єм посудини:

$$V = \frac{\left(\frac{m_1 + m_2}{\mu_{\text{сум}}} RT \right)}{p} = \frac{(14 \cdot 10^{-3} + 9 \cdot 10^{-3}) \cdot 8,31 \cdot 283}{4,6 \cdot 10^{-3} \cdot 10^6} \approx 0,0118 \text{ м}^3 = 1,18 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3.$$

Відповідь: $\mu_{\text{сум}} = 4,6 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$; $V = 1,18 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3$

При тестовому оцінюванні 4.6E-3; 1.18E-2

Приклад 29. Визначити густину суміші, що містить $m_1 = 4 \text{ г}$ водню та $m_2 = 32 \text{ г}$ кисню при температурі $T = 280 \text{ К}$ і тиску $p = 93 \text{ кПа}$. Який об'єм займає газ?

Дано:

$$m_1 = 4 \text{ г} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ кг}, (\text{H}_2)$$

$$m_2 = 32 \text{ г} = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг}, (\text{O}_2)$$

$$T = 280 \text{ К}$$

$$p = 93 \text{ кПа} = 93 \cdot 10^3 \text{ Па}$$

$$\rho_c ?, V ?$$

Розв'язання

Густина суміші газів з рівняння стану ідеального газу: $\rho_c = \frac{\mu_c p}{RT}$, де μ_c – молярна маса суміші, R – універсальна газова стала.

$$\text{Молярна маса суміші } \mu_c = \frac{m_c}{\sum_i \frac{m_i}{\mu_i}}, \text{ де } m_c -$$

маса суміші ($m_c = m_1 + m_2$), m_i та μ_i – маса і молярна маса і-тої компоненти. Тепер густина суміші:

$$\rho_c = \frac{(m_1 + m_2)p}{\left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \right) RT}.$$

$$m_1 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ кг}, \quad m_2 = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг}, \quad \mu_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}, \quad \mu_2 = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}, \\ p = 9,3 \cdot 10^4 \text{ Па}.$$

$$\rho_c = \frac{(4 \cdot 10^{-3} + 32 \cdot 10^{-3}) \cdot 9,3 \cdot 10^4}{\frac{4 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} + \frac{32 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}}} \cdot \frac{1}{8,31 \cdot 280} = 0,48 \text{ кг/м}^3.$$

Об'єм газу знайдемо, виходячи з означення густини:

$$V = m_c / \rho_c = (m_1 + m_2) / \rho_c, \\ V = (4 \cdot 10^{-3} + 32 \cdot 10^{-3}) / 0,48 = 0,075 \text{ м}^3.$$

Відповідь: $\rho_c = 0,48 \text{ кг/м}^3$; $V = 0,075 \text{ м}^3$.

При тестовому оцінюванні 0.48; 0.075.

Приклад 30. У склад повітря входить 23,6% кисню та 76,4% азота (по масі) при тиску $p = 100 \text{ кПа}$ та температурі $T = 290 \text{ К}$. Знайти густину повітря та парціальні тиски кисню і азоту.

Дано:

$$m_1 = 0,236 m_c \text{ для } (\text{O}_2)$$

$$\mu_1 = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг / моль}$$

$$m_2 = 0,764 m_c \text{ для } (\text{N}_2)$$

$$\mu_2 = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг / моль}$$

$$T = 290 \text{ К}$$

$$p = 100 \text{ кПа} = 100 \cdot 10^3 \text{ Па}$$

$$\rho_c ? p_1 ? p_2 ?$$

Розв'язання

Густину повітря визначимо як густину суміші газів (див. приклад №29):

$$\rho_c = \frac{(m_1 + m_2)p}{\left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right) R T}.$$

Підставимо вирази для мас газів:

$$\rho_c = \frac{(0,236 m_c + 0,764 m_c) \cdot p}{\left(\frac{0,236 m_c}{\mu_1} + \frac{0,764 m_c}{\mu_2}\right) R T} = \frac{p \mu_1 \mu_2}{0,236 \mu_2 + 0,764 \mu_1}.$$

Густина повітря:

$$\rho_c = \frac{p \mu_1 \mu_2}{0,236 \mu_2 + 0,764 \mu_1} = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 32 \cdot 10^{-3} \cdot 28 \cdot 10^{-3}}{0,236 \cdot 28 \cdot 10^{-3} + 0,764 \cdot 32 \cdot 10^{-3}} \approx 1,2 \text{ кг / м}^3.$$

Щоб визначити парціальні тиски кисню та азоту, запишемо рівняння стану для кожної з компонент суміші :

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu_1} R T$$

— для кисню та азоту.

$$p_2 V = \frac{m_2}{\mu_2} R T$$

Розділимо перше рівняння на друге, щоб виключити об'єм, та підставимо

вирази для мас газів: $\frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1 \mu_2}{\mu_1 m_2} = \frac{0,236 m_c \mu_2}{\mu_1 \cdot 0,764 m_c} = \frac{0,236 \mu_2}{0,764 \mu_1}.$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{0,236 \mu_2}{0,764 \mu_1} = \frac{0,236 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}{0,764 \cdot 32 \cdot 10^{-3}} = 0,27 \Rightarrow p_1 = 0,27 p_2.$$

З закону Дальтона для суміші газів маємо:

$$p = p_1 + p_2.$$

Після підстановки виразу для p_1 отримаємо:

$$p = p_1 + p_2 = 0,27 p_2 + p_2 = 1,27 p_2 = 10^5 \text{ Па за умовою задачі.}$$

$$1,27 p_2 = 10^5 \text{ Па} \Rightarrow p_2 = \frac{10^5}{1,27} \approx 7,87 \cdot 10^4 \text{ Па} \approx 79 \cdot 10^3 \text{ Па} = 79 \text{ кПа} \text{ — для азота.}$$

$$p_1 = 0,27 p_2 = 0,27 \cdot 79 \cdot 10^3 \approx 21,26 \cdot 10^3 \text{ Па} \approx 21 \text{ кПа} \text{ — парціальний тиск кисню.}$$

Зауважимо, що при тестовому оцінюванні відповідь треба записувати в СІ, якщо не вимагається в інших одиницях, в нормованому вигляді.

$$\text{Відповідь: } \rho_c = 1,2 \text{ кг/м}^3; \quad p_2 = 79 \text{ кПа}; \quad p_1 = 21 \text{ кПа}$$

$$\text{При тестовому оцінюванні } 1.2; \quad 7.9\text{E}+4; \quad 2.1\text{E}+4.$$

Приклад 31. Об'ємна частка діоксиду карбону у повітрі становить 0,03%. Знайдіть масову частку від загальної маси повітря. Чому дорівнює парціальний тиск діоксиду карбону за нормального атмосферного тиску?

Дано:

$$V_1 = 0,03\% V_n \text{ для } (\text{CO}_2)$$

$$\Rightarrow V_1 = 0,0003 V_n$$

$$T_0 = 273 \text{ К}$$

$$p_0 = 760 \text{ мм рт.ст.} =$$

$$= 1,013 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

$$m_1 = ?\% m_n; \quad p_1 ?$$

Розв'язання

Розглянемо умову задачі. Відомо, що повітря атмосфери складається із суміші газів, одним з яких є діоксид карбону, будемо вважати, що концентрація газів по висоті однакова, кожний компонент суміші займає весь об'єм атмосфери. Тиск атмосфери p визначається як сума парціальних тисків p_i усіх газів, що входять до її складу:

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_n = \sum p_i.$$

1) Об'єм діоксиду карбону в повітрі становить 0,03%. Це означає, що :

$$V_1 = \frac{V_n \cdot 0,03\%}{100\%} = 0,0003 V_n \text{ від об'єму усієї атмосфери.}$$

Щоб знайти масову частку ω_1 діоксиду карбону m_1 у повітрі, виразимо масу через густину ρ та об'єм:

$$\omega_1 = \frac{m_1}{m_n}, \quad m_n = \rho_n V_n \text{ — для повітря}; \quad m_1 = \rho_1 V_1 = \rho_1 \cdot 0,0003 V_n \text{ — для } \text{CO}_2.$$

Знайдемо масову частку ω_1 діоксиду карбону від маси всього повітря:

$$\omega_1 = \frac{m_1}{m_n} = \frac{\rho_1 \cdot 0,0003 V_n}{\rho_n V_n} = \frac{0,0003 \rho_1}{\rho_n}.$$

Густина діоксиду карбону та повітря при нормальних умовах відповідно:

$$\rho_1 = 1,98 \text{ кг/м}^3; \quad \rho_n = 1,29 \text{ кг/м}^3.$$

$$\omega_1 = \frac{m_1}{m_n} = \frac{0,0003 \rho_1}{\rho_n} = \frac{0,0003 \cdot 1,98}{1,29} \approx 0,00046 \text{ — частка } \text{CO}_2 \text{ від маси повітря.}$$

$$\omega_{\text{CO}_2} = 0,00046 \cdot 100\% = 0,046\% \text{ — масова частка } \text{CO}_2 \text{ повітря.}$$

Зрівняємо отриманий результат із табличними даними: масова частка

діоксиду карбону у повітрі складає 0,035–0,04% (зазначимо, що цей параметр залежить також від пори року, газ CO_2 виростовується рослинами у фотосинтезі, тому відсоток CO_2 зменшується, коли у північній півкулі літо).

Щоб визначити парціальний тиск вуглекислого газу у суміші з повітрям, запишемо рівняння стану для повітря та CO_2 за нормальних умов:

$$p_0 V_n = \frac{m_n}{\mu_n} RT_0,$$

$$p_1 V_n = \frac{m_1}{\mu_1} RT_0 = \frac{0,00046 m_n}{\mu_1} RT_0.$$

В другому рівнянні для CO_2 ми записали V_n , тому, що газ рівномірно розподілений по всьому об'єму атмосфери.

Поділимо перше рівняння на друге та підставимо значення фізичних величин, враховуючи, що молярні маси діоксиду карбону та повітря відповідно:

$$\mu_1 = 44 \cdot 10^{-3} \text{ кг / моль}; \quad \mu_n = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг / моль};$$

$$\frac{p_0}{p_1} = \frac{\mu_1}{0,00046 \mu_n} = \frac{44 \cdot 10^{-3}}{0,00046 \cdot 29 \cdot 10^{-3}} = 3298.$$

Звідси слідує, що парціальний тиск CO_2 :

$$p_1 = \frac{p_0}{3298} = \frac{1,013 \cdot 10^5}{3298} \approx 31 \text{ Па}.$$

Також визначимо парціальний тиск діоксиду карбону в атмосфері у міліметрах ртутного стовпа (мм.рт.ст.) – це цікаво з екологічних міркувань:

$$p_1 = \frac{p_0}{3298} = \frac{760 \text{ мм рт.ст.}}{3298} = 0,23 \text{ мм рт.ст.}$$

$$\text{Відповідь: } m_1 = 0,046\% m_n; \quad p_1 = 0,23 \text{ мм рт.ст. або } p_1 = 31 \text{ Па}.$$

При тестовому оцінюванні 0.046; 31.

Приклад 32. Є два балони з газом: один має місткість 3 л, другий – 4 л. В першому балоні газ знаходиться під тиском 202 кПа, а в другому – 101 кПа. Під яким тиском буде знаходитися газ, якщо ці балони з'єднати між собою? Вважати, що температура в балонах однакова та постійна.

Дано:

$$V_1 = 3 \text{ л} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$V_2 = 4 \text{ л} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$p_1 = 202 \text{ кПа} = 2,02 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

$$p_2 = 101 \text{ кПа} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

$$T = \text{const}$$

$$p?$$

Розв'язання

Умова даної задачі практично ідентична прикладу №27. Але тут ми застосуємо дещо інший шлях розв'язку, зробивши наголос на законах Дальтона та Бойля-Маріотта. Студент має можливість вибрати будь-який спосіб розв'язання.

Нехай p_3 – це парціальний тиск газу з першого балона в суміші, що утворилась при з'єднанні балонів; p_4 – парціальний тиск газу з другого балона в суміші.

За законом Дальтона тиск суміші газів дорівнює сумі парціальних тисків компонентів суміші:

$$p = p_3 + p_4. \quad (1)$$

Оскільки процес ізотермічний $T = \text{const}$, то парціальний тиск газу в кожному балоні та в системі з'єднаних балонів можна знайти за законом Бойля-Маріотта.

$$p_1 V_1 = p_3 V; \quad p_2 V_2 = p_4 V, \text{ де } V = V_1 + V_2 - \text{спільний об'єм системи балонів.}$$

З цих рівнянь знайдемо парціальний тиск газу в кожному з балонів після їх з'єднання:

$$p_3 = \frac{p_1 V_1}{V}; \quad p_4 = \frac{p_2 V_2}{V}. \quad (2)$$

Підставимо отримані парціальні тиски (2) в закон Дальтона (1):

$$p = \frac{p_1 V_1}{V} + \frac{p_2 V_2}{V} = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2};$$

$$p = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2} = \frac{2,02 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-3} + 1,01 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-3}} \approx 141 \cdot 10^3 \text{ Па} = 141 \text{ кПа}.$$

$$\text{Відповідь: } p = 141 \cdot 10^3 \text{ Па} = 141 \text{ кПа}.$$

При тестовому оцінюванні 1.41E+5.

Приклад 33. У посудину місткістю 10 л, що наповнена сухим повітрям за нормальних умов, вводять 3 г води та нагрівають до 110°C . Визначити тиск вологого повітря в посудині при цій температурі.

Дано:

$$m = 3 \text{ г} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$$

$$V = 10 \text{ л} = 10^{-2} \text{ м}^3$$

$$t = 100^\circ \text{C} \Rightarrow T = 373 \text{ К}$$

$p?$

Розв'язання

$$\text{За законом Дальтона: } p = p_1 + p_2,$$

де p_1 та p_2 – тиски сухого повітря та водяної пари відповідно.

Оскільки нагрівання відбувається при постійному об'ємі, тиск сухого повітря

$$\text{при } T = 373 \text{ К визначимо з закону Шарля: } \frac{p_0}{T_0} = \frac{p_1}{T} \Rightarrow p_1 = \frac{p_0 T}{T_0}, \text{ де } p_0 - \text{тиск за}$$

нормальних умов.

Знайдемо тиск водяної пари, вважаючи її ідеальним газом. Число молей

ν молекул водяної пари в посудині: $\nu = \frac{m}{\mu}$, де $\mu = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ – молярна маса пари.

Тоді об'єм, що займає пара при нормальних умовах: $V'_0 = \nu \cdot V_0 = \frac{m}{\mu} V_0$, (1)

де $V_0 = 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ – об'єм одного моля газу за н.у.

Для знаходження тиску пари використаємо об'єднаний газовий закон –

рівняння стану ідеального газу Клапейрона: $\frac{p_0 V'_0}{T_0} = \frac{p_2 V}{T} \Rightarrow p_2 = \frac{p_0 V'_0 T}{T_0 V}$.

З врахуванням (1) $p_2 = \frac{p_0 V_0 T m}{T_0 V \mu}$ – парціальний тиск пари у вологому повітрі.

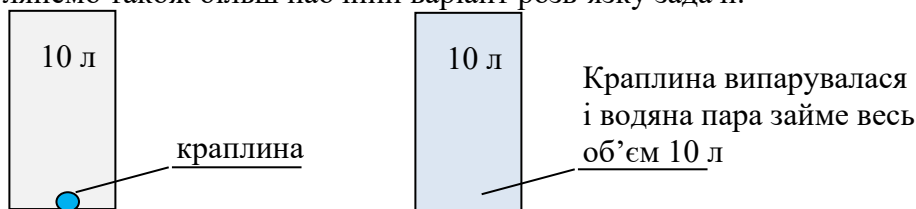
За н.у. тиск газу $p_0 = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$, температура $T_0 = 273 \text{ К}$.

За законом Дальтона тиск вологого повітря:

$$p = \frac{p_0 T}{T_0} + \frac{p_0 V'_0 T}{T_0 V} = \frac{p_0 T}{T_0} + \frac{p_0 V_0 T m}{T_0 V \mu} = \frac{p_0 T}{T_0} \left(1 + \frac{V_0}{V} \cdot \frac{m}{\mu} \right).$$

Отже, $p = \frac{p_0 T}{T_0} \left(1 + \frac{V_0}{V} \cdot \frac{m}{\mu} \right) = \frac{1,01 \cdot 10^5 \cdot 373}{273} \left(1 + \frac{22,4 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{10^{-2} \cdot 18 \cdot 10^{-3}} \right) \approx 1,9 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

Розглянемо також більш наочний варіант розв'язку задачі.



Тиск водяної пари, що утворилася з краплини, в посудині:

$$p_{n1} V = \frac{m}{\mu} R T_0 \Rightarrow p_{n1} = \frac{\nu R T_0}{V},$$

де $\nu = \frac{m}{\mu} = \frac{3}{18} = 0,17 \text{ моль}$ – кількість молей водяної пари в посудині.

$$p_{n1} = \frac{\nu R T_0}{V} = \frac{0,17 \cdot 8,31 \cdot 273}{10^{-2}} = 3,87 \cdot 10^4 \text{ Па}.$$

З закону Шарля знайдемо тиск водяної пари при нагріванні до 110° С :

$$p_{n2} = \frac{p_{n1} T}{T_0} = \frac{3,87 \cdot 10^4 \cdot 373}{273} = 5,23 \cdot 10^4 \text{ Па}.$$

Для сухого повітря, що знаходиться в посудині, знайдемо тиск при нагріванні до 110° С :

$$p_{\text{поо}2} = \frac{p_{\text{поо}1} T}{T_0} = \frac{1,01 \cdot 10^5 \cdot 373}{273} = 1,37 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Результуючий тиск суміші сухого повітря та водяної пари:

$$p = p_{n_2} + p_{n_{o_2}} = (0,52 + 1,37) \cdot 10^5 = 1,89 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Відповідь: $p = 1,9 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

При тестовому оцінюванні 1.9E+5.

Приклад 34. В посудині знаходиться суміш водню і кисню. Маса суміші дорівнює 3,6г. Масова доля кисню складає 0,6. Визначити кількість речовини ν_c суміші, ν_1 та ν_2 для водню та кисню.

Дано:

$$m_c = 3,6\text{г} = 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$$

$$m_1 = 0,4m_c \text{ для водню } H_2$$

$$\mu_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг / моль}$$

$$m_2 = 0,6m_c \text{ для кисню } O_2$$

$$\mu_2 = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг / моль}$$

$$\nu_c ? \nu_1 ? \nu_2 ?$$

Розв'язання

В прикладі № 28 за законом Дальтона була виведена формула для молярної маси суміші газів:

$$\mu_c = \frac{m_1 + m_2}{\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}} = \frac{m_c}{\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}}.$$

Підставимо вирази для m_1 та m_2 з умови:

$$\mu_c = \frac{m_c}{\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}} = \frac{m_c}{\frac{0,4m_c}{\mu_1} + \frac{0,6m_c}{\mu_2}} = \frac{\mu_1\mu_2}{0,4\mu_2 + 0,6\mu_1}.$$

Кількість молей суміші знайдемо за формулою: $\nu_c = \frac{m_c}{\mu_c} = \frac{m_c(0,4\mu_2 + 0,6\mu_1)}{\mu_1\mu_2}.$

Отже, для суміші:

$$\nu_c = \frac{m_c(0,4\mu_2 + 0,6\mu_1)}{\mu_1\mu_2} = \frac{3,6 \cdot 10^{-3}(0,4 \cdot 32 \cdot 10^{-3} + 0,6 \cdot 2 \cdot 10^{-3})}{32 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 0,7875 \text{ моль}.$$

Кількість молей водню в суміші: $\nu_1 = \frac{m_1}{\mu_1} = \frac{0,4 \cdot 3,6 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} = 0,72 \text{ моль}.$

Кількість молей кисню в суміші $\nu_2 = \frac{m_2}{\mu_2} = \frac{0,6 \cdot 3,6 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}} = 0,0675 \text{ моль}.$

Відповідь: $\nu_c = 0,7875 \text{ моль}$; $\nu_1 = 0,72 \text{ моль}$; $\nu_2 = 0,0675 \text{ моль}.$

При тестовому оцінюванні 0.788; 0.72; 0.0675

Приклад 35. На рисунку даний графік процесів в координатах (p, V) . Побудувати цей цикл в координатах (p, T) та (V, T) , позначивши відповідні точки.

Дано:

$1 \rightarrow 2; p = \text{const}$

$2 \rightarrow 3; V = \text{const}$

$3 \rightarrow 4; p = \text{const}$

$4 \rightarrow 1; V = \text{const}$

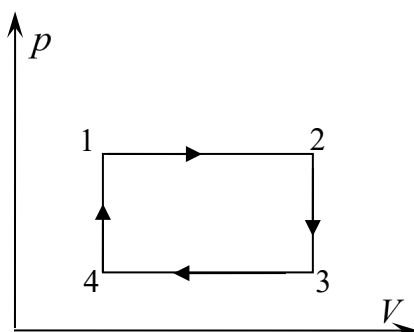
$(p, T)? (V, T)?$

Розв'язання

Рисунок з умови задачі:

$1 \rightarrow 2; p = \text{const}$ – ізобарний процес.

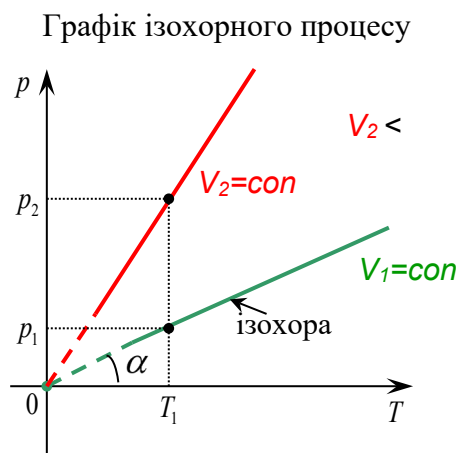
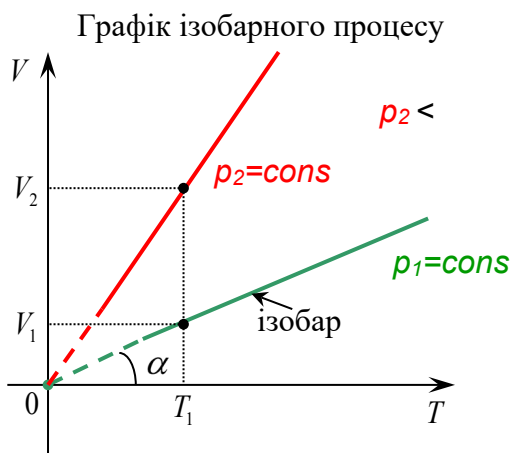
Оскільки $V \uparrow$ – зростає, то зростає



і температура: $T \uparrow$.

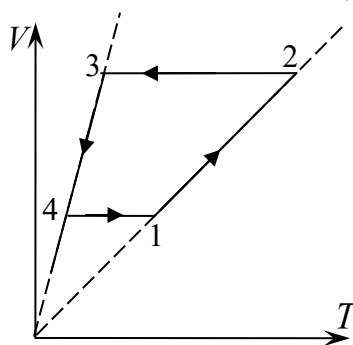
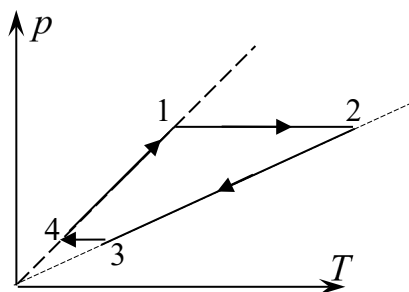
Щоб впевнитися в цьому, дивіться графік ізобарного процесу нижче.

$2 \rightarrow 3; V = \text{const}$ – ізохорний процес. Оскільки $p \downarrow$ – зменшується, то і $T \downarrow$ – зменшується. Щоб впевнитися в цьому, дивіться графік ізохорного процесу:



Графік процесу в координатах (p, T) .

Графік процесу в координатах (V, T)



$3 \rightarrow 4; p = \text{const}$ – ізобарний процес. Оскільки $V \downarrow$ – зменшується, то зменшується і температура: $T \downarrow$. Щоб впевнитися в цьому, дивіться графік ізобарного процесу.

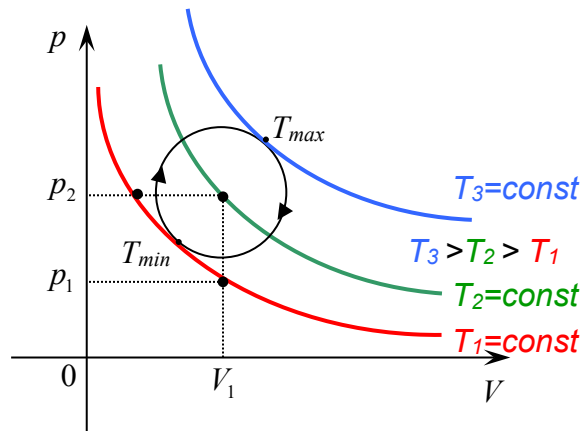
$4 \rightarrow 1; V = \text{const}$ – ізохорний процес. Оскільки $p \uparrow$ – збільшується, то і $T \uparrow$ – збільшується. Щоб впевнитися в цьому, дивіться графік ізохорного процесу.

При побудові точок 1, 2, 3, 4 треба притримуватися масштаба відповідних величин та переносити його на графіки, що будуються. Тому при побудові від руки використовуйте міліметровий папір або папір у клітинку. При побудові на комп'ютері – координатну сітку. На даних рисунках масштаб витримано не строго.

Приклад 36. Як змінювалась температура ідеального газу – збільшувалась, чи зменшувалась, – в коловому процесі, графік якого показано на рисунку.

Розв'язання

На рисунку в умові показано коловий процес в координатах (p, V) . Щоб з'ясувати, як змінювалась температура, треба нарисувати систему ізоTERM, як показано на рисунку. З нього видно, що температура збільшувалась від $T_{\min}$ до $T_{\max}$, а потім знову зменшувалась до мінімальної температури.



Відповідь: температура збільшувалась від $T_{\min}$ до $T_{\max}$, а потім знову зменшувалась до мінімальної температури.

Приклад 37. Що можна сказати про об'єми газів у станах (1) та (2) в процесі, графік якого показаний на рисунку. Як змінився об'єм газу при переході із стану 1 у стан 2?

Розв'язання

Процес $1 \rightarrow 2$, який показано на графіку, відбувається зі зміною об'єму:

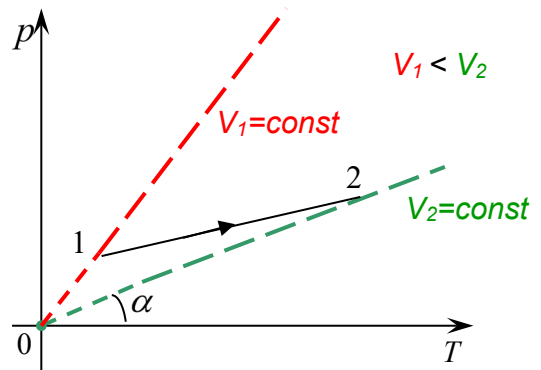
$$V_1 \neq V_2$$

У координатах (p, T) накреслимо ізохори, як показано на рисунку.

$V_2 > V_1$, оскільки $\text{tg} \alpha_1 > \text{tg} \alpha_2$.

Із закону Шарля:

$$\text{tg} \alpha = \frac{p}{T} = \frac{mR}{\mu V}.$$



Отже, чим більше V , тим менше тангенс кута нахилу ізохори. Тому $V_2 > V_1$. – при переході в стан 2 об'єм газу збільшився.

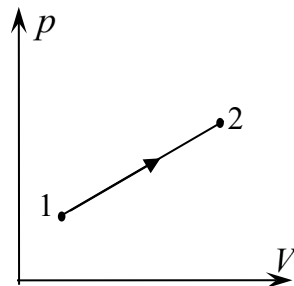
Відповідь: $V_2 > V_1$

Приклад 38. При розширенні газу за сталої температури була отримана залежність $p(V)$, як на рисунку. Що відбувається з газом у цьому процесі, чи зміниться маса газу ?

Розв'язання

З рівняння стану ідеального газу: $pV = \frac{m}{\mu}RT$ слідує, що при $T = \text{const}$ та збільшенні тиску p і об'єму V , як це показано на графіку процесу: $(pV) \uparrow$, повинна зростати маса газу m і кількість молей ν .

Відповідь: $m \uparrow, \nu \uparrow$.



Приклад 39. При ізохорному нагріванні була отримана залежність $p(T)$, як показано на рисунку. Що відбувається з газом, чи змінюється його маса ?

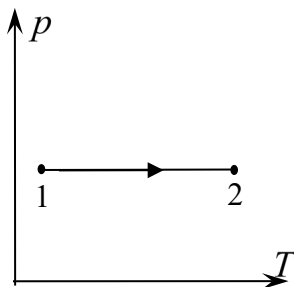
Розв'язання

З графіка видно, що в процесі $1 \rightarrow 2$ $p = \text{const}$.
З рівняння стану ідеального газу

$pV = \frac{m}{\mu}RT$ слідує, що при $p = \text{const}, V = \text{const}$ при

нагріванні $T \uparrow$ повинна пропорційно зменшуватись маса $m \downarrow$.

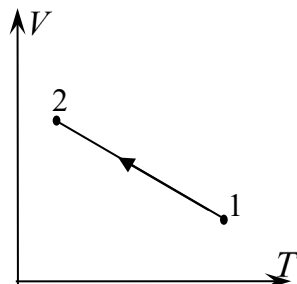
Відповідь: $m \downarrow, \nu \downarrow$.



Приклад 40. При ізобарному охолодженні газу отримано залежність $V(T)$, як показано на рисунку. Що відбувається з газом, як змінюється маса?

Розв'язання

З графіка видно, що в процесі $1 \rightarrow 2$ $V \uparrow, T \downarrow$.
При $p = \text{const}$ та збільшенні об'єму з рівняння стану ідеального газу $pV = \frac{m}{\mu}RT$ слідує, що при зменшенні температури маса повинна збільшуватися $m \uparrow$.



Причому $m \uparrow$ швидше, ніж зменшується температура $T \downarrow$.

Відповідь: $m \uparrow$.

Приклад 41. На рисунку 1 зображено циліндр з легким поршнем, що може рухатись без тертя. В циліндрі знаходиться ідеальний газ. Як змінилось значення об'єму газу, якщо його абсолютна температура зросла вдвічі?

Дано:

$$p = \text{const}$$

$$T_2 = 2T_1$$

$$V_2 ?$$

Розв'язання

За умовою поршень є легким, отже він не створює додатковий тиск на газ. Оскільки поршень може вільно рухатись без тертя, то при збільшенні температури газ вільно розширюється, штовхаючи поршень і таким чином збільшується об'єм під поршнем, залишаючи тиск при цьому сталим – $p = \text{const}$. Отже, – це ізобарний процес, який описується законом Гей-Люссака:

$$p = \text{const}, \quad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}.$$

Підставимо до формули вираз для температури:

$$T_2 = 2T_1, \text{ отримаємо:}$$

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{2T_1} \Rightarrow V_2 = 2V_1.$$

Отже, об'єм збільшиться вдвічі.

Відповідь: значення об'єму збільшилося вдвічі.

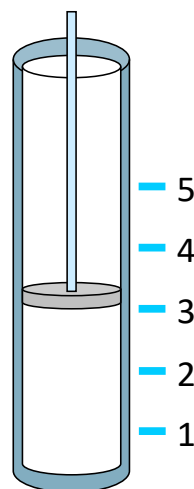


Рис. 1

Приклад 42. На рис. до задачі № 41 зображено циліндр з легким поршнем, що може рухатись без тертя. В циліндрі знаходиться ідеальний газ. Як змінилось значення абсолютної температури, якщо при закріпленому поршні його тиск зменшився вдвічі?

Дано:

$$V = \text{const}$$

$$p_2 = \frac{p_1}{2}$$

$$T_2 ?$$

Розв'язання

Рисунок 1 дивиться в попередній задачі. Оскільки поршень закріплений, то об'єм не змінюється, отже це – ізохорний процес, який описується законом Шарля:

$$V = \text{const}, \quad \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}.$$

$$\text{Із врахуванням того, що } p_2 = \frac{p_1}{2}, \text{ маємо: } \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_1}{2T_2} \Rightarrow T_2 = \frac{T_1}{2}.$$

Отже, температура зменшилась вдвічі.

Відповідь: значення температури зменшилося у 2 рази.

Приклад 43. На рисунку 1 (до задачі № 41) зображено циліндр з легким поршнем, що може рухатись без тертя. В циліндрі знаходиться ідеальний газ. Як змінилось значення тиску газу, після повільного переведення поршня з положення 4 у положення 2?

Дано:

$$V_1 = 4V$$

$$V_2 = 2V$$

$$p_2?$$

Розв'язання

(Див. рис. до задачі 41). Оскільки поршень переміщується повільно, можна вважати, що температура при цьому не змінюється, тобто процес ізотермічний.

Ізотермічний процес описується законом Бойля-Маріотта:

$$T = \text{const}, \quad p_1 V_1 = p_2 V_2.$$

На рисунку 1 об'єм поділений на чотири частини, тому позначимо одну частину об'єму як V . У той момент, коли поршень знаходиться в положенні 4, об'єм під поршнем рівний $4V$, при переході до положення 2 – об'єм становить вже $2V$, отже **газ стискається**.

Підставимо ці вирази в закон Бойля-Маріотта:

$$p_1 4V = p_2 2V \Rightarrow p_2 = 2p_1.$$

Отже, тиск збільшився вдвічі.

Відповідь: значення тиску збільшилося в 2 рази.

Приклад 44. На рисунку 1 до задачі №41 зображено циліндр з легким поршнем, що може рухатись без тертя. В циліндрі знаходиться ідеальний газ. Як змінилось значення тиску газу, після повільного переведення поршня з положення 2 у положення 4?

Дано:

$$V_1 = 2V$$

$$V_2 = 4V$$

$$p_2?$$

Розв'язання

Рисунок 1 дивіться на попередній сторінці. Оскільки поршень переміщується повільно, можна вважати, що температура при цьому не змінюється, тобто процес ізотермічний.

Ізотермічний процес описується законом Бойля-Маріотта:

$$T = \text{const}, \quad p_1 V_1 = p_2 V_2.$$

На рисунку 1 об'єм поділений на чотири частини. Позначимо одну частину об'єму як V . Коли поршень знаходиться в положенні 2 – маємо об'єм $2V$ під поршнем, а у положенні 4 – цей об'єм становить вже $4V$ – отже, **газ розширюється**. Підставимо ці вирази до виразу закону Бойля-Маріотта:

$$p_1 2V = p_2 4V \Rightarrow p_2 = \frac{p_1}{2}.$$

Отже, тиск зменшився вдвічі.

Відповідь: значення тиску зменшилося в 2 рази.

Приклад 45. У двох різних посудинах знаходиться по 1 молю різних газів (див рис. 2): кисню та діоксиду сірки. Вважаючи гази ідеальними, вказати у скільки разів різняться між собою молярні маси газів; густини газів; тиски газів за однакових температур; тиски газів, якщо абсолютна температура газу в першій посудині у 4 рази вища?

Розв'язання

Дано:

1. O_2 2. SO_2

$$V_1 = 4V_2$$

$$T_1 = T_2$$

$$T_1 = 4T_2; \quad \nu = 1 \text{ моль}$$

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} ? \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} ? \quad \frac{p_2}{p_1} ? \quad \frac{p'_2}{p'_1} ?$$

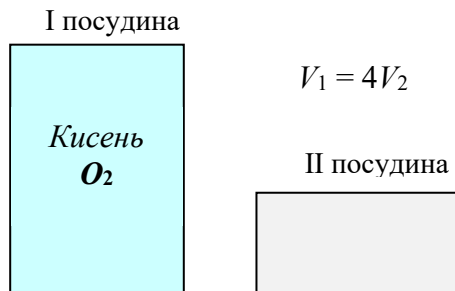


Рис. 2

1) Для кисню O_2 молярна маса:

$$\mu_1 = 2 \cdot 16 \cdot 10^{-3} = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль.}$$

Для SO_2 молярна маса:

$$\mu_2 = (32 + 2 \cdot 16) \cdot 10^{-3} = 64 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль.}$$

Відношення молярних мас діоксиду сірки та кисню рівне:

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{64 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}} = 2 \text{ рази.}$$

Отже, молярна маса діоксиду сірки в 2 рази більша, ніж молярна маса кисню.

2) Густину газу можна записати через молярну масу μ та об'єм V :

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\mu \cdot \nu}{V}.$$

Оскільки газів по одному молю $\nu = 1 \text{ моль}$, маємо:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \frac{V_1}{V_2} = 2 \cdot 4 = 8.$$

– густина газу діоксиду сірки у 8 разів більша, ніж густина кисню.

3) Запишемо Рівняння стану ідеального газу для ідеальних газів у двох ємностях

$$\left. \begin{aligned} p_1 V_1 &= \frac{m_1}{\mu_1} RT = \nu RT \\ p_2 V_2 &= \frac{m_2}{\mu_2} RT = \nu RT \end{aligned} \right\} \Rightarrow p_1 V_1 = p_2 V_2.$$

Для одного моля $pV_\mu = RT$.

З умови $V_1 = 4V_2$ – підставимо цей вираз у

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 :$$

Маємо:

$$p_1 \cdot 4V_2 = p_2 V_2 \Rightarrow p_2 = 4p_1.$$

Відношення тисків при однаковій температурі в посудинах:

$$\frac{p_2}{p_1} = 4$$

– тиск диоксиду сірки в 4 рази більший, ніж кисню.

4) У випадку, коли температура в посудині з киснем більша $T_1 = 4T_2$, для визначення різниці тисків запишемо з рівняння стану:

$$p'_1 V_1 = \frac{m_1}{\mu_1} RT = \nu RT_1 ;$$

$$p'_2 V_2 = \frac{m_2}{\mu_2} RT = \nu RT_2 .$$

Поділимо перше рівняння на друге та врахуємо, що $V_1 = 4V_2$ та $T_1 = 4T_2$.

Тоді:

$$\frac{p'_1 \cdot 4V_2}{4T_2} = \frac{p'_2 V_2}{T_2} .$$

Після скорочення маємо:

$$p'_1 = p'_2 \Rightarrow \frac{p'_2}{p'_1} = 1 \text{ – тиски однакові.}$$

$$\text{Відповідь: } \frac{\mu_2}{\mu_1} = 2 ; \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = 2 ; \quad \frac{p_2}{p_1} = 4 ; \quad \frac{p'_2}{p'_1} = 1 .$$

1.11.2. Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів, швидкості молекул

Вказівки до розв'язування задач

1. Варто чітко розрізняти наступні формули, теорія та їх виведення докладно буде розглянута у посібнику «Термодинаміка», проте у задачах даного розділу ці формули використовуються, тому звертаємо вашу увагу:

$E_{\kappa}^{(1)} = \frac{m_0 v_{\kappa}^2}{2} = \frac{3}{2} kT$ – середня кінетична енергія поступального руху однієї молекули;

$W_k^{(1)} = \frac{i}{2} kT$ – середнє значення повної кінетичної енергії молекули

де i – це кількість ступенів вільності молекул.

$E_{\kappa 1}^{(1)} = \frac{kT}{2}$ – кінетична енергія, що припадає в середньому на одну ступінь вільності молекули;

$pV = \frac{2}{3} E_{\kappa} \Rightarrow E_{\kappa} = \frac{3}{2} pV$ – кінетична енергія поступального руху всіх молекул;

$U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT = \frac{i}{2} \nu RT$ – внутрішня енергія ідеального газу або сумарна енергія теплового руху всіх молекул газу, яка складається з енергії поступального руху, енергії обертального руху.

Наводимо таблицю, яка стане в нагоді при розв'язуванні задач

Кількості ступенів вільності i

Таблиця 1.3

Речовина	Тип руху			
	Поступальний	Обертальний	Коливний	Всього
Одноатомний газ	3	–	–	3
Двоатомний газ	3	2	–	5
Трьохатомний газ*	3	3	–	6
Тверде тіло	–	–	6	6
Рідина	не визначено			

* **Примітка:** молекула CO_2 має лінійну будову, тому має стільки ж ступенів вільності, як і двоатомний газ $i = 5$, але в деяких джерелах і задачах беруть зважаючи лише на кількість атомів, як для багатоатомного газу – $i = 6$.

2. Для практичного використання розподіл Максвелла за швидкостями корисно записати через відносну швидкість $u = \frac{v}{v_{im}}$, де v – швидкість і v_{im} – найбільш імовірна швидкості руху молекул. Тоді розподіл Максвелла:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 \Delta u = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\exp(-u^2) \right) u^2 \Delta u.$$

Нагадаємо, що розподіл Максвелла визначає, яка частка $\frac{\Delta N}{N}$ від загального числа молекул даного газу має швидкість в інтервалі від v до $v + \Delta v$. Ця формула використовується, якщо інтервал швидкостей Δv , в який потрапляють швидкості шуканого числа молекул є невеликий порівняно із самою швидкістю.

3. Формулу Максвелла можна записати також у вигляді:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{u^2}{u_{im}^2}} \frac{u^2}{u_{im}^3} \Delta u = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\exp\left(-\frac{u^2}{u_{im}^2}\right) \right) \frac{u^2}{u_{im}^3} \Delta u,$$

але в цій формулі інші позначення: N – загальна кількість молекул; u – швидкість молекул, яка шукається за формулою $u = \frac{v_1 + v_2}{2}$ (це **не** відносна швидкість); $\Delta u = v_2 - v_1$ – інтервал швидкостей; $u_{im} = v_{im} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$ – найбільш імовірна швидкість.

Приклад застосування цієї формули – **Приклад 71**.

Ця формула використовується, якщо інтервал швидкостей Δv , в який потрапляють швидкості шуканого числа молекул, невеликий порівняно з самою швидкістю, тобто в тих випадках, що і перша.

4. Барометрична формула:

$$p = p_0 e^{-\frac{m_0 g h}{kT}} = p_0 \exp\left(-\frac{m_0 g h}{kT}\right);$$

$$p = p_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}} = p_0 \exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right).$$

виражає закон зміни тиску газу з висотою h у полі сили тяжіння, p – тиск газу на висоті h , p_0 – тиск газу на висоті $h = 0$, g – прискорення вільного падіння, m_0 – маса однієї молекули, μ – молярна маса, $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж / К}$ – стала Больцмана, $R = 8,31 \text{ Дж / (моль} \cdot \text{К)}$ – універсальна газова стала.

Друга формула отримана з міркувань означення сталої Больцмана $k = \frac{R}{N_A}$ та

зв'язку молярної маси з масою однієї молекули $\mu = m_0 N_A$, де

$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ – число Авогадро.

5. З барометричної формули, застосувавши вираз $n = \frac{p}{kT}$, отримаємо формулу Больцмана, що виражає розподіл молекул за висотою в полі сили тяжіння:

$$n = n_0 e^{-\frac{m_0 g h}{kT}} = n_0 \exp\left(-\frac{m_0 g h}{kT}\right); \quad n = n_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}} = n_0 \exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right),$$

тут n – кількість молекул в одиниці об'єму (концентрація) на висоті h , n_0 – концентрація на висоті $h = 0$.

6. Для броунівських частинок у рідині формула Больцмана набуде вигляду:

$$n = n_0 e^{-\frac{m_0 \left(1 - \frac{\rho_p}{\rho_q}\right) g h}{RT} N_A} = n_0 \exp\left(-\frac{m_0 \left(1 - \frac{\rho_p}{\rho_q}\right) g h}{RT} N_A\right),$$

де ρ_p і ρ_q – густини рідини та речовини броунівської частинки, n_0 – кількість частинок в одиниці об'єму на довільному початковому рівні, n – кількість частинок в одиниці об'єму в шарі, розміщеному на висоті h , $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ – число Авогадро, $R = 8,31 \text{ Дж} / (\text{моль} \cdot \text{К})$ – універсальна газова стала, T – температура в К, m_0 – маса броунівської частинки.

7. У досліді Штерна (§ 1.7. Розподіл Максвелла – розподіл молекул ідеального газу за швидкостями) швидкість молекул визначається за такою формулою:

$u = \frac{2\pi\nu R(R-r)}{d}$, де R і r – радіуси зовнішнього та внутрішнього циліндрів, ν – частота їх обертання, d – відстань між смужками напиленого срібла в нерухомому і рухомому стані приладу (див. Дослід Штерна).

8. $\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{z}} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 n}$ – середня довжина вільного пробігу молекул, де n – концентрація.

Кількість молекул в одиниці об'єму, тобто, концентрація, залежить від тиску: $n = \frac{p}{kT}$.

Тому середня довжина вільного пробігу теж залежить від тиску:

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{z}} = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 p}.$$

Звідси видно, що середні довжини вільного пробігу молекул при одній і тій самій температурі обернено пропорційні тиску в тій посудині, де вони містяться:

$$\frac{\bar{\lambda}_1}{\bar{\lambda}_2} = \frac{p_2}{p_1}.$$

9. З поняттям довжини вільного пробігу молекул зв'язане поняття вакууму. Якщо довжина вільного пробігу значно більша за розміри посудини, то вакуум високий, якщо сумірна з розмірами посудини – середній вакуум, а якщо менша – низький вакуум.

10. З формули довжини вільного пробігу можна визначити число молекул в одиниці об'єму:

$$n = \frac{1}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 \bar{\lambda}}.$$

Використовуючи цю формулу, можна з рівняння стану ідеального газу $p = nkT$ визначити число Авогадро:

$$N_A = \frac{R}{k} = \frac{RnT}{p} = \frac{RT}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 \bar{\lambda} p}$$

– число Авогадро, визначене через мікро та макропараметри.

11. $\bar{z} = \sqrt{2} \pi \sigma^2 n \bar{v}$ – середнє число зіткнень за одиницю часу однієї молекули з іншими, що перебувають в хаотичному тепловому русі.

12. Знаючи число зіткнень однієї молекули за 1с і число молекул в **одиниці об'єму** n , можна знайти загальне число зіткнень всіх молекул в одиниці об'єму за одиницю часу:

$$z = \frac{1}{2} \bar{z} n.$$

Коефіцієнт 1/2 усуває повторення, яке було допущене при написанні формули. Оскільки в добутку $\bar{z}n$ маємо в два рази більше число взаємодій, бо тут враховуються як взаємодії першої молекули з другою, так і другої з першою. Загальне число зіткнень всіх молекул між собою за одиницю часу визначається за формулою:

$$\bar{z} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \sigma^2 n^2 \bar{v}$$

Приклад 46. Тиск p газу дорівнює 2 мПа , концентрація n його молекул рівна $1 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$. Визначити: 1) температуру T газу; 2) середню кінетичну енергію $E_{\kappa}^{(1)}$ поступального руху молекули.

Дано:

$$p = 2 \text{ мПа} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Па}$$

$$n = 1 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3} = 1 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3}$$

$$T ? \quad E_{\kappa}^{(1)} ?$$

Розв'язання

Спершу конвертуємо одиниці концентрації з умови задачі (см^{-3}) до одиниць СІ:

$$1 \text{ см} = 10^{-2} \text{ м}$$

$$1 \text{ см}^{-3} = \frac{1}{\text{см}^3} = \frac{1}{(10^{-2})^3 \text{ м}^3} = \frac{1}{10^{-6} \text{ м}^3} = 10^6 \text{ м}^{-3}.$$

$$\text{Тоді} \quad n = 1 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3} = 1 \cdot 10^{10} \cdot 10^6 = 1 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3}.$$

Для знаходження температури скористаємося рівнянням стану ідеального газу через концентрацію: $p = nkT$.

З цієї формули слідує $T = \frac{p}{nk}$, де $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} / \text{К}$ – стала Больцмана.

Середня кінетична енергія поступального руху однієї молекули $E_{\kappa}^{(1)} = \frac{3}{2} kT$.

Підставимо значення фізичних величин:

$$T = \frac{p}{nk} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{10^{16} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}} = 14492 = 1,45 \cdot 10^4 \text{ К}.$$

$$E_{\kappa}^{(1)} = \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 1,45 \cdot 10^4 = 3 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

Відповідь: $T = 1,45 \cdot 10^4 \text{ К}$; $E_{\kappa}^{(1)} = 3 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$.

При тестовому оцінюванні: 1.45E+4; 3E – 19.

Приклад 47. Визначити кінетичну енергію поступального руху молекули аміаку, а також повну кінетичну енергію молекул двох молей за температури 383 К .

Дано:

$$T = 383 \text{ К}$$

NH_3 – аміак

$$\nu = 2 \text{ моля}$$

$$E_{\kappa}^{(1)} ? \quad E_{\kappa} ?$$

Розв'язання

Середня кінетична енергія поступального руху однієї

$$\text{молекули } E_{\kappa}^{(1)} = \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 383 = 7,93 \cdot 10^{-21} \text{ Дж},$$

де $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} / \text{К}$ – стала Больцмана.

Середнє значення повної кінетичної енергії молекули

$$W_k^{(1)} = \frac{i}{2} kT,$$

де i – це кількість ступенів вільності. У молекулі аміаку є чотири атоми, для трьох і більше атомних молекул число ступенів вільності $i = 6$. Отже:

$$W_k^{(1)} = \frac{i}{2} kT = \frac{6}{2} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 383 = 1,59 \cdot 10^{-20} \text{ Дж}.$$

Повна кінетична енергія двох молей аміаку:

$$E_k = N \cdot W_k^{(1)} = \frac{m}{\mu} N_A \cdot W_k^{(1)},$$

де $N = \frac{m}{\mu} N_A$ – загальне число молекул; $\frac{m}{\mu} = 2$ кількість молей;

$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ – число Авогадро.

Підставимо числові значення фізичних величин:

$$E_k = \frac{m}{\mu} N_A \cdot W_k^{(1)} = 2 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \cdot 1,59 \cdot 10^{-20} = 1,91 \cdot 10^4 \text{ Дж або } 19,1 \text{ кДж}.$$

Зауважимо, що в цій задачі в другому питанні мова йде про повну кінетичну енергію газу, а не про кінетичну енергію поступального руху всіх молекул газу. Тому ми не використовували формулу $E_k = \frac{3}{2} pV$.

Відповідь: $E_k^{(1)} = 7,93 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$; $E_k = 1,91 \cdot 10^4 \text{ Дж}$.

При тестовому оцінюванні: 7.93E – 21; 1.91E.

Приклад 48. Якою має бути кінетична енергія поступального руху двох кіломолив кисню, щоб його молекули могли покинути Землю? Яка при цьому має бути температура? Знайти тиск газу за цих умов, якщо його об'єм 10 м^3 . Газ вважати ідеальним.

Дано:

$$V = 10 \text{ м}^3$$

O_2

$$\nu = 2 \text{ кмоль} = 2 \cdot 10^3 \text{ моль}$$

$$\nu \geq \nu_2$$

E_k ? p ? T ?

Розв'язання

Молекула газу може покинути Землю, лише у тому випадку, якщо її швидкість ν перевищує другу космічну швидкість ν_2 : $\nu \geq \nu_2$. Отже, має виконуватися нерівність для однієї молекули:

$$E_k^{(1)} \geq \frac{m_0 \nu_2^2}{2}, \quad (1)$$

а для заданої кількості газу кінетична енергія поступального руху молекул:

$$E_k \geq \frac{m \nu_2^2}{2},$$

де $E_k^{(1)}$ – кінетична енергія поступального руху однієї молекули, m_0 – маса однієї молекули, m – маса всього газу. Масу газу виразимо через кількість речовини ν та молярну масу μ : $m = \mu \nu$.

Тепер мінімальна кінетична енергія $E_k = \frac{\mu \nu \nu_2^2}{2}$.

Молярна маса кисню: $\mu = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$, $\nu = 2 \cdot 10^3 \text{ моль}$, $v_2 = 11,2 \cdot 10^3 \text{ м/с}$.

$$E_{\kappa} = \frac{32 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot (11,2 \cdot 10^3)^2}{2} = 4,0 \cdot 10^9 \text{ Дж}.$$

Температуру газу знайдемо, підставивши у (1) вираз для $E_{\kappa}^{(1)} = \frac{3}{2} kT$ і застосувавши зв'язок молярної маси з масою однієї молекули $\mu = m_0 N_A$ та означення сталої Больцмана $k = \frac{R}{N_A}$, $R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{K)}$ – універсальна газова стала, N_A – стала Авогадро.

Маємо: $\frac{3}{2} kT = \frac{\mu}{N_A} \frac{v_2^2}{2}$ або $T = \frac{\mu v_2^2}{3R}.$

Підставимо значення фізичних величин: $T = \frac{32 \cdot 10^{-3} (11,2 \cdot 10^3)^2}{3 \cdot 8,31} = 1,6 \cdot 10^5 \text{ K}.$

Тиск розрахуємо, виходячи з основного рівняння м.к.т. (МКТ) газів:

$$pV = \frac{2}{3} E_{\kappa}, \quad p = \frac{2}{3} \frac{E_{\kappa}}{V}. \quad p = \frac{2 \cdot 4,0 \cdot 10^9}{3 \cdot 10} = 2,7 \cdot 10^8 \text{ Па}.$$

Відповідь: $E_{\kappa} = 4,0 \text{ Г Дж}$, $T = 0,16 \text{ МК}$, $p = 0,27 \text{ ГПа}$.

При тестовому оцінюванні: 4E+9; 1.6E+5; 2.7E+8.

Приклад 49. Чому дорівнює енергія U теплового руху 20 г кисню при температурі 10°C ? Знайдіть кінетичну енергію поступального руху та обертального руху молекул газу?

Дано:

$$m = 20 \text{ г} = 20 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$$

$$t = 10^\circ\text{C} \Rightarrow T = 283 \text{ K}$$

$$U ? \quad E_{\kappa \text{ пост}} ? \quad E_{\kappa \text{ об}} ?$$

Розв'язання

Внутрішня енергія ідеального газу або сукупна енергія теплового руху всіх молекул газу, яка складається з енергії поступального руху,

енергії обертального руху: $U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT = \frac{i}{2} \nu RT.$

Для кисню, як двохатомної молекули, кількість ступенів вільності $i = 5$; молярна маса: $\mu = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$; $R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{K)}$.

Підставимо значення фізичних величин до формули енергії теплового руху:

$$U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT = \frac{5}{2} \cdot \frac{20 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}} \cdot 8,31 \cdot 283 \approx 3,7 \cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

Кінетичну енергію поступального руху усіх молекул газу знайдемо з виразу:

$$pV = \frac{2}{3} E_{\kappa \text{ пост}} = \frac{m}{\mu} RT \Rightarrow E_{\kappa \text{ пост}} = \frac{3}{2} \frac{m}{\mu} RT.$$

$$E_{\kappa \text{ пост}} = \frac{3}{2} \frac{m}{\mu} RT = \frac{3}{2} \frac{20 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}} \cdot 8,31 \cdot 283 \approx 2,204 \cdot 10^3 \approx 2,2 \cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

(Виконаємо перевірку. Для однієї молекули середня кінетична енергія поступального руху: $E_{\kappa}^{(1)} = \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 283 \approx 5,8581 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$. Для

всіх молекул кінетична енергія поступального руху:

$$E_{\kappa \text{ пост}} = E_{\kappa}^{(1)} \cdot N = E_{\kappa}^{(1)} \cdot \frac{m}{\mu} N_A = 5,8581 \cdot 10^{-21} \cdot \frac{20 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} = 2,2 \cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

Кінетичну енергію обертального руху знайдемо як різницю між енергією теплового руху U та кінетичною енергією поступального руху всіх молекул:

$$E_{\kappa \text{ об}} = U - E_{\kappa \text{ пост}}$$

$$E_{\kappa \text{ об}} = U - E_{\kappa \text{ пост}} = 3,7 \cdot 10^3 - 2,2 \cdot 10^3 = 1,5 \cdot 10^3 \text{ Дж}$$

Відповідь: $U = 3,7 \cdot 10^3 \text{ Дж}$; $E_{\kappa \text{ пост}} = 2,2 \cdot 10^3 \text{ Дж}$; $E_{\kappa \text{ об}} = 1,5 \cdot 10^3 \text{ Дж}$.

При тестовому оцінюванні: 3.7E+3; 2.2E+3; 1.5E+3.

Приклад 50. Знайти енергію теплового руху молекул двохатомного газу, що знаходиться в посудині об'ємом 2 л і тиском $1,5 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

Дано:

$$i = 5$$

$$V = 2 \text{ л} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$p = 1,5 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

$$U ?$$

Розв'язання

Для двохатомного газу кількість ступенів вільності $i = 5$.

Внутрішня енергія ідеального газу або сукупна енергія

теплового руху усіх молекул газу: $U = \frac{i}{2} \nu RT$.

Рівняння стану ідеального газу $pV = \nu RT$. Підставимо ліву частину цього

рівняння pV в формулу для енергії теплового руху $U = \frac{i}{2} \nu RT = \frac{i}{2} pV$.

$$\text{Обчислимо: } U = \frac{i}{2} pV = \frac{5}{2} \cdot 1,5 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 750 \text{ Дж}.$$

Відповідь: $U = 750 \text{ Дж}$.

При тестовому оцінюванні: 750.

Приклад 51. Густина деякого газу $\rho = 1,43 \text{ кг/м}^3$, середня квадратична швидкість його молекул $v_{\text{кв}} = 425 \text{ м/с}$. Знайти тиск газу.

Дано:

$$\rho = 1,43 \text{ кг/м}^3$$

$$v_{\text{кв}} = 425 \text{ м/с}$$

$$p ?$$

Розв'язання

З рівняння стану ідеального газу знайдемо тиск p та виразимо його через густину ρ :

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \Rightarrow p = \frac{m}{V\mu} RT = \frac{\rho}{\mu} RT.$$

Щоб знайти температуру, скористаємося формулою для середньої квадратичної швидкості: $v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \Rightarrow v_{\text{кв}}^2 = \frac{3RT}{\mu} \Rightarrow T = \frac{v_{\text{кв}}^2 \cdot \mu}{3R}.$

Отриману формулу для температури підставимо в формулу для тиску:

$$p = \frac{\rho}{\mu} RT = \frac{\rho}{\mu} \frac{R \cdot v_{\text{кв}}^2 \cdot \mu}{3R} = \frac{\rho v_{\text{кв}}^2}{3}.$$

Підставимо значення фізичних величин:

$$p = \frac{\rho v_{\text{кв}}^2}{3} = \frac{1,43 \cdot 425^2}{3} = 8,61 \cdot 10^3 \text{ Па} = 8,61 \text{ кПа}.$$

[Зауважимо, що задачу можна розв'язати в одну дію, використавши основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії (м.к.т.) газів:

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \overline{v^2} = \frac{1}{3} \rho \overline{v^2}, \text{ де } \overline{v^2} = v_{\text{кв}}^2].$$

Відповідь: $p = 8,61 \cdot 10^3 \text{ Па}.$ При тестовому оцінюванні: 8.61E+3

Приклад 52. Посудина із внутрішнім об'ємом $V = 2 \text{ л}$ містить $m = 0,2 \text{ г}$ деякого газу під тиском $p = 2 \text{ атм}.$ Визначити середню квадратичну швидкість молекул газу.

Дано:

$$V = 2 \text{ л} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$m = 0,2 \text{ г} = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$$

$$p = 2 \text{ атм} = 2 \cdot 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

$v_{\text{кв}} ?$

Розв'язання

$$\text{Середня квадратична швидкість: } v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}.$$

Скористаємося рівнянням стану ідеального газу, щоб виразити $\frac{T}{\mu}$: $pV = \frac{m}{\mu} RT \Rightarrow \frac{T}{\mu} = \frac{pV}{mR}.$

$$\text{Підставимо цей вираз в формулу для } v_{\text{кв}}: \quad v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3R pV}{mR}} = \sqrt{\frac{3pV}{m}}.$$

Підставимо значення фізичних величин:

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3pV}{m}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 2 \cdot 1,01 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{0,2 \cdot 10^{-3}}} \approx 2,45 \cdot 10^3 \text{ м/с}$$

Відповідь: $v_{\text{кв}} = 2,45 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$

При тестовому оцінюванні: 2.45E+3.

Приклад 53. Кінетична енергія поступального руху молекул газу, що знаходиться в балоні об'ємом $0,02 \text{ м}^3$, дорівнює $5 \cdot 10^3 \text{ Дж},$ а середня

квадратична швидкість його молекул рівна $2 \cdot 10^3 \text{ м/с}$. Знайти: 1) масу газу в балоні; 2) тиск, під яким знаходиться газ.

Дано:

$$V = 0,02 \text{ м}^3$$

$$E_k = 5 \cdot 10^3 \text{ Дж}$$

$$v_{\text{кв}} = 2 \cdot 10^3 \text{ м/с}$$

$$m ? \quad p ?$$

Розв'язання

З основного рівняння молекулярно-кінетичної

теорії ідеального газу:

$$pV = \frac{2}{3} E_k$$

$$\text{знайдемо тиск } p = \frac{2}{3} \frac{E_k}{V} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5 \cdot 10^3}{0,02} = 1,67 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Щоб знайти масу газу, використаємо рівнянням стану ідеального газу:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \Rightarrow m = \frac{pV\mu}{RT}. \text{ Ми не знаємо, що це за газ, тому виразимо } \frac{\mu}{T} \text{ з}$$

формули для квадратичної швидкості:

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \Rightarrow v_{\text{кв}}^2 = \frac{3RT}{\mu} \Rightarrow \frac{\mu}{T} = \frac{3R}{v_{\text{кв}}^2}.$$

$$\text{Підставимо цей вираз в формулу для маси: } m = \frac{pV\mu}{RT} = \frac{pV}{R} \frac{3R}{v_{\text{кв}}^2} = \frac{3pV}{v_{\text{кв}}^2}.$$

Обчислимо:

$$m = \frac{3pV}{v_{\text{кв}}^2} = \frac{3 \cdot 1,67 \cdot 10^5 \cdot 0,02}{(2 \cdot 10^3)^2} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ кг}.$$

$$\text{Відповідь: } p = 1,67 \cdot 10^5 \text{ Па}; \quad m = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ кг}.$$

$$\text{При тестовому оцінюванні: } 1.67\text{E}+5; \quad 2.5\text{E}-3.$$

Приклад 54. 1кг двоатомного газу знаходиться під тиском $p = 8 \cdot 10^4 \text{ Па}$ і має густину $\rho = 4 \text{ кг/м}^3$. Знайти енергію теплового руху молекул газу при цих умовах.

Дано:

$$i = 5$$

$$m = 1 \text{ кг}$$

$$p = 8 \cdot 10^4 \text{ Па}$$

$$\rho = 4 \text{ кг/м}^3$$

$$U ?$$

Розв'язання

$$U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT - \text{внутрішня енергія ідеального газу або}$$

сумарна енергія теплового руху всіх молекул газу.

Для двоатомного газу кількість ступенів вільності $i = 5$.

Щоб визначити молярну масу μ та виключити температуру, яку ми теж не знаємо, скористаємося рівнянням стану

$$\text{ідеального газу: } pV = \frac{m}{\mu} RT.$$

Виразимо з цього рівняння тиск, а потім молярну масу

$$p = \frac{m}{\mu V} RT = \frac{\rho}{\mu} RT \Rightarrow \mu = \frac{\rho RT}{p}.$$

Тут $\rho = \frac{m}{V}$ – густина газу.

Підставимо вираз для молярної маси в формулу для енергії теплового руху молекул:

$$U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT = \frac{i}{2} \frac{m \cdot p}{\rho RT} RT = \frac{i}{2} \frac{m \cdot p}{\rho}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин:

$$U = \frac{i}{2} \frac{m \cdot p}{\rho} = \frac{5}{2} \cdot \frac{8 \cdot 10^4 \cdot 1}{4} = 5 \cdot 10^4 \text{ Дж}.$$

Відповідь: $U = 5 \cdot 10^4 \text{ Дж}.$

При тестовому оцінюванні: 5E+4.

Приклад 55. Яке число молекул двохатомного газу займає об'єм $V = 10 \text{ см}^3$ при тиску $p = 40 \text{ мм рт.ст.}$ і при температурі $t = 27^\circ \text{C}$? Якою енергією теплового руху володіють ці молекули?

Дано:

$$i = 5$$

$$V = 10 \text{ см}^3 = 10 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$$

$$p = 40 \text{ мм рт.ст.} = 5315,8 \text{ Па}$$

$$t = 27^\circ \text{C} \Rightarrow T = 300 \text{ К}$$

$$N ? \quad U ?$$

Розв'язання

Для переведу одиниць тиску мм рт.ст. в одиниці тиску в СІ, тобто, в Па

–Паскалі, складемо пропорцію

$$\frac{760 \text{ мм рт.ст.}}{1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}}$$

$$\frac{40 \text{ мм рт.ст.}}{x \text{ Па}}$$

$$\text{Отже, } x = \frac{40 \cdot 1,01 \cdot 10^5}{760} = 5315,8 \text{ Па}.$$

Загальне число молекул газу: $N = N_A \cdot \nu$,

де $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ – число Авогадро, ν – кількість молей.

Щоб знайти кількість молей, використаємо рівняння стану ідеального газу:

$$pV = \nu RT \Rightarrow \nu = \frac{pV}{RT}.$$

Звідси загальне число молекул газу: $N = N_A \cdot \nu = N_A \cdot \frac{pV}{RT}.$

Енергія теплового руху молекул: $U = \frac{i}{2} \nu RT = \frac{5}{2} \cdot \frac{pV}{RT} RT = \frac{5}{2} \cdot pV.$

Підставимо числові значення фізичних величин:

$$N = N_A \cdot \frac{pV}{RT} = \frac{6,02 \cdot 10^{23} \cdot 5315,8 \cdot 10 \cdot 10^{-6}}{8,31 \cdot 300} \approx 1,28 \cdot 10^{19} \approx 1,3 \cdot 10^{19}.$$

$$U = \frac{5}{2} \cdot pV = \frac{5}{2} \cdot 5315,8 \cdot 10 \cdot 10^{-6} \approx 0,133 \text{ Дж}.$$

Відповідь: $N = 1,3 \cdot 10^{19}$; $U = 0,133 \text{ Дж}$.

При тестовому оцінюванні: 1.3E+19; 0.133.

Приклад 56. Визначити середню кінетичну енергію $E_{\kappa}^{(1)}$ поступального руху та середнє значення $W_k^{(1)}$ повної кінетичної енергії молекули водяної пари за температури $T = 400\text{K}$. Знайти також кінетичну енергію E_{κ} поступального руху всіх молекул пари, що міститься в двох кіломолях речовини.

Дано:

$$H_2O \Rightarrow i = 6$$

$$T = 400\text{K}$$

$$\nu = 2 \text{ кмоль} = 2 \cdot 10^3 \text{ моль}$$

$$E_{\kappa}^{(1)}? \quad W_k^{(1)}? \quad E_{\kappa}?$$

Розв'язання

$$E_{\kappa}^{(1)} = \frac{3}{2} kT \quad - \quad \text{середня кінетична енергія}$$

поступального руху однієї молекули водяної пари, де $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж / K}$ – стала Больцмана.

$$W_k^{(1)} = \frac{i}{2} kT \quad - \quad \text{середнє значення повної}$$

кінетичної енергії молекули водяної пари, де кількість ступенів вільності $i = 6$ для трьохатомної молекули.

$E_{\kappa} = N E_{\kappa}^{(1)} = N_A \nu \cdot E_{\kappa}^{(1)}$ – кінетична енергія поступального руху всіх молекул пари, що містяться в певній кількості молей ν речовини, де $N = N_A \nu$ – кількість молекул в ν молей речовини; $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ – число Авогадро.

Підставимо числові значення фізичних величин:

$$E_{\kappa}^{(1)} = \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 400 = 8,28 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}.$$

$$W_k^{(1)} = \frac{i}{2} kT = \frac{6}{2} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 400 = 1,656 \cdot 10^{-20} \text{ Дж}.$$

$$E_{\kappa} = N_A \nu \cdot E_{\kappa}^{(1)} = 6,02 \cdot 10^{23} \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 8,28 \cdot 10^{-21} = 9,97 \cdot 10^6 \text{ Дж} = 9,97 \text{ МДж}.$$

Відповідь: $E_{\kappa}^{(1)} = 8,28 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$; $W_k^{(1)} = 1,656 \cdot 10^{-20} \text{ Дж}$;

$$E_{\kappa} = 9,97 \cdot 10^6 \text{ Дж} = 9,97 \text{ МДж}.$$

При тестовому оцінюванні: 8.28E – 21; 1.656E – 20; 9.97E+6.

Приклад 57. Визначити середнє значення $W_k^{(1)}$ повної кінетичної енергії однієї молекули гелію, азоту та водяної пари при $T = 300\text{K}$.

Дано:

1) He; 2) N₂; 3) H₂O

$$T = 300\text{K}$$

$$W_{k1,2,3}^{(1)}?$$

Розв'язання

1) Гелій – одноатомний газ, тому кількість ступенів вільності для He дорівнює $i = 3$.

Середнє значення повної кінетичної енергії молекули гелію при заданій температурі $T = 300\text{K}$:

$$W_{k1}^{(1)} = \frac{i}{2}kT = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 = 6,21 \cdot 10^{-21} \text{ Дж},$$

де $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} / \text{K}$ – стала Больцмана.

2) Азот – двоатомний газ. Тому кількість ступенів вільності для N₂ дорівнює $i = 5$.

Середнє значення повної кінетичної енергії молекули азоту при $T = 300\text{K}$:

$$W_{k2}^{(1)} = \frac{i}{2}kT = \frac{5}{2}kT = \frac{5}{2} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 = 1,035 \cdot 10^{-20} \text{ Дж}.$$

3) Водяна пара – трьохатомний газ, тому кількість ступенів вільності для H₂O дорівнює $i = 6$. Середнє значення повної кінетичної енергії молекули водяної пари при $T = 300\text{K}$:

$$W_{k3}^{(1)} = \frac{i}{2}kT = \frac{6}{2}kT = \frac{6}{2} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 = 1,242 \cdot 10^{-20} \text{ Дж}.$$

$$\text{Відповідь: } W_{k1}^{(1)} = 6,21 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}; \quad W_{k2}^{(1)} = 1,035 \cdot 10^{-20} \text{ Дж};$$

$$W_{k3}^{(1)} = 1,242 \cdot 10^{-20} \text{ Дж}.$$

При тестовому оцінюванні: 6.21E – 21; 1.035E – 20; 1.242E – 20.

Приклад 58. Визначити кінетичну енергію $E_{\kappa 1}^{(1)}$ що припадає в середньому на одну ступінь вільності молекули кисню при температурі $T = 10\text{K}$, а також середню кінетичну енергію $E_{\kappa}^{(1)}$ поступального руху, середню кінетичну енергію $E_{об}^{(1)}$ обертального руху та середнє значення повної кінетичної енергії $W_k^{(1)}$ однієї молекули.

Дано:



$$T = 10\text{K} = 10 \cdot 10^3 \text{ K}$$

$$E_{\kappa 1}^{(1)}? \quad E_{\kappa}^{(1)}? \quad E_{об}^{(1)}? \quad W_k^{(1)}?$$

Розв'язання

Згідно закону Больцмана, енергія молекули рівномірно розподілена між усіма ступенями вільності (принцип рівнорозподілу). На одну ступінь вільності молекули при заданій температурі припадає у середньому енергія:

$$E_{\kappa 1}^{(1)} = \frac{kT}{2},$$

де $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} / \text{K}$ – стала Больцмана.

Обчислимо: $E_{\kappa 1}^{(1)} = \frac{kT}{2} = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 10 \cdot 10^3}{2} = 6,9 \cdot 10^{-20} \text{ Дж} .$

Середня кінетична енергія поступального руху однієї молекули при заданій температурі:

$$E_{\kappa}^{(1)} = \frac{3}{2} kT .$$

Обчислимо:

$$E_{\kappa}^{(1)} = \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 10 \cdot 10^3 = 2,07 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} .$$

Для визначення середньої кінетичної енергії обертального руху $E_{об}^{(1)}$, знайдемо спочатку $W_k^{(1)}$ – середнє значення повної кінетичної енергії однієї молекули, враховуючи, що для кисню кількість ступенів вільності дорівнює 5:

$$W_k^{(1)} = \frac{i}{2} kT = \frac{5}{2} kT = \frac{5}{2} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 10 \cdot 10^3 = 3,45 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} .$$

Тоді середня кінетична енергія обертального руху:

$$E_{об}^{(1)} = W_k^{(1)} - E_{\kappa}^{(1)} = 3,45 \cdot 10^{-19} - 2,07 \cdot 10^{-19} = 1,38 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} .$$

Відповідь: $E_{\kappa 1}^{(1)} = 6,9 \cdot 10^{-20} \text{ Дж} ; \quad E_{\kappa}^{(1)} = 2,07 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} ;$

$W_k^{(1)} = 3,45 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} ; \quad E_{об}^{(1)} = 1,38 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} .$

При тестовому оцінюванні: 6.9E – 20; 2.07E – 19; 3.45E – 19; 1.38E – 19

Приклад 59. Встановити зв'язок між найбільш ймовірною швидкістю v_{lm} , середньою арифметичною швидкістю $\bar{v}$ та середньою квадратичною швидкістю $v_{\kappa\kappa}$ молекул ідеального газу.

Дано:

$v_{lm} = \sqrt{2RT/\mu}$ – найб. імовірна

$\bar{v} = \sqrt{8RT/\pi\mu}$ – сер. арифмет.

$v_{\kappa\kappa} = \sqrt{3RT/\mu}$ – сер. квадрат.

$\frac{\bar{v}}{v_{lm}} ? \quad \frac{v_{\kappa\kappa}}{v_{lm}} ? \quad \frac{v_{\kappa\kappa}}{\bar{v}} ?$

Розв'язання

При порівнянні виразів для v_{lm} , $\bar{v}$, $v_{\kappa\kappa}$

маємо: $\sqrt{2} < \sqrt{\frac{8}{\pi}} < \sqrt{3}$. Тоді $v_{lm} < \bar{v} < v_{\kappa\kappa}$.

Знайдемо відношення:

$$\frac{\bar{v}}{v_{lm}} = \frac{\sqrt{\frac{8}{\pi}}}{\sqrt{2}} \approx 1,129 \approx 1,13 .$$

Звідси слідує зв'язок між середньою арифметичною $\bar{v}$ та найбільш ймовірною v_{lm} швидкостями: $\bar{v} = 1,13v_{lm}$.

Знайдемо відношення:

$$\frac{v_{кв}}{v_{ім}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \approx 1,2247 \approx 1,22. \text{ Звідси слідує зв'язок між середньою квадратичною}$$

$v_{кв}$ та найбільш імовірною $v_{ім}$ швидкостями: $v_{кв} = 1,22v_{ім}$.

Знайдемо відношення:

$$\frac{v_{кв}}{\bar{v}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{8}{\pi}}} \approx 1,085 \approx 1,09. \text{ Звідси слідує зв'язок між середньою квадратичною}$$

$v_{кв}$ та середньою арифметичною $\bar{v}$ швидкостями: $v_{кв} = 1,09\bar{v}$.

$$\text{Відповідь: } \frac{\bar{v}}{v_{ім}} = 1,13; \quad \frac{v_{кв}}{v_{ім}} = 1,22; \quad \frac{v_{кв}}{\bar{v}} = 1,09.$$

При тестовому оцінюванні: 1.13; 1.22; 1.09.

Приклад 60. Знайти найбільш імовірну, середню арифметичну та середню квадратичну швидкості молекул газу, густина якого при нормальних умовах (за н.у. тиск $p = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ Па}$) дорівнює $1,42895 \text{ кг/м}^3$.

Дано:

$$p = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

$$\rho = 1,42895 \text{ кг/м}^3$$

$$v_{ім} ? \quad \bar{v} ? \quad v_{кв} ?$$

Розв'язання

Знайдемо вирази для швидкостей молекул через густину газу.

Для цього скористаємося рівнянням стану ідеального газу:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \Rightarrow \rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT} \quad (1)$$

У формули для швидкостей входить вираз T / μ :

$$v_{ім} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} \text{ – найбільш імовірна швидкість молекул; } \bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \text{ – середня}$$

$$\text{арифметична швидкість молекул та } v_{кв} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \text{ – середня квадратична швидкість молекул.}$$

Аналізуючи дані задачі, можливо значно спростити шлях її розв'язку – за відомими тиском та густиною газу (за н.у.) цілком можливо визначити газ використовуючи лише довідник, де подані густини багатьох газів за нормальних умов. І це – кисень, отже відома молярна маса у 32 г/моль, залишається лише підставити μ до формул і знайти шукані швидкості. Проте, розв'яжемо цю задачу загальним способом, для будь-якого газу, параметри, якого відрізняються від н.у. Доцільно виразити відношення T / μ з формули (1) для густини:

$\rho = \frac{p\mu}{RT} \Rightarrow \frac{T}{\mu} = \frac{p}{\rho R}$ та підставити в формули для швидкостей:

$$v_{lm} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2R p}{\rho R}} = \sqrt{\frac{2p}{\rho}}$$

$$v_{lm} = \sqrt{\frac{2p}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,01325 \cdot 10^5}{1,42895}} = 376,584 \approx 377 \text{ м/с} \quad \text{найбільш імовірна}$$

швидкість.

Перевіримо, врахувавши, що для кисню молярна маса $\mu = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$, $R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{K)}$ – універсальна газова стала:

$$v_{lm} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,31 \cdot 273}{32 \cdot 10^{-3}}} \approx 376,549 \approx 377 \text{ м/с}.$$

Отримані значення близькі.

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} = \sqrt{\frac{8R p}{\pi \rho R}} = \sqrt{\frac{8p}{\pi \rho}}$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8p}{\pi \rho}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 1,01325 \cdot 10^5}{\pi \cdot 1,42895}} \approx 425,04 \approx 425 \text{ м/с}$$

середня арифметична швидкість.

Перевіримо:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 8,31 \cdot 273}{3,14 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}} \approx 424,998 \approx 425 \text{ м/с}$$

$$v_{kv} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3R p}{\rho R}} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}},$$

$$v_{kv} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1,01325 \cdot 10^5}{1,42895}} \approx 461,22 \text{ м/с}$$

– середня квадратична швидкість.

Перевіримо:

$$v_{kv} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8,31 \cdot 273}{32 \cdot 10^{-3}}} \approx 461,177 \approx 461,2 \text{ м/с}.$$

Відповідь: $v_{lm} = 377 \text{ м/с}$; $\bar{v} = 425 \text{ м/с}$; $v_{kv} = 461,2 \text{ м/с}$

При тестовому оцінюванні: 377; 425; 461.2.

Приклад 61. У скільки разів середня квадратична швидкість пилинки, завислої у повітрі, менша за середню квадратичну швидкість молекул повітря? Маса пилинки 10^{-8} г . Повітря вважати однорідним газом з молярною масою $\mu = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$

Дано:

$$m = 10^{-8} \text{ г} = 10^{-11} \text{ кг}$$

$$\mu = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг / моль}$$

$$\frac{v_{\text{кв пов}}}{v_{\text{кв п}}} ?$$

Розв'язання

Середня квадратична швидкість молекул

повітря визначається виразом: $v_{\text{кв пов}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$.

Середня квадратична швидкість пилінки буде рівна:

$$v_{\text{кв пов}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$

Знайдемо їх відношення:

$$\frac{v_{\text{кв пов}}}{v_{\text{кв п}}} = \frac{\sqrt{\frac{3RT}{\mu}}}{\sqrt{\frac{3kT}{m}}} = \sqrt{\frac{Rm}{\mu k}} = \sqrt{\frac{N_A m}{\mu}}.$$

Тут враховано, що стала Больцмана за визначенням: $k = \frac{R}{N_A}$, де

$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ – число Авогадро.

Підставимо значення фізичних величин:

$$\frac{v_{\text{кв пов}}}{v_{\text{кв п}}} = \sqrt{\frac{N_A m}{\mu}} = \sqrt{\frac{6,02 \cdot 10^{23} \cdot 10^{-11}}{29 \cdot 10^{-3}}} = 1,44 \cdot 10^7 \text{ рази більша}.$$

Відповідь: $\frac{v_{\text{кв пов}}}{v_{\text{кв п}}} = 1,44 \cdot 10^7 \text{ рази більша}.$

При тестовому оцінюванні: 1.44E+7.

Приклад 62. Яка частина молекул кисню при 0°C володіє швидкістю від 100 м/с до 110 м/с ?

Дано:

$$t = 0^\circ \text{C} \Rightarrow T = 273 \text{ K}$$

$$v_1 = 100 \text{ м/с}$$

$$v_2 = 110 \text{ м/с}$$

$$\frac{\Delta N}{N} ?$$

Розв'язання

Інтервал швидкостей Δv , в який потрапляють швидкості шуканого числа молекул, невеликий порівняно з самою швидкістю. Тому відносна кількість молекул, що міститься в цьому інтервалі, визначається за формулою Максвелла:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 \Delta u = \frac{4}{\sqrt{\pi}} (\exp(-u^2)) u^2 \Delta u,$$

де $u = \frac{v}{v_{\text{ім}}}$ – відносна швидкість; $v = v_1 = 100 \text{ м/с}$;

$\Delta v = v_2 - v_1 = 10 \text{ м/с}$ – інтервал швидкостей;

$$v_{im} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,31 \cdot 273}{32 \cdot 10^{-3}}} \approx 376,5 \text{ м/с} - \text{найбільш імовірна швидкість.}$$

$$\text{Тоді відносна швидкість } u = \frac{v}{v_{im}} = \frac{100}{376,5} \approx 0,266.$$

Визначимо значення виразів, що входять у формулу розподілу за швидкостями:

$$\begin{aligned} u^2 &= 0,266^2 = 0,071; \\ e^{-u^2} &= \exp(-u^2) = \exp(-0,266^2) = 0,93; \\ \Delta u &= \frac{\Delta v}{v_{im}} = \frac{10}{376,5}. \end{aligned}$$

Підставимо в формулу Максвелла:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 \Delta u = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot 0,93 \cdot 0,071 \cdot \frac{10}{376,5} = 0,004 \Rightarrow 0,4\%.$$

Зауважимо, що такий спосіб розв'язування неможливий, якщо інтервал швидкостей Δv можна порівняти з самою величиною швидкості v . В цьому випадку слід переходити до інтегрування. Число молекул в одиниці об'єму, швидкості яких змінюються від v_1 до v_2 ,

$$\text{дорівнює: } \Delta n = 4\pi \cdot n \cdot \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \int_{v_1}^{v_2} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} v^2 dv.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{\Delta N}{N} = 0,4\%$$

При тестовому оцінюванні: 0.4

Приклад 63. Чому дорівнює при нормальних умовах (н.у.) число молекул азота в 1 м^3 , швидкості яких лежить в інтервалі від 99 м/с до 101 м/с ?

Дано:

$$t = 0^\circ\text{C} \Rightarrow T = 273\text{ K}$$

$$v_1 = 99\text{ м/с}$$

$$v_2 = 101\text{ м/с}$$

$$V = 1\text{ м}^3$$

$$\Delta n ?$$

Розв'язання

За н.у. (н.у. $T_0 = 273,15\text{ K}$, $p_0 = 1,01325\text{ Па}$) у

1 м^3 будь-якого газу є однакове число молекул, яке називається числом Лошмідта. Стала Лошмідта знаходиться з рівняння стану ідеального газу та позначається n_0 .

$$n_0 = \frac{p_0}{kT_0} = 2,69 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}.$$

Отже, в формулі Максвелла $\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 \Delta u = \frac{4}{\sqrt{\pi}} (\exp(-u^2)) u^2 \Delta u$ число молекул $N = n = n_0$.

Тоді шукане число молекул в інтервалі Δv визначається за формулою:

$$\Delta n = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot n \cdot e^{-u^2} u^2 \Delta u = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot n \cdot (\exp(-u^2)) u^2 \Delta u.$$

Знайдемо значення всіх виразів, що входять у формулу.

$$u = \frac{v}{v_{im}} - \text{відносна швидкість; } v = v_1 = 99 \text{ м/с};$$

$$\Delta v = v_2 - v_1 = 2 \text{ м/с} - \text{інтервал швидкостей};$$

$$v_{im} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,31 \cdot 273}{28 \cdot 10^{-3}}} \approx 402,5 \text{ м/с} - \text{найбільш імовірна швидкість}.$$

Тут $\mu = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ – молярна маса азоту.

$$\text{Тоді відносна швидкість } u = \frac{v}{v_{im}} = \frac{99}{402,5} \approx 0,246.$$

$$u^2 = 0,246^2 = 0,0605;$$

$$e^{-u^2} = \exp(-u^2) = \exp(-0,0605) = 0,941;$$

$$\Delta u = \frac{\Delta v}{v_{im}} = \frac{2}{402,5}.$$

Підставимо отримані значення в формулу для Δn :

$$\Delta n = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot n \cdot e^{-u^2} u^2 \Delta u = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot 2,69 \cdot 10^{25} \cdot 0,941 \cdot 0,0605 \cdot \frac{2}{402,5} \approx 1,7 \cdot 10^{22}.$$

$$\text{Відповідь: } \Delta n = 1,7 \cdot 10^{22}.$$

$$\text{При тестовому оцінюванні: } 1.7\text{E}+22$$

Приклад 64. У скільки разів число молекул ΔN_1 , швидкості яких лежать в інтервалі від $v_{кв}$ до $v_{кв} + \Delta v$, менше від числа молекул ΔN_2 , швидкості яких лежать в інтервалі від v_{im} до $v_{im} + \Delta v$?

Дано:

для ΔN_1 шв. від $v_{кв}$ до $v_{кв} + \Delta v$

для ΔN_2 шв. від v_{im} до $v_{im} + \Delta v$

$$\frac{\Delta N_2}{\Delta N_1} ?$$

Розв'язання

З функції розподілу Максвелла молекул за швидкостями маємо:

$$\frac{\Delta N}{N \cdot \Delta v} = 4\pi \cdot \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} v^2.$$

(формулу дивитись на стор. 32)

Перепишемо цей вираз для нашого випадку:

для ΔN_1 маємо:

$$\Delta N_1 = N \cdot \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{m_0 v_{KB}^2}{2kT}} 4\pi v_{KB}^2 \Delta v = N \cdot \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{m_0 v_{KB}^2}{2kT}\right) \cdot 4\pi v_{KB}^2 \Delta v$$

для ΔN_2 :

$$\Delta N_2 = N \cdot \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{m_0 v_{IM}^2}{2kT}} 4\pi v_{IM}^2 \Delta v = N \cdot \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{m_0 v_{IM}^2}{2kT}\right) \cdot 4\pi v_{IM}^2 \Delta v.$$

Знайдемо відношення, скоротивши константу $N \cdot \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot 4\pi \Delta v$:

$$\frac{\Delta N_2}{\Delta N_1} = \frac{\exp\left(-\frac{m_0 v_{IM}^2}{2kT}\right) \cdot 4\pi v_{IM}^2}{\exp\left(-\frac{m_0 v_{KB}^2}{2kT}\right) \cdot 4\pi v_{KB}^2} = \exp\left(\frac{m_0(v_{KB}^2 - v_{IM}^2)}{2kT}\right) \cdot \frac{v_{IM}^2}{v_{KB}^2}.$$

Тепер підставимо в цю формулу вирази для найімовірнішої

$$v_{IM} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} \quad \text{та} \quad \text{середньої квадратичної} \quad v_{KB} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$$

швидкостей:

$$\frac{\Delta N_2}{\Delta N_1} = \exp\left(\frac{m_0 \left(\frac{3kT}{m_0} - \frac{2kT}{m_0} \right)}{2kT}\right) \cdot \frac{2RT\mu}{\mu \cdot 3RT} = e^{0,5} \cdot \frac{2}{3} = 1,1 \quad - \quad \text{кількість молекул,}$$

швидкості яких лежать в інтервалі від v_{IM} до $v_{IM} + \Delta v$ в 1,1 рази більша за кількість молекул, швидкості яких лежать в інтервалі від v_{KB} до $v_{KB} + \Delta v$ для будь-якого газу при будь-якій температурі. Очевидно, що кількість молекул, швидкості яких лежать в інтервалі від v_{KB} до $v_{KB} + \Delta v$ в 1,1 рази менша за кількість молекул, швидкості яких лежать в інтервалі від v_{IM} до $v_{IM} + \Delta v$ для будь-якого газу при будь-якій температурі.

$$\text{Відповідь: } \frac{\Delta N_2}{\Delta N_1} = 1,1.$$

При тестовому оцінюванні: 1.1.

Приклад 65. Яка частина молекул азоту, що знаходиться при температурі T , має швидкості в інтервалі від v_{im} до $v_{im} + \Delta v$, де $\Delta v = 30 \text{ м/с}$, $T = 500 \text{ К}$?

Дано:

N_2

$T = 500 \text{ К}$

v_{im}

$v_{im} + \Delta v$

$\Delta v = 30 \text{ м/с}$

$\frac{\Delta N}{N} ?$

Розв'язання

Скористаємося формулою Максвелла для знаходження частини молекул, швидкості яких лежать в інтервалі від v_{im} до $v_{im} + \Delta v$;

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 \Delta u = \frac{4}{\sqrt{\pi}} (\exp(-u^2)) u^2 \Delta u,$$

де відносна швидкість за умовою задачі: $u = \frac{v}{v_{im}} = \frac{v_{im}}{v_{im}} = 1$.

Знайдемо значення всіх виразів, що входять у формулу Максвелла: $u^2 = 1$;

$$e^{-u^2} = e^{-1}; \quad v_{im} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,31 \cdot 500}{28 \cdot 10^{-3}}} = 544,8 \text{ м/с},$$

де $\mu = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ – молярна маса азоту;

$$\Delta u = \frac{\Delta v}{v_{im}} = \frac{30}{544,8} = 0,055.$$

Підставимо отримані значення в формулу Максвелла:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-1} \cdot 1 \cdot 0,055 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} (\exp(-1)) \cdot 1 \cdot 0,055 = 0,046 \Rightarrow 4,6\% \text{ – доля молекул,}$$

швидкості яких лежать в інтервалі від v_{im} до $v_{im} + \Delta v$ при заданому $\Delta v = 30 \text{ м/с}$ та $T = 500 \text{ К}$.

Відповідь: $\frac{\Delta N}{N} = 4,6\%$.

При тестовому оцінюванні: 4.6

Приклад 66. У закритій посудині міститься $m = 0,2 \text{ кг}$ кисню. Обчислити кількість молекул кисню, швидкості яких лежать у межах від 200 до 210 м/с при $t = 0^\circ \text{C}$.

Дано:

O_2

$m = 0,2 \text{ кг}$

$t = 0^\circ \text{C} \Rightarrow T = 273 \text{ К}$

$v_1 = 200 \text{ м/с}$

$v_2 = 210 \text{ м/с}$

ΔN ?

Розв'язання

Скористаємося формулою Максвелла для знаходження частини молекул, швидкості яких лежать в інтервалі від v_1 до v_2 ;

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 \Delta u = \frac{4}{\sqrt{\pi}} (\exp(-u^2)) u^2 \Delta u,$$

Знайдемо значення всіх виразів, що входять у формулу Максвелла:

$$v_{im} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,31 \cdot 273}{32 \cdot 10^{-3}}} = 376,5 \text{ м/с} \quad - \text{ найбільш імовірна швидкість молекул при даній температурі;}$$

$$\text{Відносна швидкість } u = \frac{v_1}{v_{im}} = \frac{200}{376,5} = 0,531; \quad u^2 = 0,531^2 = 0,282;$$

$$e^{-u^2} = e^{-0,282} = 0,754; \quad \Delta u = \frac{\Delta v}{v_{im}} = \frac{210 - 200}{376,5} = \frac{10}{376,5}.$$

Підставимо отримані значення в формулу Максвелла:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot 0,754 \cdot 0,282 \cdot \frac{10}{376,5} = 0,0127.$$

Звідси шукана кількість молекул: $\Delta N = 0,0127 \cdot N$.

$$\text{Загальна кількість молекул в посудині } N = \nu \cdot N_A = \frac{m}{\mu} N_A,$$

де $\nu = \frac{m}{\mu}$ – кількість молей; $\mu = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ – молярна маса кисню;

$$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1} - \text{число Авогадро.}$$

Остаточно кількість молекул в заданому інтервалі швидкостей:

$$\Delta N = 0,0127 \frac{m}{\mu} N_A.$$

Підставимо числові значення фізичних величин:

$$\Delta N = 0,0127 \frac{m}{\mu} N_A = 0,0127 \cdot \frac{0,2}{32 \cdot 10^{-3}} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} = 4,8 \cdot 10^{22} \text{ молекул.}$$

Відповідь: $\Delta N = 4,8 \cdot 10^{22}$ молекул.

При тестовому оцінюванні: 4.8E+22.

Приклад 67. Яка частина молекул азоту при температурі $t = 150^\circ\text{C}$ володіє швидкостями в інтервалі від $v_1 = 200 \text{ м/с}$ до $v_2 = 900 \text{ м/с}$?

Примітка. Скористатися таблицею, яка відображає залежність долі молекул N_x / N , швидкості яких перевищують задане значення відносної швидкості u .

Таблиця 1.4

u	$\frac{N_x}{N}$	u	$\frac{N_x}{N}$	u	$\frac{N_x}{N}$
0	1,000	0,6	0,868	1,25	0,374
0,2	0,994	0,7	0,806	1,5	0,213
0,4	0,957	0,8	0,734	2,0	0,046
0,5	0,918	1,0	0,572	2,5	0,0057

Дано:

 N_2

$$t = 150^\circ\text{C} \Rightarrow T = 423\text{K}$$

$$v_1 = 200\text{м/с}$$

$$v_2 = 900\text{м/с}$$

$$\frac{\Delta N}{N}?$$

Розв'язання

Заданий інтервал швидкостей сумірний з величиною швидкості. Тому не можна використовувати в цьому випадку формулу Максвелла (зауваження до задач стор. 71).

Використаємо таблицю, обчислену статистичними методами, наведену вище.

Знайдемо частку молекул $\left(\frac{N_x}{N}\right)_1$, швидкості яких

перевищують відносну швидкість u_1 .

Відносна швидкість $u_1 = \frac{v_1}{v_{im}}$, де найбільш імовірна швидкість $v_{im} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$:

$$v_{im} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,31 \cdot 423}{28 \cdot 10^{-3}}} = 501,1\text{м/с},$$

де $\mu = 28 \cdot 10^{-3}\text{кг/моль}$ – молярна маса азоту, $R = 8,31\text{Дж/(моль} \cdot \text{К)}$ – універсальна газова стала.

Отже,

$$u_1 = \frac{v_1}{v_{im}} = \frac{200}{501,1} = 0,399 \approx 0,4.$$

З таблиці 1.4 для $u_1 = 0,4$ знаходимо $\left(\frac{N_x}{N}\right)_1 = 0,957$ – така доля молекул зі швидкостями, що перевищують швидкість $v_1 = 200\text{м/с}$, від загальної кількості молекул.

Тепер знайдемо частку $\left(\frac{N_x}{N}\right)_2$ молекул, швидкості яких перевищують значення відносної швидкості u_2 .

$$u_2 = \frac{v_2}{v_{im}} = \frac{900}{501,1} = 1,796 \approx 1,8.$$

В таблиці такого значення u немає. Є значення $\frac{N_x}{N}$ для $u = 1,5$ та $u = 2,0$.

Тому складемо потрібну пропорцію.

Вміння це робити корисне для інженерних розрахунків з використанням таблиць (зокрема, в «Опорі матеріалів»).

$u - N_x / N$

$$\begin{array}{l} 1,5 - 0,213 \\ 1,8 - x \\ 2,0 - 0,046 \end{array} \Rightarrow x = 0,213 + \frac{0,046 - 0,213}{2 - 1,5} \cdot (1,8 - 1,5) = 0,1128 \approx 0,11.$$

Отже, $\left(\frac{N_x}{N}\right)_2 = 0,11$ – така доля молекул зі швидкостями, що

перевищують швидкість $v_2 = 900 \text{ м/с}$, від загальної кількості молекул.

Знайдемо різницю $\frac{\Delta N}{N} = \left(\frac{N_x}{N}\right)_1 - \left(\frac{N_x}{N}\right)_2$ – це частина молекул, швидкості яких лежать між 200 м/с та 900 м/с .

$$\frac{\Delta N}{N} = \left(\frac{N_x}{N}\right)_1 - \left(\frac{N_x}{N}\right)_2 = 0,957 - 0,11 = 0,847 \Rightarrow 84,7\% \approx 85\%$$

Відповідь: $\frac{\Delta N}{N} = 85\%$.

При тестовому оцінюванні: 85.

Приклад 68. Яка частина загального числа N молекул має швидкості більші за найбільш імовірну швидкість?

Дано:

Розв'язання

v_{im}

Щоб розв'язати цю задачу, скористаємося таблицею з

$\frac{N_x}{N} ?$

Приклад 67, яка відображає залежність долі молекул $\frac{N_x}{N}$,

швидкості яких перевищують задане значення відносної швидкості u , від величини u .

Відносна швидкість за умовою задачі:

$$u = \frac{v}{v_{im}} = \frac{v_{im}}{v_{im}} = 1.$$

З таблиці для $u = 1$ значення $\frac{N_x}{N} = 0,572$ або $\approx 57\%$ – така частка молекул має швидкості, більші за v_{im} для будь-якого газу для будь-якої температури.

Відповідь: $\frac{N_X}{N} = 57\%$. При тестовому оцінюванні: 57.

Приклад 69. В балоні знаходиться 10г кисню при температурі 1600K. Яке число молекул кисню має кінетичну енергію поступального руху, яка перевищує значення $E_{\kappa}^{(1)} = 6,65 \cdot 10^{-20}$ Дж ?

Дано:

O_2

$$m = 10\text{г} = 10 \cdot 10^{-3} \text{ кг};$$

$$T = 1600\text{K};$$

$$E_{\kappa}^{(1)} = 6,65 \cdot 10^{-20} \text{ Дж}$$

$$N_X?$$

Розв'язання

Спочатку знайдемо загальну кількість молекул в балоні, а потім кількість молекул, для котрих кінетична енергія більша за $E_{\kappa}^{(1)} = 6,65 \cdot 10^{-20}$ Дж.

Загальна кількість молекул:

$$N = \nu \cdot N_A = \frac{m}{\mu} N_A, \text{ де } \nu = \frac{m}{\mu} - \text{кількість молей};$$

$\mu = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ – молярна маса кисню; $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ – число Авогадро.

$$N = \frac{m}{\mu} N_A = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} = 1,88 \cdot 10^{23} - \text{загальна кількість молекул в балоні.}$$

Тепер знайдемо $\frac{N_X}{N}$. Для цього скористаємося таблицею з

Приклад 67, котра відображає залежність долі молекул $\frac{N_X}{N}$, швидкості яких перевищують задане значення відносної швидкості u , від величини u .

Отже треба знайти значення відносної швидкості $u = \frac{v}{v_{im}}$,

$$\text{де } v_{im} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,31 \cdot 1600}{32 \cdot 10^{-3}}} = 911,592 \text{ м/с} - \text{найбільш імовірна швидкість,}$$

тут де $\mu = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ – молярна маса кисню, $R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{K)}$ – універсальна газова стала.

Щоб знайти v , скористаємося формулою для кінетичної енергії поступального руху молекули:

$$E_{\kappa}^{(1)} = \frac{m_0 v^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_{\kappa}^{(1)}}{m_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot N_A \cdot E_{\kappa}^{(1)}}{\mu}},$$

де $m_0 = \frac{\mu}{N_A}$ – маса однієї молекули, $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ – число Авогадро.

$$v = \sqrt{\frac{2E_{\kappa}^{(1)}}{m_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot N_A \cdot E_{\kappa}^{(1)}}{\mu}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \cdot 6,65 \cdot 10^{-20}}{32 \cdot 10^{-3}}} = 1581,79 \text{ м/с}.$$

Відносна швидкість $u = \frac{v}{v_{lm}} = \frac{1581,79}{911,592} = 1,735$ – такого значення в

таблиці немає.

Складемо потрібну пропорцію, щоб знайти N_x / N для $u = 1,735$:

$u - N_x / N$

$$\begin{array}{l} 1,5 - 0,213 \\ 1,735 - x \end{array} \Rightarrow x = 0,213 + \frac{0,046 - 0,213}{2 - 1,5} \cdot (1,735 - 1,5) = 0,1345 \approx 0,13.$$

$2,0 - 0,046$

$\frac{N_x}{N} = 0,13$ – така частка молекул має кінетичну енергію поступального руху,

що перевищує $E_k^{(1)} = 6,65 \cdot 10^{-20}$ Дж.

Кількість таких молекул: $N_x = 0,13 \cdot N$.

Обчислимо: $N_x = 0,13 \cdot N = 0,13 \cdot 1,88 \cdot 10^{23} = 2,4 \cdot 10^{22}$ молекул.

Відповідь: $N_x = 2,4 \cdot 10^{22}$.

При тестовому оцінюванні: 2.4E+22.

Приклад 70. В балоні знаходиться 10 г кисню. Знайти число молекул кисню, швидкості яких перевищують значення середньої квадратичної швидкості.

Розв'язання

Дано:

O_2

$m = 10 \text{ г} = 10 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$

v_{kv}

$N_x ?$

Спочатку знайдемо загальну кількість молекул в балоні, а потім кількість молекул, для котрих швидкість перевищує середню квадратичну. Загальна кількість молекул:

$$N = \nu \cdot N_A = \frac{m}{\mu} N_A,$$

де $\nu = \frac{m}{\mu}$ – кількість молей; $\mu = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг / моль}$ –

молярна маса кисню; $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ – число Авогадро.

загальна кількість молекул в балоні

$$N = \frac{m}{\mu} N_A = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} = 1,88 \cdot 10^{23}.$$

Знайдемо $\frac{N_x}{N}$, для цього з **Прикладу 67** скористаємося таблицею, яка

відображає залежність долі молекул $\frac{N_x}{N}$, швидкості яких перевищують задане значення відносної швидкості u , від величини u .

Отже треба знайти спочатку значення відносної швидкості для нашого випадку: $u = \frac{v_{кв}}{v_{ім}}$. Врахуємо, що між середньою квадратичною та найбільш імовірною швидкостями існує зв'язок: $v_{кв} = 1,22v_{ім}$.

$$\text{Тоді відносна швидкість: } u = \frac{v_{кв}}{v_{ім}} = \frac{1,22v_{ім}}{v_{ім}} = 1,22.$$

Оскільки в таблиці з **Приклад 67** значення $u = 1,22$ немає, складемо потрібну пропорцію для знаходження N_x / N .

$$u - N_x / N$$

$$\begin{array}{l} 1,0 - 0,572 \\ 1,22 - x \end{array} \Rightarrow x = 0,572 + \frac{0,374 - 0,572}{1,25 - 1,0} \cdot (1,22 - 1,0) = 0,394 \approx 0,4.$$

$$1,25 - 0,374$$

$\frac{N_x}{N} = 0,4$ – така частка молекул має швидкості, що перевищують середню квадратичну швидкість.

Кількість таких молекул: $N_x = 0,4 \cdot N$.

Обчислимо: $N_x = 0,4 \cdot N = 0,4 \cdot 1,88 \cdot 10^{23} = 7,5 \cdot 10^{22}$ молекул.

Відповідь: $N_x = 7,5 \cdot 10^{22}$.

При тестовому оцінюванні: 7.5E+22.

Приклад 71. Знайти відносну кількість молекул водню, швидкості яких відрізняються від найбільш імовірної не більше, як на 10 м/с при температурі $t = 27^\circ\text{C}$.

Дано:



$$v_1 = v_{ім} - 10 \text{ (м/с)}$$

$$v_2 = v_{ім} + 10 \text{ (м/с)}$$

$$t = 27^\circ\text{C} \Rightarrow T = 300\text{K}$$

$$\frac{\Delta N}{N} ?$$

Розв'язання

Використаємо другий варіант формули Максвелла (див. вказівки для розв'язування задач §1.11.2):

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{u^2}{u_{ім}^2}} \frac{u^2}{u_{ім}^3} \Delta u = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\exp\left(-\frac{u^2}{u_{ім}^2}\right) \right) \frac{u^2}{u_{ім}^3} \Delta u -$$

відносна кількість молекул, швидкості яких лежать в шуканому інтервалі.

Інтервал швидкостей становитиме:

$$\Delta u = (v_{ім} + 10) - (v_{ім} - 10) = 20 \text{ м/с};$$

Швидкість $u = \frac{v_1 + v_2}{2}$. Підставимо v_1 та v_2 :

$$u = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{v_{im} - 10 + v_{im} + 10}{2} = v_{im}.$$

Знайдемо найбільш імовірну швидкість v_{im} та швидкість u , оскільки вони рівні:

$$u = u_{im} = v_{im} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}, \text{ де } \mu = 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг / моль} - \text{молярна маса водню};$$

$R = 8,31 \text{ Дж / (моль} \cdot \text{K)}$ – універсальна газова стала.

$$u = u_{im} = v_{im} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,31 \cdot 300}{2 \cdot 10^{-3}}} = 1578,9 \approx 1580 \text{ м / с}.$$

Підставимо знайдені значення Δu , $u = u_{im}$ у формулу Максвелла:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\exp \left(-\frac{u^2}{u_{im}^2} \right) \right) \frac{u^2}{u_{im}^3} \Delta u = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\exp \left(-\frac{u_{im}^2}{u_{im}^2} \right) \right) \frac{u_{im}^2}{u_{im}^3} \Delta u = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-1} \cdot \frac{\Delta u}{u_{im}}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-1} \cdot \frac{\Delta u}{u_{im}} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-1} \cdot \frac{20}{1580} = 0,01 \text{ або } 1\%.$$

Відповідь: $\frac{\Delta N}{N} = 1\%.$

При тестовому оцінюванні: 1.

Приклад 72. Визначити відстань між смужками срібла, що розпилюється у приладі Штерна (див. теорію «Розподіл Максвелла», стор. 32 – дослід Штерна) при температурі 927°C , якщо його циліндри, маючи радіуси 13 см та 1 см , обертаються з частотою $\nu = 1006 / \text{с}$.

Дано:

Ag

$$t = 927^\circ\text{C} \Rightarrow T = 1200\text{ K}$$

$$\nu = 1006 / \text{с}$$

$$R = 13\text{ см} = 13 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$r = 1\text{ см} = 1 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$d?$

Розв'язання

У досліді Штерна (§ 1.7. Розподіл Максвелла – розподіл молекул ідеального газу за швидкостями, ст. 35, вказівки для розв'язування задач § 1.11.2 ст. 85) швидкість молекул визначається за такою формулою:

$$u = \frac{2\pi\nu R(R-r)}{d},$$

де R і r – радіуси зовнішнього та внутрішнього циліндрів, ν – частота їх обертання, d – відстань між смужками (шарами молекул в нерухомому і рухомому стані приладу). Знайдемо відстань:

$$d = \frac{2\pi\nu R(R-r)}{u}.$$

Швидкість u атомів парів срібла знайдемо як найбільш імовірну:

$$u = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,31 \cdot 1200}{108 \cdot 10^{-3}}} = 430 \text{ м/с}, \text{ де } \mu = 108 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль} - \text{молярна}$$

маса срібла; $R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{K)}$ – універсальна газова стала.

Обчислимо відстань:

$$d = \frac{2\pi\nu R(R-r)}{u} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 10 \cdot 13 \cdot 10^{-2} (13 \cdot 10^{-2} - 1 \cdot 10^{-2})}{430} \approx 0,0023 \text{ м}.$$

Відповідь: $d = 0,0023 \text{ м}$.

При тестовому оцінюванні: $2.3\text{E} - 3$.

Приклад 73. За графіком, зображеним на рис. 3, визначте абсолютну температуру азоту у випадку II. Оцініть для випадку II частину молекул, швидкість яких перевищує 500 м/с .

Дано:

N_2

$v_1 = 500 \text{ м/с}$

$\left(\frac{\Delta N}{N}\right)_{II} ? T_{II} ?$

Розв'язання

Функція розподілу за швидкостями $f(v)$

має властивість досягати свого максимального значення при найбільш імовірній швидкості

$$v_{im} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}, \text{ де } \mu = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль} -$$

молярна маса азоту; $R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{K)}$ – універсальна газова стала.

Знайдемо $v_{im II}$ для другого випадку. З графіка видно, що

$$v_{im II} = 0,38 \cdot 10^3 = 380 \text{ м/с}.$$

Знайдемо абсолютну температуру газу для випадку II:

$$v_{im II}^2 = \frac{2RT_{II}}{\mu} \Rightarrow T_{II} = \frac{v_{im II}^2 \cdot \mu}{2R} = \frac{380^2 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 8,31} = 243 \text{ K} -$$

температура азоту для другого випадку. Якби ми визначили температуру для I-го випадку (це треба зробити самостійно), то виявилось б, що вона більша.

Зробимо висновки: при більших температурах графік $f(v)$ стає «пологішим», v_{im} набувають більших значень, $f(v)$ має менше значення максимуму.

За графіком кількість молекул, швидкість яких більше $1200 \text{ м/с} \rightarrow 0$. Тому інтервал швидкостей від 500 м/с до 1200 м/с , тобто 700 м/с . Іншими словами, він сумірний з самою швидкістю. Тому, застосувати формулу Максвелла строго кажучи, немає можливості.

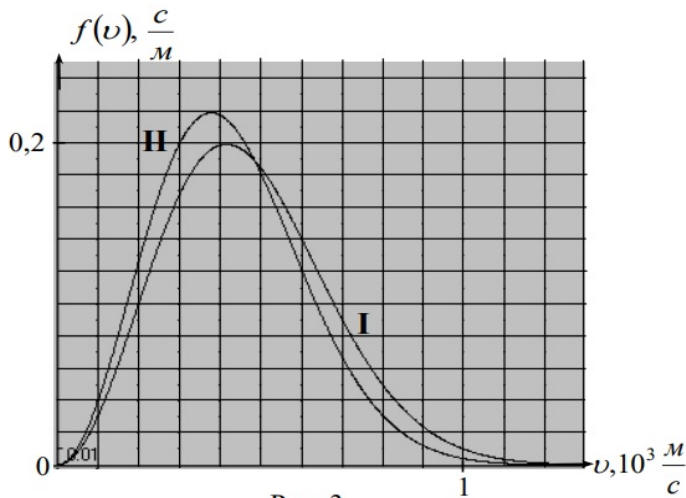


Рис. 3.

(Так з виразу для функції розподілу $f(v) = \frac{\Delta N}{N \Delta u} \Rightarrow \frac{\Delta N}{N} = f(v) \Delta u$

з графіка $f(v) = 0,22$.

$$\Delta u = \frac{\Delta v}{v_{\text{имII}}} = \frac{1200 - 500}{380} = 1,84.$$

$$\left(\frac{\Delta N}{N} \right)_{\text{II}} = f(v) \Delta u = 0,22 \cdot 1,84 = 0,4 \text{ або } 40\% \text{ — от що буде при застосуванні}$$

формули Максвелла).

З іншої сторони, $f(v) \Delta u$ — це площа малого квадратику на графіку. Порахуємо кількість квадратиків під графіком залежності $f(v)$ — $\approx 48 \text{ кл.}$

Кількість квадратиків під частиною графіка для $v > 500 \text{ м/с} \approx 16 \text{ кл.}$

$$\frac{16}{48} \approx 0,333 \text{ або } 33,3\%. \text{ Треба це все перевірити.}$$

Скористаємося таблицею, яка відображає залежність долі молекул $\frac{N_x}{N}$, швидкості яких перевищують задане значення відносної швидкості u , від величини u .

Цей метод використовується саме тоді, коли заданий інтервал швидкостей **співмірний** з величиною швидкості.

Таблиця 1.5

u	$\frac{N_x}{N}$	u	$\frac{N_x}{N}$	u	$\frac{N_x}{N}$
0	1,000	0,6	0,868	1,25	0,374
0,2	0,994	0,7	0,806	1,5	0,213
0,4	0,957	0,8	0,734	2,0	0,046
0,5	0,918	1,0	0,572	2,5	0,0057

Відносна швидкість $u = \frac{v_1}{v_{\text{им II}}} = \frac{500}{380} = 1,32$ – в таблиці такого значення немає.

Тому складемо потрібну пропорцію:

$$u - N_x / N$$

$$\frac{1,25 - 0,374}{1,32 - x} \Rightarrow x = 0,374 + \frac{0,213 - 0,374}{1,5 - 1,25} \cdot (1,32 - 1,25) = 0,329 \approx 0,33$$

$$1,5 - 0,213$$

$\frac{N_x}{N} = 0,33$ або 33% – така частка молекул має швидкості, що перевищують 500 м/с.

Значення 33% більш точне, оскільки заданий інтервал швидкостей сумірний з величиною швидкості.

Відповідь: $T_{\text{II}} = 243\text{K}$; $\left(\frac{\Delta N}{N}\right)_{\text{II}} = 33\%$.

При тестовому оцінюванні: 243; 33.

Приклад 74. Біля поверхні Землі на мільйон молекул азоту припадає приблизно одна молекула водню. На якій висоті концентрація молекул водню і азоту в атмосфері вирівнюється? Вважати, що температура атмосфери 0°C і залишається незмінною зі зміною висоти. Залежністю прискорення вільного падіння від висоти знехтувати.

Дано:

$$t = 0^\circ\text{C} \Rightarrow T = 273\text{K}$$

$$n_{01} - \text{для } N_2;$$

$$n_{02} - \text{для } H_2;$$

$$n_{01} / n_{02} = 10^6$$

$$n_1 = n_2$$

$$h?$$

Розв'язання

Залежність концентрації молекул азоту і водню від висоти h задається розподілом Больцмана:

$$n_1 = n_{01} e^{-\frac{\mu_1 gh}{RT}} = n_{01} \exp\left(-\frac{\mu_1 gh}{RT}\right) - \text{для азоту};$$

$$n_2 = n_{02} e^{-\frac{\mu_2 gh}{RT}} = n_{02} \exp\left(-\frac{\mu_2 gh}{RT}\right) - \text{для водню},$$

де n_{01} – для N_2 – концентрація азоту біля поверхні. Землі; n_{02} – для H_2 – концентрація водню біля поверхні Землі.

Розділимо друге рівняння на перше:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{n_{02} e^{-\frac{\mu_2 gh}{RT}}}{n_{01} e^{-\frac{\mu_1 gh}{RT}}} = \frac{n_{02}}{n_{01}} \exp\left(\frac{gh}{RT}(\mu_1 - \mu_2)\right).$$

З умови задачі $n_1 = n_2$ – концентрації газів на висоті h вирівнюються. Тоді з цієї формули маємо:

$$1 = \frac{n_{02}}{n_{01}} \exp\left(\frac{gh}{RT}(\mu_1 - \mu_2)\right) \Rightarrow \frac{n_{01}}{n_{02}} = \exp\left(\frac{gh}{RT}(\mu_1 - \mu_2)\right).$$

Щоб визначити h , треба прологарифмувати (взяти логарифм натуральний від експоненти – тоді отримаємо показник експоненти) останню формулу:

$$\ln \frac{n_{01}}{n_{02}} = \frac{gh}{RT}(\mu_1 - \mu_2) \Rightarrow h = \frac{RT \cdot \ln \frac{n_{01}}{n_{02}}}{g(\mu_1 - \mu_2)},$$

де $\mu_1 = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ – молярна маса азоту; $\mu_2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ – молярна маса водню; $R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{K)}$ – універсальна газова стала; $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ – прискорення вільного падіння.

Підставимо значення фізичних величин:

$$h = \frac{RT \cdot \ln \frac{n_{01}}{n_{02}}}{g(\mu_1 - \mu_2)} = \frac{8,31 \cdot 273 \cdot \ln 10^6}{9,8 \cdot (28 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-3})} \approx 123007 \text{ м} \approx 123 \text{ км} - \text{ висота, на якій}$$

вирівнюються концентрації азоту та водню.

Відповідь: $h = 123 \text{ км}$.

При тестовому оцінюванні: 1.23E+5.

Приклад 75. Вважаючи температури різних газів однаковими (Рис. 4) вкажіть газ I, якщо II – це вуглекислий газ. Визначте температуру газів та середню квадратичну швидкість молекул газу I.

Дано:

CO_2 – газ II

$T_1 = T_2 \equiv T$

$T ? \text{ Газ I? } v_{\text{кв I}} ?$

Розв'язання

Щоб визначити газ I, запишемо вирази для найбільш імовірної швидкості, оскільки функція розподілу за швидкостями $f(v)$ має властивість досягати свого максимального значення при найбільш

імовірній швидкості $v_{\text{ім}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$, і ми можемо визначити цю швидкість з

графіка:

$$v_{im II} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu_{CO_2}}}; \quad v_{im II} = 0,35 \cdot 10^3 \text{ м/с} - \text{визначили з графіка};$$

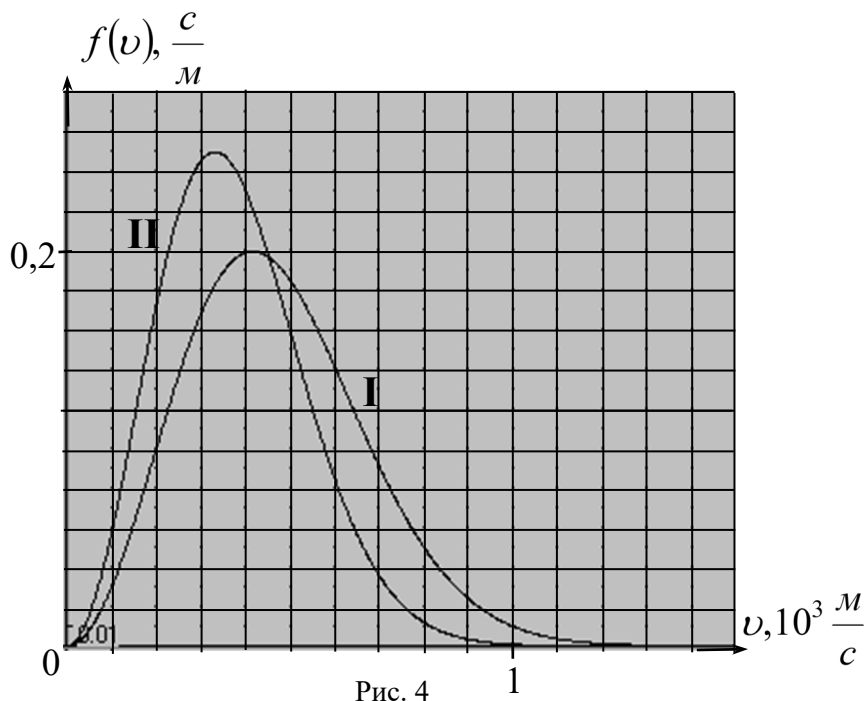


Рис. 4

$$v_{im I} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu_I}}; \quad v_{im I} = 0,41 \cdot 10^3 \text{ м/с} - \text{визначили з графіка}.$$

Тут враховано, що з умови $T_1 = T_2 \equiv T$, $\mu_{CO_2} = 44 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ – молярна маса вуглекислого газу; $R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$ – універсальна газова стала.

Щоб визначити молярну масу невідомого газу, поділимо один вираз на другий:

$$\frac{v_{im I}}{v_{im II}} = \sqrt{\frac{\mu_{CO_2}}{\mu_I}}; \quad \frac{\mu_{CO_2}}{\mu_I} = \left(\frac{v_{im I}}{v_{im II}} \right)^2 = \left(\frac{0,41 \cdot 10^3}{0,35 \cdot 10^3} \right)^2 = 1,372.$$

Тоді молярна маса $\mu_I = \frac{\mu_{CO_2}}{1,372} = \frac{44 \cdot 10^{-3}}{1,372} \approx 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ – молярна маса кисню. $\mu_I = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ – газ I – це кисень.

Визначимо температуру газів – з будь-якої формули для найбільш імовірної швидкості, наприклад, для $v_{im II} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu_{CO_2}}} \Rightarrow T = \frac{v_{im II}^2 \cdot \mu_{CO_2}}{2R}$.

Підставимо числові значення фізичних величин:

$$T = \frac{v_{\text{им II}}^2 \cdot \mu_{\text{CO}_2}}{2R} = \frac{0,35 \cdot 10^3 \cdot 44 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 8,31} = 324,3 \approx 324 \text{ K}.$$

Середня квадратична швидкість для газу I (кисню):

$$v_{\text{кв I}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu_I}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8,31 \cdot 324}{32 \cdot 10^{-3}}} = 502,4 \text{ м/с}.$$

Відповідь: газ I – це O_2 – кисень; $T = 324 \text{ K}$; $v_{\text{кв I}} = 502,4 \text{ м/с}$.

При тестовому оцінюванні: кисень; 324; 502.4.

Приклад 76. Знайти тиск повітря на висоті 3000 м, якщо тиск на рівні моря 760 мм рт. ст., температура 5°C . Молярна маса повітря $\mu = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$.

Дано:

$$h = 3000 \text{ м}$$

$$p_0 = 760 \text{ мм рт. ст.} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

$$t = 5^\circ \text{C} \Rightarrow T = 278 \text{ K}$$

$$\mu = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$p = ?$

Розв'язання

Тиск газу, що міститься в полі сили тяжіння, на будь-якій висоті визначається за барометричною формулою:

$$p = p_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}} = p_0 \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT}\right),$$

де $p_0 = 760 \text{ мм рт. ст.} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$ –

тиск на рівні моря (на висоті $h = 0$); $\mu = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ – молярна маса повітря; $R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{K)}$ – універсальна газова стала.

Підставимо значення фізичних величин:

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT}\right) = 1,01 \cdot 10^5 \exp\left(-\frac{29 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8 \cdot 3000}{8,31 \cdot 278}\right) = 1,01 \cdot 10^5 \cdot 0,6914 = 0,7 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Запишемо цей тиск в мм.рт.ст.: $p = 760 \cdot 0,6914 = 531 \text{ мм рт. ст.}$

Відповідь: $p = 0,7 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

При тестовому оцінюванні: 0.7E+5

Приклад 77. На якій висоті густина газу складає 50% від його густини на рівні моря? Температуру вважати сталою і рівною 0°C . Задачу розв'язати для 1) повітря; 2) водню.

Дано:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = 2$$

$$t = 0^\circ\text{C} \Rightarrow T = 273\text{K}$$

$$\mu_{\text{пов}} = \mu_1 = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг / моль}$$

$$\mu_{\text{H}_2} = \mu_2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг / моль}$$

$$h_1? \quad h_2?$$

Розв'язання

Запишемо тиск з рівняння стану ідеального газу, вважаючи Землю з її атмосферою замкнутою системою:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \Rightarrow p = \frac{m}{V\mu} RT = \frac{\rho\mu}{RT};$$

$$p = \frac{\rho\mu}{RT} - \text{тиск з рівняння стану.}$$

Тиск газу, що міститься в полі сили тяжіння, на будь-якій висоті визначається за барометричною формулою:

$$p = p_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}} = p_0 \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT}\right).$$

Підставимо в неї тиск, виражений через густину з рівняння стану ід. газу:

$$\frac{\rho\mu}{RT} = \frac{\rho_0\mu}{RT} \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT}\right) \Rightarrow \frac{\rho_0}{2} = \rho_0 \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT}\right) \Rightarrow \frac{1}{2} = \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT}\right).$$

Щоб визначити h , треба прологарифмувати (взяти логарифм натуральний від експоненти – тоді отримаємо показник експоненти) останню формулу:

$$\ln \frac{1}{2} = -\frac{\mu gh}{RT};$$

$$\ln 1 - \ln 2 = -\frac{\mu gh}{RT};$$

$$\ln 2 = \frac{\mu gh}{RT}, \text{ оскільки } \ln 1 = 0.$$

Тоді $h = \frac{RT \ln 2}{\mu g}$ – на цій висоті густина газу вдвічі менша, ніж на рівні моря.

Визначимо h для повітря та водню:

$$1) h_1 = \frac{RT \ln 2}{\mu_1 g} = \frac{8,31 \cdot 273 \cdot \ln 2}{29 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8} = 5533 \text{ м} \approx 5,5 \text{ км};$$

$$2) h_2 = \frac{RT \ln 2}{\mu_2 g} = \frac{8,31 \cdot 273 \cdot \ln 2}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8} = 80229 \text{ м} \approx 80 \text{ км}.$$

Відповідь: $h_1 = 5,5 \text{ км}; \quad h_2 = 80 \text{ км}.$

При тестовому оцінюванні: 5533; 80E+3.

Приклад 78. Пилінки, завислі в повітрі, мають масу $m = 10^{-18} \text{ г}$. У скільки разів зменшиться їх концентрація n при збільшенні висоти на $\Delta h = 10 \text{ м}$? Температура повітря $T = 300 \text{ К}$.

Розв'язання

Дано:

$$m = 10^{-18} \text{ г} = 10^{-18} \cdot 10^{-3} \text{ кг} = 10^{-21} \text{ кг}$$

$$\Delta h = 10 \text{ м}$$

$$T = 300 \text{ К}$$

$$\frac{n_1}{n_2} ?$$

Пилінки такого розміру, завислі в повітрі, поведуться як молекули. Тому зміна їх концентрації з висотою визначається за формулою Больцмана:

$$n_1 = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}} = n_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right) - \text{нехай}$$

це концентрація пилинок на деякій висоті h .

При збільшенні висоти концентрація буде зменшуватись:

$$n_2 = n_0 e^{-\frac{m g(h+\Delta h)}{kT}} = n_0 \exp\left(-\frac{m g(h+\Delta h)}{kT}\right) - \text{концентрація пилинок на висоті } (h+\Delta h).$$

Поділимо перший вираз на другий, щоб знайти відношення $\frac{n_1}{n_2}$:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{n_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right)}{n_0 \exp\left(-\frac{m g(h+\Delta h)}{kT}\right)} = \exp\left(\frac{m g \Delta h}{kT}\right).$$

Обчислимо, врахувавши, що $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж / К}$ – стала Больцмана:

$$\frac{n_1}{n_2} = \exp\left(\frac{m g \Delta h}{kT}\right) = \exp\left(\frac{10^{-21} \cdot 9,8 \cdot 10}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}\right) = \exp(23,67) = e^{23,67} = 1,9 \cdot 10^{10} -$$

у стільки разів зменшиться концентрація пилинок на висоті, вищій на 10 м.

$$\text{Відповідь: } \frac{n_1}{n_2} = e^{23,67} = 1,9 \cdot 10^{10}.$$

При тестовому оцінюванні: 1.9E+10.

Приклад 79. На скільки зменшиться атмосферний тиск при підніманні над поверхнею Землі на 100 м, якщо температура повітря 15° C ?

Дано:

$$p_0 = 760 \text{ мм рт. ст.}$$

$$h = 100 \text{ м}$$

$$t = 15^\circ \text{ C} \Rightarrow T = 288 \text{ К}$$

$$\Delta p ?$$

Розв'язання

Тиск газу, що міститься в полі сили тяжіння, на будь-якій висоті визначається за барометричною формулою:

$$p = p_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}} = p_0 \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT}\right),$$

де $p_0 = 760 \text{ мм рт. ст.}$ – тиск на поверхні Землі при $h = 0$;
 $\mu = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ – молярна маса повітря; $R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$ –
 універсальна газова стала.

Оскільки при підніманні над поверхнею Землі тиск зменшується,
 запишемо його: $p = p_0 - \Delta p$.

Підставимо цей вираз у барометричну формулу: $p_0 - \Delta p = p_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}}$.

Тоді зменшення тиску визначатиметься формулою:

$$\Delta p = p_0 \left(1 - e^{-\frac{\mu gh}{RT}} \right)$$

Підставимо значення фізичних величин:

$$\Delta p = p_0 \left(1 - e^{-\frac{\mu gh}{RT}} \right) = 760 \left(1 - \exp \left(-\frac{29 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8 \cdot 100}{8,31 \cdot 288} \right) \right) \approx 8,97 \approx 9 \text{ мм рт. ст.}$$

Відповідь: $\Delta p = 9 \text{ мм рт. ст.}$

При тестовому оцінюванні: 9.

Приклад 80. На скільки більший тиск повітря в шахті на глибині 1 км,
 ніж на поверхні Землі, якщо температура 0°C ?

Дано:

$$p_0$$

$$h = 1 \text{ км} = 10^3 \text{ м}$$

$$t = 0^\circ \text{C} \Rightarrow T = 273 \text{ K}$$

$$\Delta p ?$$

Розв'язання

При підйомі з шахти на поверхню Землі тиск
 зменшується за барометричною формулою.

Нехай p_0 – тиск на поверхні Землі, а p – тиск у шахті
 на глибині 1 км. Тоді барометрична формула для цього
 випадку:

$$p_0 = p e^{-\frac{\mu gh}{RT}} = p \exp \left(-\frac{\mu gh}{RT} \right).$$

Знайдемо з цієї формули тиск у шахті: $p = p_0 e^{\frac{\mu gh}{RT}} = p_0 \exp \left(\frac{\mu gh}{RT} \right).$

Різниця тисків Δp показує, на скільки більший тиск повітря в шахті на
 глибині h порівняно із тиском на поверхні p :

$$\Delta p = p - p_0 = p_0 e^{\frac{\mu gh}{RT}} - p_0 = p_0 \left(e^{\frac{\mu gh}{RT}} - 1 \right).$$

Отже,

$$\Delta p = p_0 \left(e^{\frac{\mu gh}{RT}} - 1 \right).$$

Обчислимо окремо значення експоненти:

$$e^{\frac{\mu gh}{RT}} = \exp\left(\frac{\mu gh}{RT}\right) = \exp\left(\frac{29 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8 \cdot 10^3}{8,31 \cdot 273}\right) = 1,133.$$

Обчислимо різницю тисків Δp :

$\Delta p = p_0(1,133 - 1) = 0,13 p_0$ – на стільки більший тиск повітря в шахті на глибині 1 км порівняно з тиском на поверхні Землі.

Відповідь: $\Delta p = 0,13 p_0$.

Приклад 81. Перрен, спостерігаючи за допомогою мікроскопа зміну концентрації завислих частинок гумігуту із зміною висоти і застосувавши барометричну формулу, експериментально знайшов значення числа Авогадро. В одному з дослідів він помітив, що коли відстань між двома шарами $\Delta h = 100 \text{ мкм}$, то кількість завислих частинок гумігуту в одному шарі в два рази більша, ніж у другому. Температура емульсії гумігуту 20°C .

Частинки гумігуту діаметром $d = 0,3 \text{ мкм}$ містяться в рідині, густина якої на $\Delta \rho = 0,2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ менша від густини частинок гумігуту. Знайти за цими даними значення числа Авогадро.

Дано:

$$\Delta h = 100 \text{ мкм} = 100 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

$$\frac{n_1}{n_2} = 2$$

$$t = 20^\circ \text{C} \Rightarrow T = 293 \text{ K}$$

$$d = 0,3 \text{ мкм} = 0,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

$$\Delta \rho = 0,2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$$

$$N_A ?$$

Розв'язання

Зміна концентрації частинок гумігуту з висотою визначається за формулою Больцмана:

$$n_1 = n_0 e^{-\frac{\mu gh_1}{RT}} = n_0 \exp\left(-\frac{\mu gh_1}{RT}\right) \text{ – концентрація}$$

частинок для висоти h_1 ;

$$n_2 = n_0 e^{-\frac{\mu gh_2}{RT}} = n_0 \exp\left(-\frac{\mu gh_2}{RT}\right) \text{ – концентрація}$$

частинок для висоти h_2 .

Розділимо перше рівняння на друге:

$$\frac{n_1}{n_2} = \exp\left(-\frac{\mu gh_1}{RT} + \frac{\mu gh_2}{RT}\right) = \exp\left(\frac{\mu g}{RT}(h_2 - h_1)\right) = \exp\frac{\mu g \Delta h}{RT}.$$

Візьмемо логарифм натуральний від цього виразу, щоб явно отримати показник експоненти: $\ln \frac{n_1}{n_2} = \frac{\mu g \Delta h}{RT}$. Оскільки маса частинки $m = \frac{\mu}{N_A}$ цю

формулу можна записати у вигляді:

$$\ln \frac{n_1}{n_2} = \frac{m g N_A \Delta h}{RT}, \text{ де } N_A \text{ – число Авогадро.}$$

На частинки гумігуту, зважені у рідині, діє виштовхувальна сила Архімеда.

Врахуємо це: $mg - \rho_0 Vg = \rho Vg - \rho_0 Vg = (\rho - \rho_0)Vg = \Delta\rho Vg$, де ρ – густина гумігугу, ρ_0 – густина рідини.

Враховуючи цю поправку на закон Архімеда, формула переписеться у вигляді: $\ell n \frac{n_1}{n_2} = \frac{\Delta\rho Vg N_A \Delta h}{RT}$.

Тоді число Авогадро: $N_A = \frac{RT \ell n \frac{n_1}{n_2}}{\Delta\rho Vg \Delta h}$ – формула для експериментального визначення числа Авогадро,

де $V = \frac{\pi d^3}{6}$ – об'єм частинки гумігугу.

Остаточно маємо: $N_A = \frac{RT \ell n \frac{n_1}{n_2}}{\Delta\rho \frac{\pi d^3}{6} g \Delta h}$,

де $R = 8,31 \text{ Дж} / (\text{моль} \cdot \text{К})$ – універсальна газова стала, $9,8 \text{ м} / \text{с}^2$ – прискорення вільного падіння.

Підставимо числові значення фізичних величин:

$$N_A = \frac{RT \ell n \frac{n_1}{n_2}}{\Delta\rho \frac{\pi d^3}{6} g \Delta h} = \frac{8,31 \cdot 293 \cdot \ell n 2}{0,2 \cdot 10^3 \cdot \frac{\pi \cdot (0,3 \cdot 10^{-6})^3}{6} \cdot 9,8 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} \approx 6,09 \cdot 10^{23} = 6,1 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$$

Відповідь: $N_A = 6,1 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$.

При тестовому оцінюванні: 6.1E+23.

Приклад 82. При якому збільшенні висоти кількість порошинок, що перебувають у броунівському русі в повітрі при температурі 17°C , зменшиться в $e = 2,7$ рази? Діаметр порошинок $d = 5 \cdot 10^{-5} \text{ см}$, а їх густина $\rho = 1 \text{ г} / \text{см}^3$.

Дано:

$$\frac{n_0}{n} = e$$

$$t = 17^\circ\text{C} \Rightarrow T = 290\text{K}$$

$$d = 5 \cdot 10^{-5} \text{ см} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

$$\rho = 1 \text{ г} / \text{см}^3 = 1 \cdot 10^3 \text{ кг} / \text{м}^3$$

Δh ?

Розв'язання

Дрібні частинки, завислі в рідині або газі, поведуться подібно до молекул. Тому зміна їх концентрації з висотою визначається за формулою Больцмана:

$$n = n_0 e^{-\frac{m_0 g h}{kT}} = n_0 \exp\left(-\frac{m_0 g h}{kT}\right).$$

З умови задачі: $\frac{n_0}{n} = e$, отже, з формули Больцмана:

$$\frac{n_0}{n} = e^{\frac{m_0 g h}{kT}} = \exp\left(\frac{m_0 g h}{kT}\right) = e.$$

Тут m_0 – маса порошинки; $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж / К}$ – стала Больцмана.

З рівності $\exp\left(\frac{m_0 g h}{kT}\right) = e$ бачимо, що показники експоненти повинні бути рівними, тобто,

$$\frac{m_0 g h}{kT} = 1 \Rightarrow h = \frac{kT}{m_0 g} - \text{висота, на якій концентрація зменшується в } e \text{ разів.}$$

Виразимо масу порошинки, через густину та об'єм: $m_0 = \rho \frac{\pi d^3}{6}$.

$$\text{Тоді формула для висоти набуде вигляду: } h = \frac{kT}{m_0 g} = \frac{kT}{\rho \frac{\pi d^3}{6} g}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин:

$$h = \frac{kT}{\rho \frac{\pi d^3}{6} g} = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 290}{1 \cdot 10^3 \cdot \frac{\pi \cdot (5 \cdot 10^{-7})^3}{6} \cdot 9,8} = 0,62 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

Відповідь: $h = 0,62 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$

При тестовому оцінюванні: 0.62E – 5.

Приклад 83 У сухому нерухомому повітрі зависли часточки диму, середня маса яких $1,1 \cdot 10^{-14} \text{ г}$. За графіком, зображеним на рисунку 5, вкажіть у скільки разів відрізняються кількості завислих частинок диму, що містяться в циліндричному стовпі площею основи 1 м^2 і висотою 35 мкм , у кожному з випадків. Знайдіть значення температури повітря у випадку І.

Розв'язання

Дано:

$$m = 1 \cdot 10^{-14} \text{ г} = 1 \cdot 10^{-14} \cdot 10^{-3} \text{ кг}$$

$$h = 35 \text{ мкм} = 35 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

$$\frac{N_{II}}{N_I} ? T_I ?$$

З графіка залежності І та ІІ видно, що на висоті $h = 35 \text{ мкм}$ концентрації частинок диму однакові $n_I = n_{II} = 0,4 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-3}$. Зміна концентрації частинок диму з висотою визначається за формулою Больцмана:

$$n_I = n_{0I} \exp\left(-\frac{m_0 g h}{k T_I}\right); \quad n_{II} = n_{0II} \exp\left(-\frac{m_0 g h}{k T_{II}}\right).$$

Визначимо концентрації для I та II на висоті $h = 0$ з графіка

$$n_{0I} = 1 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-3}; \quad n_{0II} = 1,2 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-3}.$$

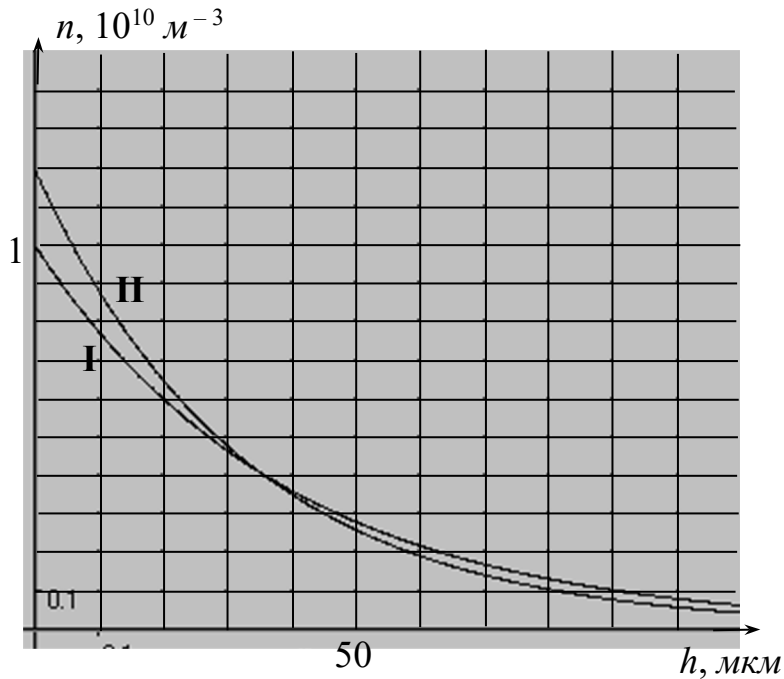


Рис. 5

Щоб знайти температуру для I, знайдемо відношення $\frac{n_{0I}}{n_I}$.

$$\frac{n_{0I}}{n_I} = \exp\left(\frac{m_0 g h}{k T_I}\right).$$

Прологарифмуємо вираз: $\ln \frac{n_{0I}}{n_I} = \frac{m_0 g h}{k T_I} \Rightarrow T_I = \frac{m_0 g h}{k \ln \frac{n_{0I}}{n_I}}$.

Підставимо числові значення:

$$T_I = \frac{m_0 g h}{k \ln \frac{n_{0I}}{n_I}} = \frac{1 \cdot 10^{-14} \cdot 10^{-3} \cdot 9,8 \cdot 35 \cdot 10^{-6}}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot \ln \frac{1 \cdot 10^{10}}{0,4 \cdot 10^{10}}} = 289 \text{ К}.$$

Щоб знайти відношення $\frac{N_{II}}{N_I}$, порахуємо спочатку клітинки фігури, обмеженої графіком залежності $n(h)$, координатними осями та, за умовою

задачі, віссю $h = 35 \text{ мкм}$. Тому що площа цієї фігури дорівнює N/S , що буде показано в кінці задачі. Для фігури, обмеженої графіком I, маємо:

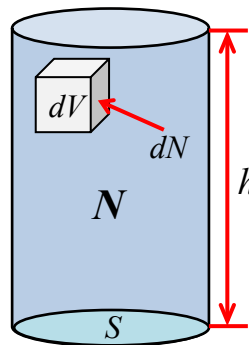
$$\frac{N_I}{S} \sim 17 + \frac{11}{2} = 22,5 \text{ кл.}$$

Для фігури, обмеженої графіком II, маємо:

$$\frac{N_{II}}{S} \sim 17 + \frac{14}{2} = 26 \text{ кл.}$$

$$\text{Отже, } \frac{N_{II}}{N_I} = \frac{26}{22,5} = 1,2 \text{ рази.}$$

Щоб знайти відношення $\frac{N_{II}}{N_I}$, треба спочатку взяти інтеграл



від $dN = n dV = n S dh$, де $n = n_0 \exp(-\frac{m_0 g h}{kT})$ – концентрація частинок у залежності від висоти, dN – кількість частинок в об'ємі $dV = S dh$.

Отже, щоб знайти $\frac{N}{S}$ беремо інтеграл від $dN = n_0 e^{-\frac{m_0 g h}{kT}} S dh$.

$N = S \int_0^h n_0 e^{-\frac{m_0 g h}{kT}} dh$; $\frac{N}{S} = \int_0^h n_0 e^{-\frac{m_0 g h}{kT}} dh$ – чисельно дорівнює площі, обмеженої графіком та координатними осями.

$$\frac{N}{S} = \int_0^h n_0 e^{-\frac{m_0 g h}{kT}} dh = -\frac{kT}{m_0 g} n_0 \int_0^h e^{-\frac{m_0 g h}{kT}} d\left(-\frac{m_0 g h}{kT}\right) = -\frac{n_0 kT}{m_0 g} \cdot e^{-\frac{m_0 g h}{kT}} \Big|_0^h = \frac{n_0 kT}{m_0 g} \left(1 - e^{-\frac{m_0 g h}{kT}}\right)$$

$$\text{Відповідь: } \frac{N_{II}}{N_I} = 1,2; \quad T_I = 289 \text{ К.}$$

Приклад 84. Знайти середню довжину вільного пробігу молекул водню при тиску 133 мПа , якщо середня арифметична швидкість молекул $\bar{v}$ рівна $1,03 \cdot 10^3 \text{ м/с}$. Ефективний діаметр молекули водню $2,3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

Дано:

$$\mu = 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$p = 133 \text{ мПа} = 0,133 \text{ Па}$$

$$\sigma = 2,3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$$

$$\bar{v} = 1,03 \cdot 10^3 \text{ м/с}$$

$$\frac{N_A}{\bar{\lambda}} = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$$

$\bar{\lambda}$?

Розв'язання

Середня довжина вільного пробігу молекул

знаходиться за формулою:

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 n}.$$

З рівняння стану ідеального газу: $n = \frac{p}{kT}$. Отже,

підставимо концентрації n у вираз і отримаємо:

$$\bar{\lambda} = \frac{k \cdot T}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 p}, \quad (1)$$

де T – температура, k – стала Больцмана, σ – ефективний діаметр молекули. Для знаходження температури врахуємо, що середня арифметична швидкість

руху молекул $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}$. Звідси $T = \frac{\pi \mu \bar{v}^2}{8R}$,

$R = 8,31 \text{ Дж/моль} \cdot \text{К}$ – універсальна газова стала.

Підставляючи у формулу (1) вираз для температури, отримаємо

$$\bar{\lambda} = \frac{k \mu \bar{v}^2}{8\sqrt{2} R \sigma^2 p} = \frac{\mu \bar{v}^2}{8\sqrt{2} N_A \sigma^2 p}, \text{ де } k = \frac{R}{N_A} \text{ – стала Больцмана.}$$

Числовий розрахунок:

$$\bar{\lambda} = \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot (1,03 \cdot 10^3)^2}{8 \cdot 1,41 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \cdot (2,3 \cdot 10^{-10})^2 \cdot 0,133} = 4,4 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Відповідь: $\bar{\lambda} = 4,4 \cdot 10^{-2} \text{ м}$. При тестовому оцінюванні: 4.4E – 2.

Приклад 85. Знайти середнє число зіткнень за 1с молекул азоту при температурі $t^\circ = 27^\circ\text{C}$ і тиску $p = 400 \text{ мм рт. ст.}$. Ефективний діаметр молекули азоту $3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

Дано:

$$\mu = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$t^\circ = 27^\circ\text{C} \Rightarrow T = 300\text{К}$$

$$p = 400 \text{ мм рт. ст.} = 5,3 \cdot 10^4 \text{ Па}$$

$$\sigma = 3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$$

$$\bar{z} ?$$

Розв'язання

Середня довжина вільного пробігу молекули між двома

попередніми зіткненнями: $\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{z}}$.

Звідси середнє число зіткнень за 1с $\bar{z} = \frac{\bar{v}}{\bar{\lambda}}$

Підставимо в цю формулу вираз для середньої арифметичної швидкості

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} \text{ та середньої довжини вільного пробігу молекул } \bar{\lambda} = \frac{k \cdot T}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 p}. \text{ Після}$$

внесення під знак кореня та врахування, що $k = R / N_A$ – стала Больцмана, матимемо:

$$\bar{z} = \frac{\bar{v}}{\bar{\lambda}} = 4 N_A \sigma^2 p \sqrt{\frac{\pi}{RT \mu}},$$

де $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ – стала Авогадро; $R = 8,31 \text{ Дж/моль} \cdot \text{К}$ – універсальна газова стала.

Підставимо числові значення:

$$\bar{z} = 4N_A \sigma^2 p \sqrt{\frac{\pi}{RT\mu}} = 4 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \cdot (3 \cdot 10^{-10})^2 \cdot 5,3 \cdot 10^4 \sqrt{\frac{\pi}{8,31 \cdot 300 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}} \approx 2,44 \cdot 10^9 \text{ c}^{-1}$$

Відповідь: $\bar{z} = 2,44 \cdot 10^9 \text{ c}^{-1}$.

При тестовому оцінюванні: 2.44E+9.

Приклад 86. В посудині об'ємом 0,5л знаходиться кисень за нормальних умов. Знайти загальне число зіткнень між молекулами кисню у цьому об'ємі за 1 с.

Дано:

O_2

$$V = 0,5 \text{ л} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$\mu = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$t = 0^\circ \text{C} \Rightarrow T = 273 \text{ K}$$

$$p = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

$$\sigma = 3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$$

z ?

Розв'язання

Знаючи число зіткнень однієї молекули за 1с

і число молекул в одиниці об'єму n , можна знайти загальне число зіткнень всіх молекул в одиниці

об'єму за одиницю часу: $z = \frac{1}{2} \bar{z} n$.

Для середнього числа зіткнень молекули з іншими молекулами при тепловому русі: $\bar{z} = \sqrt{2} \pi \sigma^2 n \bar{v}$.

Після підстановки в першу формулу отримаємо загальне число зіткнень всіх молекул між собою за одиницю часу в одиниці об'єму:

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \sigma^2 n^2 \bar{v},$$

де $\sigma = 3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ – ефективний діаметр молекули; $n = 2,69 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ – число Лошмідта (за нормальних умов кількість молекул в одиниці об'єму дорівнює числу Лошмідта і розраховується з рівняння стану ід. газу $p_0 = nkT_0$);

$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}$ – середня арифметична швидкість.

Для об'єму V загальне число зіткнень всіх молекул:

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \sigma^2 n^2 \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} V = 2 \sqrt{\frac{\pi RT}{\mu}} \sigma^2 n^2 V.$$

Підставимо числові значення:

$$z = 2 \sqrt{\frac{\pi RT}{\mu}} \sigma^2 n^2 V = 2 \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot 8,31 \cdot 273}{32 \cdot 10^{-3}}} (3 \cdot 10^{-10})^2 (2,69 \cdot 10^{25})^2 0,5 \cdot 10^{-3} = 3,1 \cdot 10^{31} \text{ c}^{-1}$$

Відповідь: $z = 3,1 \cdot 10^{31} \text{ c}^{-1}$.

При тестовому оцінюванні: 3.1E+31.

Приклад 87. Знайти залежність середнього числа зіткнень $\bar{z}$ молекул ідеального газу від тиску p у наступних процесах: 1) ізохоричному, 2) ізотермічному. Зобразити ці залежності на графіках.

Дано:

Розв'язання

1) $V = const$

1. Для ізохорного процесу при $V = const$ виконується закон

2) $T = const$

Шарля: $\frac{p}{T} = const.$

$\bar{z}(p)?$

Середнє число зіткнень за 1с $\bar{z} = \frac{\bar{v}}{\bar{\lambda}}$; середня довжина

вільного пробігу молекул $\bar{\lambda} = \frac{k \cdot T}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 p}$.

Виразимо $\bar{z}$ через $\bar{\lambda}$: $\bar{z} = \frac{\bar{v}}{\bar{\lambda}} = \frac{\bar{v} \sqrt{2} \pi \sigma^2 p}{kT} = \bar{v} \cdot const$, оскільки $\frac{p}{T} = const$.

Розпишемо в цій формулі середню арифметичну швидкість:

$$\bar{z} = \bar{v} \cdot const = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} \cdot const.$$

Щоб знайти залежність від p , виразимо

температуру з закону Шарля: $T = \frac{p}{const}$ та

підставимо в формулу для $\bar{z}$:

$$\bar{z} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} \cdot const = \sqrt{\frac{8R \cdot p}{\pi \mu \cdot const}} \cdot const = const \cdot \sqrt{p}.$$

$$\bar{z} = const \cdot \sqrt{p} \text{ або } \bar{z} \sim \sqrt{p}.$$

$\bar{z} \sim \sqrt{p}$ – середнє число зіткнень за 1с прямо пропорційне корню квадратному з тиску при ізохорному процесі.

Це степенева залежність $\bar{z} \sim p^{\frac{1}{2}}$ (див. рис.).

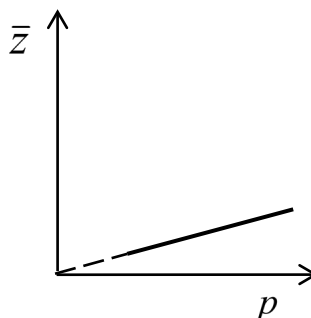
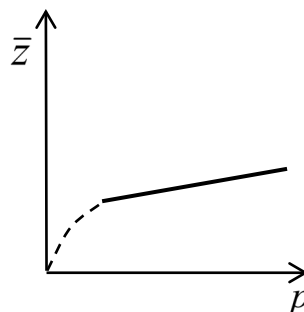
2. Для ізотермічного процесу при $T = const$ виконується закон Бойля-Маріотта $pV = const$.

З формул для $\bar{z}$, $\bar{\lambda}$ та $\bar{v}$ отримаємо:

$$\bar{z} = \frac{\bar{v}}{\bar{\lambda}} = \frac{\bar{v} \sqrt{2} \pi \sigma^2 p}{kT} = const \cdot p,$$

оскільки середня арифметична швидкість теж є константою

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} = const.$$



$\bar{z} = const \cdot p$ або $\bar{z} \sim p$.

$\bar{z} \sim p$ середнє число зіткнень за 1с прямо пропорційне тиску при ізотермічному процесі. Це лінійна залежність, графік зображений на рисунку.

Відповідь: 1) $\bar{z} \sim \sqrt{p}$; 2) $\bar{z} \sim p$.

Приклад 88. Знайти середню довжину вільного пробігу атомів гелію в умовах, коли густина гелію $\rho = 2,1 \cdot 10^{-2} \text{ кг} / \text{м}^3$.

Дано:

He

$$\sigma = 2 \cdot 10^{-10} \text{ м}$$

$$\rho = 2,1 \cdot 10^{-2} \text{ кг} / \text{м}^3$$

$\bar{\lambda}$?

Розв'язання

Середня довжина вільного пробігу молекул знаходиться за формулою:

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n}.$$

З рівняння стану ідеального газу:

$$n = \frac{p}{kT}.$$

Отже,

$$\bar{\lambda} = \frac{k \cdot T}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}, \quad (1)$$

де T – температура, k – стала Больцмана, σ – ефективний діаметр молекули, p – тиск. Виразимо тиск через густину з рівняння стану ідеального газу:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \Rightarrow p = \frac{\rho}{\mu} RT.$$

Підставимо вираз для тиску в формулу (1) для $\bar{\lambda}$ та врахуємо, що стала Больцмана $k = \frac{R}{N_A}$:

$$\bar{\lambda} = \frac{k \cdot T}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p} = \frac{k \cdot T \cdot \mu}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 \rho RT} = \frac{\mu}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 \rho N_A},$$

де $\mu = 4 \cdot 10^{-3} \text{ кг} / \text{моль}$ – молярна маса гелію, $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ – стала Авогадро.

Підставимо числові значення:

$$\bar{\lambda} = \frac{\mu}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 \rho N_A} = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{2}\pi \cdot (2 \cdot 10^{-10})^2 \cdot 2,1 \cdot 10^{-2} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}} \approx 1,78 \cdot 10^{-6} \approx 1,8 \cdot 10^{-6} \text{ м}.$$

Відповідь: $\bar{\lambda} = 1,8 \cdot 10^{-6} \text{ м}$.

При тестовому оцінюванні: 1.8E – 6.

Приклад 89. Повітря в кімнаті, розміри якої $3 \times 3 \times 3$ м, має тиск 100 кПа і температуру $T = 27^\circ \text{C}$. Обчислити середню довжину вільного пробігу молекул $\bar{\lambda}$, середню кількість зіткнень, яких зазнає кожна молекула за одиницю часу $\bar{z}$, середнє число **усіх** зіткнень z між молекулами за одиницю часу, середній час між зіткненнями τ .

Дано:

Повітря

$$V = 9 \text{ м}^3$$

$$\mu = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$t = 27^\circ \text{C} \Rightarrow T = 300 \text{ К}$$

$$p = 100 \text{ кПа} = 10^5 \text{ Па}$$

$$\sigma = 3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$$

$$\bar{\lambda} ? \bar{z} ? z_V ? \tau ?$$

Розв'язання

1. Середня довжина вільного пробігу молекул знаходиться за формулою:

$$\bar{\lambda} = \frac{k \cdot T}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 p},$$

$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$ – стала Больцмана.

Обчислимо:

$$\bar{\lambda} = \frac{k \cdot T}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 p} = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{\sqrt{2} \pi \cdot (3 \cdot 10^{-10})^2 \cdot 10^5} = 0,104 \cdot 10^{-6} = 0,1 \text{ мкм}.$$

2. Середнє число зіткнень однієї молекули з іншими за одиницю часу:

$$\bar{z} = \frac{\bar{v}}{\bar{\lambda}} = \frac{\sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}}{\bar{\lambda}} = \frac{\sqrt{\frac{8 \cdot 8,31 \cdot 300}{\pi \cdot 29 \cdot 10^{-3}}}}{0,104 \cdot 10^{-6}} \approx 45 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}.$$

3. Середнє число **усіх** зіткнень z між молекулами за одиницю часу в **одиниці** об'єму:

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \sigma^2 n^2 \bar{v} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \sigma^2 n^2 \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} = 2 \sqrt{\frac{\pi RT}{\mu}} \sigma^2 n^2.$$

Знайдемо концентрацію n з рівняння стану ідеального газу: $n = \frac{p}{kT}$ та підставимо в формулу для z :

$$z = 2 \sqrt{\frac{\pi RT}{\mu}} \sigma^2 n^2 = 2 \sqrt{\frac{\pi RT}{\mu}} \sigma^2 \left(\frac{p}{kT} \right)^2.$$

Середнє число **всіх** зіткнень z_V між молекулами за одиницю часу в **заданому** об'ємі V :

$$z_V = 2 \sqrt{\frac{\pi RT}{\mu}} \sigma^2 \left(\frac{p}{kT} \right)^2 \cdot V.$$

Підставимо числові значення:

$$z_V = 2 \sqrt{\frac{\pi RT}{\mu}} \cdot \sigma^2 \left(\frac{p}{kT} \right)^2 \cdot V = 2 \sqrt{\frac{\pi \cdot 8,31 \cdot 300}{29 \cdot 10^{-3}}} \cdot (3 \cdot 10^{-10})^2 \left(\frac{10^5}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300} \right)^2 \cdot 9 \approx 4,9 \cdot 10^{35} \text{ c}^{-1}$$

4. Середня довжина вільного пробігу молекул – це відстань, яку пролітає молекула між двома послідовними зіткненнями. Тому можна записати:

$$\bar{v} \cdot \tau = \bar{\lambda} \Rightarrow \tau = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{v}} = \frac{\bar{\lambda}}{\sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}}$$

Підставимо числові значення:

$$\tau = \frac{\bar{\lambda}}{\sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}} = \frac{0,104 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{\frac{8 \cdot 8,31 \cdot 300}{\pi \cdot 29 \cdot 10^{-3}}}} \approx 2,14 \cdot 10^{-10} = 21,4 \cdot 10^{-9} = 21,4 \text{ нс}.$$

Відповідь: $\bar{\lambda} = 0,1 \text{ мкм}$; $\bar{z} = 45 \cdot 10^8 \text{ c}^{-1}$; $z_V = 4,9 \cdot 10^{35} \text{ c}^{-1}$; $\tau = 21,4 \text{ нс}$.

При тестовому оцінюванні: 0.1E – 6; 45E+8; 4.9E+35; 2.14E – 10.

Приклад 90. Яке граничне число молекул газу повинно знаходитись в 1 см^3 сферичної посудини, діаметр якої дорівнює 15 см , щоб молекули не зазнавали взаємних зіткнень? Діаметр молекули газу прийняти рівним $3 \cdot 10^{-8} \text{ см}$.

Дано:

$$V = 1 \text{ см}^3 = 10^{-6} \text{ м}^3$$

$$D = 15 \text{ см} = 15 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$d = \sigma = 3 \cdot 10^{-8} \text{ см} = 3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$$

$N ?$

Розв'язання

Щоб молекули не зазнавали взаємних зіткнень, середня довжина вільного пробігу повинна бути сумірною з розмірами посудини:

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 n} = D.$$

Виразимо з цієї формули концентрацію n :

$$n = \frac{1}{D \sqrt{2} \pi \sigma^2},$$

отриманий вираз визначає граничне число молекул в одиниці об'єму.

Підставимо числові значення:

$$n = \frac{1}{D\sqrt{2}\pi\sigma^2} = \frac{1}{15 \cdot 10^{-2} \sqrt{2}\pi \cdot (3 \cdot 10^{-10})^2} \leq 1,667 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}.$$

Але нам потрібна не концентрація n , а число молекул N в об'ємі $V = 10^{-6} \text{ м}^3$, які б не зазнавали зіткнень.

Складемо пропорцію:

$$\begin{array}{l} \text{в } 1 \text{ м}^3 - 1,667 \cdot 10^{19} \text{ молекул} \\ \text{в } 10^{-6} \text{ м}^3 - N \text{ молекул} \end{array} \Rightarrow N = 1,667 \cdot 10^{19} \cdot 10^{-6} = 1,7 \cdot 10^{13} \text{ молекул}.$$

Відповідь: $N = 1,7 \cdot 10^{13}$.

При тестовому оцінюванні: 1.7E+13.

Приклад 91. Який тиск треба створити в колбі діаметром 0,1м, в якій міститься азот при температурі $t = 20^\circ\text{C}$, щоб дістати середній вакуум?

Дано:

$$D = 0,1 \text{ м}$$

$$d = \sigma = 3 \cdot 10^{-8} \text{ см} = 3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$$

$$t = 20^\circ\text{C} \Rightarrow N = 293 \text{ К}$$

p ?

Розв'язання

Довжина вільного пробігу молекули при середньому вакуумі дорівнює розмірам посудини.

Тобто молекула пролітає від однієї стінки посудини до іншої, не зустрічаючи на

своєму шляху інших молекул: $\bar{\lambda} = D$.

Середня довжина вільного пробігу молекул

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n}.$$

З рівняння стану ідеального газу: $n = \frac{p}{kT}$.

Отже,

$$\bar{\lambda} = \frac{k \cdot T}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p} \Rightarrow p = \frac{k \cdot T}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 \bar{\lambda}}.$$

Підставимо числові данні і знайдемо тиск, який треба створити в колбі, щоб отримати середній вакуум:

$$p = \frac{k \cdot T}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 \bar{\lambda}} = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 293}{\sqrt{2}\pi \cdot (3 \cdot 10^{-10})^2 \cdot 0,1} = 9,48 \cdot 10^{-2} \text{ Па}.$$

Відповідь: $p = 9,48 \cdot 10^{-2} \text{ Па}$.

При тестовому оцінюванні: 9.48E - 2.

Приклад 92. При якому тиску довжина вільного пробігу молекул азоту дорівнюватиме 1 мм, якщо при нормальному тиску $\bar{\lambda} = 6 \cdot 10^{-6} \text{ см}$?

Дано:

$$\bar{\lambda}_1 = 6 \cdot 10^{-6} \text{ см} = 6 \cdot 10^{-8} \text{ м}$$

$$\bar{\lambda}_2 = 1 \text{ мм} = 10^{-3} \text{ м}$$

$$p_1 = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

$$p_2 = ?$$

Розв'язання

Середні довжини вільного пробігу молекул за певної температури обернено пропорційні тиску в тій посудині, де вони містяться.

Вираз для середньої довжини вільного пробігу молекул:

$$\bar{\lambda} = \frac{k \cdot T}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 p}$$

Запишемо вирази для двох середніх довжин вільного пробігу молекул за температури T та тисків азоту p_1 та p_2 :

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 p_1}, \quad \bar{\lambda}_2 = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 p_2}$$

Знайдемо відношення $\frac{\bar{\lambda}_1}{\bar{\lambda}_2}$ середніх довжин вільного пробігу молекул азоту, поділивши рівняння одне на одне, і отримаємо:

$$\frac{\bar{\lambda}_1}{\bar{\lambda}_2} = \frac{\frac{kT}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 p_1}}{\frac{kT}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 p_2}} = \frac{p_2}{p_1},$$

Підставимо числові значення:

$$p_2 = p_1 \frac{\bar{\lambda}_1}{\bar{\lambda}_2} = 1,01 \cdot 10^5 \frac{6 \cdot 10^{-8}}{10^{-3}} = 6,06 \text{ Па}.$$

Відповідь: $p_2 = 6,06 \text{ Па}$. При тестовому оцінюванні: 6.06.

Розділ 2. Реальні гази і рідини. Фазові переходи

2.1. Реальний газ. Рівняння Ван-дер-Ваальса

В ідеальному газі ми не враховували розміри молекул і сили взаємодії між ними. Це відображено в рівнянні стану ідеального газу. Для одного моля ідеального газу: $pV_0 = RT$. Тут V_0 – об'єм одного моля.

З цього рівняння, якщо уявити, що $T = 0K$, може бути $V_0 = 0$ або $p = 0$; або одночасно. Це неможливо в реальному газі, бо в реальному газі молекули мають власні розміри. Щоб це врахувати, в рівняння стану ідеального газу вводять поправку b , яка враховує власний об'єм молекул:

$$p(V_0 - b) = RT. \quad (2.1)$$

Тоді при $T = 0K$ маємо $V_0 - b = 0 \Rightarrow V_0 = b$.

Якщо розглядати молекули як кульки з радіусом r , то при парній взаємодії одна молекула може підійти до іншої так, що відстань між їх центрами дорівнюватиме $2r$ (рис. 2.1) – ефективний діаметр молекули. Центри всіх інших молекул не можуть потрапити у середину сфери з радіусом $2r$, описаної навколо молекули, центр якої збігається з центром сфери. Знайдемо цей «заборонений» об'єм:

$$V_{\text{зб}} = \frac{4}{3}\pi(2r)^3 = 8v, \text{ де } v - \text{власний об'єм молекули.}$$

У перерахунку на одну молекулу заборонений об'єм: дорівнює $4v$ – тобто в чотири рази більший власного об'єму. Поправка b , яка входить у рівняння (1), враховує недоступний об'єм для N_A молекул в одному молі газу, тому $b = 4v \cdot N_A$. Отже, поправка b на об'єм пропорційна сумарному власному об'єму молекул одного моля газу (4-кратний власний об'єм $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ молекул газу). Поправка b залежить від ступеня стиску газу та температури.

Але молекули неможливо стиснути впритул, оскільки існують сили відштовхування, які проявляються лише на малих відстанях між найближчими сусідами. Врахуємо ці сили взаємодії між молекулами.

Всередині газу (рис. 2.2) кожна молекула оточена з усіх боків іншими молекулами. Тому сили, що діють на неї, в середньому скомпенсовані. Молекули, які знаходяться біля стінки посудини, в інших умовах: вони ніби-то «відтягуються» від стінки внутрішніми силами притягання до інших молекул і весь об'єм газу

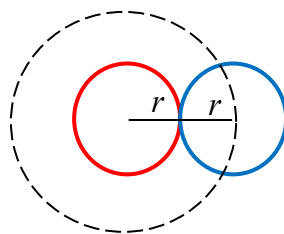


Рис. 2.1

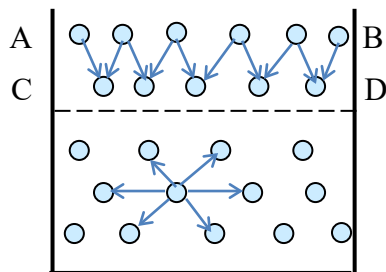


Рис. 2.2

ніби-то стиснутий цими силами. Цей внутрішній тиск позначають p_i . Він напрямлений **від** стінки, тоді як тиск у газі p , зумовлений ударами молекул об стінку, напрямлений до стінки.

Отже, тиск p_i зумовлений некомпенсованою силою притягання, з якою молекули пограничного шару втягуються всередину газу молекулами внутрішніх шарів.

Враховуючи це, вводять поправку p_i до тиску в газі. Тоді рівняння (1) матиме вигляд:

$$(p + p_i) \cdot (V_0 - b) = RT. \quad (2.2)$$

Тоді при $T = 0\text{K}$ $p + p_i = 0 \rightarrow p = -p_i$ тиск від стінки.

З'ясуємо, від чого залежить внутрішній тиск p_i . Очевидно, що чим більше молекул в шарі АВ та шарі CD, тим більший тиск p_i (рис. 2.2). Тобто, $p_i \sim N_{AB} \cdot N_{CD}$. Але $N_{AB} \sim n$ та $N_{CD} \sim n$, де n – концентрація молекул. Тому $p_i \sim n^2$. Концентрація молекул $n = \frac{N_A}{V_0}$, де N_A – стала Авогадро; V_0 – об'єм одного моля газу.

Тобто, $p_i \sim \left(\frac{N_A}{V_0}\right)^2$ або $p_i \sim \left(\frac{1}{V_0}\right)^2$, оскільки $N_A = \text{const}$. Позначимо

коефіцієнт пропорційності a . Тоді $p_i = \frac{a}{V_0^2}$.

Рівняння (2) матиме вигляд:

$$\left(p + \frac{a}{V_0^2}\right) \cdot (V_0 - b) = RT \quad (2.3)$$

(2.3) – рівняння Ван-дер-Ваальса для **одного моля** реального газу,

де V_0 – молярний об'єм газу, p – тиск; T – термодинамічна температура; R – універсальна газова стала; a і b – поправки Ван-дер-Ваальса, сталі для даного газу, але різні для різних газів; a – враховує сили взаємодії між молекулами; b – враховує власний об'єм молекул; $\frac{a}{V_0^2} = p_i$ – внутрішній тиск, який існує в об'ємі одного моля газу V_0 внаслідок взаємодії між молекулами.

Для довільної маси газу m виразимо об'єм всього газу V через об'єм одного моля: $V = \frac{m}{\mu} V_0 \Rightarrow V_0 = \frac{\mu}{m} V$ та підставимо у формулу (2.3):

$$\left(p + \left(\frac{m}{\mu}\right)^2 \frac{a}{V^2}\right) \cdot \left(V - \frac{m}{\mu} b\right) = \frac{m}{\mu} RT \quad (2.4)$$

(2.4) – рівняння Ван-дер-Ваальса для **довільної** маси реального газу,

де V – об’єм всього газу, μ – молярна маса газу; $\left(\frac{m}{\mu}\right)^2 \frac{a}{V^2} = p_i$ – внутрішній

тиск, який існує в об’ємі газу V внаслідок взаємодії між молекулами; $\frac{m}{\mu}b = V_i$

– об’єм, пов’язаний з власним об’ємом молекул.

Внутрішній тиск p_i разом із зовнішнім тиском p складає повний тиск $p + \left(\frac{m}{\mu}\right)^2 \frac{a}{V^2}$, що існує всередині газу об’єму V .

Рівняння Ван-дер-Ваальса також не є абсолютно точним, але воно є кращим наближенням до дійсності, ніж рівняння стану ідеального газу. Поправки a і b визначають з дослідних даних через критичні параметри, що будуть розглянуті нижче.

Розглянемо випадки, коли реальний газ наближається до ідеального. З рівняння Ван-дер-Ваальса для одного моля газу (2.3) виразимо тиск p :

$$p = \frac{RT}{V_0 - b} - \frac{a}{V_0^2}.$$

Винесемо в правій частині виразу для тиску p за дужки $\frac{RT}{V_0} = p_{io}(V)$ – тиск ідеального газу, що займає той самий об’єм. Тоді отримаємо для тиску:

$$p = p_{io}(V) \left[\frac{1}{1 - \frac{b}{V_0}} - \frac{a}{RTV_0} \right]. \quad (2.5)$$

З (2.5) випливає, що при великому розрідженні ($V \rightarrow \infty$) поведінка реального газу близька до поведінки ідеального газу:

$$\left[\frac{b}{V_0} \rightarrow 0; \frac{a}{RTV_0} \rightarrow 0; p \rightarrow p_{io}(V) \right].$$

Подібна ситуація спостерігається при високих температурах ($T \rightarrow \infty$), коли $\frac{a}{RTV_0} \rightarrow 0$. Це означає, що в рівнянні (2.5) сили притягання не суттєві.

Поведінку газу визначають сили відштовхування, тому при таких температурах неможлива конденсація газу.

2.2. Ізотерми реального газу. Ізотерми Амага. Ізотерми Ван-дер-Ваальса. Критичний стан речовини. Критична температура. Зрідження газів. Властивості насиченої пари

Амага в період з 1878 по 1893 рр. провів численні досліді з великою кількістю газів при різних температурах при високих (до 3000 атм.) тисках. Він будував ізотерми в координатах (pV) від (p). Якби виконувався закон Бойля-Маріотта $pV = \text{const}$, ізотерми мали б вигляд прямих, паралельних осі абсцис (p) – пунктирні лінії на графіку (рис. 2.3). В реальності ці ізотерми мали вигляд кривих з мінімумом. І тільки в околі цього мінімуму невеликий відрізок ізотерми при певних температурах може вважатися таким, що наближується до паралельної прямої. При збільшенні температури ізотерми ставали децю ближчими до ідеальних.

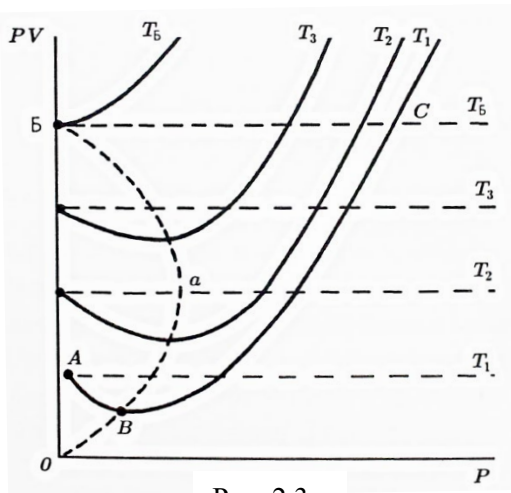


Рис. 2.3

Наприклад, для водню ізотерма Амага при 400°C збігалася з ізотермою ідеального газу. На рис. 2.3 зображені ідеалізовані ізотерми Амага для реального газу: $T_1 < T_2 < T_3 < \dots$. З графіка видно, що спочатку (pV) при збільшенні тиску зменшується, досягає мінімуму, потім збільшується. Точка мінімуму на ізотермі Амага називається точкою Бойля. Точка Бойля визначає температуру, при якій для реального газу можна використати Рівняння стану ідеального газу.

Розглянемо ізотерму Амага при температурі T_1 . На ділянці АВ при малих тисках, а, отже, і малих густинах, при збільшенні зовнішнього тиску в певну кількість разів об'єм газу зменшується в більшу кількість разів. Результуючий добуток pV зменшується. При малих густинах міжмолекулярна взаємодія визначається силами притягання, оскільки відстані між молекулами перевищують їх розмір. Сили притягання намагаються зблизити молекули газу і спричиняють виникнення додаткового тиску p_i , який зумовлює зменшення об'єму газу в більшу кількість разів, ніж це слідує з закону Бойля-Маріотта. Як вже було сказано вище тиск p_i називається внутрішнім або молекулярним. Його вплив враховується в рівнянні стану реального газу через поправку a .

На ділянці ВС ізотерми Амага (рис. 2.3) при температурі T_1 добуток pV зростає. Це означає, що при великих тисках, яким відповідають великі значення густини реального газу, зі збільшенням тиску в певну кількість разів

об'єм зменшується в меншу кількість разів. Тобто, стисливість реального газу з деякого значення зовнішнього тиску зменшується. Це пояснюється тим, що молекули реального газу мають розміри, а, отже, і власний об'єм, який є недоступним для інших молекул. Як було розглянуто вище, ця недоступна частина об'єму в рівнянні стану реального газу враховується через поправку b . Поправка b на власний об'єм молекул враховує те, що молекули реального газу не можуть наблизитися одна до одної на мінімальну відстань, яка визначається розмірами молекули. Тобто, ця поправка фактично враховує сили відштовхування між молекулами.

Поблизу мінімуму ізо терми Амага – точки Бойля, – вплив міжмолекулярної взаємодії на стисливість газу компенсується впливом власного об'єму молекул. З рис. 2.3 видно, що зі збільшенням температури точка Бойля зміщується в сторону менших тисків. Це пояснюється тим, що з підвищенням температури збільшується кількість зіткнень молекул і більшого впливу набувають сили відштовхування. Лінія, що з'єднує точки Бойля ізо терм Амага для різних температур для даного газу називається кривою Бойля. Для даного газу при певній температурі – **температурі Бойля** T_B , – точка Бойля лежить на осі ординат (рис. 2.3).

При стисканні газу при $T < T_B$, добуток pV проходить через мінімум. Такий характер мають ізо терми багатьох газів при кімнатній температурі. При температурах, які вищі за температуру Бойля, добуток pV монотонно збільшується при збільшенні тиску. Такі ізо терми Амага властиві водню та гелію при кімнатній температурі.

Знайдемо температуру Бойля. З рис. 2.3 видно, що при цій температурі мінімуму ізо терми Амага відповідає координата $p = 0$. Це означає, що в цій точці $\frac{\partial(pV)}{\partial p} = 0$. Дослідимо функцію pV на екстремум: $\frac{\partial(pV)}{\partial p} = 0$.

$$\text{З рівняння Ван-дер-Ваальса (3) маємо: } p = \frac{RT}{V_0 - b} - \frac{a}{V_0^2}. \text{ Домножимо}$$

$$\text{рівність на об'єм } V_0 \text{ та врахуємо, що молярна густина } \rho = \frac{\mu}{V_0} \Rightarrow V_0 = \frac{\mu}{\rho}.$$

$$\text{Тоді отримаємо: } pV = \frac{RT\mu}{\mu - \rho b} - \frac{a}{\mu} \rho.$$

Знайдемо похідну за молярною густиною ρ та прирівняємо її до нуля:

$$\frac{\partial(pV)}{\partial \rho} = \frac{RT\mu b}{(\mu - \rho b)^2} - \frac{a}{\mu} = 0 \text{ – це квадратне рівняння зі змінною } \rho.$$

$$\text{Його можна переписати так: } a(\mu - \rho b)^2 = RT\mu^2 b \Rightarrow \mu - \rho b = \mu \sqrt{\frac{bRT}{a}}.$$

Його розв'язок буде таким: $\rho_{EKC} = \frac{\mu}{b} \left[1 - \sqrt{\frac{RTb}{a}} \right]$ – це значення молярної густини, при якому реалізується екстремум.

Друга похідна $\frac{\partial^2(pV)}{\partial \rho^2} = \frac{2\mu RTb^2 a^{3/2}}{(\mu^2 bRT)^{3/2}} > 0$ – тобто, отримане значення молярної густини не є точкою перегину. Отже мінімуму ізотерми Амага при температурі Бойля T_B відповідає нульове значення густини $\rho = 0$. Тому $1 - \sqrt{\frac{RTb}{a}} = 0$.

Звідси **температура Бойля**: $T_B = \frac{a}{Rb}$.

Коли температура газу $T = T_B$, то з рівняння $pV = \frac{RT\mu}{\mu - \rho b} - \frac{a}{\mu} \rho$ отримуємо, що добуток тиску на об'єм газу дорівнює: $pV = RT_B$. (В цій формулі враховано, що при T_B молярна густина $\rho = 0$).

Якщо температура реального газу є меншою за температуру Бойля: $T < T_B$, то при стисканні газу графік добутку pV проходить через мінімум при $\rho = \rho_{EKC}$ (рис. 2.3) та починає необмежено зростати при $\rho \rightarrow \frac{\mu}{b}$.

Якщо температура реального газу є більшою за температуру Бойля: $T > T_B$, тоді величина ρ_{EKC} зменшується та стає від'ємною. Тобто, за цих умов зростає роль сил відштовхування частинок газу, вони переважають сили притягання між ними, тому добуток pV зростає монотонно із збільшенням ρ .

Для більшості газів кімнатна температура є меншою за температуру Бойля. Але існують деякі гази, наприклад, гелій He та водень H_2 , для яких кімнатна температура є більшою за температуру Бойля.

Розглянемо **ізотерми Ван-дер-Ваальса**.

Рівняння Ван-дер-Ваальса (2.3) – це рівняння третього степеня відносно V (V^3). Домножимо (2.3) на V_0^2 , отримаємо: $pV_0^3 - (RT + pb)V_0^2 + aV_0 - ab = 0$. Тому воно має три корені. Два з них можуть бути комплексними (уявними), що не мають фізичного змісту. Таким чином, кожному значенню тиску p при фіксованій температурі відповідає одне (при високих температурах) або три (при низьких температурах) дійсних значення об'єму V . Ізотерми (при $T = const$) Ван-дер-Ваальса, отримані комп'ютерними методами розв'язання рівнянь, мають такий вигляд:

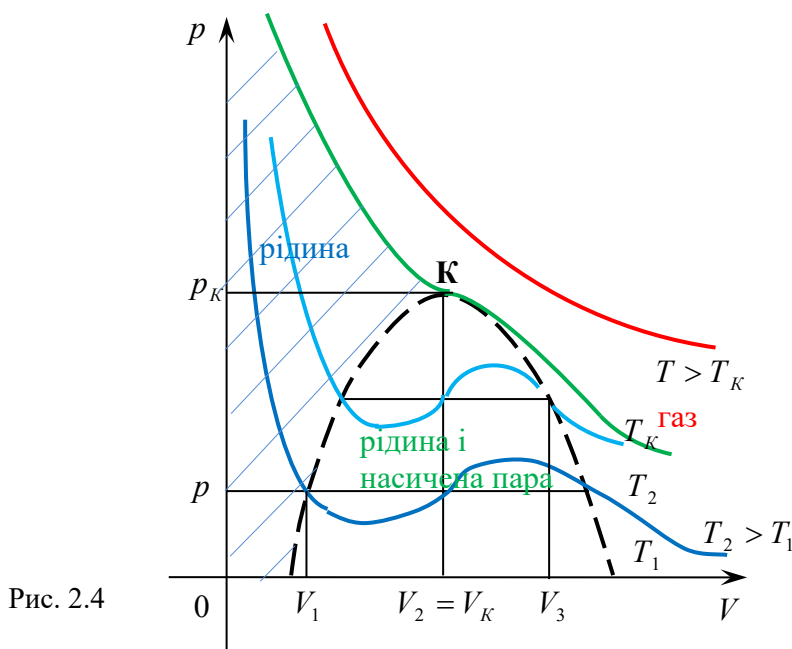


Рис. 2.4

Порівняємо ці теоретичні ізотерми Ван-дер-Ваальса з дослідними ізотермами реального газу. Розглянемо уявний досвід з CO_2 . Об'єм газу визначається положенням поршня (поділки на стінці посудини), тиск – манометром М (рис. 2.5).

Побудуємо графік залежності $p(V)$ при $T = \text{const}$ – рис. 2.6. Спочатку при стискуванні газу тиск монотонно збільшується при зменшенні об'єму – маємо звичайну ізотерму, як для ідеального газу: ділянка (ab) експериментальних ізотерм реального газу рис. 2.6. Область С, де знаходиться ця ділянка ізотерми, відповідає пароподібному стану, тобто такому, що ізотермічним стискуванням пара може бути переведена в рідину.

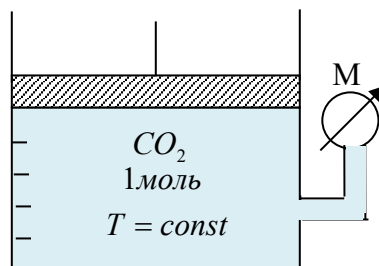


Рис. 2.5

При досягненні деякого значення об'єму V_1 поведінка газу різко змінюється: тиск p_1 залишається постійним, а на стінках посудини з'являються краплі рідини, тобто починається процес конденсації газу. Це означає, що в посудині утворилася насичена пара, яка конденсується при збільшенні тиску. При подальшому стисканні частина газу перетворюється на рідину, а тиск залишається сталим до точки c.

Газ в цьому стані називають **насиченою парою**, а тиск $p_1 = p_H$ називають **пружністю насиченої пари** за певної температури або насиченим

тиском пари. Збільшити густину пари при заданій температурі неможливо: якщо зменшувати об'єм, то частина пари перейде в рідину, а тиск і густина пари залишаються без змін. Варто підкреслити, що тиск, густина, концентрація молекул насиченої пари не залежить від об'єму, а визначається лише температурою. Причому у цьому випадку рівняння $p = nkT$ має місце.

При досягненні об'єму V_2 в точці **c** (рис. 2.6) вся пара перетворилася на рідину. Рідина практично не стискається, тиск різко зростає при незначному зменшенні об'єму – ділянка **cd** на графіку рис. 2.6, – область **A**, що відповідає рідкому стану речовини.

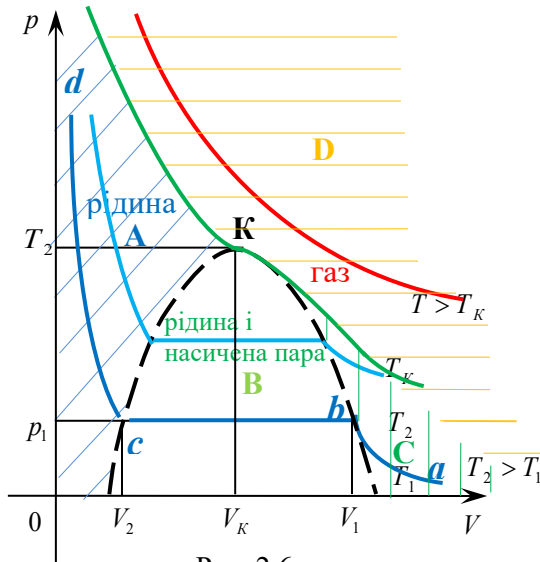


Рис. 2.6

Розрахункові (рис. 2.4) та експериментальні (рис. 2.6) ізотерми практично співпадають, за виключенням області **B**, де експериментальні ізотерми – горизонтальні лінії, а розрахункові у вигляді хвилястих кривих з максимумом та мінімумом. Горизонтальна ділянка **bc** експериментальної ізотерми визначає область існування двофазної системи: газ (пара) + рідина. Точка **b** відповідає початку перетворення газу в рідину. Але об'єм V_1 – це об'єм газу. При наближенні від точки **b** до точки **c** об'єм, заповнений газом зменшується, а об'єм утвореної рідини збільшується. Дві фази на ділянці **bc** перебувають у динамічній рівновазі. Вони мають межу розділу, якою є поверхня рідини.

Ізотерма в двофазній області **bc** на протилежних кінцях має різні особливості: з одної сторони ізотерми – точка **b**, – речовиною є газ, який прагне до розширення; з другої – точка **c**, – речовиною є рідина, яка намагається зберегти об'єм. Область **D**, що на рис. 2.6 зображена горизонтальною штриховкою, відповідає газоподібному стану речовини, тобто такому, що ніяким ізотермічним стискуванням газ не може бути переведений в рідину. Це означає, що в області **D** температура газу настільки висока, що сили

притягання, які відповідають за конденсацію, не можуть утримувати молекули одну біля одної через їхню високу рухливість. До ізотерми, що розділяє області **A**, **B**, **C** та **D**, і проходить через точку **K**, повернемося трохи пізніше.

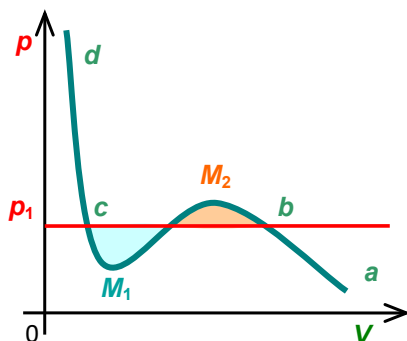


Рис. 2.7

(переохолоджена) пара. Це може бути, якщо немає центрів конденсації. Стан **M1** – речовина знаходиться в рідкому стані і не переходить в пару. Тиск всередині рідини менший за тиск насиченої пари при даній температурі. Таку рідину називають перегрітою. Причиною може бути відсутність центрів кипіння в рідині.

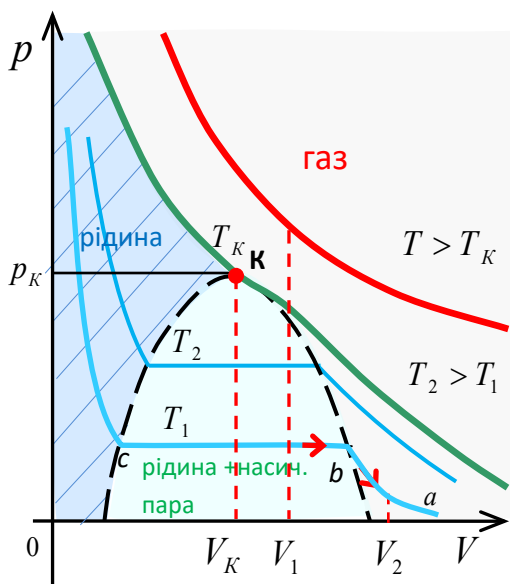


Рис. 2.8

Повернемося ще раз до рис. 2.6. На рис. 2.8 показано, як насичену пару зробити ненасиченою:

- 1) її потрібно ізохорично (при $V_1 = \text{const}$) нагріти – дивіться червоний пунктир, що піднімається вгору, тобто збільшується температура і, нарешті, опиняємося в області, де речовина може бути тільки в газоподібному стані; V_1 – значення повинно знаходитись в області «колокола»;
- 2) або ізоtermічно розширити (при $T_1 = \text{const}$ до V_2).

І, навпаки, щоб ненасичену пару зробити насиченою, її потрібно ізохорично охолодити або ізоtermічно зменшити об'єм (до стану, коли з'являться властивості насиченої пари). При збільшенні температури, як видно з рис. 2.8, тиск насиченої пари зростає.

На рис. 2.4, де показані теоретичні ізодеми Ван-дер-Ваальса, при більш низьких температурах нижня ізодема перетинала б вісь абсцис та існувала б

ділянка від'ємного тиску для першого мінімуму. Від'ємний тиск може бути отриманий на практиці – це так звана «розтягнута» рідина. Наприклад, стовпчик ртуті при атмосферному тиску 760 мм рт. ст. може бути довшим 760 мм і не розриватися, що свідчить про наявність в рідинах внутрішніх сил зв'язку.

На рис. 2.4, 2.6 та 2.8 в точці **K**, що лежить на ізотермі $T = T_K$, і є точкою перегину, усі три дійсні корені рівняння Ван-дер-Ваальса збігаються. Ця точка називається критичною, а ізотерма, яка відокремлює рідкий стан від газоподібного, та не має двофазної області називається критичною ізотермою. Температура T_K – критична температура.

Критична температура – це така температура, вище якої речовина може знаходитись тільки в газоподібному стані. Тобто при T_K газ ніяким стискуванням неможливо перетворити на рідину. Довгий час не могли отримати рідкий водень, хоча інші гази вже були зріджені. Виявилось, що для водню критична температура нижча і дорівнює -240°C . Для зрідження водню його потрібно спочатку охолодити нижче -240°C , а потім стискувати.

Критичні температури для різних речовин:

Таблиця 2.1

Речовина	T_K ($^\circ\text{C}$), K	p_K (атм), 10^5 Па
Кисень O_2	$-118,38$ або $154,77$ K	50,8
Азот N_2	-147 або 126 K	33,9
Водень H_2	-240 або $33,24$ K	12,85
Гелій He	$-267,95$ або $5,2$ K	2,29
Вуглекислий газ CO_2	31 або 304 K	30,4

Отже, T_K , p_K , V_K – критичні параметри. Їх зміст такий:

p_K – це максимально можливий тиск (пружність) насиченої пари.

V_K – це максимально можливе значення об'єму рідини (якщо $V > V_K$, то рідина переходить в газ). K – критична точка – це такий критичний стан речовини, коли зникає будь-яка різниця між рідиною і газом: зникає поверхневий натяг, густини пари і рідини стають рівними, зникає межа розділу (меніск) між ними.

Цікаво, що в критичному стані коефіцієнт поглинання світла речовинами дуже великий через неоднорідності внаслідок флуктуації густини. Тому речовина при освітленні виглядає чорною – явище опалесценції.

Газ може бути переведений в рідкий стан шляхом стискування тільки в тому випадку, коли його температура нижче критичної $T < T_K$. Наприклад, для CO_2 критична температура $T_K = 31^\circ\text{C}$. Тому при $T < 31^\circ\text{C}$ вуглекислий газ конденсується при стискуванні. Різниця в значеннях критичних температур

T_K дає можливість розділити газу повітря послідовним охолодженням і розділенням різних компонент.

Існують різні способи охолодження. Наприклад, Пікте отримували низькі температури шляхом випаровування сірчаного ангідриду. Камерлінг-Оннес в 1908 р. отримав рідкий гелій. Випаровуючи рідкий гелій при дуже низькому тиску, він отримав температуру 0,9 К. На даний час таким же способом отримані температури 0,001 К. Петро Леонідович Капіца використав ідею, згідно якої газ за адіабатного розширення охолоджується, виконуючи роботу ($Q = 0; A = -\Delta U$;
 $\delta Q = 0; \delta A = -dU$).

Принцип такий: газ стиснутий до дуже високого тиску, поступає в циліндр з поршнем (детандер) і, виконуючи роботу, охолоджується, бо його внутрішня енергія зменшується. Капіца, використовуючи цей метод, сконструював устаткування для отримання рідких компонент повітря та інших зріджених газів, в якому газ виконує роботу, обертаючи турбіну.

2.3. Зв'язок поправок Ван-дер-Ваальса з критичними параметрами. Зведене рівняння стану реального газу. Внутрішня енергія та теплоємність реального газу

Виразимо критичні параметри через поправки Ван-дер-Ваальса. В рівнянні Ван-дер-Ваальса для одного моля газу $\left(p + \frac{a}{V^2}\right) \cdot (V - b) = RT$

розкриємо дужки та домножимо отриманий вираз на $\frac{V^2}{p}$:

$$pV - pb + \frac{a}{V} - \frac{ab}{V^2} = RT \times \frac{V^2}{p}.$$

Отримаємо $V^3 - bV^2 + \frac{a}{p}V - \frac{ab}{p} = RT \frac{V^2}{p}$. Зберемо доданки з однаковими степенями та внесемо за дужки спільний множник:

$$V^3 - \left(\frac{RT}{p} + b\right)V^2 + \frac{a}{p}V - \frac{ab}{p} = 0.$$

Запишемо це рівняння для критичних параметрів T_K , p_K , V – змінна величина:

$$V^3 - \left(\frac{RT_K}{p_K} + b\right)V^2 + \frac{a}{p_K}V - \frac{ab}{p_K} = 0. \quad (2.6)$$

За формулою скороченого множення $(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$ та з того факту, що критична точка К є точкою перегину, рівняння третього степеня для об'єму та критичних параметрів (6) можна записати у вигляді:

$$(V - V_K)^3 = 0.$$

Розкриємо дужки: $V^3 - 3V_K V^2 + 3V_K^2 V - V_K^3 = 0$, (2.6a)

(2.6) та (2.6a) повинні тотожно співпадати, тому прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях V : при V^2 ; при $V^1 = V$; при $V^0 = 1$. При V^3 коефіцієнти дорівнюють 1, тому в систему не пишемо. Отже, маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} -3V_K = -\left(\frac{RT_K}{p_K} + b\right) \\ 3V_K^2 = \frac{a}{p_K} \\ -V_K^3 = -\frac{ab}{p_K} \end{cases}$$

Розділимо третє рівняння системи на друге: $\boxed{V_K = 3b}$ – критичний об'єм. З другого рівняння знайдемо критичний тиск та підставимо в нього $V_K = 3b$:

$$p_K = \frac{a}{3V_K^2} = \frac{a}{3 \cdot 9 \cdot b^2} = \frac{a}{27b^2}.$$

Отже, $\boxed{p_K = \frac{a}{27b^2}}$ – критичний тиск.

З першого рівняння системи знайдемо критичну температуру: $\boxed{T_K = \frac{8a}{27bR}}$.

З цих трьох рівнянь для критичних параметрів можна знайти поправки або сталі Ван-дер-Ваальса a і b :

$$a = \frac{27T_K^2 R^2}{64p_K}; \quad b = \frac{T_K R}{8p_K}.$$

Для отримання зведеного рівняння стану реального газу, виразимо через критичні параметри V_K , p_K , T_K сталі Ван-дер-Ваальса a і b та універсальну газову сталу R безпосередньо з вище записаної системи трьох рівнянь:

$$a = 3p_K V_K^2; \quad b = \frac{1}{3} V_K; \quad R = \frac{8}{3} \frac{p_K V_K}{T_K}. \quad (2.7)$$

В рівняння Ван-дер-Ваальса для одного моля газу $\left(p + \frac{a}{V^2}\right) \cdot (V - b) = RT$ для

сталей Ван-дер-Ваальса a і b та універсальної газової сталої R підставимо

співвідношення (2.7), де вони виражені через критичні параметри V_K , p_K , T_K . Тоді рівняння Ван-дер-Ваальса для одного моля набуде вигляду:

$$\left(p + \frac{3p_K V_K^2}{V^2} \right) \cdot \left(V - \frac{1}{3} V_K \right) = \frac{8}{3} \frac{p_K V_K T}{T_K}.$$

Розділимо праву частину цього рівняння та «першу дужку» лівої частини на p_K ; а також приведемо до спільного знаменника «другу дужку» та розділимо праву частину рівняння та цю другу дужку на V_K ; цифру 3, що стоїть в знаменнику в лівій та правій частині, скоротимо. Отримаємо:

$$\left(\frac{p}{p_K} + 3 \left(\frac{V_K}{V} \right)^2 \right) \cdot \left(3 \frac{V}{V_K} - 1 \right) = 8 \frac{T}{T_K}.$$

Введемо зведені параметри або зведені величини – це відношення змінного значення параметра стану до його критичного значення:

$\tau = \frac{T}{T_K}$ – зведена температура; $\pi = \frac{p}{p_K}$ – зведений тиск; $\omega = \frac{V}{V_K}$ – зведений

об'єм. Через зведені параметри отримаємо зведене рівняння стану реального газу:

$$\boxed{\left(\pi + \frac{3}{\omega^2} \right) \cdot (3\omega - 1) = 8\tau} \text{ – зведене рівняння стану реального газу.}$$

Це рівняння є універсальним. Воно базується на законі відповідних станів: якщо різні за хімічною природою речовини мають два однакових зведених параметри, то і третій параметр для цих речовин буде теж однаковий. Для отримання виразу для **внутрішньої енергії реального газу**, згадаємо, що вона складається з кінетичної енергії теплового руху молекул U_K та потенціальної енергії їх взаємодії U_{Π} . Тобто, $U = U_K + U_{\Pi}$.

Кінетична енергія теплового руху всіх молекул $U_K = N \frac{i}{2} kT = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{i}{2} RT$.

Тут $N = \nu N_A = \frac{m}{\mu} N_A$ – кількість всіх молекул; $\frac{i}{2} kT$ – середня кінетична енергія теплового руху молекули з i – ступенями вільності (для одноатомних молекул $i = 3$; для двоатомних молекул $i = 5$; для трьох – і багатоатомних молекул $i = 6$); $k N_A = R$ – зв'язок між сталою Больцмана k та універсальною газовою сталою R через число Авогадро N_A .

Потенціальна енергія реального газу зумовлена силами міжмолекулярного притягання. Вона визначається як робота, яку необхідно виконати проти сил притягання для віддалення молекул на нескінченну віддадь, де молекули не взаємодіють і потенціальна енергія рівна нулю. Сили притягання призводять до внутрішнього молекулярного тиску:

$\left(\frac{m}{\mu}\right)^2 \frac{a}{V^2} = p_i$ – внутрішній тиск, який існує в об'ємі газу V внаслідок взаємодії між молекулами.

Потенціальна енергія з врахуванням виразу для внутрішнього тиску p_i :

$$U_{\Pi} = -A = -\int_V^{\infty} p_i dV = -\int_V^{\infty} \left(\frac{m}{\mu}\right)^2 \frac{a}{V^2} dV = \left(\frac{m}{\mu}\right)^2 \int_{\infty}^V \frac{a}{V^2} dV = -\left(\frac{m}{\mu}\right)^2 \frac{a}{V}.$$

Для **внутрішньої енергії реального газу** довільної маси маємо:

$$U = U_K + U_{\Pi} = \frac{m}{\mu} \left(\frac{i}{2} RT - \frac{m}{\mu} \frac{a}{V} \right).$$

Якщо врахувати, що $\frac{i}{2} R = C_V$ – молярна теплоємність при сталому об'ємі, то вираз для внутрішньої енергії реального газу можна записати:

$$U = \frac{m}{\mu} \left(C_V T - \frac{m}{\mu} \frac{a}{V} \right).$$

Для одного моля реального газу $\frac{m}{\mu} = 1$ внутрішня енергія: $U = C_V T - \frac{a}{V}$.

Виведення теплоємності реального газу докладно розглянуто в (ст. 338–340 «Молекулярна фізика», М. М. Клим, П. М. Якібчук).

Для реального газу молярна теплоємність при сталому об'ємі C'_V дорівнює молярній теплоємності ідеального газу при сталому об'ємі C_V :

$$C'_V = C_V = \frac{i}{2} R.$$

При сталому тиску $p = \text{const}$ молярна теплоємність газу Ван-дер-Ваальса:

$$C'_p = C_V + \frac{R^2 T}{(V-b) \cdot \left(p - \frac{a}{V^2} + \frac{2ab}{V^3} \right)}.$$

З формули видно, що при ізобарному нагріванні ($p = \text{const}$), молярна теплоємність C'_p залежить від параметрів стану p, V, T . Рівняння Майєра для реального газу **не** виконується: $C'_p - C'_V \neq R$.

2.4. Ефект Джоуля-Томсона

Спочатку розглянемо процес розширення газу в пустоту. Теплоізольована посудина розділена нерухомою адіабатичною перегородкою на дві частини з об'ємами V_1 та V_2 . В об'ємі V_1 знаходиться реальний газ, а

об'єм V_2 – пустий. якщо забрати перегородку, то газ адіабатно розшириться в пустоту без виконання роботи $\delta A = 0$. Процес адіабатний, тому $\delta Q = 0$. Внутрішня енергія газу залишається незмінною. Ми з'ясували, що внутрішня енергія одного моля реального газу $U = C_V T - \frac{a}{V}$.

Нехай газ розширюється адіабатично без виконання зовнішньої роботи. Тобто, з першого закону термодинаміки при $\delta Q = 0$ маємо $\delta A = -dU$. Оскільки робота не виконується, то $dU = 0$. Запишемо зміну внутрішньої енергії: $dU = C_V dT + \frac{a}{V^2} dV = 0$.

Знайдемо з цього виразу зміну температури ΔT :

$$\Delta T = -\frac{1}{C_V} \int_{V_1}^{V_1+V_2} \frac{a}{V^2} dV = \frac{a}{C_V} \left[\frac{1}{V_1 + V_2} - \frac{1}{V_1} \right].$$

При розширенні реального газу відстані між молекулами збільшуються. тобто, виконується робота проти сил взаємного притягання. У результаті адіабатного збільшення об'єму збільшується потенціальна енергія молекул газу. Оскільки внутрішня енергія є незмінною, то збільшення потенціальної енергії відбувається за рахунок зменшення кінетичної енергії теплового руху молекул. Отже, при розширенні в таких умовах газ повинен завжди охолоджуватись, бо частина кінетичної енергії молекул газу переходить в їхню потенціальну енергію.

Джоуль і Томсон провели серію дослідів та показали, що для реальних газів при протіканні через пористу перегородку температура газу може як збільшуватись, так і зменшуватись.

Ефект Джоуля-Томсона – це явище зміни температури газу при його стаціонарній течії через пористу перегородку.

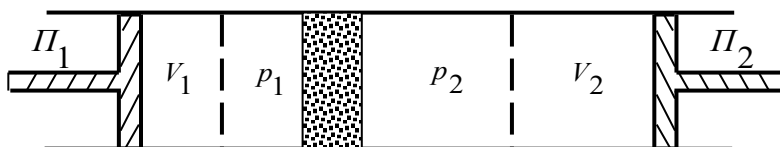


Рис. 2.9

Розглянемо, що там відбувається (рис. 2.9). В теплоізолювану трубу вставлялась пориста перегородка з вати (може бути будь-який матеріал, який чинить опір проходженню газу, – наприклад, корок). З одного боку від неї був газ під тиском p_1 , а з другого – під тиском p_2 , причому $p_1 > p_2$. Через різниці тисків газ повільно протікав через перегородку. Оскільки газ при протіканні через перегородку зазнає її гідродинамічного опору, то це приводить до зменшення тиску: газ виходить з перегородки при нижчому тиску. Швидкість газу при проходженні через пористу перегородку мала внаслідок тертя –

кінетичною енергією можна знехтувати. Отже, газ перебуває з обох боків перегородки в термодинамічних рівноважних станах. Щоб течія газу була стаціонарною, тобто відбувалась при сталих тисках p_1 і p_2 з обох боків перегородки, використовувались рухомі поршні Π_1 та Π_2 . Оскільки $p_2 < p_1$, то газ після пористої перегородки розширюється, тобто, $V_2 > V_1$.

Пориста перегородка, через яку просочується газ, називається дроселем, а сам процес розширення газу через пористу перегородку – дроселюванням. Дроселювання супроводжується зміною температури газу. Отже, ефект Джоуля–Томсона – це зміна температури газу при його адіабатному розширенні дроселюванням від одного сталого тиску до іншого незмінного тиску. Причому до дроселювання газ реальний, а після перегородки може вважатись ідеальним.

Повна робота газу A в процесі дроселювання складається з додатної $A_2 = p_2 V_2$ (робота газу по переміщенню поршня Π_2 зліва направо при розширенні) та від'ємної роботи $A_1 = -p_1 V_1$ (це робота поршня Π_1 над газом, щоб його проштовхнути через перегородку). Повна робота газу $A = -p_1 V_1 + p_2 V_2$. Процес розширення є адіабатичним, тобто без теплообміну: $\delta Q = 0$. За першим законом термодинаміки ($Q = \Delta U + A$) маємо для нашого випадку:

$$\Delta U + A = (U_2 - U_1) - p_1 V_1 + p_2 V_2 \Rightarrow U_1 + p_1 V_1 = U_2 + p_2 V_2.$$

Маємо **рівняння теплового балансу** для ефекта Джоуля–Томсона: в досліді Джоуля–Томсона ентальпія $H = U + pV = \text{const}$ залишається сталою. Для реального газу рівність ентальпій не означає рівність температур, бо в реальному газі внутрішня енергія U та добуток pV залежать не тільки від температури, а від об'єму. У залежності від початкового тиску та температури газ може як нагріватись, так і охолоджуватись після дроселювання.

Середня відстань, на яку можуть наблизитися молекули реального газу залежить від температури та густини газу. При високих температурах молекули можуть підійти одна до одної на віддаль, що менша рівноважної $r < r_0$. На такій віддалі сили відштовхування домінують над силами притягання. При адіабатичному розширенні такого газу через пористу перегородку відстань між молекулами збільшується, а потенціальна енергія парної взаємодії зменшується. Відповідно, збільшується кінетична енергія теплового руху молекул – газ після дроселювання нагрівається. Це **негативний** ефект Джоуля–Томсона: $\Delta T > 0$ – газ при розширенні нагрівається.

Якщо перед дроселюванням у газі переважали сили притягання між молекулами (при низьких температурах) при відстанях $r > r_0$, то при незначному адіабатному збільшенні об'єму потенціальна енергія зростає; кінетична енергія, відповідно, зменшується і газ охолоджується. Це

позитивний ефект Джоуля-Томсона: $\Delta T < 0$ – газ при розширенні охолоджується.

Коли $\Delta T = 0$ – нульовий ефект, який визначає криву інверсії, що розділяє стани з негативним та позитивним ефектами Джоуля-Томсона. При аналізі диференціального та інтегрального ефектів Джоуля-Томсона (ст. 346–356 «Молекулярна фізика», М. М. Клим, П. М. Якібчук) вводиться коефіцієнт

Джоуля-Томсона $\mu = \frac{\Delta T}{\Delta p}$ та температура інверсії: $T_i = \frac{2a}{Rb}$ – для

диференціального ефекту.

Температура інверсії має зв'язок з критичною температурою та температурою Бойля: $T_i = \frac{27}{4} T_K = 2T_B$.

Для інтегрального ефекту Джоуля-Томсона температура інверсії буде іншою: $T_{int} = \frac{2a}{Rb} \cdot \frac{V-b}{V}$.

Температура інверсії для повітря дорівнює 490°C , а для водню – 80°C . Позитивний ефект, тобто охолодження газу ($\mu > 0$; $\Delta T < 0$), можливе тільки тоді, коли початкова температура газу менша за температуру інверсії. Негативний ефект можливий при температурах, що вище температури інверсії ($\mu < 0$); розширення газу ($\Delta p < 0$) призводить в цьому випадку до підвищення температури $\Delta T > 0$. Позитивний ефект Джоуля-Томсона використовується для зрідження газів – метод Лінде.

2.5. Поняття про фазу та фазові переходи. Фазові переходи I-го та II-го роду. Плавлення та кристалізація. Пароутворення, випаровування, конденсація

Аналіз ізотерм Ван-дер-Ваальса показав, що в залежності від значення параметрів речовина може переходити з газоподібного стану в рідкий. Кожен з цих станів має однакові фізико-хімічні властивості у довільній точці об'єму. Така однорідна за своїми фізико-хімічними властивостями частина термодинамічної системи називається фазою.

Фазою називають сукупність однорідних частин системи з однаковими фізичними та хімічними властивостями. Газоподібний стан називається газовою фазою, рідкий стан – рідкою фазою, твердий – твердою фазою. По кількості фаз розрізняють однофазні та багатофазні системи. Наприклад, вода зі шматками льоду в ній та пара над її поверхнею – це 3-х фазна система. Процес переходу речовини з однієї фази в іншу називається **фазовим переходом**.

На рис. 2.6 область **В** відповідає фазовому переходу газ-рідина. При певних умовах дві фази однієї речовини можуть знаходитись в тепловій

рівновазі одна з одною. На ізотермах реального газу в області «дзвона – колокола» **В** рідина і насичена пара на кожній ізотермі знаходиться в тепловій рівновазі одна з одною. Детальніше умови рівноваги фаз будуть розглянуті в наступному параграфі.

Існують фазові переходи I-го та II-го роду.

Фазові переходи **I-го роду** – супроводжуються поглинанням або виділенням прихованої теплоти. До фазових переходів I-го роду відносяться плавлення та кристалізація, випаровування та конденсація, сублімація.

Фазові переходи **II-го роду** – **не** супроводжуються поглинанням або виділенням прихованої теплоти. До фазових переходів II-го роду відносяться перехід провідника з нормального стану в надпровідний (при низьких температурах), перехід речовини з феромагнетика до парамагнетика та інші.

Розглянемо фазові переходи I-го роду.

Плавлення та кристалізація

Плавлення – це процес переходу речовини з твердого стану в рідкий. Особливості плавлення мають аморфні і кристалічні тіла.

Аморфні тіла (скло, парафін, нафталін, смоли, віск) – не мають постійної температури плавлення, розм'якшуються поступово з одночасним підвищенням температури, тому їх відносять скоріше до в'язких рідин в такому стані, ніж до твердих тіл.

Кристалічні тіла мають постійну температуру плавлення $T_{пл} = const$. Тобто їх спочатку треба нагріти до $T_{пл}$, а потім вони плавляться при постійній температурі – ізотермічний процес.

З першого начала термодинаміки: $Q = A$ – вся надана системі теплота йде на роботу по подоланню сил зв'язку молекул у тілі.

$T_{пл}$ залежить від зовнішнього тиску. Для більшості речовин температура плавлення $T_{пл}$ збільшується при збільшенні тиску, тому для них:

$$\frac{dp}{dT} > 0. \quad (2.8)$$

Пояснення: більшість речовин мають густину в рідкому стані меншу, ніж в твердому, а питомий об'єм – більший ($V_{пл} = \frac{V}{m} = \frac{1}{\rho}$). Тому при плавленні зовнішній тиск заважає зменшенню густини (він намагається зменшити відстані між молекулами) і температура плавлення збільшується. Для льоду, чавуну та вісмуту навпаки: $T_{пл}$ зменшується при збільшенні тиску.

Тому для цих речовин

$$\frac{dp}{dT} < 0. \quad (2.9)$$

Справа у тому, що лід, чавун та вісмут мають густину в рідкому стані більшу, ніж в твердому (тому, наприклад, лід плаває у воді). Зовнішній тиск допомагає

збільшенню густини і $T_{пл}$ зменшується. $T_{пл}$ льоду при нормальному атмосферному тиску 0°C . Але при збільшенні тиску на 16 атм лід можна розплавити при -1°C . Для льоду зниження температури плавлення складає 7,65 мК на 100 кПа.

Питома теплота плавлення – це кількість теплоти, яка необхідна для плавлення одиниці маси речовини, попередньо нагрітої до температури плавлення $T_{пл}$: $\lambda = \frac{Q_{пл}}{m}$. $[\lambda] = \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$ – одиниця вимірювання питомої теплоти плавлення. Теплота плавлення, відповідно: $Q_{пл} = \lambda m$.

Питому теплоту плавлення та температуру плавлення беруть з таблиць. Всі значення відповідають тискові 101,325 кПа (760 мм рт. ст.). Така ж кількість теплоти виділяється при зворотньому процесі – процесі кристалізації: $Q_{кр} = Q_{пл}$. Температура плавлення співпадає з температурою кристалізації (тверднення).

Розглянемо розчини. Якщо в одній речовині розчинити іншу, то температура кристалізації розчину зменшується зі збільшенням концентрації розчиненої речовини. Зниження температури кристалізації: $\Delta t = K \frac{m}{m_p M_{відн}}$,

де m – маса розчиненої речовини; $M_{відн}$ – відносна молекулярна маса розчиненої речовини; m_p – маса розчинника (рідкого); K – коефіцієнт пропорційності, що називається кріоскопічною сталою. Зниження температури кристалізації (тверднення) прямо пропорційне числу розчинених молекул. Для сплавів температура плавлення $T_{пл}$ зазвичай нижча від температури плавлення найбільш легкоплавкого компонента.

Пароутворення і конденсація. Випаровування. Питома теплота пароутворення

Пароутворення – це процес переходу речовини з рідкого стану в газоподібний. Воно відбувається при будь-яких температурах ($T \neq 0\text{K}$), бо окремі молекули в рідині при зіткненнях можуть отримати енергію, достатню для подолання сил зв'язку з іншими молекулами, і вилетіти з рідини. Пароутворення з вільної поверхні рідини при температурах, що нижче за температуру кипіння, називається **випаровуванням**. Оскільки при цьому з рідини виходять найбільш швидкі молекули, то внутрішня енергія рідини зменшується і температура рідини при випаровуванні зменшується. Цим пояснюється той факт, що температура води у відкритих водоймищах завжди менша температури повітря. Щоб температура не зменшувалась, тобто, була постійною, потрібно до рідини підводити теплоту.

Питома теплота пароутворення – це кількість теплоти, яка необхідна для перетворення в пару одиниці маси рідини при постійній температурі:

$r = \frac{Q_{пар}}{m}$. $[r] = \frac{Дж}{кг}$ – одиниця вимірювання питомої теплоти пароутворення. Теплота пароутворення, відповідно: $Q_{пар} = rm$. Питому теплоту пароутворення беруть з таблиць – вона дається при різних температурах. Така ж кількість теплоти виділяється при зворотньому процесі – процесі конденсації: $Q_{кон} = Q_{пар}$.

Насичена та ненасичена пара

Молекули пари, що знаходяться над рідиною, також стикаються одна з одною і можуть повертатися назад в рідину. Якщо кількість молекул, що повертаються, менше, ніж кількість молекул, що вилітають з рідини, то пара називається **ненасиченою**. Якщо ж кількості молекул рівні, то пара називається **насиченою**. Кажуть, що насичена пара знаходиться в динамічній рівновазі зі своєю рідиною. Насичену пару можна отримати в закритій посудині. Насичена пара має максимальну густину та максимальний тиск при

даній температурі ($pV = \frac{m}{\mu} RT \Big| \cdot \frac{1}{V} \Rightarrow p = \frac{m}{V} \cdot \frac{RT}{\mu} = \rho \cdot \frac{RT}{\mu}$).

Тобто, тиск пари над рідиною може зростати до певної межі, що залежить від температури і називається тиском насиченої пари. При динамічній рівновазі тиск пари та рідини буде однаковим. З формули видно, що при збільшенні температури тиск насиченої пари збільшується (рис. 2.8)

Тому справедлива формула $\frac{dp}{dT} > 0$. (2.10)

В таблицях тиск насиченої пари називають пружністю насиченої пари. Насичена пара не підкоряється газовим законам. Наприклад, зменшення об'єму пари не призводить до підвищення тиску (тиск не може бути вищим за тиск насиченої пари), а викликає конденсацію частини пари.

Кипіння. Залежність температури кипіння від тиску

Кипіння – це процес пароутворення не тільки з поверхні рідини, а й всередині рідини. В рідині завжди є повітря в розчиненому стані завдяки дифузії. При нагріванні повітря виділяється з рідини і збирається у вигляді бульбашок на стінках посудини в центрах кипіння – це можуть бути різні неоднорідності на стінках посудини, тріщини; поверхні частинок, плаваючих в рідині. Тобто, центри кипіння утворюються в місцях поганого змочування. Потім починається перехід молекул пари всередину цих бульбашок. Їх об'єм збільшується, під дією сили Архімеда вони відриваються від стінок та піднімаються вгору. Коли бульбашки опиняються у верхніх непрогрітих шарах рідини, вони стискаються, що супроводжується характерним шумом перед кипінням. Коли рідина повністю прогріється і пара всередині бульбашок стане насиченою, бульбашки лопаються біля поверхні рідини тоді, коли тиск

насиченої пари в них зрівняється із зовнішнім тиском. Таким чином, маємо дві умови кипіння:

- 1) пара всередині бульбашок повинна стати насиченою;
- 2) тиск насиченої пари повинен дорівнювати зовнішньому тиску.

Наприклад, вода кипить при 100°C при нормальному атмосферному тиску. При кипінні $T = \text{const}$ – ізотермічний процес. З I-го начала термодинаміки $Q = A$ – вся теплота йде на роботу по подоланню сил зв'язку між молекулами рідини при пароутворенні. Температура кипіння збільшується при збільшенні зовнішнього тиску, бо тиск насиченої пари збільшується при збільшенні температури. Можна отримати перегріту рідину, яка не кипить при температурі кипіння $T_{\text{кип}}$ в двох випадках:

- 1) відсутні центри кипіння (наприклад, ідеально гладкі та чисті поверхні посудини);
- 2) відсутнє повітря в рідині (наприклад, коли попередньо рідина довго кипіла в закритій посудині, а потім охолодилась).

Для конденсації потрібні центри конденсації – чужорідні частинки, краплинки рідини, на поверхні яких починається конденсація. При їх відсутності можна отримати переохолоджену пару. Збільшуючи тиск пари в декілька разів, отримаємо перегріту пару, температура якої більша 100°C . Це використовується в парових турбінах для збільшення коефіцієнта корисної дії ККД.

2.6. Умови рівноваги фаз в однокомпонентній системі. Рівняння Клапейрона-Клаузіуса. Діаграма станів

При деяких значеннях параметрів різні фази можуть знаходитись в рівновазі. Умови (2.8), (2.9), (2.10) – умови рівноваги фаз в однокомпонентній системі. Тобто, при умовах (2.8), (2.9) в рівновазі знаходяться рідина і тверде тіло; при умові (2.10) в тепловій рівновазі знаходиться рідина і насичена пара. З'ясуємо, від чого залежить знак похідної $\frac{dp}{dT}$.

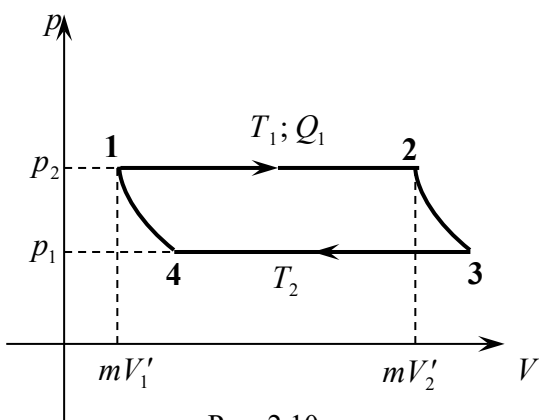


Рис. 2.10

Для цього виведемо **рівняння Клапейрона-Клаузіуса**. Розглянемо елементарний (нескінченно малий) цикл Карно для двофазної системи (наприклад, рідина – пара). Введемо поняття питомого об'єму – це об'єм одиниці маси речовини: $V' = \frac{V}{m} \Rightarrow V = mV'$.

Двохфазна система – це рідина і пара або рідина і тверде тіло. На рис. 2.10 в стані (1) – рідина, а в стані (2) – пара (газ). В процесі 1→2 об'єм збільшується, а тиск залишається постійним, бо рідина поступово переходить в пару за рахунок теплоти Q_1 при температурі $T_1 = \text{const}$. Наприклад, при кипінні або плавленні. Адіабати 2→3 та 4→1 – нескінченно малі, тому їх ділянки будемо вважати відрізками прямих. Корисна робота циклу чисельно дорівнює площі циклу. З :

$$A = S_{1234} = \Delta p \Delta V = (p_2 - p_1) \cdot m \cdot (V'_2 - V'_1) = \Delta p m \cdot (V'_2 - V'_1).$$

Коефіцієнт корисної дії циклу: $\eta = \frac{A}{Q_1}$, де $Q_1 = q_{1,2} m$, де $q_{1,2}$ – питома теплота процесу 1→2. Якщо це пароутворення, то $q_{1,2} = r$ – питома теплота пароутворення; якщо плавлення, то $q_{1,2} = \lambda$ – питома теплота плавлення.

$$\text{Тоді ККД циклу: } \eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{\Delta p m \cdot (V'_2 - V'_1)}{q_{1,2} m} = \frac{\Delta p (V'_2 - V'_1)}{q_{1,2}}.$$

$$\text{З іншої сторони ККД циклу Карно: } \eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{\Delta T}{T}.$$

В цій формулі $\Delta T = T_1 - T_2 > 0$; $T_1 \equiv T$.

$$\text{Порівнюючи два вирази для ККД, маємо: } \eta = \frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta p (V'_2 - V'_1)}{q_{1,2}}.$$

З цього виразу отримаємо **рівняння Клапейрона-Клаузіуса**:

$$\frac{\Delta p}{\Delta T} = \frac{q_{1,2}}{T(V'_2 - V'_1)}.$$

В диференціальній формі **рівняння Клапейрона-Клаузіуса**:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q_{1,2}}{T(V'_2 - V'_1)},$$

де dp – елементарна зміна тиску при елементарній зміні температури на dT ; $q_{1,2}$ – питома теплота переходу речовини з фази 1 в фазу 2 при сталій температурі T ; V'_2 та V'_1 – питомі об'єми другої та першої фази речовини: $V'_2 = \frac{V_2}{m}$; $V'_1 = \frac{V_1}{m}$, де m – маса речовини, що зазнає фазового перетворення.

Рівняння Клапейрона-Клаузіуса виражає зв'язок між тиском і абсолютною температурою речовини у станах, що відповідають фазовим переходам першого роду (випаровування, плавлення, кристалізація, поліморфне перетворення однієї модифікації в іншу). В усіх цих випадках змінюється питомий об'єм речовини; кількість теплоти або поглинається або виділяється при переході; зміна тиску супроводжується зміною температури переходу.

Отже, це рівняння пояснює, коли $\frac{dp}{dT} > 0$ і коли $\frac{dp}{dT} < 0$.

При плавленні більшості речовин питомий об'єм збільшується (бо густина зменшується); $V'_2 - V'_1 > 0$. Тому в рівнянні Клапейрона-Клаузіуса права частина > 0 і, відповідно, ліва частина теж більша нуля: $\frac{dp}{dT} > 0$.

Для деяких речовин ситуація інша. Лід, чавун, вісмут мають в рідкому стані питомий об'єм менший, ніж в твердому (а густину більшу – тому лід плаває у воді). Тобто, для них при плавленні $V'_2 < V'_1 \Rightarrow V'_2 - V'_1 < 0$. Тому для цих речовин $\frac{dp}{dT} < 0$. При пароутворенні питомий об'єм пари більший, ніж рідини: $V'_2 > V'_1 \Rightarrow V'_2 - V'_1 > 0$. В цьому випадку з рівняння Клапейрона-Клаузіуса: $\frac{dp}{dT} > 0$. З рівняння Клапейрона-Клаузіуса можна побачити, як змінюється температура фазового переходу зі зміною тиску: $dT = \frac{T(V'_2 - V'_1)}{q_{12}} dp$ – якщо питомий об'єм кінцевої фази більший за питомий об'єм початкової фази ($V'_2 > V'_1 \Rightarrow V'_2 - V'_1 > 0$), то зі збільшенням тиску p температура фазового переходу збільшується. Якщо $V'_2 < V'_1 \Rightarrow V'_2 - V'_1 < 0$, при збільшенні тиску температура фазового переходу зменшується (лід). Дійсно, питомий об'єм води V'_2 менший питомого об'єму льоду V'_1 . Тому $V'_2 - V'_1 < 0$. При сильному стискуванні льоду можна понизити його температуру плавлення ($\Delta T = T_2 - T_1 < 0$). Цим можна пояснити утворення рідкого змащення при ковзанні ковзанів.

Питома теплота фазового переходу $q_{1,2}$ згідно з першим началом термодинаміки може бути визначена як зміна внутрішньої енергії речовини і робота, що виконана в процесі фазового перетворення. Під час фазового переходу $p = const$ та $T = const$. Для кількості теплоти маємо:

$$q_{1,2} = U_2 - U_1 + pV'_2 - pV'_1. \quad (2.11)$$

Ентальпія $H = U + pV$. Тому питома теплота фазового переходу визначається як зміна ентальпії під час фазового переходу: $q_{1,2} = H_2 - H_1$,

де H_2 і H_1 – ентальпії кінцевої та початкової фаз.

З рівняння Клапейрона-Клаузіуса:

$$q_{1,2} = T(V'_2 - V'_1) \frac{dp}{dT}.$$

Підставимо цей вираз для питомої теплоти фазового переходу в формулу (2.11) для визначення зміни **внутрішньої енергії при фазовому переході**:

$$\Delta U = \left(T \frac{dp}{dT} - p \right) \cdot (V'_2 - V'_1).$$

Діаграма станів

При деяких значеннях параметрів різні фази можуть знаходитись в рівновазі. Залежності $p(T)$, $V(T)$, що відповідають рівновазі фаз, називаються кривими фазової рівноваги. Кожна крива – це сукупність точок, яким відповідає рівноважний стан двох фаз. На рис. 2.11

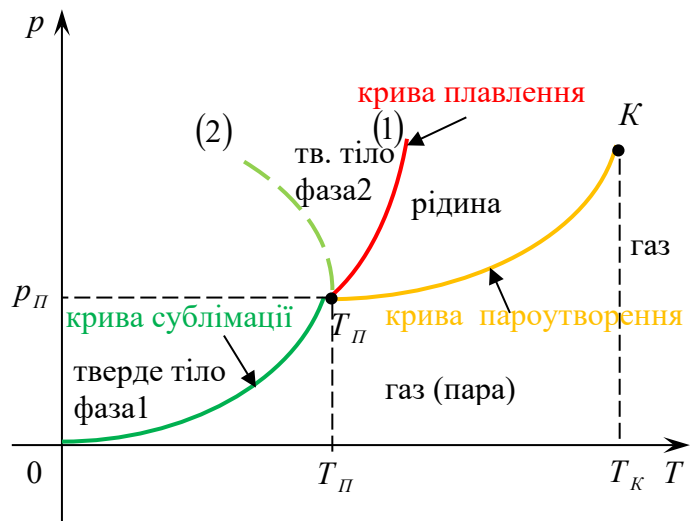


Рис. 2.11

зображена фазова діаграма стану речовини.

Крива $(0 \rightarrow T_{\text{п}})$, яка розмежовує тверду фазу від газоподібної, називається **кривою сублімації** – рівноважний стан твердого тіла з газом. Сублімація – це процес переходу речовини з твердого стану в газоподібний, минуючи рідкий стан.

Крива $(T_{\text{п}} \rightarrow (1))$, що відділяє тверді фази 1 і 2 від рідкої називається **кривою плавлення**. Крива плавлення (1) характерна для більшості речовин, бо для них $\frac{dp}{dT} > 0$ – температура плавлення збільшується при збільшенні тиску.

Крива (2) – це крива плавлення для льоду, чавуну та вісмуту, оскільки в них $\frac{dp}{dT} < 0$ – температура плавлення зменшується при збільшенні тиску.

Тверді фази однієї речовини можуть відрізнятися одна від одної кристалічною будовою та фізико-механічними властивостями. Наприклад, лід має 13 різних кристалічних модифікацій – різних твердих фаз.

На кривій пароутворення $(T_{\text{п}} \rightarrow K)$ в рівновазі знаходяться рідина і пара. Ця крива закінчується **критичною точкою K**. Пам'ятаємо, що при $T > T_{\text{к}}$ речовина існує тільки в газоподібному стані.

Характерною особливістю діаграми стану є **потрійна точка $T_{\text{п}}$** – це стан, в якому тверде тіло, рідина і пара існують одночасно, тобто три фази знаходяться в рівновазі.

Параметри $T_{\text{п}}$ і $p_{\text{п}}$ – різні для різних речовин. Наприклад, для води $T_{\text{п}} = 273\text{K}$ або (0°C) при $p_{\text{п}} = p_{\text{атм}} = 760\text{ммрт.ст.} = 1,013 \cdot 10^5\text{Па}$. Тоді, як це видно з діаграми стану рис. 2.11, при $T < T_{\text{п}}$ вода існує тільки в твердому і газоподібному стані. При $T > T_{\text{п}}$ вода існує в трьох станах – твердому,

рідкому, газоподібному. Якщо для якоїсь речовини $p_{\text{атм}} > p_{\text{п}}$, то ця речовина може існувати в трьох станах при атмосферному тиску. Якщо $p_{\text{атм}} < p_{\text{п}}$, то – тільки в двох станах.

Отже, при параметрах $T_{\text{п}}$ і $p_{\text{п}}$ знаходяться в рівновазі три фази речовини – тверда, рідка, газоподібна. З молекулярної точки зору рівновага фаз означає, що повна енергія (кінетична і потенціальна) однієї молекули в першій фазі, в середньому, дорівнює повній енергії в другій фазі. В протилежному випадку молекули будуть переходити в стан з меншою енергією, тобто, буде відбуватись фазовий перехід.

Середня повна енергія однієї молекули даної фази називається **хімічним потенціалом речовини** в даній фазі: Математично умова рівноваги фаз може бути записана:

$$\mu_1(p, T) = \mu_2(p, T).$$

Переходи речовини з більш впорядкованої фази в менш впорядковану (плавлення, пароутворення) супроводжуються ростом ентропії (безпорядку), тому кількість теплоти, яка *поглинається* в такому переході:

$$\Delta Q = T\Delta S > 0.$$

Такі переходи називаються *ендотермічними*. Навпаки, переходи, при яких збільшується впорядкованість системи, – наприклад, конденсація, кристалізація, – називають *екзотермічними*. Для них ентропія зменшується: $\Delta S < 0$ і, відповідно,

$$\Delta Q = T\Delta S < 0$$

– тепло при такому переході *виділяється*.

Фазові переходи, які супроводжуються виділенням або поглинанням деякої кількості теплоти, відносяться до *фазових переходів першого роду*. Приклад – перехід речовини з твердого стану в газоподібний (сублімація) або рідкий (плавлення); або навпаки, – перехід з рідкого стану в твердий (кристалізація). При цьому стрибком змінюється структура речовини.

До *фазових переходів другого роду* відносяться переходи, що не пов'язані з виділенням або поглинанням теплоти. У цих переходах стрибкоподібно змінюється теплоємність, стисливість, коефіцієнт теплового розширення, інші параметри. Прикладом фазового переходу другого роду може бути перехід речовини з феромагнітного стану в парамагнітний, температура такого переходу називається температурою Кюрі – T_C . За температур $T \ll T_C$ феромагнетики володіють *спонтанною намагніченістю*, що уможливило намагнічення феромагнетиків, водночас нагрів робить постійні магніти слабкими, а нагрівання вище T_C призведе до зникнення їх намагніченості, яка не відновлюється навіть після охолодження. Явище пояснюється тим, що за T_C електрони у атомі набувають достатньої енергії для розорієнтування та хаотизації спінів електронів, і, як наслідок, до зникнення *магнітних доменів* у феромагнетик. Для різних матеріалів T_C різна, для прикладу, температура Кюрі T_C для заліза становить 770°C , для

неодимових магнітів $\sim 320-400^\circ \text{C}$. Існують інші приклади фазових переходів, як, наприклад, перехід сегнетоелектрик – діелектрик, перехід рідкого гелію у надтекучий стан (гелій-II), та інші.

2.7. Абсолютна і відносна вологість повітря. Гігрометри

В атмосфері Землі завжди існує певна кількість водяної пари, приблизно 0,25% від маси усієї атмосфери (для прикладу $\text{CO}_2 - 0,04\%$).

Абсолютна вологість – це кількість водяної пари в грамах в 1 м^3 повітря при даній температурі, одиниця вимірювання – г/м^3 . Іншими словами, абсолютна вологість – це *парціальна* густина водяної пари, що знаходиться в суміші з повітрям при даній температурі. Абсолютна вологість позначається символом ρ . Нехай $\rho_{\text{нп}}$ – парціальна густина насиченої пари при даній температурі.

Відносна вологість – це відношення абсолютної вологості ρ до парціальної густини насиченої пари $\rho_{\text{нп}}$ при даній температурі:

$$f \text{ або } \varphi = \frac{\rho}{\rho_{\text{нп}}} - \text{у відносних одиницях, } \varphi = \frac{\rho}{\rho_{\text{нп}}} \cdot 100\% \text{ у відсотках.}$$

З рівняння стану ідеального газу слідує, що густина прямо пропорційна тискові: $\rho \sim p$. Тому **відносну вологість** можна визначити як відношення парціальних тисків пари і насиченої пари при даній температурі:

$$\varphi = \frac{\rho}{\rho_{\text{нп}}} \cdot 100\% = \frac{p}{p_{\text{нп}}} \cdot 100\% .$$

$\rho_{\text{нп}}$ і $p_{\text{нп}}$ беруть з таблиць. Парціальний тиск пари p іноді також називають абсолютною вологістю та визначають у мм рт. ст. Для людини прийнятна вологість у 60–80%.

Гігрометри – прилади для вимірювання вологості, існують різні типи гігрометрів, розглянемо деякі з них: волосяний, психрометр, конденсаційний.

Волосяний гігрометр засований на властивості знежиреного людського волосся (китового уса, інших матеріалів) збільшувати довжину при збільшенні відносної вологості. Схема (рис. 2.12) приладу є досить простою: один кінець

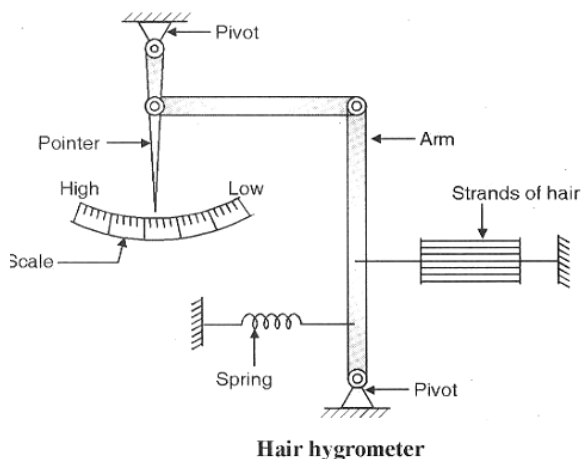


Рис. 2.12

пучка волосся закріплений нерухомо, до іншого – приєднаний рухомий підпружинений важіль із стрілкою. При збільшенні відносної вологості,

волосся видовжується, під дією пружини, важіль переміщається вліво, рухаючи стрілку по шкалі.

Психрометричний гігрометр (рис. 2.13), базується на принципі залежності швидкості випаровування води від відносної вологості, що у свою чергу призводить до зменшення температури. За будовою психрометр має два термометри – сухий (1) та вологий (2). Сухий показує температуру повітря, вологий – температуру, за якої пара у повітрі стане насиченою, тому його покази нижчі ніж сухого через випаровування води. Різниця показів називається психрометричною різницею, за нею знаходять абсолютну/відносну вологість.

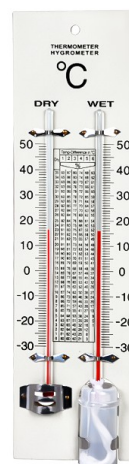


Рис. 2.13

Температура, за якої пара у повітрі стає насиченою, називається **точкою роси** ($p = \text{const}$), у цій точці відносна вологість стає рівною 100% (за такої температури покази обох термометрів співпадають). При подальшому зменшенні температури нижче точки роси, утворюється перенасичена пара, яка не є стабільною, і частина пари одразу конденсується – випадає роса. За відсутності центрів конденсації (мікрокраплин, пилу, іонів), можливо створити *метастабільну* перенасичену пару (інколи кажуть – переохолоджену), і найменша зміна умов призведе до конденсації. Це використовується у трековому детекторі заряджених частинок «камері Вільсона». Високоенергетичні α -, β -частинки пролітаючи через газову суміш, стикаються із молекулами, вибивають електрони утворюючи за собою «іонізаційний слід», який стає центром конденсації перенасиченої пари спирту, таким чином, візуалізуючи треки частинок. Приклад треків наведено на рис. 2.14, а, де жирні треки належать α -частинкам, тонкі – β -частинкам.

Конденсаційний гігрометр визначає температуру «точки роси» металевого дзеркала (рис. 2.14, б), яке охолоджується напівпровідниковими елементами Пельтьє до температури утворення роси, що фіксується оптичною системою із світло- та фотодіода.

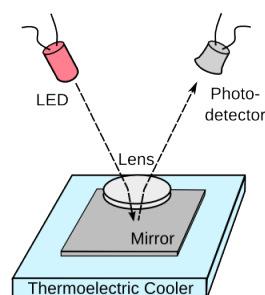


Рис. 2.14. а) зразок радіоактивної руди ториту у камері Вільсона (зліва);
б) термоелектричний конденсаційний гігрометр (справа)

2.8. Рідини. Поверхневий натяг

За своїми властивостями і внутрішньою будовою рідини займають проміжне місце між газами і кристалами. Як і в газах, молекули рідин неупорядковані і можуть зміщуватись на значні віддалі (більші за розміри молекул), що забезпечує текучість рідини. Як і для твердих тіл, для рідин характерна велика густина і мала стисливість. Крім того, для рідини характерне постійне число найближчих сусідів (координаційне число) і порядок їх розміщення (ближній порядок – впорядковане розташування по відношенню до довільної молекули її найближчих сусідів).

Над поверхнею рідини завжди існує її пара. При переході рідини в газ на межі розділу фаз рідина-газ існує стрибок густини:

$$\Delta\rho = \rho_p - \rho_z.$$

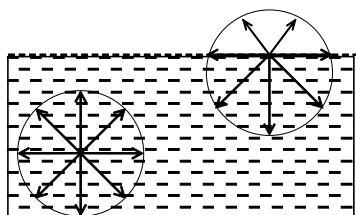


Рис. 2.15

Це означає, що умови, в яких знаходяться молекули в поверхневому шарі, відмінні від умов всередині рідини (рис. 2.15).

На молекули поверхневого шару, а, точніше, на молекули, що знаходяться від поверхні на віддалі, яка дорівнює радіусу молекулярної дії, діє рівнодійна сил, що напрямлена всередину об'єму рідини. Вона виникає через різниці сил міжмолекулярної взаємодії: сили взаємодії з молекулами пари значно менші сил взаємодії з молекулами рідини. Тому рівнодійна і напрямлена в сторону більших сил, тобто, всередину рідини. Це і є **сила поверхневого натягу**. Сили, що діють на молекулу всередині рідини, в середньому скомпенсовані. Їх рівнодійна дорівнює нулю. Поверхневий шар рідини подібний пружній плівці, яка стягує рідину. Отже, виникає поверхневий натяг рідини. Сили поверхневого натягу виникають на границі розділу фаз: рідина – газ(пара), рідина – тверде тіло.

Для того, щоб молекула рідини опинилась у поверхневому шарі, вона повинна здолати сили, що втягують її всередину рідини – сили поверхневого натягу. Для цього вона повинна мати додаткову енергію порівняно з іншими молекулами в рідині. [Подібно тому, як камені на даху будинку мають більшу потенціальну енергію порівняно з каменями, що лежать на землі. Щоб підняти камінь на дах, треба здолати силу тяжіння, тобто, виконати роботу. Потенціальна енергія при цьому збільшується]. Сумарна додаткова енергія, яку мають молекули поверхневого шару рідини, називається **поверхневою енергією** $U_{нов}$. Поверхнева енергія прямо пропорційна площі поверхні рідини: $U_{нов} = \sigma \cdot S$, де σ – коефіцієнт поверхневого натягу, який залежить від роду рідини, стану поверхні і температури рідини. При збільшенні температури σ зменшується (при критичній температурі обертається в нуль, оскільки вся рідина перетворюється на насичену пару і зникає границя розділу фаз).

Поверхневий шар стискує рідину і у вільному стані (при відсутності зовнішніх дій) краплина рідини приймає форму сфери – оскільки, з усіх тіл однакового об'єму площа сфери найменша. А потенціальна енергія залежить від площі – чим площа менше, тим менша потенціальна енергія. В природі будь-яка фізична система намагається зайняти стан з найменшою потенціальною енергією. Поверхнева енергія відноситься до типу потенціальних енергій, бо зумовлена взаємодією молекул.

Виведемо формулу сили поверхневого натягу

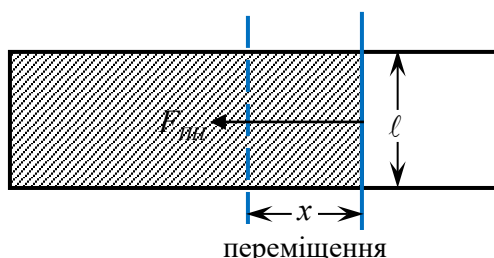


Рис. 2.16

Візьмемо дротяний контур, у якого одна з сторін є рухомою, з довжиною ℓ (рис. 2.16). Зануримо контур у мильний розчин та натягнемо за допомогою рухомої сторони на нього мильну плівку. Плівка прагне зменшити площу своєї поверхні, тому сторона ℓ рухається під дією сили поверхневого натягу. При цьому виконується робота:

$$A = -\Delta U_{\text{нов}} = U_{\text{нов } 1} - U_{\text{нов } 2}$$

– за теоремою про потенціальну енергію робота дорівнює зміні потенціальної енергії з протилежним знаком.

З іншої сторони за визначенням роботи вона дорівнює добутку сили на переміщення: $A = F_{\text{ну}} \cdot x$. Треба врахувати, що плівка має дві поверхні: верхню та нижню. Тому з врахуванням виразу для поверхневої енергії робота в цих двох виразах матиме вигляд:

$$A = -\Delta U_{\text{нов}} = U_{\text{нов } 1} - U_{\text{нов } 2} = 2\sigma(S_1 - S_2) = 2\sigma\ell \cdot x;$$

$$A = 2F_{\text{ну}} \cdot x.$$

Прирівняємо: $2F_{\text{ну}} \cdot x = 2\sigma\ell \cdot x \Rightarrow F_{\text{ну}} = \sigma\ell.$

Сила поверхневого натягу: $F_{\text{ну}} = \sigma\ell$ – це сила, яка для плівки рідини направлена по дотичній до поверхні рідини, перпендикулярно елементу довжини контура (ℓ) і прямо пропорційна довжині цього елемента контура.

Коефіцієнт поверхневого натягу: $\sigma = \frac{F_{\text{ну}}}{\ell}$ – чисельно дорівнює силі поверхневого натягу, прикладеній до одиниці довжини краю поверхневої плівки рідини. З енергетичних міркувань в загальному вигляді можна записати: $dU_{\text{нов}} = dA$; $dU_{\text{нов}} = \sigma dS$; $\sigma = \frac{dA}{dS}$ – коефіцієнт поверхневого натягу дорівнює роботі утворення одиниці площі вільної поверхні рідини.

Завдяки існуванню сили поверхневого натягу утворюються краплини; дрібно-сітчасті структури не пропускають рідини (парасольки); існують капілярні явища, що мають в природі велике значення.

Лапласівський тиск

Поверхневий шар, який стискує рідину, чинить на неї тиск, додатковий до зовнішнього тиску p_0 . Цей додатковий тиск називається тиском Лапласа. Рівнодійна тиску Лапласа p_L направлена до центру кривизни поверхні рідини (меніска).

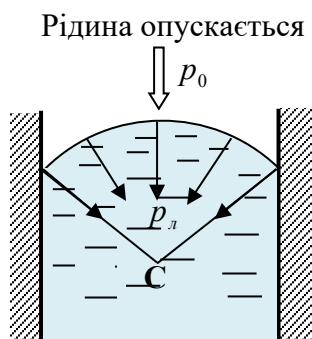


Рис. 2.17, а

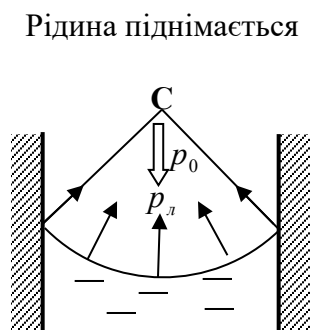


Рис. 2.17, б

Якщо центр кривизни C лежить всередині рідини (меніск опуклий) – тиск всередині рідини дорівнює сумі зовнішнього тиску p_0 і тиску Лапласа p_L (рис. 2.17, а): $p = p_0 + p_L$ – рідина опускається. Якщо центр кривизни C лежить зовні рідини (меніск вгнутий), то повний тиск в рідині дорівнює різниці зовнішнього тиску та тиску Лапласа (рис. 2.17, б): $p = p_0 - p_L$ – рідина піднімається.

Будь-яка поверхнева плівка рідини під дією сил поверхневого натягу скорочується, зменшуючи свою площу до мінімально можливої. Тобто поверхня довільної форми намагається стати плоскою. З рис. 2.17, а) видно, як опукла поверхня, коли намагається стати плоскою, збільшує тиск на рідину; з рис. 2.17, б) – а увігнута поверхня, коли намагається стати плоскою, зменшує тиск на рідину. Це і є тиск Лапласа.

Знайдемо величину додаткового тиску під кривою поверхнею.

Нехай рідина обмежена сферичною поверхнею радіусом r . Під дією додаткового тиску поверхневої плівки рідина стискається і радіус сфери зменшується на dr (рис. 2.18). При цьому сили поверхневого натягу виконують роботу dA , яку можна обчислити за тиском поверхневої плівки – лапласівським тиском p_L та за зміною об'єму рідини: $dA = Fdr = p_L dV$, або за коефіцієнтом поверхневого натягу та скороченням поверхні рідини: $dA = \sigma dS$. Прирівняємо вирази для роботи: $p_L dV = \sigma dS$.

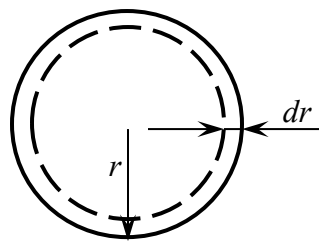


Рис. 2.18

Запишемо вирази для об'єму та площі сферичної поверхні рідини та їх диференціали:

$$dV = d\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = 4\pi r^2 dr; \quad dS = d(4\pi r^2) = 8\pi r dr.$$

Підставимо ці дві формули в попередню формулу для роботи:

$$p_{\text{л}} 4\pi r^2 dr = \sigma 8\pi r dr.$$

Звідси додатковий **лапласівський тиск сферичної** поверхневої плівки на рідину: $p_{\text{л}} = \frac{2\sigma}{r}$ – тиск збільшується зі зменшення радіуса краплі рідини.

У загальному випадку для поверхні двоякої кривизни **величина тиску**

Лапласа: $p_{\text{л}} = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$, де R_1 і R_2 – радіуси кривизни меніска в двох

взаємно перпендикулярних перетинах. Для сферичної поверхні $R_1 = R_2 \equiv R$.

Для лапласівського тиску маємо:

$$p_{\text{л}} = \sigma \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) = \frac{2\sigma}{R},$$

де R – радіус кривизни меніска.

З формули Лапласа слідує, що додатковий тиск кривої поверхневої плівки прямо пропорційний коефіцієнту поверхневого натягу та обернено пропорційний радіусу кривизни. Якщо за допомогою скляного трійника, до якого приєднано дві гумові трубочки, видути дві мильні бульбашки різного розміру, а потім закрити отвір трійника, то більша бульбашка буде збільшуватись, а менша – зменшуватись. Це означає, що у меншій мильній бульбашці повітря перебуває під більшим лапласівським тиском, тому воно перетікає в більшу бульбашку та збільшує її. У дуже малих бульбашках повітря або пари у воді лапласівський тиск настільки значний, що середовище таких бульбашок стає жорстким середовищем.

Явище утворення бульбашок в рідині називається кавітацією. Явище кавітації треба враховувати при проектуванні кораблів. Кавітація виникає у швидких потоках рідини в трубах, коли працюють гребні гвинти кораблів. Кавітація може спричинити руйнування корабельних гвинтів, ніби вони перетинають бетон, а не воду.

Капілярні явища

Взаємодія між поверхневими шарами однакових тіл називається когезією (зчеплення); взаємодія між поверхневими шарами різних тіл називається адгезією (прилипання). Тобто, когезія – це зчеплення молекул одного тіла між собою внаслідок взаємного притягання. Когезія спостерігається у твердих тілах та рідинах. При дуже низьких температурах або високих тисках, тобто, коли віддаль між молекулами газу стає достатньо малою, когезія існує і в газах.

Адгезія – це прилипання молекул двох різних тіл внаслідок взаємного притягання молекул. Адгезія існує між твердими; твердими та рідкими; твердими та газоподібними тілами. В останньому випадку це явище називають адсорбцією. Між молекулами стінок посудини і молекулами поверхні рідини діють сили притягання (адгезії). Разом з міжмолекулярними силами вони призводять до виникнення крайового кута θ між стінками посудини та поверхнею рідини.

Змочування відбувається тоді, коли сили молекулярної взаємодії рідини

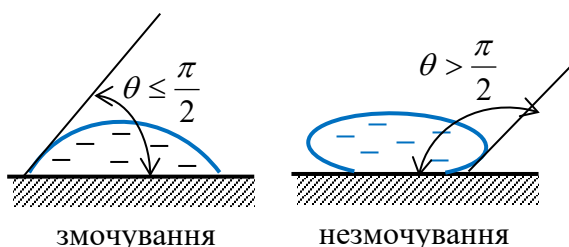


Рис. 2.19

– тверде тіло (сили адгезії) більші сил молекулярної взаємодії в рідині (сили когезії). В протилежному випадку відбувається незмочування. При змочуванні рідинна розтікається по поверхні тіла, а при незмочуванні – збирається в краплини (рис. 2.19).

Змочування характеризується

крайовим кутом θ . Якщо $\theta \leq \frac{\pi}{2}$ –

рідинна змочує поверхню; при $\theta > \frac{\pi}{2}$ – не

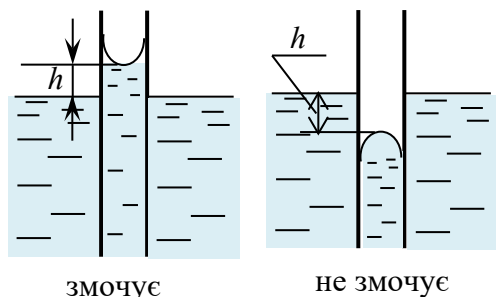


Рис. 2.20

змочує. Якщо меніск півсфера, то $\theta = 0$ і спостерігається повне змочування. Змочування особливо проявляється в капілярних явищах, суть яких в піднятті або опусканні рідини в капілярах по відношенню до рівня вільної поверхні рідини (рис. 2.20), що зумовлено додатковим лапласівським тиском. Як бачимо, в капілярах рідинна стоїть вище або нижче того рівня, на якому вона

мала б знаходитись за законом сполучених посудів.

На рис. 2.20 явище змочування та незмочування показано тільки для рідини в капілярах. тобто рисунок схематичний, бо змочування або незмочування буде

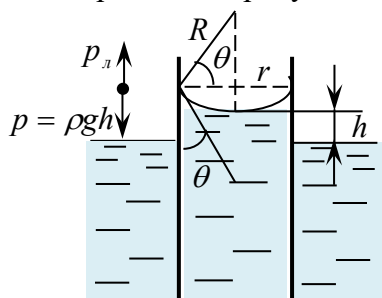


Рис. 2.21

і для зовнішньої стінки капіляра. Висота підйому в капілярі визначається з умови рівності тиску Лапласа гідростатичному тиску стовпа рідини.

Розглянемо умову рівноваги рідини в капілярній трубці, опущеній в широкую посудину з рідиною (рис. 2.20 та рис. 2.21). Якщо капіляр змочується рідиною, то в ньому утворюється вгнутий меніск і тиск на рідину стає меншим, ніж у широкій посудині. Тому рідинна переходить у капіляр і піднімається в ньому, поки надлишок

гідростатичного тиску не компенсує зменшення тиску під вгнутих меніском. Тобто, сила поверхневого натягу діє вздовж стінки капіляра вгору на границю плівки рідини, тягне її вгору. Ця границя, очевидно, має форму кола. Сила поверхневого натягу створює тиск на площу перерізу капіляра:

$$p_{\text{л}} = \frac{F_{\text{нн}}}{S} = \frac{\sigma \cdot 2\pi r}{\pi r^2} = \frac{2\sigma}{r} - \text{формула Лапласа} - \text{тиск, створюваний викривленою}$$

поверхнею рідини (тут – півсферою у випадку повного змочування), де r – радіус капіляра. У випадку неповного змочування тиск Лапласа: $p_{\text{л}} = \frac{2\sigma}{R}$, де

R – радіус кривизни меніска. Лапласівський тиск компенсується тиском, створюваним стовпчиком рідини – гідростатичним тиском: $p = \rho gh$, де h – висота підняття рідини в капілярі, ρ – густина рідини. Маємо: $\rho gh = \frac{2\sigma}{R}$ –

умова рівності лапласівського та гідростатичного тисків, з якої знаходять **висоту підняття (опускання) рідини у капілярі:**

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g R}.$$

Виразимо радіус кривизни меніска через радіус капіляра (який виміряти значно простіше), користуючись рис. 2.21:

$$r = R \cos \theta \Rightarrow R = \frac{r}{\cos \theta},$$

де θ – крайовий кут або кут змочування.

Після підстановки формули для радіуса меніска в формулу для висоти підняття рідини в капілярі, отримаємо загальну формулу:

$$\boxed{h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho g r}} - \text{висота підняття (опускання) рідини в капілярі.}$$

Висота підняття рівня рідини в капілярі обернено пропорційна радіусу капіляра та залежить від роду рідини і крайового кута. Максимальне піднімання або опускання рідини буде при повному змочуванні $\theta = 0^\circ$ або незмочуванні, коли $\theta = 180^\circ$.

Відповідно, $\cos \theta = \pm 1$ і висота піднімання (опускання) рідини:

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g r}.$$

Висота піднімання (опускання) рідини в капілярах зменшується зі збільшенням температури, бо при цьому коефіцієнт поверхневого натягу σ зменшується більше, ніж густина рідини ρ .

2.9. Основні закони та співвідношення. Реальні гази і рідини. Фазові переходи

- Рівняння Ван-дер-Ваальса для одного моля реального газу

$$\left(p + \frac{a}{V_0^2}\right) \cdot (V_0 - b) = RT,$$

де V_0 – молярний об'єм газу, p – тиск; T – термодинамічна температура; R – універсальна газова стала; a і b – поправки Ван-дер-Ваальса, сталі для даного газу, але різні для різних газів; a – враховує сили взаємодії між молекулами; b – враховує власний об'єм молекул; $\frac{a}{V_0^2} = p_i$ – внутрішній тиск, який існує в об'ємі одного моля газу V_0 внаслідок взаємодії між молекулами; разом із зовнішнім тиском p він становить повний тиск $p + \frac{a}{V_0^2}$.

- Рівняння Ван-дер-Ваальса для довільної маси реального газу:

$$\left(p + \left(\frac{m}{\mu}\right)^2 \frac{a}{V^2}\right) \cdot \left(V - \frac{m}{\mu} b\right) = \frac{m}{\mu} RT,$$

де V – об'єм всього газу, μ – молярна маса газу; $\left(\frac{m}{\mu}\right)^2 \frac{a}{V^2} = p_i$ – внутрішній тиск, який існує в об'ємі газу V внаслідок взаємодії між молекулами; $\frac{m}{\mu} b = V_i$ – об'єм, пов'язаний з власним об'ємом молекул.

- Поправка b може бути визначена з рівняння:

$$b = 4 \cdot \frac{4}{3} \pi \left(\frac{\sigma}{2}\right)^3 N_A, \quad \text{або} \quad b = 4 v N_A,$$

де $v = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{\sigma}{2}\right)^3$ – об'єм молекули; σ – ефективний діаметр молекули; N_A – число Авогадро.

- Температура Бойля:

$$T_B = \frac{a}{Rb},$$

де a і b – поправки Ван-дер-Ваальса.

- Зв'язок критичних параметрів речовини з поправками Ван-дер-Ваальса « a » та « b »:

критичний тиск
$$p_{кр} = \frac{a}{27b^2};$$

молярний критичний об'єм $V_{\mu kp} = 3b$;

критична температура $T_{kp} = \frac{8a}{27bR}$.

- **Поправки Ван-дер-Ваальса, виражені через критичні параметри:**

$$a = \frac{27T_K^2 R^2}{64p_K}; \quad b = \frac{T_K R}{8p_K}.$$

- **Зв'язок між критичними параметрами:**

$$p_{kp} V_{0K} = \frac{3}{8} R T_K.$$

- **Зведене рівняння стану для одного моля реального газу:**

$$\left(\pi + \frac{3}{\omega^2} \right) \cdot (3\omega - 1) = 8\tau,$$

де $\tau = \frac{T}{T_K}$ – зведена температура; $\pi = \frac{p}{p_K}$ – зведений тиск; $\omega = \frac{V}{V_K}$ – зведений об'єм.

- **Внутрішня енергія для довільної маси реального газу:**

$$U = \frac{m}{\mu} \left(C_V T - \frac{m}{\mu} \frac{a}{V} \right) = \nu \left(C_V T - \nu \frac{a}{V} \right),$$

де $\frac{i}{2} R = C_V$ – молярна теплоємність при сталому об'ємі; $\nu = \frac{m}{\mu}$ – кількість молей.

- **Молярна теплоємність реального газу при сталому об'ємі та тиску:**

$$C'_V = \frac{i}{2} R; \quad C'_p = C_V + \frac{R^2 T}{(V-b) \cdot \left(p - \frac{a}{V^2} + \frac{2ab}{V^3} \right)}.$$

(Рівняння Майєра для реального газу не виконується.)

- **Теплота плавлення (кристалізації):**

$$Q_{nl} = \lambda m,$$

де λ – питома теплота плавлення – див. «Довідкові матеріали».

- **Теплота пароутворення (конденсації):**

$$Q_{nap} = r m,$$

де r – питома теплота пароутворення – див. «Довідкові матеріали».

- **Рівняння Клапейрона-Клаузіуса для фазових переходів першого роду:**

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q_{1,2}}{T(V_2' - V_1')}, \text{ де } dp - \text{елементарна зміна тиску при елементарній зміні}$$

температури на dT ; $q_{1,2}$ – питома теплота переходу речовини з фази 1 в фазу 2 при сталій температурі T ; V_1' та V_2' – питомі об'єми другої та першої фази речовини: $V_1' = V_1/m$; $V_2' = V_2/m$; де m – маса речовини, що зазнає фазового перетворення.

- **Зміна внутрішньої енергії при фазовому переході:**

$$\Delta U = \left(T \frac{dp}{dT} - p \right) \cdot (V_2' - V_1'),$$

пояснення величин – у попередній формулі.

- **Відносна вологість:**

$$\varphi = \frac{\rho}{\rho_{\text{нп}}} \cdot 100\% = \frac{p}{p_{\text{нп}}} \cdot 100\% ,$$

де ρ – абсолютна вологість, $\rho_{\text{нп}}$ – парціальна густина насиченої пари, $p_{\text{нп}}$ – парціальний тиск насиченої пари. $\rho_{\text{нп}}$ і $p_{\text{нп}}$ беруть з таблиць.

- **Енергія молекул поверхневого шару рідини:**

$$U_{\text{нов}} = \sigma \cdot S ,$$

де σ – коефіцієнт поверхневого натягу; S – площа поверхневої плівки.

- **Сила поверхневого натягу:**

$$F_{\text{нп}} = \sigma \ell ,$$

де σ – коефіцієнт поверхневого натягу; ℓ – довжина контура, що обмежує поверхневу плівку.

- **Коефіцієнт поверхневого натягу:**

$$\sigma = dA / dS \quad \text{або} \quad \sigma = F_{\text{нов}} / \ell ,$$

де dA / dS – робота по утворенню одиниці площі вільної поверхні рідини.

- **Формула Лапласа для загального випадку для поверхні двоякої кривизни:**

$$p_{\text{л}} = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) ,$$

де $p_{\text{л}}$ – додатковий лапласівський тиск, R_1 і R_2 – радіуси кривизни меніска – викривленої поверхні в двох взаємно перпендикулярних перетинах.

- **Лапласівський тиск сферичної поверхневої плівки:** $p_{\text{л}} = \frac{2\sigma}{R}$.

- **Висота підняття (пониження) рідини в капілярі:** $h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho g r}$, де θ –

крайовий кут або кут змочування ($\theta = 0^\circ$ – при повному змочуванні), ρ – густина рідини, r – радіус капіляра.

2.10. Приклади розв'язування задач. Реальні гази та рідини. Фазові переходи. Явища перенесення

2.10.1. Реальні гази та рідини. Фазові переходи

Реальні гази

Вказівки до розв'язування задач

1. При значних розрідженнях, а значить, – при високих температурах, рівняння Ван-дер-Ваальса переходить в рівняння стану ідеального газу.

2. З рівняння стану реального газу можна визначити невідомі параметри або параметр стану газу; обчислити поправки Ван-дер-Ваальса за допомогою відомих параметрів; знайти масу газу, якщо відомий його стан.

3. Щоб визначити поправки a і b треба мати всі параметри газу не менше, ніж у двох станах, бо потрібно мати систему двох рівнянь.

4. Внутрішньомолекулярний тиск обчислюється. За допомогою манометрів вимірюється лише зовнішній тиск.

5. Знаючи критичні параметри $p_{кр}$ – критичний тиск, $V_{0кр}$ – критичний молярний об'єм, $T_{кр}$ – критичну температуру, можна визначити об'єм та ефективний діаметр молекули, довжину вільного пробігу молекули та інші фізичні характеристики.

6. За поправкою b можна визначити об'єм однієї молекули та її ефективний діаметр.

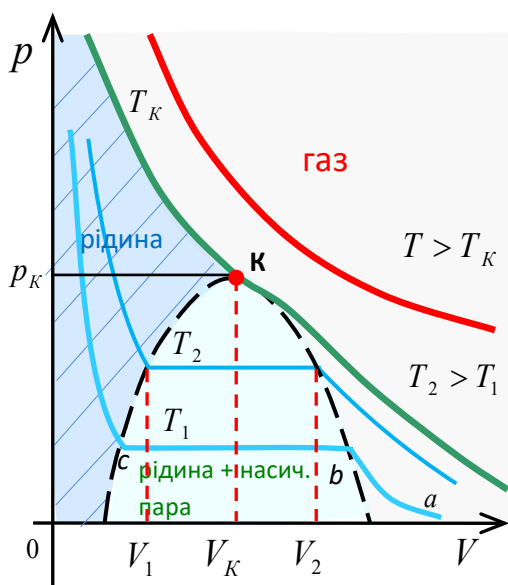


Рис. 2.22

7. Зв'язок між критичними параметрами задається рівнянням

$$p_{кр} V_{0кр} = \frac{3}{8} R T_{кр}.$$

З нього можна знайти будь-який параметр, якщо відомі два інших.

8. Критичний стан довільної маси газу m може існувати при критичному тиску $p_{кр}$ і критичній температурі $T_{кр}$ лише в певному об'ємі $V_{кр}$, який визначається з

$$\text{рівняння: } V_{кр} = \frac{m}{\mu} V_{0кр}.$$

Це означає, що критичний стан може бути лише тоді, коли

критичний об'єм $V_{кр}$ взятої маси речовини дорівнює об'єму посудини, у якій вона нагрівається.

При меншій її кількості вся рідина, що нагрівається, випаровується, не досягнувши критичної температури – критичного стану.

При більшій кількості перед тим, як досягти критичної температури, уся посудина заповнюється рідиною, після чого тиск в ній швидко підвищується. Це видно з рис. 2.22. Критичний стан спостерігають при умові, що $V = V_{кр}$. Якщо $V = V_2$, то вся рідина випаровується; якщо $V = V_1$, весь об'єм заповниться рідиною.

Приклад 93. Два кіломолі трьохатомного газу адіабатно розширюються в пустоту від $V_1 = 1 \text{ м}^3$ до $V_2 = 5 \text{ м}^3$. Температура газу при цьому зменшується на 15 К . Знайти за цими даними постійну «а» з рівняння Ван-дер-Ваальса.

Розв'язання

Дано:

$$\nu = 2 \cdot 10^3 \text{ моль}$$

$$i = 6$$

$$\delta Q = 0$$

$$p = 0 \text{ Па}$$

$$V_1 = 1 \text{ м}^3$$

$$V_2 = 5 \text{ м}^3$$

$$\Delta T = -15 \text{ К}$$

а?

Перше начало термодинаміки $\delta Q = dU + \delta A$ для адіабатного процесу має вигляд $\delta A = -dU$, де δA – робота газу проти зовнішніх сил, U – внутрішня енергія, dU – зміна внутрішньої енергії. За умовою задачі зовнішнього тиску немає (розширення в пустоту), робота не виконується, бо немає зовнішніх сил, тому

$$\delta A = p dV = 0.$$

В підсумку маємо, що $dU = 0$.

Внутрішня енергія для довільної маси реального

газу

$$U = \nu \left(C_V T - \nu \frac{a}{V} \right).$$

Зміна внутрішньої енергії dU має дві складові: $\nu C_V dT$, що не залежить від зміни об'єму, та $dU(V)$, що залежить від об'єму. Остання складова рівна роботі сили міжмолекулярного притягання, котра спричинює додатковий внутрішній тиск

$$P_i = \nu^2 \frac{a}{V^2}.$$

Тоді для другої складової маємо: $dU(V) = P_i dV = \nu^2 \frac{a}{V^2} dV$.

Повна зміна внутрішньої енергії газу: $\nu C_V dT + \nu^2 \frac{a}{V^2} dV = 0$,

Звідки $dT = -\nu \frac{a}{V^2 C_V} dV$.

Знайдемо зміну температури, проінтегрувавши цей вираз:

$$\Delta T = \int_{T_1}^{T_2} dT = -\nu \frac{a}{C_V} \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^2} = \nu \frac{a}{C_V} \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right).$$

Тобто:

$$\Delta T = \nu \frac{2a}{iR} \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right),$$

оскільки молярна теплоємність при постійному об'ємі $C_V = \frac{i}{2}R$ (i – число ступенів вільності, R – універсальна газова стала) – для реального газу така ж, як для ідеального.

Тепер маємо для поправки Ван-дер-Ваальса a :

$$a = \frac{iR\Delta T V_1 V_2}{2\nu(V_1 - V_2)},$$

$$a = \frac{6 \cdot 8,31 \cdot (-15) \cdot 1 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 10^3 (1 - 5)} = 0,23 \frac{H \cdot m^4}{mоль^2}.$$

Відповідь: $\alpha = 0,23 \frac{H \cdot m^4}{mоль^2}.$

Приклад 94. Знайти критичний молярний об'єм кисню.

Дано:

$$T_{кр} = 154K$$

$$p_{кр} = 5,07 \text{ МПа} = 5,07 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

$$V_{кр} ?$$

Розв'язання

Молярний критичний об'єм газу:

$$V_{0кр} = 3b,$$

де b – поправка Ван-дер-Ваальса, яку знаходимо з довідкових даних.

Обчислимо коефіцієнт b , використовуючи

критичні параметри:

$$b = \frac{T_K R}{8 p_K} = \frac{154 \cdot 8,31}{8 \cdot 5,07 \cdot 10^6} = 3,16 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 / \text{моль} - \text{саме таке значення поправки для}$$

кисню бачимо в таблицях.

Молярний критичний об'єм кисню:

$$V_{0кр} = 3b = 3 \cdot 3,16 \cdot 10^{-5} = 9,48 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 / \text{моль}.$$

Зв'язок між критичними параметрами задається формулою: $p_{кр} V_{0к} = \frac{3}{8} R T_K.$

Звідси $V_{0к} = \frac{3 R T_K}{8 p_{кр}}$ – маємо таку ж формулу, що вище.

Відношення $\kappa = \frac{8}{3} = \frac{R T_K}{p_K V_{0к}} = 2,67$ – називається критичним коефіцієнтом.

Варто зауважити, що для реальних газів критичні коефіцієнти мають різні значення і всі вони більші за $8/3$. Тому для молярного критичного об'єму кисню експеримент дає $V_{0кр} = 2,32 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$, що більше теоретичного значення.

Відповідь: $V_{0кр} = 9,48 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3$.

Приклад 95. За відомим значенням b в рівнянні Ван-дер-Ваальса розрахувати густину вуглекислого газу в критичному стані.

Дано: CO_2

$b = 4,26 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 / \text{моль}$

$\rho_{кр}$?

Розв'язання

Стала b пов'язана з молярним критичним об'ємом формулою: $V_{0кр} = 3b$

Густина газу в критичному стані: $\rho_{кр} = \frac{\mu}{V_{0кр}} = \frac{\mu}{3b}$,

де $\mu = (12 + 16 \cdot 2) \cdot 10^{-3} \text{ кг} / \text{моль} = 44 \cdot 10^{-3} \text{ кг} / \text{моль}$ — молярна маса вуглекислого газу.

$$\rho_{кр} = \frac{\mu}{3b} = \frac{44 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 4,26 \cdot 10^{-5}} = 344 \text{ кг} / \text{м}^3.$$

Відповідь: $\rho_{кр} = 344 \text{ кг} / \text{м}^3$.

Приклад 96. За критичними значеннями температури $T_{кр}$ і тиску $p_{кр}$ знайдіть значення поправок Ван-де-Ваальса a і b для водню.

Дано: H_2

$T_{кр} = 33 \text{ К}$

$p_{кр} = 1,3 \text{ МПа} = 1,3 \cdot 10^6 \text{ Па}$

a ? b ?

Розв'язання

Значення критичних параметрів беруться з таблиць довідкових даних.

Зв'язок критичних параметрів речовини з поправками Ван-дер-Ваальса a та b :

критичний тиск $p_{кр} = \frac{a}{27b^2}$;

молярний критичний об'єм $V_{\mu кр} = 3b$;

критична температура $T_{кр} = \frac{8a}{27bR}$.

З виразу для критичного тиску знайдемо поправку a та підставимо її в вираз для критичної температури:

$$a = p_{кр} \cdot 27b^2;$$

$$T_{кр} = \frac{8a}{27bR} = \frac{8 \cdot p_{кр} \cdot 27b^2}{27bR} = \frac{8p_{кр}b}{R} \Rightarrow b = \frac{RT_{кр}}{8p_{кр}}.$$

Для спрощення обчислень, спочатку обчислюємо поправку b , згодом, поправку a , отже виведемо формулу для поправки a :

$$a = p_{кр} \cdot 27b^2 = p_{кр} \cdot 27 \cdot \frac{R^2 T_{кр}^2}{8^2 p_{кр}^2} = \frac{27 T_{кр}^2 R^2}{64 p_{кр}}.$$

Обчислимо:
$$b = \frac{RT_{кр}}{8p_{кр}} = \frac{8,31 \cdot 33}{8 \cdot 1,3 \cdot 10^6} = 0,0000264 = 2,64 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}};$$

$$a = p_{кр} \cdot 27b^2 = 1,3 \cdot 10^6 \cdot 27 \cdot (2,64 \cdot 10^{-5})^2 = 0,024 \frac{\text{Дж} \cdot \text{м}^3}{\text{моль}^2} \quad \text{або} \quad \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^4}{\text{моль}^2}.$$

Відповідь:
$$a = 0,024 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^4}{\text{моль}^2}; \quad b = 2,64 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}.$$

Приклад 97. У балоні об'ємом $V = 20 \text{ л}$ міститься $\nu = 0,08 \text{ кмоль}$ деякого газу. При $T_1 = 287 \text{ К}$ тиск газу дорівнює $p_1 = 9,1 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$, а при $T_2 = 336 \text{ К}$ тиск газу дорівнює $p_2 = 11 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$. Обчислити поправки Ван-дер-Ваальса для цього газу.

Дано:

$$V = 20 \text{ л} = 20 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3$$

$$\nu = 0,08 \text{ кмоль} = 0,08 \cdot 10^3 = 80 \text{ моль}$$

$$T_1 = 287 \text{ К}$$

$$p_1 = 9 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$$

$$T_2 = 336 \text{ К}$$

$$p_2 = 11 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$$

$$a? \quad b?$$

Розв'язання

Рівняння Ван-дер-Ваальса для довільної маси реального газу

$$\left(p + \left(\frac{m}{\mu} \right)^2 \frac{a}{V^2} \right) \cdot \left(V - \frac{m}{\mu} b \right) = \frac{m}{\mu} RT,$$

де $\nu = \frac{m}{\mu}$ – кількість молей.

Для першого стану маємо:

$$\left(p_1 + \frac{a\nu^2}{V^2} \right) \cdot (V - \nu b) = \nu RT_1.$$

Для другого, відповідно:
$$\left(p_2 + \frac{a\nu^2}{V^2} \right) \cdot (V - \nu b) = \nu RT_2.$$

Виключимо з цих двох рівнянь множник $(V - \nu b)$. Для цього можна його виразити з рівняння для першого стану та підставити в рівняння для другого стану:

$$(V - \nu b) = \frac{\nu RT_1}{\left(p_1 + \frac{a\nu^2}{V^2}\right)}; \quad \left(p_2 + \frac{a\nu^2}{V^2}\right) \frac{\nu RT_1}{\left(p_1 + \frac{a\nu^2}{V^2}\right)} = \nu RT_2,$$

$$\left(p_2 + \frac{a\nu^2}{V^2}\right) \nu RT_1 = \left(p_1 + \frac{a\nu^2}{V^2}\right) \nu RT_2 \Rightarrow \left(p_2 + \frac{a\nu^2}{V^2}\right) T_1 = \left(p_1 + \frac{a\nu^2}{V^2}\right) T_2.$$

Приведемо вираз в дужках до спільного знаменника, розкриємо дужки та виразимо поправку a :

$$p_2 V^2 T_1 - p_1 V^2 T_2 = a \nu^2 T_2 - a \nu^2 T_1 \Rightarrow a = \frac{(p_2 T_1 - p_1 T_2) V^2}{(T_2 - T_1) \nu^2}.$$

$$a = \frac{(p_2 T_1 - p_1 T_2) V^2}{(T_2 - T_1) \nu^2} = \frac{(11 \cdot 10^6 \cdot 287 - 9 \cdot 10^6 \cdot 336) \cdot (2 \cdot 10^{-2})^2}{(336 - 287) \cdot 80^2} = 0,1696 \approx 0,17 \frac{\text{Дж} \cdot \text{м}^3}{\text{моль}^2}.$$

Поправку b знайдемо з рівняння для першого, чи другого стану:

$$\left(p_1 + \frac{a\nu^2}{V^2}\right) \cdot (V - \nu b) = \nu RT_1 \Rightarrow b = \frac{V}{\nu} - \frac{RT_1}{\left(p_1 + \frac{a\nu^2}{V^2}\right)},$$

$$b = \frac{V}{\nu} - \frac{RT_1}{\left(p_1 + \frac{a\nu^2}{V^2}\right)} = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{80} - \frac{8,31 \cdot 287}{\left(9 \cdot 10^6 + \frac{0,17 \cdot 80^2}{(2 \cdot 10^{-2})^2}\right)} = 0,000047 \approx 4,7 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}.$$

Відповідь: $a = 0,17 \frac{\text{Дж} \cdot \text{м}^3}{\text{моль}^2}; \quad b = 4,7 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}.$

Приклад 98. Яку кількість води треба налити в посудину об'ємом 30 см^3 , щоб привести її в критичний стан, нагріваючи запаяну посудину з водою?

Дано: H_2O

$$b = 3,06 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}$$

$$\frac{V = 30 \text{ см}^3 = 30 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3}{m?}$$

Розв'язання

Критичний стан довільної маси газу m може існувати при критичному тиску $p_{кр}$ і критичній температурі $T_{кр}$ лише в певному об'ємі $V_{кр}$, який визначається з рівняння:

$$V_{кр} = \frac{m}{\mu} V_{0K}.$$

Критичний стан може бути лише тоді, коли критичний об'єм взятої маси речовини дорівнює об'єму посудини, в якій вона нагрівається, що відповідає умові нашої задачі: $V = V_{кр} = 30 \text{ см}^3$. Молярний критичний об'єм $V_{0кр} = 3b$, де b – поправка Ван-дер-Ваальса, яку можна взяти з таблиць.

Отже, з рівняння $V_{кр} = \frac{m \cdot 3b}{\mu}$ знайдемо масу води, яку треба залити в посудину: $m = \frac{V_{кр} \mu}{3b}$, де $\mu(H_2O) = (1 \cdot 2 + 16) \cdot 10^{-3} = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ – молярна маса води.

$$\text{Обчислимо: } m = \frac{V_{кр} \mu}{3b} = \frac{30 \cdot 10^{-6} \cdot 18 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 3,06 \cdot 10^{-5}} = 5,88 \cdot 10^{-3} \text{ кг}.$$

Відповідь: $m = 5,88 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$.

Приклад 99. Яка середня довжина вільного пробігу молекул азоту при нормальних умовах, якщо відома стала b Ван-дер-Ваальса: $b = 3,85 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 / \text{моль}$.

Дано: N_2

$$b = 3,85 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}$$

$\bar{\lambda}?$

Розв'язання

Середню довжину вільного пробігу молекул визначаємо за формулою:

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 n},$$

де σ – ефективний діаметр молекули азота, n – концентрація молекул. Оскільки газ перебуває в нормальних умовах, то кількість молекул в одиниці об'єму дорівнює сталій Лошмідта: $n = 2,7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$.

Коли вводилась поправка b , то ми приймали її як потвернений власний об'єм $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ молекул газу: $b = 4 \cdot \frac{4}{3} \pi \left(\frac{\sigma}{2} \right)^3 N_A$, або $b = 4$

$\cdot N_A$, де $v = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{\sigma}{2} \right)^3$ – об'єм молекули; σ – ефективний діаметр молекули; N_A – число Авогадро.

Отже, з рівняння $b = 4 \cdot \frac{4}{3} \pi \left(\frac{\sigma}{2} \right)^3 N_A$ маємо для ефективного діаметра

молекули: $\sigma = \sqrt[3]{\frac{3b}{2\pi N_A}}$. Підставимо σ у формулу для довжини вільного

пробігу: $\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\sqrt[3]{\frac{2\pi N_A}{3b}} \right)^2$.

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\sqrt[3]{\frac{2\pi N_A}{3b}} \right)^2 = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 3,14 \cdot 2,7 \cdot 10^{25}} \left(\sqrt[3]{\frac{2 \cdot 3,14 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{3 \cdot 3,85 \cdot 10^{-5}}} \right)^2 = 8,5 \cdot 10^{-8} \text{ м}.$$

Якщо азот перебуває не при нормальних умовах, то замість n у формули треба підставляти $n = \frac{P}{kT}$ – концентрація з рівняння стану.

Відповідь: $\bar{\lambda} = 8,5 \cdot 10^{-8} \text{ м}$.

Приклад 100. Знайти ефективний діаметр молекули кисню з відомих критичних параметрів T_K і p_K .

Розв'язання

Дано:

$$T_K = 154 \text{ К}$$

$$p_K = 5,07 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

σ ?

Поправка Ван-дер-Ваальса $b = 4 \cdot v N_A$, де v – об'єм однієї молекули, N_A – число Авогадро.

Через критичні параметри поправка b визначається за формулою: $b = \frac{T_K R}{8 p_K}$. Прирівняємо ці дві формули: $4v$

$$N_A = \frac{T_K R}{8 p_K}.$$

Тоді об'єм однієї молекули: $v = \frac{T_K R}{32 N_A p_K}$.

Молекулу вважаємо сферичною, тоді її об'єм $v = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{\sigma}{2} \right)^3 = \frac{1}{6} \pi \sigma^3$,

де σ – ефективний діаметр молекули.

Ефективний діаметр знайдемо з рівності:

$$\frac{1}{6} \pi \sigma^3 = \frac{T_K R}{32 N_A p_K} \Rightarrow \sigma = \sqrt[3]{\frac{3 T_K R}{16 \pi N_A p_K}}.$$

$$\sigma = \sqrt[3]{\frac{3T_K R}{16\pi N_A p_K}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 154 \cdot 8,31}{16 \cdot 3,14 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \cdot 5,07 \cdot 10^6}} = 2,93 \cdot 10^{-10} \text{ м}$$

Відповідь: $\sigma = 2,93 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

Приклад 101. Кисень масою 0,64 кг займає об'єм 0,24 м³ при температурі 293 К. Визначити: 1) тиск газу; 2) внутрішній тиск; 3) власний об'єм молекул.

Дано:

$$m = 0,64 \text{ кг}$$

$$V = 0,24 \text{ м}^3$$

$$T = 293 \text{ К}$$

$$p? \quad p_i? \quad V_i?$$

Розв'язання

Рівняння Ван-дер-Ваальса для довільної маси реального газу

$$\left(p + \left(\frac{m}{\mu} \right)^2 \frac{a}{V^2} \right) \cdot \left(V - \frac{m}{\mu} b \right) = \frac{m}{\mu} RT,$$

де V – об'єм всього газу, μ – молярна маса газу; $\left(\frac{m}{\mu} \right)^2 \frac{a}{V^2} = p_i$ – внутрішній

тиск, який існує в об'ємі газу V внаслідок взаємодії між молекулами; $\frac{m}{\mu} b = V_i$

– об'єм, пов'язаний з власним об'ємом молекул.

Зауважимо (для інших задач), що внутрішній тиск можна виразити через густину газу:

$$p_i = \left(\frac{m}{\mu} \right)^2 \frac{a}{V^2} = \left(\frac{\rho V}{\mu V} \right)^2 a = \left(\frac{\rho}{\mu} \right)^2 a.$$

Для знаходження внутрішнього тиску p_i та власного об'єму молекул потрібні поправки Ван-дер-Ваальса a і b . Їх можна обчислити за табличними критичними параметрами температури $T_{кр}$ і тиску $p_{кр}$, або скористатися

готовими даними з довідника: $a = 0,136 \frac{\text{Дж} \cdot \text{м}^3}{\text{моль}^2}$; $b = 3,16 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}$.

Тиск знайдемо з рівняння Ван-дер-Ваальса.
$$p = \frac{mRT}{\mu \left(V - \frac{m}{\mu} b \right)} - \left(\frac{m}{\mu} \right)^2 \frac{a}{V^2}.$$

В цю формулу входять внутрішній тиск p_i та власний об'єм V_i .

Формула для тиску тоді матиме вигляд:
$$p = \frac{mRT}{\mu(V - V_i)} - p_i.$$

Спочатку обчислимо тиск, хоча можливо піти іншим шляхом і спочатку обчислити внутрішній тиск p_i та власний об'єм V_i .

1) Тиск газу:

$$p = \frac{mRT}{\mu \left(V - \frac{m}{\mu} b \right)} - \left(\frac{m}{\mu} \right)^2 \frac{a}{V^2} = \frac{0,64 \cdot 8,31 \cdot 293}{32 \cdot 10^{-3} \left(0,24 - \frac{0,64 \cdot 3,16 \cdot 10^{-5}}{32 \cdot 10^{-3}} \right)} - \left(\frac{0,64}{32 \cdot 10^{-3}} \right)^2 \frac{0,136}{0,24^2} =$$

$$= 202493,8 = 202,5 \cdot 10^3 \text{ Па} = 202,5 \text{ кПа}$$

Для ідеального газу: $p = \frac{mRT}{\mu V} = \frac{0,64 \cdot 8,31 \cdot 293}{32 \cdot 10^{-3} \cdot 0,24} = 202902,5 \approx 203 \text{ кПа}.$

2) Внутрішній тиск:

$$p_i = \left(\frac{m}{\mu} \right)^2 \frac{a}{V^2} = \left(\frac{0,64}{32 \cdot 10^{-3}} \right)^2 \frac{0,136}{0,24^2} = 944,4 \text{ Па}.$$

3) Власний об'єм молекул:

$$V_i = \frac{m}{\mu} b = \frac{0,64 \cdot 3,16 \cdot 10^{-5}}{32 \cdot 10^{-3}} = 0,000632 \text{ м}^3 \approx 0,6 \text{ дм}^3.$$

Відповідь: $p = 202,5 \text{ кПа}$; $p_i = 944,4 \text{ Па}$; $V_i = 0,6 \text{ дм}^3$.

Приклад 102. П'ять молів азоту розширюючись від об'єму $V_1 = 2 \text{ дм}^3$ до об'єму $V_2 = 5 \text{ дм}^3$, виконують роботу з подолання сил міжмолекулярного притягання. Знайти цю роботу.

Дано:

$$\nu = 5 \text{ моль}$$

$$V_1 = 2 \text{ дм}^3 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$V_2 = 5 \text{ дм}^3 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

$A?$

Розв'язання

Робота, що виконується проти сил взаємодії

молекул (сил притягання): $A = \int_{V_1}^{V_2} p_i dV,$

де $p_i = \left(\frac{m}{\mu} \right)^2 \frac{a}{V^2} = \frac{\nu^2}{V^2} a$ – внутрішній тиск,

обумовлений силами взаємодії молекул; $\nu = \frac{m}{\mu}$ – кількість молей.

Проінтегруємо для визначення роботи:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu^2}{V^2} a dV = \nu^2 a \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^2} = -\nu^2 a \frac{1}{V} \Big|_{V_1}^{V_2} = \nu^2 a \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right) = \nu^2 a \left(\frac{V_2 - V_1}{V_1 V_2} \right),$$

де $a = 0,136 \frac{\text{Дж} \cdot \text{м}^3}{\text{моль}^2}$ – поправка Ван-дер-Ваальса, що враховує сили взаємодії між молекулами, для азоту.

$$A = \nu^2 a \left(\frac{V_2 - V_1}{V_1 V_2} \right) = 5^2 \cdot 0,136 \left(\frac{5 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-3}} \right) = 1020 \text{ Дж} \approx 1 \text{ кДж}.$$

Відповідь: $A = 1 \text{ кДж}$.

Приклад 103. В закритій посудині об'ємом $V = 0,2 \text{ м}^3$ знаходиться 0,2 кмоль азоту при тиску $p = 2 \cdot 10^6 \text{ Па}$. Використовуючи рівняння Ван-дер-Ваальса, знайти, у скільки разів потрібно збільшити температуру газу, щоб тиск збільшився вдвічі.

Дано:

N_2

$$V = 0,2 \text{ м}^3$$

$$\nu = 0,2 \text{ кмоль} = 0,2 \cdot 10^3 \text{ моль}$$

$$p_1 = 2 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

$$p_2 = 2p_1 = 4 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

$$\frac{T_2}{T_1} ?$$

Розв'язання

Для першого стану маємо:

$$\left(p_1 + \frac{a \nu^2}{V^2} \right) \cdot (V - \nu b) = \nu R T_1.$$

Для другого, відповідно:

$$\left(p_2 + \frac{a \nu^2}{V^2} \right) \cdot (V - \nu b) = \nu R T_2.$$

Розділимо друге рівняння на перше та підставимо числові значення фізичних

величин; врахуємо, що поправка Ван-дер-Ваальса для азоту $a = 0,136 \frac{\text{Дж} \cdot \text{м}^3}{\text{моль}^2}$:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 + \frac{a \nu^2}{V^2}}{p_1 + \frac{a \nu^2}{V^2}} = \frac{4 \cdot 10^6 + \frac{(0,2 \cdot 10^3)^2 \cdot 0,136}{0,2^2}}{2 \cdot 10^6 + \frac{(0,2 \cdot 10^3)^2 \cdot 0,136}{0,2^2}} = 1,94 \text{ рази}.$$

Відповідь: $T_2 / T_1 = 1,94 \text{ рази}$.

Приклад 104. Для вуглекислого газу поправки рівняння Ван-дер-Ваальса $a = 0,364 \frac{\text{Дж} \cdot \text{м}^3}{\text{моль}^2}$, $b = 4,3 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}$.

1) Який тиск треба створити, щоб вуглекислий газ перетворити на рідку вуглекислоту при температурі: а) 31°C ; б) 50°C ?

2) Який найбільший об'єм може зайняти 1 кг рідкої вуглекислоти?

3) Яка найбільша пружність насиченої пари рідкої вуглекислоти?

Дано:

1) $CO_2 \rightarrow$ рідка вуглекислота

$t_1 = 31^\circ C$

$t_2 = 50^\circ C$

2) рідка вуглекислота

$m = 1 \text{ кг}$

3) насичений пар

вуглекислоти

$p_1 ? \quad p_2 ? \quad V_{\max} ? \quad p_{\max} ?$

Розв'язання

1) а) Оскільки $t_1 = 31^\circ C \rightarrow 304 \text{ K}$ –

це критична температура для вуглекислого газу. Щоб його зрідити та перетворити на вуглекислоту, потрібно створити критичний тиск $p_1 = p_{кр} = 7,38 \approx 7,4 \text{ МПа}$.

б) Оскільки $t_2 = 50^\circ C > t_{кр}$, то ні при якому тиску неможливо зрідити газ CO_2 та перетворити його на вугільну кислоту. При температурах, вищих за критичну,

речовина може перебувати тільки в газоподібному стані.

2) Критичний стан довільної маси газу може існувати при критичному тиску $p_{кр}$ і критичній температурі $T_{кр}$ лише в певному об'ємі

$$V_{\max} = V_{кр} = \frac{m}{\mu} V_{0кр} = \frac{m}{\mu} \cdot 3b,$$

де $V_{0кр} = 3b$ – критичний молярний об'єм; $b = 4,26 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 / \text{моль}$ для вуглекислого газу – поправка Ван-дер-Ваальса, що враховує власний об'єм молекул.

$$V_{\max} = \frac{m}{\mu} \cdot 3b = \frac{1 \cdot 3 \cdot 4,26 \cdot 10^{-5}}{44 \cdot 10^{-3}} = 0,0029 \text{ м}^3 = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 2,9 \text{ л},$$

де $\mu(CO_2) = (12 + 16 \cdot 2) \cdot 10^{-3} = 44 \cdot 10^{-3} \text{ кг} / \text{моль}$ – молярна маса вуглекислого газу.

3) Насичений пар вуглекислоти існує при критичному тиску $p_{кр}$. В таблицях тиск насиченої пари називають пружністю насиченої пари. (При збільшенні температури тиск насиченої пари збільшується).

З таблиць $p_{кр} = 7,4 \text{ МПа} = 7,4 \cdot 10^6 \text{ Па}$ – для вуглекислого газу.

Іноді відповідь дають в атм. $1 \text{ атм} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$. Тому

$$p_{кр} = \frac{7,4 \cdot 10^6}{1,01 \cdot 10^5} = 73,27 \text{ атм} \approx 73 \text{ атм}.$$

Відповідь: 1) $p_1 = p_{кр} = 7,4 \text{ МПа}$; p_2 – неможливо зрідити при будь-якому тиску; 2) $V_{\max} = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$; 3) $p_{\max} = p_{кр} = 7,4 \text{ МПа}$.

Приклад 105. 1 кмоль кисню займає об'єм $0,056 \text{ м}^3$ при тиску 920 атм. Знайти температуру газу, використовуючи рівняння Ван-дер-Ваальса у зведених величинах.

Дано:

O₂

$$V = 0,056 \text{ м}^3$$

$$\nu = 1 \text{ моль} = 1 \cdot 10^3 \text{ моль}$$

$$p_1 = 920 \text{ атм} = 920 \cdot 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па} =$$

$$= 929,2 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

T ?

Розв'язання

Зведемо рівняння стану реального газу або рівняння Ван-дер-Ваальса в приведених величинах для **одного моля**:

$$\left(\pi + \frac{3}{\omega^2} \right) \cdot (3\omega - 1) = 8\tau,$$

де $\tau = \frac{T}{T_K}$ – зведена температура;

$$\pi = \frac{p}{p_K} \text{ – зведений тиск; } \omega = \frac{V_0}{V_{0K}} \text{ – зведений об'єм.}$$

Нас цікавить температура, тому підставимо в це рівняння зведену температуру:

$$\frac{8T}{T_K} = \left(\pi + \frac{3}{\omega^2} \right) \cdot (3\omega - 1) \Rightarrow T = \frac{T_K}{8} \left(\pi + \frac{3}{\omega^2} \right) \cdot (3\omega - 1).$$

Обчислимо приведені величини $\pi = \frac{p}{p_K}$ – приведений тиск та $\omega = \frac{V_0}{V_{0K}}$ –

приведений об'єм, а потім підставимо їх у формулу для температури.

Для кисню критичний тиск $p_K = 5,07 \cdot 10^6 \text{ Па}$; критична температура

$T_K = 154 \text{ К}$, критичний молярний об'єм $V_{0K} = 3b$, де $b = 3,16 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 / \text{моль}$;

V_0 – об'єм одного моля.

$$\pi = \frac{p}{p_K} = \frac{929,2 \cdot 10^5}{5,07 \cdot 10^6} = 18,327; \quad \omega = \frac{V_0}{V_{0K}} = \frac{0,056}{10^3 \cdot 3 \cdot 3,16 \cdot 10^{-5}} \approx 0,59.$$

Для температури маємо:

$$T = \frac{T_K}{8} \left(\pi + \frac{3}{\omega^2} \right) \cdot (3\omega - 1) = \frac{154}{8} \left(18,327 + \frac{3}{0,59^2} \right) \cdot (3 \cdot 0,59 - 1) = 399,39 \approx 400 \text{ К}.$$

Відповідь: $T = 400 \text{ К}$.

Приклад 106. Знайти, у скільки разів тиск газу більший від його критичного тиску, якщо відомо, що його об'єм і температура вдвічі більші за критичні значення цих величин.

Дано:

O₂

$$\omega = V/V_{0K} = 2$$

для одного моля:

$$\tau = T/T_K = 2$$

$$\pi = p/p_K ?$$

Розв'язання

Рівняння Ван-дер-Ваальса в приведених величинах

$$\left(\pi + \frac{3}{\omega^2} \right) \cdot (3\omega - 1) = 8\tau,$$

де $\tau = \frac{T}{T_K}$ – зведена температура; $\pi = \frac{p}{p_K}$ – зведений тиск; $\omega = \frac{V_0}{V_{0K}}$ – зведений об'єм.

Підставимо в це рівняння зведену температуру та зведений об'єм з умови задачі:

$$\left(\pi + \frac{3}{2^2}\right) \cdot (3 \cdot 2 - 1) = 8 \cdot 2 \Rightarrow \left(\pi + \frac{3}{4}\right) \cdot 5 = 16 \Rightarrow \pi = 2,45 \text{ рази}.$$

Відповідь: $\pi = 2,45 \text{ рази}$.

Властивості пари. Вологість. Рівняння Клапейрона-Клаузіуса

Вказівки до розв'язування задач

1. У діапазоні середніх температур і тисків насичену і ненасичену пару можна розглядати як ідеальний газ та застосовувати до неї всі закони ідеальних газів, зокрема рівняння стану ідеального газу:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT.$$

У випадку насиченої пари об'єм V у цьому рівнянні розглядається не як об'єм всієї посудини, а лише як об'єм пари, що міститься в посудині, і деякої кількості рідини. Зауважимо, що при зміні температури або об'єму насиченої пари змінюється також її маса (внаслідок випаровування або конденсації). Зокрема, при ізотермічній зміні об'єму маса пари змінюється пропорційно об'єму. Отже, густина пари $\rho = \frac{m}{V}$ і її тиск p не змінюються. Тому для насиченої пари рівняння стану зручніше застосовувати в такому вигляді:

$$\rho = \frac{\mu p}{RT}.$$

2. За законом Дальтона тиск повітря, в якому є водяна пара, складається з тиску сухого повітря p_C і тиску пари води p_{II} , тобто атмосферний тиск дорівнює: $p_A = p_C + p_{II}$.

Розв'язування задач на пару принципово нічим не відрізняється від розв'язування задач з теми «Ідеальний газ». Однак, розв'язуючи задачі про пару, яка міститься в стані, близькому до насичення, треба з'ясувати, чи насичена пара, а отже, чи стала її маса при зміні стану.

3. Про вологість повітря можна судити або за величиною парціального тиску пари, що є в повітрі p_{II} або за густиною пари ρ_{II} . Наскільки пара в просторі близька до стану насичення, судять по відносній вологості, яку виражають у відсотках.

З рівняння стану ідеального газу слідує, що відносна вологість дорівнює відношенню парціального тиску водяної пари (абсолютної вологості) до тиску цієї пари в стані насичення:

$$\varphi = \frac{\rho_{\text{п}}}{\rho_{\text{нп}}} \cdot 100\% = \frac{p_{\text{п}}}{p_{\text{нп}}} \cdot 100\% = \frac{m_{\text{п}}}{m_{\text{нп}}} \cdot 100\% .$$

4. При розв'язанні задач з теми «Вологість» слід мати на увазі:

- що тиск і густину насиченої пари при даній температурі можна знайти в таблиці;
- що тиск насиченої пари за температури кипіння рідини дорівнює атмосферному. Наприклад, при температурі кипіння води (100°C) тиск її насиченої пари дорівнює нормальному атмосферному тиску (760 мм рт. ст.);
- якщо відома температура ненасиченої пари (t_1) і її точка роси, то за допомогою таблиць можна визначити абсолютну і відносну вологість повітря при температурі t_1 .

5. Тиск насиченої пари p'_H над вгнутою поверхнею рідини менше, а над опуклою – більше, ніж тиск p_H над плоскою поверхнею. Додатковий тиск:

$$\Delta p_H = p'_H - p_H = \pm \frac{2\sigma \rho_H}{\rho R},$$

де σ – коефіцієнт поверхневого натягу; ρ – густина рідини; ρ_H – густина насиченої пари рідини; R – радіус кривизни поверхні рідини.

6. Залежність тиску насиченої пари p_H від температури виражається рівнянням Клапейрона-Клаузіуса:

$$\frac{dp_H}{dT} = \frac{r_0}{T(V'_H - V'_P)},$$

де $r_0 = \mu r$ – молярна теплота пароутворення, μ – молярна маса, r – питома теплота пароутворення; V'_H та V'_P – молярні об'єми пара і рідини.

7. Тиск насиченої пари над розчином менше, ніж над чистим розчинником. При достатньо малій концентрації розчину відносно зменшення тиску насиченої пари над розчином визначається законом Рауля:

$$\frac{p_0 - p}{p_0} = \frac{v'}{v + v'},$$

де p_0 – тиск насиченої пари над чистим розчинником; p – тиск насиченої пари над розчином; v' – кількість розчиненої речовини; v – кількість рідини.

Приклад 107. У котлі місткістю 10 м^3 міститься 100 кг пари при температурі 250°C . Знайти пружність пари.

Дано: O_2

$$V = 10 \text{ м}^3$$

$$m = 100 \text{ кг}$$

$$t = 250^\circ \text{C} \Rightarrow T = 523 \text{ K}$$

$p?$

Розв'язання

У діапазоні середніх температур і тисків насичену і ненасичену пару можна розглядати як ідеальний газ та застосовувати до неї всі закони ідеальних газів, зокрема рівняння стану ідеального

$$\text{газу: } pV = \frac{m}{\mu} RT.$$

З умови задачі весь об'єм котла заповнений паром. Отже, це насичена (або суха) пара і треба знайти її пружність – так в таблицях називають тиск насиченої пари. З рівняння стану: $p = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{V}$.

Обчислимо з врахуванням, що молярна маса води

$$\mu(H_2O) = (2 + 16) \cdot 10^{-3} \text{ кг / моль}.$$

$$p = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{V} = \frac{100}{18 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{8,31 \cdot 523}{10} = 2,4 \cdot 10^6 \text{ Н / м}^2.$$

Відповідь: $p = 2,4 \cdot 10^6 \text{ Н / м}^2$.

Приклад 108. Яка густина насиченої пари води при температурі 100°C ?

Дано: H_2O

$$t = 100^\circ \text{C} \Rightarrow T = 373 \text{ K}$$

$\rho?$

Розв'язання

Відомо, що при температурі 100°C тиск насиченої пари води $760 \text{ мм рт. ст.} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Н / м}^2$ (оскільки 100°C – це температура кипіння води при тиску 760 мм рт. ст.). З рівняння стану ідеального газу знайдемо густину:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\mu p}{RT}.$$

Обчислимо з врахуванням, що молярна маса води

$$\mu(H_2O) = (2 + 16) \cdot 10^{-3} \text{ кг / моль}; \quad \rho = \frac{\mu p}{RT} = \frac{18 \cdot 10^{-3} \cdot 1,013 \cdot 10^5}{8,31 \cdot 373} \approx 0,6 \text{ кг / м}^3.$$

Відповідь: $\rho = 0,6 \text{ кг / м}^3$.

Приклад 109. Обчислити коли і в скільки разів кількість водяної пари в повітрі більша: пізньої осені після затяжних дощів при температурі 0°C і відносній вологості 98% чи сухого літнього місяця при температурі 30°C і відносній вологості 50%?

Дано: H_2O

$t_1 = 0^\circ\text{C}$

$\varphi_1 = 98\%$

$t_2 = 30^\circ\text{C}$

$\varphi_2 = 50\%$

$\rho_1 ? \quad \rho_2 ? \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} ?$

Розв'язання

Знайдемо кількість водяної пари в 1 м^3 повітря, тобто густину водяної пари осінню та влітку.

Для осені після дощів за формулою для відносної вологості:

$$\varphi_1 = \frac{\rho_1}{\rho_{H1}} \cdot 100\% = 98\% \Rightarrow \frac{\rho_1}{\rho_{H1}} = 0,98 \Rightarrow \rho_1 = 0,98\rho_{H1}.$$

З таблиці для тиску і густини насиченої водяної пари при різних температурах для температури $t_1 = 0^\circ\text{C}$ маємо

$\rho_{H1} = 4,84 \text{ г/м}^3$ – пружність або густина насиченої пари.

Отже, $\rho_1 = 0,98\rho_{H1} = 0,98 \cdot 4,84 = 4,74 \text{ г/м}^3$ – густина повітря восени.

Для літа за формулою для відносної вологості маємо:

$$\varphi_2 = \frac{\rho_2}{\rho_{H2}} \cdot 100\% = 50\% \Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_{H2}} = 0,5 \Rightarrow \rho_2 = 0,5\rho_{H2}.$$

З таблиці для тиску і густини насиченої водяної пари при різних температурах маємо $\rho_2 = 30,8 \text{ г/м}^3$ – пружність або густина насиченої пари. для температури $t_2 = 30^\circ\text{C}$.

Отже, $\rho_2 = 0,5\rho_{H2} = 0,5 \cdot 30,8 = 15,4 \text{ г/м}^3$ – густина повітря влітку. Тобто влітку при заданих умовах кількість водяної пари в повітрі буде більшою. Визначимо, у скільки разів:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{15,4}{4,74} = 3,24 \text{ рази}.$$

Відповідь: $\rho_1 = 4,74 \text{ г/м}^3$; $\rho_2 = 15,4 \text{ г/м}^3$; $\frac{\rho_2}{\rho_1} = 3,24 \text{ рази}$.

Приклад 110. У закритій посудині об'ємом V при температурі T міститься m кг води. Внаслідок нагрівання на ΔT градусів вода випарувалася. Знайти тиск її пари до і після нагрівання.

Дано: H_2O

V

T

m

ΔT

Розв'язання

Запишемо Рівняння стану ідеального газу для стану пари перед нагріванням:

$$p_1(V - V_B) = \frac{M}{\mu} RT,$$

де $(V - V_B)$ – об'єм пари, M – маса пари, μ – молярна маса води. Посудина замкнута, тому пара була насиченою, бо перебувала в динамічній рівновазі з водою. Тому маса насиченої пари:

$$M = \rho_H(V - V_B).$$

Підставимо цей вираз для маси в попереднє рівняння стану, дістанемо формулу для тиску пари перед нагріванням:

$$p_1 = \frac{\rho_H}{\mu} RT.$$

Густину насиченої пари ρ_H для температури T беремо з таблиці для тиску і густини насиченої водяної пари при різних температурах. Для кінцевого стану системи (після випаровування води) маємо:

$$p_2 V = \frac{M+m}{\mu} R(T + \Delta T) \Rightarrow p_2 = \frac{M+m}{\mu V} R(T + \Delta T).$$

Підставимо в формулу для тиску p_2 раніше записаний вираз для маси пари M :

$$p_2 = \frac{\rho_H(V - V_B) + m}{\mu V} R(T + \Delta T).$$

В цю формулу входить об'єм води, запишемо його, врахувавши, що густина води залежить від температури:

$$V_B = \frac{m}{\rho_B} = \frac{m}{\rho_{0B}}(1 + \beta t),$$

де $\rho_B = \frac{\rho_{0B}}{1 + \beta t^\circ}$ – густина води при температурі t° , ρ_{0B} – густина води при 0°C (з таблиць), β – коефіцієнт об'ємного розширення води (з таблиць), $t^\circ \rightarrow T + 273\text{K}$ – температура води перед нагріванням. При розв'язанні не враховувалась залежність густини води від тиску і зміна об'єму посудини при зміні температури.

Приклад 111. У балоні місткістю 10л міститься сухе повітря при температурі 0°C і тиску $p = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$. Яким буде тиск у балоні, якщо в нього влити $3 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$ води і нагріти балон до 100°C ?

Дано: H_2O

$$V = 10\text{л} = 10 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$t_0 = 0^\circ\text{C} \Rightarrow T_0 = 273\text{K}$$

$$p_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$$

$$m = 3 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$$

$$t = 100^\circ\text{C} \Rightarrow T = 373\text{K}$$

$$p?$$

повітря:

Розв'язання

При нагріванні води, яку налили в балон, повітря стає вологим. Згідно з законом Дальтона тиск вологого повітря в балоні дорівнюватиме сумі парціальних тисків сухого повітря p_1 і водяної пари

$$p_2 \text{ при } 100^\circ\text{C}: \quad p = p_1 + p_2.$$

Об'єм при нагріванні сталий – це об'єм балона. Тому за законом Шарля маємо тиск для сухого

$$\frac{p_0}{T_0} = \frac{p_1}{T} \Rightarrow p_1 = \frac{p_0 T}{T_0}.$$

Вважаючи, що вся вода випарувалася, обчислимо парціальний тиск пари з рівняння стану ідеального газу:

$$p_2 = \frac{mRT}{\mu V}.$$

Тоді тиск у балоні:

$$p = p_1 + p_2 = \frac{p_0 T}{T_0} + \frac{mRT}{\mu V}.$$

Обчислимо:

$$p = \frac{p_0 T}{T_0} + \frac{mRT}{\mu V} = \frac{1,013 \cdot 10^5 \cdot 373}{273} + \frac{3 \cdot 10^{-3} \cdot 8,31 \cdot 373}{18 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^{-3}} = 1,9 \cdot 10^5 \text{ Па або } \left(\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}\right).$$

Відповідь: $p = 1,9 \cdot 10^5 \text{ Н / м}^2$.

Приклад 112. Вологе повітря масою $m = 71 \text{ кг}$ займає об'єм $V = 50 \text{ м}^3$ при температурі $T = 293 \text{ К}$ і тиску $p = 120 \text{ кПа}$. Визначити відносну вологість повітря.

Дано:

$$m = 71 \text{ кг}$$

$$V = 50 \text{ м}^3$$

$$T = 293 \text{ К } (20^\circ \text{C})$$

$$p = 120 \text{ кПа} = 120 \cdot 10^3 \text{ Па}$$

φ ?

Розв'язання

Тиск вологого повітря p складається з парціального тиску пари p_1 та парціального тиску сухого повітря p_2 . Для тиску маємо:

$$p = p_1 + p_2.$$

Густина вологого повітря дорівнює сумі густини пари ρ_1 і густини сухого повітря ρ_2 .

Для густини вологого повітря маємо:

$$\rho = \rho_1 + \rho_2.$$

З рівняння стану ідеального газу

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu_1} RT;$$

$$p_2 V = \frac{m_2}{\mu_2} RT$$

визначаємо парціальний тиск пари і парціальний тиск сухого повітря:

$$p_1 = \frac{\rho_1 RT}{\mu_1}; \quad p_2 = \frac{\rho_2 RT}{\mu_2}.$$

Тоді тиск повітря:

$$p = \frac{\rho_1 RT}{\mu_1} + \frac{\rho_2 RT}{\mu_2}.$$

Щоб визначити відносну вологість повітря, треба знайти ρ_1 – абсолютну вологість.

З останньої формули:

$$\frac{\rho_1 RT}{\mu_1} = p - \frac{\rho_2 RT}{\mu_2}. \quad (1)$$

З формули для густини вологого повітря виразимо густину сухого повітря:

$\rho_2 = \rho - \rho_1$ та підставимо її в формулу (1):

$$\frac{\rho_1 RT}{\mu_1} = p - \frac{(\rho - \rho_1) RT}{\mu_2}.$$

Розкриємо дужки та приведемо до спільного знаменника праву частину рівняння, потім перенесемо доданки з шуканою густиною ρ_1 в ліву частину:

$$\frac{\rho_1 RT}{\mu_1} - \frac{\rho_1 RT}{\mu_2} = \frac{p\mu_2 - \rho RT}{\mu_2} \Rightarrow \rho_1 RT \left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 \mu_2} \right) = \frac{p\mu_2 - \rho RT}{\mu_2}.$$

З останньої формули виразимо ρ_1 :

$$\rho_1 = \frac{(p\mu_2 - \rho RT)\mu_1 \mu_2}{\mu_2(\mu_2 - \mu_1)RT} = \frac{(p\mu_2 - \rho RT)\mu_1}{(\mu_2 - \mu_1)RT}.$$

Оскільки густина $\rho = \frac{m}{V}$, після підстановки у попередню формулу маємо:

$$\rho_1 = \frac{\left(p\mu_2 - \frac{m}{V} RT \right) \mu_1}{(\mu_2 - \mu_1)RT},$$

де $\mu_1 = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ – молярна маса водяної пари;

$\mu_2 = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ – молярна маса сухого повітря.

Обчислимо:

$$\rho_1 = \frac{\left(p\mu_2 - \frac{m}{V} RT \right) \mu_1}{(\mu_2 - \mu_1)RT} = \frac{\left(120 \cdot 10^3 \cdot 29 \cdot 10^{-3} - \frac{71 \cdot 8,31 \cdot 293}{50} \right) \cdot 18 \cdot 10^{-3}}{(29 - 18) \cdot 10^{-3} \cdot 8,31 \cdot 293} = 0,015149 \text{ кг/м}^3$$

або

$$\rho_1 = 15,15 \frac{\text{г}}{\text{м}^3}.$$

З таблиці для тиску і густини насиченої водяної пари при різних температурах визначаємо, що для $T = 293K$ ($20^\circ C$) густина насиченої водяної пари

$$\rho_H = 17,3 \frac{г}{м^3}.$$

Відносна вологість повітря:

$$\varphi = \frac{\rho_1}{\rho_H} \cdot 100\% = \frac{15,15}{17,3} \cdot 100\% = 87,6\%.$$

Відповідь: $\varphi = 87,6\%$.

Приклад 113. Скільки молекул ртуті може бути в $1см^3$ повітря в приміщенні, зараженому ртуттю, при температурі $27^\circ C$, якщо тиск насиченої пари ртуті при цій температурі дорівнює $p = 2,7 \cdot 10^{-3} мм рт.ст.$?

Дано:

$$V = 1см^3 = 10^{-6} м^3$$

$$T = 300K \ (t = 27^\circ C)$$

$$p_H = 2,7 \cdot 10^{-3} мм рт.ст. =$$

$$0,36Па$$

$$N?$$

Розв'язання

Кількість молекул в даній масі речовини m не залежить від того насичена пара, чи ненасичена, тобто, від стану речовини, і дорівнює: $N = \frac{m}{\mu} N_A$,

де $\frac{m}{\mu}$ – кількість молей, μ – молярна маса,

$$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} моль^{-1} \text{ – число Авогадро.}$$

Треба знайти масу ртуті, а для цього спочатку треба знайти густину парів ртуті:

$$\rho = \frac{\mu p_H}{RT}; \quad m = \rho V = \frac{\mu p_H V}{RT}.$$

$$\text{Тоді кількість молекул: } N = \frac{m}{\mu} N_A = \frac{\mu p_H V}{RT \mu} N_A = \frac{p_H V N_A}{RT}.$$

$$N = \frac{p_H V N_A}{RT} = \frac{0,36 \cdot 10^{-6} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{8,31 \cdot 300} = 8,7 \cdot 10^{13} \text{ молекул.}$$

Відповідь: $N = 8,7 \cdot 10^{13} \text{ молекул.}$

Приклад 114. Над поверхнею Землі шар повітря площею $S = 3км^2$ і висотою $h = 500м$ має температуру $t_1 = 18^\circ C$ при відносній вологості $\varphi = 80\%$. Знайти масу води, яка випала у вигляді дощу після зниження температури до $t_2 = 12^\circ C$.

Дано:

$$S = 3 \text{ км}^2 = 3 \cdot 10^6 \text{ м}^2$$

$$h = 500 \text{ м}$$

$$t_1 = 18^\circ \text{C}$$

$$\varphi = 80\%$$

$$t_2 = 12^\circ \text{C}$$

$$\Delta m ?$$

Розв'язання

Відносна вологість повітря при температурі t_1

$$\varphi = \frac{\rho_1}{\rho_{H1}} \cdot 100\% = 80\% \text{ або } \varphi = \frac{\rho_1}{\rho_{H1}} = 0,8.$$

Тоді густина пари води при цій температурі:

$$\rho_1 = 0,8 \cdot \rho_{H1}.$$

Густина насиченої пари ρ_{H1} беремо з таблиці тиску і густини насиченої водяної пари при різних температурах. Для $t_1 = 18^\circ \text{C}$ маємо $\rho_{H1} = 15,4 \text{ г/м}^3$. Тоді $\rho_1 = 0,8 \cdot \rho_{H1} = 0,8 \cdot 15,4 = 12,32 \text{ г/м}^3 = 12,32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}^3$.

Дощ випадає, коли пара стає насиченою. З умови задачі дощ випав, коли температура знизилась до $t_2 = 12^\circ \text{C}$. З таблиці знаходимо $\rho_{H2} = 10,7 \text{ г/м}^3$ – густина насиченої пари при $t_2 = 12^\circ \text{C}$.

$$\text{З кожного } 1 \text{ м}^3 \text{ випало дощу } \Delta \rho = \rho_1 - \rho_{2H}.$$

$$\text{Маса води } m = \Delta \rho V = (\rho_1 - \rho_{2H}) V = (\rho_1 - \rho_{2H}) \cdot S \cdot h.$$

Обчислимо масу води, яка випала у вигляді дощу при зниженні температури:

$$m = (\rho_1 - \rho_{2H}) \cdot S \cdot h = (12,32 - 10,7) \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^6 \cdot 500 = 2430000 \text{ кг} \approx 2430 \text{ т}.$$

$$\text{Відповідь: } m = 2430 \text{ т}.$$

Приклад 115. В циліндричній посудині з поршнем, що має об'єм $V = 10 \text{ л}$ і знаходиться в термостаті при $t = -57^\circ \text{C}$, знаходиться $m = 1,9 \text{ г}$ газоподібного аміаку (молярна маса $\mu = 17 \text{ г/моль}$). Скільки аміаку сконденсується при стисненні газу поршнем до об'єму $V_1 = \frac{V}{2}$? Пружність пари p_1 над рідким аміаком при $t = -57^\circ \text{C}$ дорівнює $2,66 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2$.

Дано:

$$\mu = 17 \text{ г/моль};$$

$$V = 10 \text{ л};$$

$$t = -57^\circ \text{C} \Rightarrow T = 216 \text{ К};$$

$$V_1 = V/2$$

$$m = 1,9 \text{ г};$$

$$p_1 = 2,66 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2$$

$$\Delta m ?$$

Розв'язання

$$\text{Після стиснення газу до об'єму } V_1 = \frac{V}{2}$$

деяка частина аміаку сконденсується і над рідким аміаком залишиться насичена пара. За

$$\text{рівнянням Клапейрона} \quad \frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_0 V_0}{T_0}$$

визначимо об'єм цієї частини газу при

$$\text{нормальних умовах: } V_0 = \frac{p_1 V_1 T_0}{T_1 p_0}.$$

Нормальні умови: $T_0 = 273\text{ K}$; $p_0 = 1,01 \cdot 10^5\text{ Па} = 760\text{ мм рт.ст.} = 1\text{ атм.}$

$$V_0 = \frac{p_1 V_1 T_0}{T_1 p_0} = \frac{2,66 \cdot 10^4 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 273}{216 \cdot 1,01 \cdot 10^5} \approx 1,67 \cdot 10^{-3}\text{ м}^3 = 1,67\text{ л.}$$

Визначимо масу газоподібного аміаку, що займає об'єм $V_0 = 1,67\text{ л}$ при нормальних умовах. Для цього складемо пропорцію, пам'ятаючи, що 1 моль будь-якого газу займає об'єм 22,4 л при нормальних умовах:

$$\left. \begin{array}{l} 17\text{ г} \rightarrow 22,4\text{ л} \\ x\text{ г} \rightarrow 1,67\text{ л} \end{array} \right| \Rightarrow x = \frac{17 \cdot 1,67}{22,4} \approx 1,27\text{ г} - \text{це маса газоподібного аміаку, що}$$

відповідає насиченій парі над рідким аміаком, що утворилася після стиснення. Отже, сконденсувалася решта аміаку: $\Delta m = m - x = 1,9 - 1,27 = 0,63\text{ г}$.

Відповідь: $\Delta m = 0,63\text{ г}$.

Приклад 116. Відносна вологість повітря ввечері при 14°C дорівнювала 70%. Вночі температура знизилася до 5°C і випала роса. Скільки водяної пари сконденсувалося при цьому в 1 м^3 повітря?

Дано:

Розв'язання

$$\varphi = 70\%$$

Знайдемо кількість водяної пари, яка знаходилася в 1 м^3

$t_1 = 14^\circ\text{C}$ повітря при $t_1 = 14^\circ\text{C}$ з формули для відносної вологості:

$$\frac{t_1 = 5^\circ\text{C}}{\Delta\rho?} \quad \varphi = \frac{\rho_{\text{пл}}}{\rho_{\text{нпл}}} \cdot 100\% = 70\% \Rightarrow \frac{\rho_{\text{пл}}}{\rho_{\text{нпл}}} = 0,7 \Rightarrow \rho_{\text{пл}} = 0,7 \rho_{\text{нпл}}.$$

Густина насиченої пари $\rho_{\text{нпл}}$ при температурі $t_1 = 14^\circ\text{C}$ візьмемо з таблиці тиску і густини насиченої водяної пари при різних температурах: $\rho_{\text{нпл}} = 12,1\text{ г/м}^3$.

Тепер знайдемо скільки ж пари було в 1 м^3 повітря в нашому випадку при вологості 70%: $\rho_{\text{пл}} = 0,7 \rho_{\text{нпл}} = 0,7 \cdot 12,1 = 8,47\text{ г/м}^3$.

Коли температура знизилася вночі до 5°C частина цієї пари сконденсувалася і випала роса. Пара, яка залишилася, при цьому стала насиченою. Щоб визначити, скільки сконденсувалося пари, знайдемо спочатку з таблиці тиску і густини насиченої водяної пари при різних температурах, яка стала густина насиченої пари при 5°C : $\rho_{\text{нпл}2} = 6,8\text{ г/м}^3$. Вона зменшилася. Це означає, що різниця цих густин і є сконденсована з 1 м^3 пара:

$$\Delta\rho = \rho_{\text{пл}} - \rho_{\text{нпл}2} = 8,47 - 6,8 = 1,67\text{ г/м}^3.$$

Відповідь: $\Delta\rho = 1,67\text{ г/м}^3$.

Приклад 117. Зміна ентропії при випаровуванні одного кіломоля рідини при температурі 50°C дорівнює 133 Дж/К . Пружність насиченої пари при тій самій температурі $92,5\text{ мм рт. ст.}$ Як зміниться тиск насиченої пари цієї рідини при зміні температури від 50°C до 51°C ?

Дано:

$$\nu = 1 \text{ кмоль} = 10^3 \text{ моль}$$

$$t = 50^\circ\text{C} \Rightarrow T = 323\text{K}$$

$$\Delta S = 133 \text{ Дж / К}$$

$$p = \rho gh = 13,5 \cdot 10^3 \cdot 9,8 \cdot 92,5 \cdot 10^{-3} = 1,23 \cdot 10^4 \text{ Н / м}^2$$

$$\Delta t = \Delta T = 1\text{K}$$

$$\Delta p = ?$$

Розв'язання

Насичена пара знаходиться в стані фазової рівноваги з рідиною. Зміна тиску при зміні температури в умовах рівноваги пари і рідини задається рівнянням Клапейрона-Клаузіуса:

$$\frac{\Delta p}{\Delta T} = \frac{q_{1,2}}{T(V'_2 - V'_1)} = \frac{\Delta Q_\mu}{T(V_{2\mu} - V_{1\mu})},$$

де $\Delta Q_\mu = T \Delta S_\mu$ – теплота

випаровування одного кіломоля рідини; $V_{1\mu}$ і $V_{2\mu}$ – об'єми одного кіломоля рідини і пари.

Враховуючи, що об'єм пари набагато більший об'єму рідини $V_{2\mu} \gg V_{1\mu}$, маємо: $V_{2\mu} - V_{1\mu} \approx V_{2\mu}$.

Вважаючи пару ідеальним газом, знаходимо об'єм одного моля пари з Рівняння стану ідеального газу:

$$V_{2\mu} = \frac{RT}{p}.$$

Для одного кіломоля пари:

$$V_{2\mu} = 10^3 \frac{RT}{p}.$$

Підставимо цей вираз у рівняння Клапейрона-Клаузіуса та врахуємо також вираз для теплоти випаровування: $\frac{\Delta p}{\Delta T} = \frac{\Delta S_\mu p}{10^3 RT}$.

Зміна тиску насиченої пари при зміні температури:

$$\Delta p = \frac{\Delta S_\mu p}{10^3 RT} \Delta T.$$

Обчислимо зміну тиску одного кіломоля насиченої пари при зміні температури на 1 градус–Кельвін:

$$\Delta p = \frac{\Delta S_\mu p}{10^3 RT} \Delta T = \frac{133 \cdot 1,23 \cdot 10^4 \cdot 1}{10^3 \cdot 8,31 \cdot 323} = 0,61 \text{ Н / м}^2.$$

Відповідь: $\Delta p = 0,61 \text{ Н / м}^2$.

Приклад 118. Чому дорівнює атмосферний тиск, якщо вода кипить при температурі 95°C . Питомі об'єми води і пари дорівнюють відповідно $1,04 \text{ дм}^3 / \text{кг}$ і $1,67 \text{ м}^3 / \text{кг}$.

Дано:

$$t = 95^{\circ}\text{C} \Rightarrow T = 368\text{K}$$

$$V_r = 1,67\text{м}^3 / \kappa\text{г}$$

$$V_p = 1,04\text{дм}^3 / \kappa\text{г} = 1,04 \cdot 10^{-3} \text{м}^3 / \kappa\text{г}$$

$$p_1 ?$$

Розв'язання

Вода кипить, отже, насичена пара знаходиться в стані фазової рівноваги з рідиною. Зміна тиску при зміні температури при рівновазі пари і рідини задається рівнянням Клапейрона-Клаузіуса:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q_{1,2}}{T(V'_2 - V'_1)} = \frac{q_{1,2}}{T(V_r - V_p)},$$

де $q_{1,2}$ – теплота випаровування одного моля рідини; $V'_1 = V_p$ і $V'_2 = V_r$ – питомі об'єми води і пари; T – температура фазового переходу.

Враховуючи, що об'єм пари набагато більший об'єму рідини $V_r \gg V_p$, маємо: $V_r - V_p \approx V_r$. Тоді рівняння Клапейрона-Клаузіуса прийме вигляд:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q_{1,2}}{TV_r}.$$

З рівняння стану ідеального газу (насичену пару вважаємо ідеальним газом) для одного моля знайдемо V_r :

$$pV_r = RT \Rightarrow V_r = \frac{RT}{p}.$$

Після підстановки виразу для V_r в рівняння Клапейрона-Клаузіуса маємо:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q_{1,2}}{TV_r} = \frac{q_{1,2} \cdot p}{RT^2}.$$

Для того, щоб знайти тиск, треба отримати рівняння Клапейрона-Клаузіуса в інтегральній формі. Для цього розділимо змінні, а потім проінтегруємо отримане рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dT} = \frac{q_{1,2} \cdot p}{RT^2} &\Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{q_{1,2} dT}{RT^2}; \quad \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{q_{1,2} dT}{RT^2} = \frac{q_{1,2}}{R} \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T^2}. \\ \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} &= \frac{q_{1,2}}{R} \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T^2} - \text{братимемо інтеграл від цього виразу.} \end{aligned} \quad (1)$$

Інтеграл від лівої частини – це логарифм натуральний від p ; він означений, тому підставимо верхню і нижню межі інтегрування:

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = \ln p \Big|_{p_1}^{p_2} = \ln p_2 - \ln p_1 = \ln \frac{p_2}{p_1}.$$

Візьмемо інтеграл від правої частини, підставивши межі інтегрування, бо він теж означений:

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T^2} = \frac{T^{-2+1}}{-2+1} \Big|_{T_1}^{T_2} = -\frac{1}{T} \Big|_{T_1}^{T_2} = -\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right) = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}.$$

Підставимо отримані вирази для інтегралів в рівняння (1), отримаємо **рівняння Клапейрона-Клаузіуса в інтегральній формі**:

$$\ln \frac{p_2}{p_1} = \frac{q_{1,2}}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \quad \text{або} \quad \ln p_2 - \ln p_1 = \frac{q_{1,2}}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right),$$

де $q_{1,2} = r \cdot \mu$ – теплота випаровування одного моля води, $r = 22,6 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$ – питома теплота пароутворення; $\mu = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ – маса одного моля води; p_1 – шуканий тиск, при якому температура кипіння води дорівнює T_1 ; також тут враховано, що при кипінні води при 100°C ($T_2 = 373 \text{ K}$) тиск насиченої пари води дорівнює атмосферному тиску $p_2 = 760 \text{ мм рт.ст.}$

Рівняння Клапейрона-Клаузіуса в інтегральній формі зв'язує тиск насиченої пари рідини при двох значеннях температури з теплою фазового переходу (випаровування, чи конденсації).

З цього рівняння для шуканого тиску p_1 маємо:

$$\ln p_1 = \ln p_2 - \frac{r \cdot \mu}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right).$$

Підставимо в це рівняння Клапейрона-Клаузіуса в інтегральній формі числові значення фізичних величин:

$$\ln p_1 = \ln p_2 - \frac{r \cdot \mu}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) = \ln 760 - \frac{22,6 \cdot 10^5 \cdot 18 \cdot 10^{-3}}{8,31} \left(\frac{1}{368} - \frac{1}{373} \right) = 6,455.$$

Отже,

$$\ln p_1 = 6,455.$$

Щоб знайти тиск p_1 , треба пропотенціювати цей вираз:

$$p_1 = e^{\ln p_1} = e^{6,455} = \exp 6,455 = 635,87 \text{ мм рт.ст.} = 84,5 \cdot 10^3 \text{ Па} = 84,5 \text{ кПа} - \text{ тиск, при якому вода кипить при температурі } 95^\circ \text{C}.$$

Зі зменшенням тиску зменшується температура кипіння води – чим вище над рівнем моря, тим менший атмосферний тиск і тим менша температура кипіння.

$$\text{Відповідь: } p_1 = 84,5 \text{ кПа}.$$

Зауваження до задачі № 118

В загальному випадку, у рівнянні Клапейрона-Клаузіуса в диференціальній формі

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\Delta H}{T(V'_2 - V'_1)},$$

або в інтегральній формі

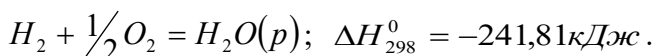
$$\ln p_2 - \ln p_1 = \frac{\Delta H}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right),$$

використовується ΔH – значення теплоти випаровування води як різниця між значеннями стандартної теплоти утворення води рідкої та газоподібної. ΔH – це ентальпія (див. теорію § 3.6 Умови рівноваги фаз в однокомпонентній системі. Рівняння Клапейрона-Клаузіуса. Діаграма станів пункт «питома теплота фазового переходу»).

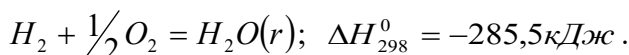
Значення стандартних ентальпій утворення (позначення: $\Delta H_{f,298}^0$) для сполук наводяться у термохімічних довідниках.

Тепловий ефект реакції утворення речовин за стандартних умов – називається **стандартна ентальпія утворення** $\Delta H_{f,298}^0$ або $\Delta H_{утв,298}^0$.

Утворення з простих речовин водяної пари та рідкої води:
рідина:



водяна пара:



Тоді

$$\Delta H_{\text{випаровування}} = \Delta H^0(H_2O(p)) - \Delta H^0(H_2O(r)) = -241,81 - (-285,83) = 44,02 \text{ кДж / моль}.$$

Це значення більше, ніж використане нами у цій задачі. У нас було:

$$q = r \cdot \mu = 22,6 \cdot 10^5 \cdot 18 \cdot 10^{-3} = 40,68 \text{ кДж / моль}.$$

Якщо взяти $\Delta H_{\text{випаровування}} = 44,02 \text{ кДж / моль}$, то отримаємо тиск

$$p_1 = 626,36 \text{ мм рт.ст.} = 83,2 \text{ кПа}.$$

Приклад 119. Розрахувати температуру кипіння води T_1 на висоті 6 км над рівнем моря, де тиск $p_1 = 354$ мм рт. ст.

Дано:

$$p_1 = 354 \text{ мм рт.ст.}$$

Розв'язання

Рівняння Клапейрона-Клаузіуса в інтегральній формі (попередня задача), яке зв'язує тиск насиченої пари рідини при двох значеннях

$$T_1 ?$$

температури з теплою фазового переходу (випаровування, чи конденсації):

$$\ln \frac{p_2}{p_1} = \ln p_2 - \ln p_1 = \frac{\Delta H}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right),$$

або

$$\ln p_2 = \ln p_1 + \frac{\Delta H}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right), \quad (1)$$

де ΔH – значення теплоти випаровування води, яке беремо з термохімічного довідника як різницю між значеннями стандартної теплоти утворення води рідкої та газоподібної:

$$\Delta H = \Delta H_{\text{випар}}^{\text{води}} = \Delta H^0(H_2O(p)) - \Delta H^0(H_2O(r)) = -241,81 - (-285,83) = 44,02 \text{ кДж / моль}.$$

Врахуємо також, що при кипінні води при $T_2 = 373 \text{ K} (100^\circ \text{C})$ тиск насиченої пари води дорівнює атмосферному тиску $p_2 = 1 \text{ атм} = 760 \text{ мм рт.ст.} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

З рівняння Клапейрона-Клаузіуса (1) можна виразити T_1 :

$$\frac{R}{\Delta H} \ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{\Delta H}{RT_2} = \frac{1}{T_1} \Rightarrow T_1 = \frac{1}{\frac{R}{\Delta H} \ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{\Delta H}{RT_2}}.$$

Підставимо дані та знайдемо T_1 (інколи зручніше виконувати проміжні обчислення, не доводячи пошук фізичної величини в символічному вигляді до кінцевої формули, зробимо і так, і так):

$$T_1 = \frac{1}{\frac{R}{\Delta H} \ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{\Delta H}{RT_2}} = \frac{1}{\frac{8,31}{44,02 \cdot 10^3} \ln \frac{760}{354} + \frac{44,02 \cdot 10^3}{8,31 \cdot 373}} = 353,9 \text{ K} \Rightarrow 81^\circ \text{C};$$

$$\ln p_2 = \ln p_1 + \frac{\Delta H}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \Rightarrow \ln 760 = \ln 354 + \frac{44020}{8,31} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{373} \right) \Rightarrow T_1 = 353,9 \text{ K}.$$

Відповідь: $T_1 = 353,9 \text{ K} \Rightarrow 81^\circ \text{C}$.

Приклад 120. Використовуючи рівняння Клапейрона-Клаузіуса і дані таблиці для тиску і густини насиченої пари води при різних температурах знайти питому теплоту випаровування води при температурі 5°C .

Дано:

$$t = 5^\circ \text{C} \Rightarrow T = 278 \text{ K}$$

$$p = 870 \text{ Па}$$

$$r_0 ?$$

Розв'язання

Рівняння Клапейрона-Клаузіуса в диференціальній формі для одного моля насиченої пари:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{r_0}{T(V_{0r} - V_{0p})}, \quad (1)$$

де r_0 – молярна теплота випаровування води; V_{0r} і V_{0p} – молярні об'єми пари та рідини у фазах 1, 2.

Вважаючи, що насичений пар води підкоряється рівнянню стану ідеального газу, для одного моля маємо:

$$V_{0r} = \frac{RT}{p}.$$

Оцінімо величину молярного об'єму пари при температурі та тиску з умови задачі:

$$V_{0r} = \frac{RT}{p} = \frac{8,31 \cdot 278}{870} = 2,66 \text{ м}^3 / \text{моль}.$$

Молярний об'єм рідини, тобто, води:

$$V_{0p} = \frac{\mu}{\rho} = \frac{18 \cdot 10^{-3}}{10^3} = 18 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 / \text{моль}.$$

Отже, $V_{0p} \ll V_{0r}$, бо $18 \cdot 10^{-6} \ll 2,66$.

Тому рівняння (1) можна переписати так:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{r_0 p}{RT^2} \text{ або } \frac{dp}{p} = \frac{r_0}{R} \cdot \frac{dT}{T^2}.$$

Для невеликого інтервала температур $T_2 - T_1$ молярну теплоту пароутворення можна вважати сталою і тоді після інтегрування останнього рівняння (це було зроблено докладно в одній з попередніх задач) отримаємо:

$$\ln \frac{p_2}{p_1} = \frac{r_0}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) = \frac{r_0 (T_2 - T_1)}{RT_1 T_2}.$$

Маємо

$$\ln \frac{p_2}{p_1} = \frac{r_0 (T_2 - T_1)}{RT_1 T_2},$$

звідки

$$r_0 = \frac{RT_1 T_2 \ln \frac{p_2}{p_1}}{T_2 - T_1}, \quad (2)$$

тут p_1 і p_2 – тиск насиченої пари при температурах T_1 і T_2 .

В задачі необхідно знайти питому теплоту пароутворення r при температурі 5°C . Тому для величин T_1 і T_2 можна взяти значення: $t_1 = 4^\circ \text{C} \Rightarrow T_1 = 277 \text{ K}$ і $t_2 = 6^\circ \text{C} \Rightarrow T_2 = 279 \text{ K}$.

З таблиці для тиску і густини насиченої водяної пари при різних температурах маємо відповідно: $p_1 = 811 \text{ Па}$ і $p_2 = 932 \text{ Па}$.

Тоді відношення:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{932}{811} = 1,15.$$

Обчислимо спочатку молярну теплоту пароутворення з формули (2):

$$r_0 = \frac{RT_1T_2 \ln \frac{p_2}{p_1}}{T_2 - T_1} = \frac{8,31 \cdot 277 \cdot 279 \ln 1,15}{(279 - 277)} = 45 \cdot 10^3 \text{ Дж / моль}.$$

Тоді питома теплота пароутворення:

$$r = \frac{r_0}{\mu} = \frac{45 \cdot 10^3}{18 \cdot 10^{-3}} = 2,5 \cdot 10^6 \text{ Дж / кг} = 2,5 \text{ МДж / кг}.$$

Якщо за даними таблиці питомої теплоти пароутворення води при різних температурах побудувати графік залежності $r = f(t)$, то з нього можна побачити, що при $t = 5^\circ\text{C}$ питома теплота пароутворення води $r = 2,48 \text{ МДж / кг}$. Це значення близьке до отриманого при розв'язуванні задачі.

Відповідь: $r = 2,5 \text{ МДж / кг}$.

Приклад 121. Для області температур, в якій питомим об'ємом рідини можна знехтувати порівняно з питомим об'ємом насиченої пари, знайти залежність тиску насиченої пари p_H від температури T . Питому теплоту пароутворення r вважати незалежною від температури.

Дано:

$$\frac{r = \text{const}}{p_H(T)?}$$

Розв'язання

Рівняння Клапейрона-Клаузіуса для кривих фазової рівноваги:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q_{1,2}}{T(V_2 - V_1)},$$

де $q_{1,2} = rm$ – теплота фазового переходу,

r – питома теплота фазового переходу, яка дорівнює кількості теплоти, що поглинається одиницею маси речовини при переході з фази 1 в фазу 2;

V_2 – питомий об'єм пари, V_1 – питомий об'єм води; а $V_2 - V_1 \approx V_2$ за умовою задачі.

Вважаючи пару ідеальним газом, знаходимо об'єм V_2 з рівняння стану ідеального газу:

$$V_2 = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{p}.$$

Рівняння Клапейрона-Клаузіуса набуде вигляду:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{r m}{T V_2} = \frac{r m}{T \cdot \frac{m}{\mu} \frac{RT}{p}} = \frac{r \mu p}{RT^2}.$$

Розділимо змінні та проінтегруємо як неозначений інтеграл:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{p} &= \frac{r \mu}{R} \frac{dT}{T^2} \Rightarrow \int \frac{dp}{p} = \frac{r \mu}{R} \int \frac{dT}{T^2} = -\frac{r \mu}{RT}; \\ \int \frac{dp}{p} &= \ln p + C_1 = \ln p + \ln C_2 = \ln p \cdot C_2. \end{aligned}$$

В останньому виразі сталу інтегрування C_1 можна представити як логарифм натуральний від іншої сталої C_2 . Отже, маємо:

$$\ln p \cdot C_2 = -\frac{r \mu}{RT}.$$

Щоб знайти залежність $p(T)$, треба пропотенціювати цей вираз:

$$\exp(\ln p \cdot C_2) = \exp\left(-\frac{r \mu}{RT}\right) \quad \text{або} \quad \text{той самий вираз} \quad e^{\ln p \cdot C_2} = e^{-\frac{r \mu}{RT}}.$$

Тоді маємо:

$$p \cdot C_2 = \exp\left(-\frac{r \mu}{RT}\right) \Rightarrow p = \frac{1}{C_2} \exp\left(-\frac{r \mu}{RT}\right).$$

Введемо нову сталу $C = \frac{1}{C_2}$ та зауважимо, що тиск p – це тиск насиченої пари, тому позначимо його $p_H(T)$.

Залежність тиску насиченої пари від температури має вигляд:

$$p_H(T) = C \exp\left(-\frac{r \mu}{RT}\right).$$

$$\text{Відповідь: } p_H(T) = C \exp\left(-\frac{r \mu}{RT}\right).$$

2.10.2. Рідини. Поверхневий натяг

Вказівки до розв'язування задач.

1. Відносна зміна об'єму рідини зі зміною тиску визначається формулою: $\frac{\Delta V}{V} = -k\Delta p$, де $k[\text{Па}^{-1}]$ – стисливість. Знак «–» вказує на те, що коли Δp виражається додатною величиною, то ΔV – від'ємною, тобто, при збільшенні тиску об'єм зменшується.

Відносна зміна об'єму рідини при нагріванні: $\frac{\Delta V}{V} = \beta\Delta T$, де $\beta[\text{K}^{-1}]$ – температурний коефіцієнт об'ємного розширення.

2. Поверхневий шар рідини можна порівняти з розтягнутою плівкою, яка намагається скоротитися. Це явище поверхневого натягу. Щоб утримати поверхневу плівку в рівновазі, потрібно до її країв прикласти силу, дотичну до поверхні і перпендикулярну до границі плівки. Це сила поверхневого натягу, яка характеризується **коефіцієнтом поверхневого натягу, що позначається α або σ** : $\alpha = \frac{F}{\ell}$.

Тут ℓ – довжина лінії на поверхні плівки, до якої прикладена сила F . З формули можна визначити величину сили і коефіцієнт поверхневого натягу.

3. Коефіцієнт поверхневого натягу можна також визначити зі співвідношення: $\alpha = \frac{U_{\text{пов}}}{\Delta S}$, де $U_{\text{пов}}$ – вільна енергія або поверхнева енергія поверхневого шару, або робота, яка виконується при збільшенні (зменшенні) площі поверхневого шару рідини на ΔS : $A = U_{\text{пов}} \Delta S$.

Отже, коефіцієнт поверхневого натягу визначається або силою, що припадає на одиницю довжини (розмірність $[\alpha] = \frac{\text{Н}}{\text{м}}$), або величиною енергії одиниці площі поверхні (розмірність $[\alpha] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2}$).

4. Якщо поверхня рідини викривляється, що особливо помітно в капілярах, то сили поверхневого натягу утворюють результуючу силу, направлену перпендикулярно до поверхні, що призводить до виникнення додаткового тиску.

Додатковий тиск, зумовлений кривизною поверхні, визначається формулою Лапласа:

$$\Delta p = p_{\text{л}} = \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

де R_1 і R_2 – радіуси кривизни двох взаємно перпендикулярних перетинів поверхні рідини.

Радіус R вважається додатним, якщо центр кривизни знаходиться всередині рідини (опуклий меніск), і від’ємним, якщо центр кривизни знаходиться поза рідиною (ввігнутий меніск).

5. Величина додаткового тиску p_d , що виникає в капілярах, визначається за формулою для визначення висоти підняття рідини в капілярі:

$$h = \frac{2\alpha \cos \theta}{\rho g r}, \text{ де } r - \text{радіус капіляра, } \rho - \text{густина рідини, } \theta - \text{крайовий кут.}$$

При повному змочуванні $\theta = 0$, при повному незмочуванні $\theta = \pi$.

У випадку повного змочування висота підняття рідини в капілярі:

$$h = \frac{2\alpha}{\rho g r} \Rightarrow \rho g h = \frac{2\alpha}{r}.$$

Ліва частина формули ($\rho g h$) – це гідростатичний тиск стовпчика рідини в капілярі, який повинен зрівноважуватися додатковим тиском, що виникає внаслідок викривлення поверхні, і напрямлений угору у випадку повного змочування:

$$\Delta p = p_d = \frac{2\alpha}{r} - \text{лапласівський додатковий тиск,}$$

де r – радіус кривизни плівки при умові повного змочування або повного незмочування. Додатковий тиск завжди напрямлений до центра кривизни меніска. Отже, в рідинах, які змочують стінки капіляра, додатковий тиск (він напрямлений з боку рідини) зменшує зовнішній тиск, а в незмочуючих рідинах додатковий тиск (направлений всередину рідини) додається до зовнішнього тиску.

6. Додатковий тиск існує не тільки в капілярах, а всюди, де викривляється поверхневий шар рідини. Наприклад, у бульбашках, краплинах, де він додається до зовнішнього тиску і напрямлений всередину рідини, чи бульбашки. За r беруть радіус бульбашки, чи краплини.

7. У більшості задач, де розглядається явище поверхневого натягу, обчислюють саме додатковий тиск, що виникає над поверхнею рідини: при визначенні висоти піднімання (опускання) рідини в капілярах, при визначенні сил зчеплення, при вивченні явищ в замкнених об’ємах, що оточені викривленою поверхнею рідини (наприклад, в об’ємі бульбашки повітря всередині рідини, в мильній бульбашці).

8. Якщо в бульбашці є газ, то тиск його складається із суми тисків, що обчислюються за рівнянням стану ідеального газу і рівнянням додаткового тиску Лапласа, зумовленого викривленням поверхні.

Додатковий тиск у бульбашці, що міститься в рідині, дорівнює

$$\Delta p = p_d = \frac{2\alpha}{r}, \text{ де } r - \text{радіус бульбашки.}$$

У мильній бульбашці додатковий тиск у два рази більший:
 $\Delta p = p_s = \frac{4\alpha}{r}$, тому що мильна плівка, яка утворює бульбашку, має дві поверхні – зовнішню та внутрішню.

9. Тиск насиченої пари p'_H над ввігнутою поверхнею рідини менше, а над опуклою – більше, ніж тиск p_H над плоскою поверхнею. Додатковий тиск:

$\Delta p_H = p'_H - p_H = \pm \frac{2\sigma \rho_H}{\rho R}$, де σ – коефіцієнт поверхневого натягу; ρ – густина рідини; ρ_H – густина насиченої пари рідини; R – радіус кривизни поверхні рідини.

Приклад 122. Знайти густину морської води на глибині 5 км, якщо в поверхневих шарах її густина $\rho = 1030 \text{ кг/м}^3$. Середнє значення коефіцієнта стиску води $k = 4,8 \cdot 10^{-5} \text{ атм}^{-1}$. Вважати, що середня густина стовпа води наближено дорівнює густині води в поверхневому шарі.

Дано:

$$\rho_1 = 1030 \text{ кг/м}^3$$

$$h = 5 \text{ км} = 5 \cdot 10^3 \text{ м}$$

$$k = 4,8 \cdot 10^{-5} \text{ атм}^{-1} = \frac{4,8 \cdot 10^{-5} \text{ атм}^{-1}}{1,013 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2}$$

$$\rho_2 ?$$

Розв'язання

Із збільшенням глибини густина води збільшуватиметься, оскільки вода буде під більшим тиском, ніж на поверхні. Тому маса рідини m на глибині займатиме менший об'єм, ніж на поверхні. Зміна об'єму зі зміною тиску

виражається формулою: $\frac{\Delta V}{V} = -k \Delta p$.

З іншої сторони, зміна густини зі зміною тиску виражається таким

$$\text{рівнянням: } \frac{\Delta V}{V} = \frac{V_2 - V_1}{V_1} = \frac{\frac{m}{\rho_2} - \frac{m}{\rho_1}}{\frac{m}{\rho_1}} = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2} = -k \Delta p. \text{ Отже, } \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2} = -k \Delta p$$

$$\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2} = -k \Delta p \Rightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 = -k \Delta p \Rightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2} = 1 - k \Delta p.$$

З останнього рівняння знайдемо густину води на глибині: $\rho_2 = \frac{\rho_1}{1 - k \Delta p}$.

Підставимо в цю формулу значення зміни тиску $\Delta p = \rho_1 g h$, що дорівнює тиску стовпа рідини висотою h , матимемо для густини: $\rho_2 = \frac{\rho_1}{1 - k\rho_1 g h}$.

Підставимо числові значення і обчислимо:

$$\rho_2 = \frac{\rho_1}{1 - k\rho_1 g h} = \frac{1030}{1 - \frac{4,8 \cdot 10^{-5} \cdot 1030 \cdot 9,8 \cdot 5 \cdot 10^3}{1,013 \cdot 10^5}} = 1055 \text{ кг/м}^3.$$

Відповідь: $\rho_2 = 1055 \text{ кг/м}^3$.

Приклад 123. Яку силу потрібно прикласти до горизонтального алюмінієвого кільця висотою 15 см, щоб відірвати його від поверхні води? Внутрішній діаметр кільця 40 мм, зовнішній – 43 мм. густина алюмінію $\rho = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. Коефіцієнт поверхневого натягу води $\sigma = 72,6 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м}$. Яку частину від знайденої сили становлять сили поверхневого натягу?

Дано:

$$\rho = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$$

$$h = 15 \text{ мм} = 15 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$d_1 = 40 \text{ мм} = 40 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$d_2 = 43 \text{ мм} = 46 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$F? \quad \frac{F_2}{F}?$$

Розв'язання

Щоб відірвати кільце від поверхні води, до нього треба прикласти силу, що дорівнює сумі ваги кільця та силі поверхневого натягу:

$$F = F_1 + F_2.$$

Вага кільця: $F_1 = mg = \rho V g$, де V – об'єм кільця, який можна знайти віднявши від об'єму більшого циліндра висотою h об'єм внутрішнього меншого циліндра:

$$V = \frac{\pi}{4} (d_2^2 - d_1^2) h.$$

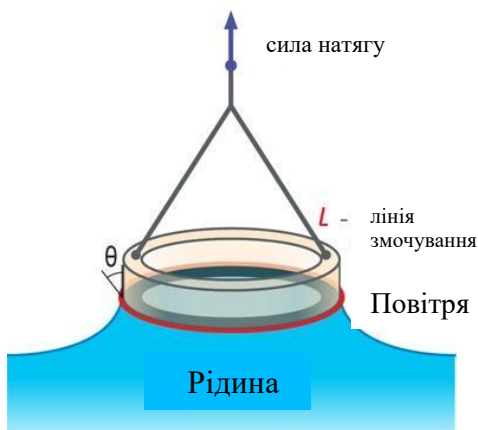
Тоді вага кільця:

$$F_1 = \rho V g = \frac{\pi}{4} (d_2^2 - d_1^2) \rho g h$$

Знайдемо силу поверхневого натягу. Якщо кільце відірвати від води, поверхнева плівка розірветься по зовнішньому та внутрішньому колах кільця, тому сила поверхневого натягу:

$$F_2 = \pi d_1 \alpha + \pi d_2 \alpha = \pi \alpha (d_1 + d_2),$$

де πd_1 і πd_2 – довжина границі, що обмежує водяну плівку по внутрішньому та зовнішньому діаметру кільця;



$\alpha = 72,6 \cdot 10^{-3} \text{ Н / м}$ – коефіцієнт поверхневого натягу води. Знайдемо числові значення окремо для ваги кільця та сили поверхневого натягу:

$$F_1 = \frac{\pi}{4} (d_2^2 - d_1^2) \rho g h = \frac{3,14}{4} \left((43 \cdot 10^{-3})^2 - (40 \cdot 10^{-3})^2 \right) \cdot 2,7 \cdot 10^3 \cdot 9,8 \cdot 15 \cdot 10^{-3} = 77,58 \cdot 10^{-3} \text{ Н}$$

$$, F_2 = \pi \alpha (d_1 + d_2) = 3,14 \cdot 72,6 \cdot 10^{-3} \cdot (40 + 43) \cdot 10^{-3} = 19,6 \cdot 10^{-3} \text{ Н} = 18,92 \text{ мН} .$$

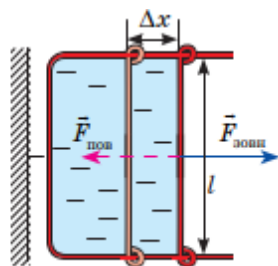
$$\text{Тоді } F = F_1 + F_2 = 77,58 \cdot 10^{-3} + 18,92 \cdot 10^{-3} = 96,5 \cdot 10^{-3} = 96,5 \text{ мН} .$$

Знайдемо, яку частку від загальної сили становлять сили поверхневого натягу:

$$\frac{F_2}{F} = \frac{18,92 \text{ мН}}{77,58 \text{ мН}} \cdot 100\% = 24,4\% .$$

$$\text{Відповідь: } F = 77,58 \text{ мН} ; \frac{F_2}{F} = 24,4\% .$$

Приклад 124. Контур з дроту має рухому сторону довжиною $\ell = 20 \text{ см}$. Уявимо, що він розташований не горизонтально, як на рисунку, а вертикально – рухомою стороною вниз. До цієї рухомої сторони підвішена шалька для тягаря, який діє на рухому сторону з силою $F_{\text{зовн}}$. Визначити коефіцієнт поверхневого натягу мильної плівки, якщо після занурення контура в мильний розчин плівка витримує на шальці тягар $F_{\text{зовн}} = 2 \text{ зс}$.



Дано:

$$F_{\text{зовн}} = 2 \text{ зс} = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8 \text{ Н}$$

$$\ell = 20 \text{ см} = 20 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$\alpha ?$

Розв'язання

У рівновазі, коли рухома сторона рамки перестає ковзати вниз під вагою тягарця, вага тягаря повинна дорівнювати силі поверхневого натягу $F_{\text{пов}} = F_1$, прикладеної до рухомої сторони рамки зі сторони мильної плівки: $F_{\text{зовн}} = F_1 = 2\alpha\ell$. Коефіцієнт 2 показує, що мильна плівка має два поверхневі шари – з одного боку і з іншого.

$$\text{Звідси: } \alpha = \frac{F_{\text{зовн}}}{2\ell} .$$

Після підстановки числових значень маємо:

$$\alpha = \frac{F_{\text{зовн}}}{2\ell} = \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8}{2 \cdot 20 \cdot 10^{-2}} = 4,9 \cdot 10^{-2} \text{ Н / м} .$$

$$\text{Відповідь: } \alpha = 4,9 \cdot 10^{-2} \text{ Н / м} .$$

Приклад 125. Вода витікає краплинами з посудини через вертикальну трубку внутрішнім діаметром $d = 3 \text{ мм}$. При охолодженні води від $t_1 = 100^\circ \text{C}$ до $t_2 = 20^\circ \text{C}$ маса кожної краплини змінилась на $\Delta m = 13,5 \cdot 10^{-6} \text{ кг}$. Знаючи

коефіцієнт поверхневого натягу води при 20°C $\alpha = 73\text{ мН/м}$, знайти коефіцієнт поверхневого натягу води при 100°C . Діаметр краплини в момент відриву вважати рівним внутрішньому діаметру трубки.

Дано:

$$d = 3\text{ мм} = 3 \cdot 10^{-3}\text{ м}$$

$$t_1 = 100^{\circ}\text{C} \quad t_2 = 20^{\circ}\text{C}$$

$$\Delta m = 13,5 \cdot 10^{-6}\text{ кг}$$

$$\alpha_2 = 73\text{ мН/м} = 73 \cdot 10^{-3}\text{ Н/м}$$

$$\alpha_1 ?$$

Розв'язання

Крапля в момент відриву від трубки своєю вагою повинна розірвати поверхневу плівку шийки довжиною

$$\ell = \pi d,$$

де d – діаметр краплини.

Вага краплини

$$P = mg.$$

Сила поверхневого натягу

$$f_{\text{нов}} = \alpha \ell = \alpha \pi d.$$

В момент відриву ці дві сили рівні: $f_{\text{нов}} = P \Rightarrow \alpha \pi d = mg$.

Запишемо це рівняння для двох температур та віднімемо, щоб перейти до різниці мас краплин, яка дана в умові задачі:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_2 \pi d &= m_2 g - \text{при } 20^{\circ}\text{C} \\ \alpha_1 \pi d &= m_1 g - \text{при } 100^{\circ}\text{C} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (\alpha_2 - \alpha_1) \pi d = (m_2 - m_1) g.$$

$$\text{Отже, маємо: } (\alpha_2 - \alpha_1) \pi d = \Delta m g \Rightarrow \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\Delta m g}{\pi d}.$$

З останнього рівняння знайдемо α_1 при температурі $t_1 = 100^{\circ}\text{C}$:

$$\alpha_1 = \alpha_2 - \frac{\Delta m g}{\pi d}.$$

Обчислимо:

$$\alpha_1 = \alpha_2 - \frac{\Delta m g}{\pi d} = 73 \cdot 10^{-3} - \frac{13,5 \cdot 10^{-6} \cdot 9,8}{3,14 \cdot 3 \cdot 10^{-3}} = 0,059 = 59\text{ мН/м}.$$

Відповідь: $\alpha_1 = 59\text{ мН/м}$.

Приклад 126. Яку роботу проти сил поверхневого натягу треба виконати, щоб розбити сферичну краплю ртуті радіусом 3 мм на дві однакові краплі?

Дано:

$$R = 3\text{ мм} = 3 \cdot 10^{-3}\text{ м}$$

$$\sigma = \alpha = 0,5\text{ Н/м}$$

$$A ?$$

Розв'язання

Робота, яка виконується при збільшенні або зменшенні площі поверхневого шару рідини на ΔS , визначається зміною вільної енергії поверхневого шару: $A = \Delta U = \sigma \Delta S$.

Коли краплі зливаються в одну, то зменшення вільної енергії поверхневого шару визначається роботою, яка виконується при його скороченні. Коли одна

крапля розбивається на дві, то загальна площа поверхні краплин збільшується порівняно з площею однієї краплини, тому і вільна енергія збільшується.

При цьому збільшення вільної енергії дорівнює роботі проти сил поверхневого натягу: $A = \sigma \Delta S$.

Визначимо зміну площі поверхні при розбиванні краплини на дві: $\Delta S = S_2 - S_1$,

де $S_1 = 4\pi R^2$ – площа поверхні однієї краплі; $S_2 = 2 \cdot 4\pi r^2$ – сумарна площа поверхні двох менших краплин, де r – радіус меншої краплини.

Тоді робота по розбиванню краплі ртуті:

$$A = 4\sigma\pi(2r^2 - R^2).$$

Виразимо радіус меншої краплі через відомий радіус великої краплі. Рідина зберігає свій об'єм, тому об'єм двох утворених краплин дорівнює об'єму однієї краплі:

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3; \quad V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Після скорочення з цієї формули знайдемо радіус малої краплини: $r = \frac{R}{\sqrt[3]{2}}$.

Підставимо цей вираз в формулу для роботи:

$$A = 4\sigma\pi(2r^2 - R^2) = 4\sigma\pi\left(\frac{2R^2}{\sqrt[3]{4}} - R^2\right) = 4\sigma\pi R^2(\sqrt[3]{2} - 1).$$

Обчислимо роботу:

$$A = 4\sigma\pi R^2(\sqrt[3]{2} - 1) = 4 \cdot 0,5 \cdot 3,14 \cdot (3 \cdot 10^{-3})^2 (\sqrt[3]{2} - 1) \approx 0,0000147 = 1,47 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}$$

Відповідь: $A = 1,47 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}$.

Приклад 127. На скільки нагріється крапля ртуті в результаті злиття двох крапель радіусом 1мм кожна?

Дано:

$$R_1 = 1\text{мм} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$c_p = 138 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}); \quad \sigma = \alpha = 0,5 \text{ Н}/\text{м};$$

$$\rho = 13,6 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$$

ΔT ?

Розв'язання

Енергія краплі ртуті складається з двох частин – поверхневої і об'ємної. Будемо вважати, що процес злиття адіабатичний і зовнішні сили не виконують роботи над краплями.

Тоді при злитті площа їх поверхні зменшується, що призводить до переходу поверхневої енергії в об'ємну (внутрішню) енергію теплового руху і крапля, що утворюється, нагрівається.

Зміна поверхневої енергії: $\Delta U = \sigma \Delta S$, де ΔS – зміна площі поверхні, σ – коефіцієнт поверхневого натягу.

Збільшення внутрішньої енергії: $\Delta U = mc_p \Delta T$, де c_p – питома теплоємність при постійному тиску, яку беремо з таблиць; m – маса ртуті.

Прирівняємо вирази для поверхневої і внутрішньої енергії та знайдемо зміну температури:

$$\sigma \Delta S = mc_p \Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{\sigma \Delta S}{mc_p}.$$

Знайдемо зміну площі поверхні при злитті крапель: $\Delta S = 2S_1 - S_2$, де $2S_1$ – площа поверхні малих крапель, S_2 – площа поверхні великої краплі.

Для площі поверхні, відповідно, маємо: $S_1 = 4\pi R_1^2$; $S_2 = 4\pi R_2^2$, де R_2 – радіус великої краплі.

Радіус R_2 знаходимо з умови рівності мас ртуті до злиття і після:

$$2 \cdot \frac{4}{3} \pi R_1^3 \rho = \frac{4}{3} \pi R_2^3 \rho,$$

тут використана формула $m = \rho V$, де ρ – густина ртуті.

З цієї рівності для радіуса великої краплі: $R_2 = \sqrt[3]{2} R_1$.

Повернемося до формули зміни площі: $\Delta S = 2S_1 - S_2$. Підставимо в неї площі поверхонь з врахуванням отриманого радіуса R_2 через R_1 :

$$\Delta S = 2S_1 - S_2 = 2 \cdot 4\pi R_1^2 - 4\pi (\sqrt[3]{2} R_1)^2 = 4\pi R_1^2 (2 - \sqrt[3]{4}).$$

У формулу для зміни температури входить маса ртуті. Знайдемо її:

$$m = 2 \cdot \frac{4}{3} \pi R_1^3 \rho.$$

Отриманий вираз для ΔS і m підставимо у формулу для ΔT :

$$\Delta T = \frac{\sigma \Delta S}{mc_p} = \frac{4\pi R_1^2 (2 - \sqrt[3]{4}) \sigma}{2 \cdot \frac{4}{3} \pi R_1^3 \rho \cdot c_p} = \frac{3 \cdot (2 - \sqrt[3]{4}) \sigma}{2 \rho R_1 c_p}.$$

Обчислимо на скільки зросла температура ртуті після злиття крапель:

$$\Delta T = \frac{3 \cdot (2 - \sqrt[3]{4}) \sigma}{2 \rho R_1 c_p} = \frac{3 \cdot (2 - \sqrt[3]{4}) \cdot 0,5}{2 \cdot 13,6 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} \cdot 138} \approx 0,0001648 = 1,65 \cdot 10^{-4} \text{ K}.$$

Відповідь: $\Delta T = 1,65 \cdot 10^{-4} \text{ K}$.

Приклад 128. Під час плавлення вертикально підвішеної свинцевої дротини діаметром 1 мм утворилося 20 крапель свинцю. На скільки скоротилася дротина? Коефіцієнт поверхневого натягу рідкого свинцю $\sigma = \alpha = 0,47 \text{ Н/м}$.

Розв'язання

Дано:

$$d = 1\text{мм} = 1 \cdot 10^{-3}\text{ м}$$

$$n = 20$$

$$\sigma = 0,47\text{ Н / м}$$

$$\Delta\ell?$$

Крапля в момент відриву від дротини своєю вагою повинна розірвати поверхневу свинцеву плівку шийки довжиною πd , де d – діаметр дротини. Вважаємо, що в момент відриву діаметр шийки краплі дорівнює діаметру дротини.

Вага краплини $P = mg$.

Сила поверхневого натягу $f_{\text{нов}} = \sigma \pi d$.

В момент відриву ці дві сили рівні: $f_{\text{нов}} = P \Rightarrow \sigma \pi d = mg$.

Тоді маса однієї краплини: $m = \frac{\sigma \pi d}{g}$.

Таких краплин було $n = 20$ крапель свинцю, тобто маса свинцю, що розплавився: $\Delta M = \frac{n \sigma \pi d}{g}$.

Це відповідає відрізку циліндричної дротини $\Delta\ell$, об'єм якого $\Delta V = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \Delta\ell$.

Виразимо масу циліндричної дротини, що розплавилася через густину і об'єм:

$$\Delta M = \rho \Delta V = \rho \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \Delta\ell.$$

$$\text{Прирівняємо ці два вирази для } \Delta M: \rho \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \Delta\ell = \frac{n \sigma \pi d}{g}.$$

$$\text{З останнього виразу знайдемо на скільки скоротилася дротина: } \Delta\ell = \frac{4 \sigma n}{g \rho d}.$$

$$\text{Обчислимо: } \Delta\ell = \frac{4 \sigma n}{g \rho d} = \frac{4 \cdot 0,47 \cdot 20}{9,8 \cdot 11,3 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^{-3}} = 0,3\text{ м}.$$

Тут $\rho = 11,3 \cdot 10^3 \text{ кг / м}^3$ – густина свинцю.

Відповідь: $\Delta\ell = 0,3\text{ м}$.

Приклад 129. Визначити тиск повітря (в мм рт. ст.) в повітряній бульбашці діаметром $d = 0,01\text{мм}$, що знаходиться на глибині $h = 20\text{см}$ під поверхнею води. Зовнішній тиск $p_1 = 765\text{мм рт. ст.}$

Дано:

$$d = 0,01 \text{ мм} = 0,01 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$h = 20 \text{ см} = 20 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$p_1 = 765 \text{ мм рт.ст.} = 1,02 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

$$p_2 ?$$

Розв'язання

Під час рівноваги тиск повітря в бульбашці дорівнює сумі зовнішнього тиску, тобто атмосферному тиску, тиску стовпа рідини висотою $h = 20 \text{ см}$ і надлишковому тиску всередині бульбашки через її викривленої

поверхні. Отже, тиск повітря в бульбашці:

$$p_2 = p_1 + \rho gh + \frac{4\alpha}{d},$$

де ρgh – гідростатичний тиск або тиск стовпа рідини, $\frac{4\alpha}{d}$ – додатковий лапласівський тиск всередині бульбашки.

Обчислимо:

$$p_2 = p_1 + \rho gh + \frac{4\alpha}{d} = 1,02 \cdot 10^5 + 10^3 \cdot 9,8 \cdot 20 \cdot 10^{-2} + \frac{4 \cdot 73 \cdot 10^{-3}}{0,01 \cdot 10^{-3}} = 133134,5 \text{ Па},$$

тут $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$ – густина води, $\alpha = 73 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м}$ – коефіцієнт поверхневого натягу води.

Переведемо одиниці виміру тиску Па в мм рт. ст.:

$$\begin{aligned} 1,331345 \cdot 10^5 \text{ Па} &\rightarrow p_2 \text{ мм рт.ст.} \\ 1,013 \cdot 10^5 \text{ Па} &\rightarrow 760 \text{ мм рт.ст.} \end{aligned} \Rightarrow$$

$$p_2 = \frac{1,331345 \cdot 10^5 \cdot 760}{1,013 \cdot 10^5} \approx 998,84 \approx 999 \text{ мм рт.ст.}$$

Відповідь: $p_2 = 999 \text{ мм рт.ст.}$

Приклад 130. Комаха водомір бігає по поверхні води. Знайти вагу водоміра, якщо відомо, що під кожною з шести лапок комахи утворюється прогин у вигляді півсфери з радіусом 0,1 мм.

Дано:

$$n = 6$$

$$R = 0,1 \text{ мм} = 10^{-4} \text{ м}$$

$$\sigma = 0,073 \text{ Н/м}$$

$$P_B ?$$

Розв'язання

Тиск лапок водоміра на поверхню води врівноважується поверхневим тиском Лапласа, який виникає при викривленні поверхні рідини:

$$P_B = n \cdot p_L \cdot S, \quad (1)$$

де P_B – вага водоміра, S – площа діаметрального перетину на півсфері, p_L – тиск Лапласа, $p_L \cdot S$ – сила поверхневого натягу в одній напівсфері.

Додатковий лапласівський тиск $p_L = \frac{2\sigma}{R}$; площа діаметрального перетину півсфери: $S = \pi R^2$. Підставимо ці дві формули в формулу (1) для ваги водоміра:

$$P_B = n \cdot p_L \cdot S = 2\pi R \sigma n.$$

Обчислимо: $P_B = 2\pi R \sigma n = 2 \cdot 3,14 \cdot 10^{-4} \cdot 0,073 \cdot 6 = 2,75 \cdot 10^{-4} \text{ Н}.$

Відповідь: $P_B = 2,75 \cdot 10^{-4} \text{ Н}.$

Приклад 131. В посудину з ртуттю опущено відкритий капіляр, внутрішній діаметр якого $d = 3 \text{ мм}$. Різниця рівнів ртуті в посудині і в капілярі $h = 3,7 \text{ мм}$. Чому дорівнює радіус кривизни ртутного меніска в капілярі та кут змочування?

Дано:

$$d = 3 \text{ мм} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

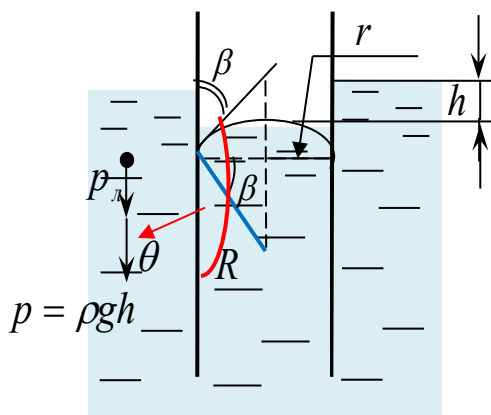
$$h = 3,7 \text{ мм} = 3,7 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$\sigma = 0,5 \text{ Н/м}$$

$$\rho = 13600 \text{ кг/м}^3$$

$$R? \quad \theta?$$

Розв'язання



У випадку незмочуючої рідини – у капілярах рідина опускається по відношенню до рівня вільної поверхні на h . Це зумовлено додатковим лапласівським тиском, який направлений до центру кривизни меніска, тобто вниз у випадку незмочуючої рідини.

На рисунку явище незмочування показано в капілярі. Ззовні біля стінок капіляра воно теж є. На рисунку: θ – кут змочування (крайовий кут); R – радіус кривизни меніска; r – радіус капіляра.

Виразимо радіус кривизни меніска через радіус капіляра:

$$r = R \cos \beta \Rightarrow R = \frac{r}{\cos \beta}.$$

З рисунка видно, що $\beta = 180^\circ - \theta$; $\cos \beta = \cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$.

Тоді радіус кривизни меніска можна виразити через крайовий кут:

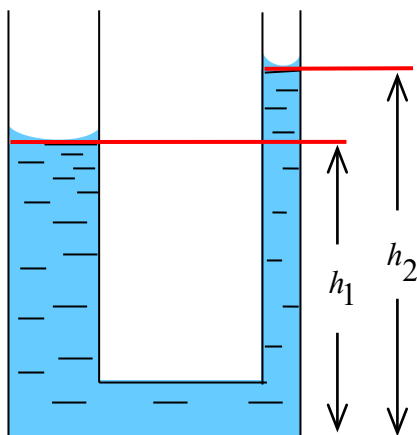
$$R = -\frac{r}{\cos \theta}. \quad (1)$$

Крайовий кут для незмочуючої рідини $> 90^\circ$, тому косинус буде від'ємним, а радіус, зрозуміло, додатним.

З умови рівноваги рідини в капілярі і посудині отримаємо вираз для опускання рідини в капілярі; врахуємо, що до звичайного гідростатичного тиску додається капілярний або лапласівський тиск: $\rho gh + \frac{2\sigma}{R} = 0$ – умова рівноваги.

Для незмочуючої рідини лапласівський тиск додатний (для змочуючої – від’ємний).

З цієї умови рівноваги, підставивши вираз для радіуса кривизни меніска для висоти опускання рідини в капілярі маємо:



$$\rho gh = -\frac{2\sigma}{-(r/\cos\theta)} = \frac{2\sigma \cos\theta}{r} \Rightarrow h = \frac{2\sigma \cos\theta}{\rho gr} = \frac{4\sigma \cos\theta}{\rho gd}.$$

З цієї формули можна знайти крайовий кут, а потім за формулою (1) – радіус кривизни меніска. Знайдемо радіус кривизни меніска R з умови рівноваги:

$$R = -\frac{2\sigma}{\rho gh}.$$

$$R = \left| -\frac{2\sigma}{\rho gh} \right| = \frac{2 \cdot 0,5}{13600 \cdot 9,8 \cdot 3,7 \cdot 10^{-3}} = 2,02 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 2,02 \text{ мм}.$$

Крайовий кут знайдемо з формули (1): $\cos\theta = -r/R = -d/2R$.

$$\text{Обчислимо: } \cos\theta = -d/2R = -\frac{3 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 2,02 \cdot 10^{-3}} = -0,74257$$

Тоді крайовий кут $\theta = \arccos(-0,74257) = 138^\circ$.

Відповідь: $R = 2,02 \text{ мм}$; $\theta = 138^\circ$.

Приклад 132. Чому дорівнює різниця рівнів води в двох сполучених капілярах, діаметри яких 3 і 1 мм?

Дано:

$$d_1 = 3 \text{ мм} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$d_2 = 1 \text{ мм} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$\sigma = 0,073 \text{ Н/м}$$

Δh ?

Розв’язання

Умова рівноваги рідини у будь-яких сполучених посудинах полягає в тому, що тиски в обох посудинах у місці сполучення однакові. У сполучених же капілярах до звичайного гідростатичного тиску $p = \rho gh$ додається ще капілярний або додатковий

лапласівський тиск: для змочуючої рідини він від’ємний, для незмочуючої – додатний.

Отже, тиск в широкій трубці (1):

$$p_1 = \rho g h_1 - \frac{4\sigma}{d_1},$$

а у вузькій трубці (2):

$$p_2 = \rho g h_2 - \frac{4\sigma}{d_2}.$$

Вважаємо, що крайовий кут $\theta = 0$.

Оскільки $p_1 = p_2 \Rightarrow \rho g h_1 - \frac{4\sigma}{d_1} = \rho g h_2 - \frac{4\sigma}{d_2} \Rightarrow \Delta h = h_2 - h_1 = \frac{4\sigma}{\rho g} \left(\frac{d_1 - d_2}{d_1 d_2} \right)$.

Обчислимо різницю рівнів води:

$$\Delta h = \frac{4\sigma}{\rho g} \left(\frac{d_1 - d_2}{d_1 d_2} \right) = \frac{4 \cdot 0,073}{10^3 \cdot 9,8} \left(\frac{3 \cdot 10^{-3} - 1 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^{-3}} \right) \approx 2 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 2 \text{ см}.$$

Відповідь: $\Delta h = 2 \text{ см}$.

Приклад 133. Довга капілярна трубка, відкрита з обох кінців, радіусом 1 мм наповнена водою і закріплена вертикально. Визначити висоту стовпчика води, що залишилася в капілярі. Товщиною стінок капіляра знехтувати.

Дано:

$$r = 1 \text{ мм} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$$

$$\sigma = 0,073 \text{ Н/м}$$

$h?$

Розв'язання

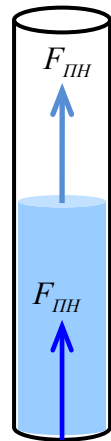
На стовп води в капілярній трубці діє сила тяжіння mg та сили поверхневого натягу у нижньому та верхньому менісках. Тобто, стовп води утримуватиметься двома менісками – нижнім і верхнім (див. рис.), кожний з яких спричинятиме на стовп води додатковий тиск

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r}, \text{ напрямлений вертикально вгору.}$$

При умові рівноваги гідростатичний тиск стовпчика води в капілярі дорівнює сумі додаткових тисків верхнього і нижнього менісків:

$$\rho g h = 2 \cdot \frac{2\sigma}{r}. \quad (1)$$

[Отримаємо цю формулу. Умова рівноваги стовпчика води у скалярній формі (вісь ОУ напрямлена вертикально вгору): $2F_{\text{пн}} - mg = 0$. Сила поверхневого натягу: $F_{\text{пн}} = \sigma \ell = \sigma \cdot 2\pi r$. Сила тяжіння, що діє на стовпчик рідини: $mg = \rho V g = \rho g \pi r^2 h$. Тут $V = \pi r^2 h$ – об'єм циліндричного стовпчика



води. Підставимо вираз для F_{III} і сили тяжіння в умову рівноваги:

$$2F_{\text{III}} - mg = 0 \Rightarrow 2 \cdot \sigma \cdot 2\pi r = \rho g \pi r^2 h \Rightarrow 2 \cdot \frac{2\sigma}{r} = \rho g h \quad \text{— це і є вираз (1)].}$$

Отже, маємо з (1) висоту стовпчика води, що не вилилася з капіляра: $h = \frac{4\sigma}{\rho g r}$.

Обчислимо: $h = \frac{4\sigma}{\rho g r} = \frac{4 \cdot 0,073}{10^3 \cdot 9,8 \cdot 1 \cdot 10^{-3}} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 3 \text{ см}.$

Відповідь: $h = 3 \text{ см}.$

Приклад 134. Чи буде плавати на поверхні води жирна (повністю незмочувана) платинова дротинка діаметром 1 мм?

Дано:

$$d = 1 \text{ мм} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$\rho_{\text{Pt}} = 21,4 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$$

$$\sigma = 0,073 \text{ Н/м}$$

$$p_1 \leq p_2 ?$$

Розв'язання

Площа опори дротинки $S = \ell d$, коли вона лежить на воді.

Щоб дротинка могла триматися на воді, необхідно, щоб тиск, що створює вага дротини на площу її опори, не перевищував тиску, спричиненого кривизною поверхні рідини в заглибленні під дротинкою і напрямленого вверх (силою Архімеда нехтуємо).

Тиск дротинки на воду: $p_1 = \frac{mg}{\ell d}$, де ℓd – площа опори дротинки, d – діаметр дротини, ℓ – довжина дротини.

Щоб виразити масу через густину та об'єм, запишемо об'єм циліндра, бо дротина має циліндричну форму: $V = \frac{\pi d^2}{4} \ell$.

$$\text{Маса дротини: } m = \rho V = \frac{\rho \pi d^2}{4} \ell.$$

Тепер повернемося до **формули тиску дротини на воду**, підставимо в неї масу дротини:

$$p_1 = \frac{mg}{\ell d} = \frac{\rho \pi d^2 \ell g}{4 \ell d} = \frac{\rho \pi d g}{4}.$$

Тиск, спричинений кривизною поверхні рідини, визначається за формулою Лапласа:

$$p_2 = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

де R_1 та R_2 – радіуси кривизни двох взаємно перпендикулярних перетинів поверхні рідини. У нашому випадку поверхня рідини циліндрична, тобто $R_1 = \infty$, а $R_2 = r = \frac{d}{2}$ – радіус дротини.

Тоді з формули Лапласа **додатковий тиск, що втримує дротину на воді:**

$$p_2 = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \sigma \left(\frac{1}{\infty} + \frac{2}{d} \right) = \frac{2\sigma}{d}.$$

Оскільки для того, щоб дротина трималася на воді, треба виконання умови

$$p_1 \leq p_2, \text{ підставимо в неї вирази для тисків } p_1 \text{ і } p_2: \frac{\rho \pi d g}{4} \leq \frac{2\sigma}{d}.$$

З цієї формули знайдемо вираз для діаметра дротини:

$$d^2 \leq \frac{8\sigma}{\pi \rho g} - \text{тобто, для того, щоб дротина плавала на воді, потрібно виконання}$$

цієї умови.

Перевіримо, чи вона виконується:

$$(1 \cdot 10^{-3})^2 \leq \frac{8 \cdot 0,073}{3,14 \cdot 21,4 \cdot 10^3 \cdot 9,8} \Rightarrow 1 \cdot 10^{-6} \leq 0,887 \cdot 10^{-6} - \text{що є неправильним.}$$

Отже, $p_1 > p_2$ – тиск дротини на площу опори більший, ніж додатковий тиск, спричинений, кривизною поверхні води, і напрямлений вверх. Тобто, платинова дротина такого діаметру не може плавати на воді, вона потоне.

Відповідь: $p_1 > p_2$ – дротина потоне.

Приклад 135. В дні посудини зі ртуттю є отвір. Яким може бути найбільший діаметр отвору, щоб ртуть з посудини не виливалась при висоті стовпа ртуті 3см?

Дано:

$$h = 3 \text{ см} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$\rho = 13,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$$

$$\sigma = 0,5 \text{ Н/м}$$

$d?$

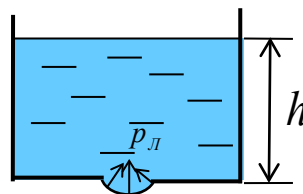
Розв'язання

Лапласівський тиск напрямлений до центра кривизни меніска, тобто всередину рідини. Він протидіє витіканню рідини. Рідина не буде витікати з посудини, якщо лапласівський тиск p_L дорівнюватиме гідростатичному тиску стовпа рідини зверху (рис.). Величина тиску Лапласа (для сферичної форми меніска):

$$p_L = \frac{2\sigma}{r} = \frac{4\sigma}{d},$$

де r і d – радіус і діаметр отвору. Гідростатичний тиск виражається формулою:

$$p = \rho gh.$$



З рівності $p_{\text{л}} = p \Rightarrow \frac{4\sigma}{d} = \rho gh$ визначимо максимально можливий діаметр отвору, при якому ртуть не буде витікати з посудини для заданому висоті стовпа: $d = \frac{4\sigma}{\rho gh}$.

Обчислимо: $d = \frac{4\sigma}{\rho gh} = \frac{4 \cdot 0,5}{13,6 \cdot 10^3 \cdot 9,8 \cdot 3 \cdot 10^{-3}} = 0,0005 \text{ м} = 0,5 \text{ мм}$

Відповідь: $d = 0,5 \text{ мм}$

Приклад 136. Яку силу потрібно прикласти, щоб відірвати одна від одної (без зсуву) дві змочені скляні фотопластинки розміром $9 \times 12 \text{ см}$? Товщина водяного прошарку між пластинами $0,05 \text{ мм}$. Змочування повне.

Дано:

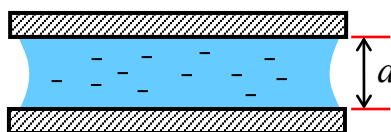
$$S = 9 \cdot 12 \text{ см}^2 = 0,09 \cdot 0,12 \text{ м}^2$$

$$d = 0,05 \text{ мм} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м}$$

$$\alpha = 73 \cdot 10^{-3} \text{ Н / м}$$

F ?

Розв'язання



Поверхня змочуючої рідини між пластинками має циліндричну форму з радіусом кривизни: $R = d/2$, де d – відстань між пластинками.

Формула Лапласа для додаткового тиску, зумовленого кривизною поверхні меніска:

$$p_{\text{л}} = \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

де R_1 та R_2 – радіуси кривизни меніска у двох взаємно перпендикулярних нормальних перетинах. Для циліндричного меніска один з радіусів $R = \infty$. Тоді додатковий від'ємний тиск під циліндричною увігнутою поверхнею за формулою Лапласа:

$$p_{\text{л}} = \frac{\alpha}{R} = \frac{2\alpha}{d},$$

– це надлишок зовнішнього тиску, що діє на площу пластинок S .

Отже, сила, яку треба прикласти, щоб відірвати пластинки одна від одної:

$$F = p_{\text{л}} S = \frac{2\alpha}{d} S.$$

Обчислимо: $F = \frac{2\alpha}{d} S = \frac{2 \cdot 73 \cdot 10^{-3} \cdot 0,09 \cdot 0,12}{5 \cdot 10^{-5}} = 31,5 \text{ Н}.$

Відповідь: $F = 31,5 \text{ Н}.$

Приклад 137. Канал у капілярній трубці має конічну форму. Діаметри його $d_1 = 1\text{мм}$ і $d_2 = 2\text{мм}$. Довжина трубки 10см . На яку висоту підніметься вода у трубці, якщо її опустити на незначну глибину у воду: а) широким кінцем; б) вузьким кінцем.

Розв'язання

Дано:

$$d_1 = 1\text{мм} = 1 \cdot 10^{-3}\text{ м}$$

$$d_2 = 2\text{мм} = 2 \cdot 10^{-3}\text{ м}$$

$$H = 10\text{см} = 0,1\text{м}$$

$$\alpha = 0,073\text{Н/м}$$

$$\rho = 10^3\text{кг/м}^3$$

$$а) h_1? \quad б) h_2?$$

Змочування повне. Коли конічний капіляр занурений в рідину широким кінцем (рис. а) – масштаб не витримувався), висота підняття води у ньому:

$$h_1 = \frac{2\alpha}{\rho g r},$$

де r – радіус капіляра на рівні рідини в капілярі. Виразимо r через h_1 .

Для цього добудуємо зрізаний конус до повного конуса. Тоді з подібності фігур:

$$\frac{H_1}{r_1} = \frac{H_1 + H}{r_2}.$$

Звідки знайдемо

$$H_1 = \frac{H r_1}{r_2 - r_1}.$$

Зручно відразу обчислити цю величину:

$$H_1 = \frac{H r_1}{r_2 - r_1} = \frac{0,1 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3}}{(1 - 0,5) \cdot 10^{-3}} = 0,1\text{м} = 10\text{см}.$$

Розглядаючи подібні трикутники, можна записати ще одне співвідношення:

$$\frac{H_1}{r_1} = \frac{H_1 + H - h_1}{r}. \quad \text{Звідки } r = \frac{H_1 + H - h_1}{H_1} r_1 = \frac{(H_1 + H) r_1}{H_1} - \frac{r_1}{H_1} h_1.$$

Підставимо числові значення відомих величин:

$$r = \frac{(H_1 + H) r_1}{H_1} - \frac{r_1}{H_1} h_1 = \frac{(0,1 + 0,1) \cdot 0,5 \cdot 10^{-3}}{0,1} - \frac{0,5 \cdot 10^{-3}}{0,1} h_1 = 0,001 - 0,005 h_1.$$

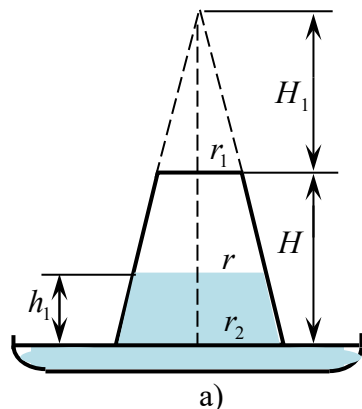
Тоді після підстановки виразу для r в формулу для висоти підняття води в капілярі маємо:

$$h_1 = \frac{2\alpha}{\rho g r} = \frac{2\alpha}{\rho g (0,001 - 0,005 h_1)} \quad \text{— це квадратне рівняння відносно } h_1.$$

$$-0,005 \rho g h_1^2 + 0,001 \rho g h_1 - 2\alpha = 0,$$

де $a = -0,005 \rho g$; $b = 0,001 \rho g$; $c = -2\alpha$.

$$\text{Корені квадратного рівняння: } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$



Отримаємо один з коренів. Всі інші шукаються аналогічно.

$$h_1'' = \frac{-0,001\rho g + \sqrt{(0,001\rho g)^2 - 4 \cdot (-0,005\rho g) \cdot (-2\alpha)}}{2 \cdot (-0,005\rho g)}.$$

Підставимо значення фізичних величин та обчислимо:

$$h_1'' = 0,1 + \frac{\sqrt{(0,001 \cdot 10^3 \cdot 9,8)^2 - 4 \cdot (-0,005 \cdot 10^3 \cdot 9,8) \cdot (-2 \cdot 0,073)}}{2 \cdot (-0,005 \cdot 10^3 \cdot 9,8)} \approx 0,0162 \text{ м} \approx 1,6 \text{ см}$$

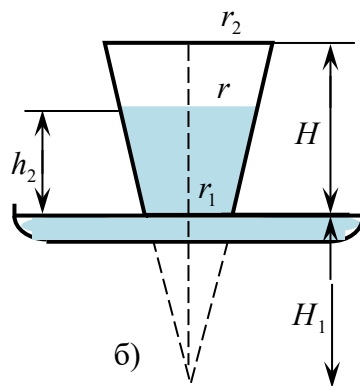
Розв'язавши рівняння, дістанемо два корені – два значення для h_1 :

$$h_1' \approx 18,4 \text{ см та } h_1'' \approx 1,6 \text{ см}.$$

Перша відповідь не відповідає умові задачі, бо трубка має довжину 10 см. Отже, в першому випадку висота підняття води в капілярі $h_1 \approx 1,6 \text{ см}$.

б) Аналогічно розв'язуємо задачу у випадку, коли капіляр опущено у рідину вузьким кінцем (рис. б).

З подібності фігур:



$$\frac{H_1}{r_1} = \frac{H_1 + H}{r_2} \Rightarrow H_1 = \frac{H r_1}{r_2 - r_1} = \frac{0,1 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3}}{(1 - 0,5) \cdot 10^{-3}} = 0,1 \text{ м} = 10 \text{ см}$$

Висота підняття води в капілярі: $h_2 = \frac{2\alpha}{\rho g r}$,

де r – радіус капіляра на рівні рідини в капілярі. Виразимо r через h_2 .

Розглядаючи подібні трикутники, можна записати:

$$\frac{H_1}{r_1} = \frac{H_1 + h_2}{r} \Rightarrow r = \frac{H_1 + h_2}{H_1} r_1 = r_1 + \frac{r_1}{H_1} h_2 = 0,0005 + 0,005 h_2.$$

Після підстановки виразу для r в формулу для висоти підняття води в капілярі маємо:

$$h_2 = \frac{2\alpha}{\rho g r} = \frac{2\alpha}{\rho g (0,0005 + 0,005 h_2)}.$$

Розв'язавши це рівняння, дістанемо два значення для h_2 :

$$h_2' \approx -12,4 \text{ см і } h_2'' \approx 2,4 \text{ см}.$$

Перший корінь не має фізичного змісту. Отже, висота підняття води в капілярі, що занурений вузьким кінцем: $h_2 = 2,4 \text{ см}$.

Відповідь: $h_1 = 1,6 \text{ см}; h_2 = 2,4 \text{ см}$.

2.10.3. Явища перенесення в газах. Внутрішнє тертя. Теплопровідність. Дифузія

Вказівки до розв'язування задач

1. Теорію з цього питання можна прочитати в § 1.9.

2. Молекули газу, безперервно та безладно рухаючись, весь час переміщуються, обмінюючись швидкостями та енергіями. Якщо в певному напрямі існує різниця густини ρ , температури T або переносної швидкості v , то в цьому напрямі можливе перенесення маси (дифузія), кінетичної енергії теплового руху молекул (теплопровідність) і кількості руху або імпульсу напрямленого руху (внутрішнє тертя).

а) Якщо один шар газу рухається відносно іншого з переносною швидкістю v , то через площадку S , паралельну напрямку руху шарів газу (рис. 2.23), за час t переноситься з першого шару до другого імпульс напрямленого руху:

$$\Delta p = -\eta \frac{\Delta v}{\Delta y} S t \quad \text{— це закон Ньютона}$$

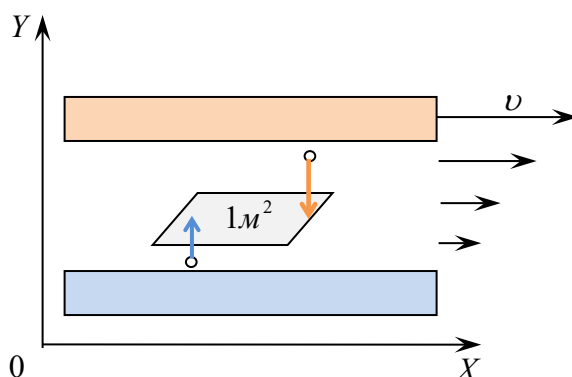


Рис. 2.23

для в'язкого тертя, де $\frac{\Delta v}{\Delta y}$ — градієнт

швидкості в напрямі перпендикулярному до площадки S або до напрямку руху шарів газу; η — коефіцієнт внутрішнього тертя (динамічна в'язкість):

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda}, \quad \text{де } \bar{v} \text{ — середня арифметична швидкість, } \bar{\lambda} \text{ — середня довжина}$$

вільного пробігу молекул, ρ — густина газу і $\rho = n m_0$, де n — концентрація — кількість молекул в одиниці об'єму, m_0 — маса однієї молекули.

Імпульс, перенесений молекулами газу за час t через площадку S , визначає силу внутрішнього тертя F в газі, яка прикладена з боку газу, що рухається зі швидкістю v відносно площадки, і напрямлена в сторону, протилежну руху:

$$F = \eta \left| \frac{\Delta v}{\Delta y} \right| S.$$

б) Маса газу M , що переноситься за час t через площадку S під час дифузії у напрямі Y , перпендикулярному до цієї площадки, визначається рівнянням:

$$M = -D \frac{\Delta \rho}{\Delta y} S t$$

– це закон Фіка для явища дифузії.

Величина $D = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda}$ – коефіцієнт дифузії, $\frac{\Delta \rho}{\Delta y}$ – градієнт густини – відносна

зміна густини в напрямі Y , перпендикулярному до площадки S .

в) Кількість тепла Q , перенесена через площадку S за час t , визначається формулою:

$$Q = -\chi \frac{\Delta T}{\Delta y} S t$$

– це закон Фур'є для явища теплопровідності,

де $\frac{\Delta T}{\Delta y}$ – градієнт температури в напрямі перпендикулярному до площадки S ,

$\chi = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda} c_v$ – коефіцієнт теплопровідності, c_v – питома теплоємність газу при сталому об'ємі.

3. В задачах з цієї теми найчастіше доводиться визначати масу газу, кількість теплоти, що переноситься за час, за який відбувається перенесення; або силу, з якою взаємодіють шари газу між собою (силу в'язкого тертя).

Розглянуті рівняння можна застосовувати лише для випадку, коли тиск газу настільки великий, що середня довжина вільного пробігу молекул набагато менша, ніж розміри посудини, в якій міститься газ. Крім того процес повинен бути стаціонарним. Це означає, що кількість фізичної величини, яка переноситься за одиницю часу через площадку в будь-якому місці об'єму газу, залишається завжди сталою. Це можливо при умові, якщо розподіл у просторі густини, температури або переносної швидкості не змінюється з часом.

4. Всі перелічені коефіцієнти – динамічної в'язкості, дифузії, теплопровідності, – визначаються експериментально. Вони залежать від середньої довжини вільного пробігу молекули $\bar{\lambda}$. Тому, знаючи один з коефіцієнтів, можна обчислити середню довжину вільного пробігу молекули. Якщо відомі середня довжина вільного пробігу молекул та густина газу, то за

формулою $\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 n}$ можна обчислити ефективний діаметр молекули σ ,

концентрацію молекул n , густину газу, сталу Больцмана, число Авогадро та інші молекулярні характеристики.

5. Корисно знати співвідношення між коефіцієнтами: $\eta = D\rho$ – зв'язок між динамічною в'язкістю та коефіцієнтом дифузії; $\chi = D\rho c_v$ – зв'язок між

коефіцієнтом теплопровідності і коефіцієнтом дифузії; $\chi = \eta c_V$ – зв’язок між коефіцієнтом теплопровідності і динамічною в’язкістю.
Знаючи один з трьох коефіцієнтів, густину газу та питому теплоємність, можна обчислити два інші коефіцієнти.

Приклад 138. Знайти коефіцієнт дифузії гелію при нормальних умовах.

Дано:

He

$$p_0 = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

$$T_0 = 273 \text{ К}$$

$$n_0 = 2,7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$$

D ?

Розв’язання

Коефіцієнт дифузії будь-якого газу можна визначити через середню арифметичну швидкість і

середню довжину вільного пробігу: $D = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda}$.

Середня арифметична швидкість:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}},$$

де $\mu(\text{He}) = 4 \cdot 10^{-3} \text{ кг / моль}$.

Середня довжина вільного пробігу молекули: $\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n}$,

де $\sigma = 2 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ – ефективний діаметр молекули гелію; концентрацію n можна знайти з рівняння стану ідеального газу, записаного через

концентрацію: $n = \frac{p_0}{kT_0}$.

Можна відразу знайти значення $\bar{v}$ і $\bar{\lambda}$ та підставити до формули коефіцієнта дифузії D . А можна дійти до кінця, шукаючи D в символічному вигляді, а потім підставити числові значення. Зробимо і так, і так. Перший шлях більш інформативний, бо дає можливість оцінити $\bar{v}$ і $\bar{\lambda}$.

Обчислимо: $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT_0}{\pi\mu}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 8,31 \cdot 273}{3,14 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}} = 1,202 \cdot 10^3 \text{ м / с}$ – середня

арифметична швидкість; $n = \frac{p_0}{kT_0} = \frac{1,01 \cdot 10^5}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273} = 2,68 \cdot 10^{25} = 2,7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ –

концентрація молекул при нормальних умовах – число Лошмідта; $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж / К}$ – стала Больцмана;

$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 3,14 \cdot (2 \cdot 10^{-10})^2 \cdot 2,7 \cdot 10^{25}} = 2,1 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ – середня довжина

вільного пробігу молекули.

Обчислимо коефіцієнт дифузії, підставивши значення $\bar{v}$ і $\bar{\lambda}$:

$$D = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} = \frac{1}{3} \cdot 1,202 \cdot 10^3 \cdot 2,1 \cdot 10^{-7} = 8,4 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 / \text{с}.$$

Формула для коефіцієнта дифузії при нормальних умовах в символьному вигляді після підстановки виразів для $\bar{v}$ і $\bar{\lambda}$ з врахуванням $n = \frac{p_0}{kT_0}$:

$$D = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} = \frac{2}{3} \frac{kT_0}{\pi \sigma^2 p_0} \sqrt{\frac{RT_0}{\pi \mu}}.$$

Обчислимо:

$$D = \frac{2}{3} \frac{kT_0}{\pi \sigma^2 p_0} \sqrt{\frac{RT_0}{\pi \mu}} = \frac{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273}{3 \cdot 3,14 \cdot (2 \cdot 10^{-10})^2 \cdot 1,01 \cdot 10^5} \sqrt{\frac{8,31 \cdot 273}{3,13 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}} = 8,4 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 / \text{с}.$$

Відповідь: $D = 8,4 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 / \text{с}.$

Приклад 139. Коефіцієнт в'язкості кисню $\eta = 1,92 \cdot 10^{-5} \text{ кг} / (\text{м} \cdot \text{с})$.
Визначити довжину вільного пробігу молекул кисню в нормальних умовах.

Дано:

O_2

$\eta = 1,92 \cdot 10^{-5} \text{ кг} / (\text{м} \cdot \text{с})$

$T_0 = 273 \text{ К}$

$\bar{\lambda}?$

Розв'язання

Коефіцієнт внутрішнього тертя
(динамічна в'язкість):

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda},$$

де $\bar{v}$ – середня арифметична швидкість, $\bar{\lambda}$ – середня довжина вільного пробігу молекул, ρ – густина газу.

З попередньої формули визначимо середню довжину вільного пробігу:

$$\bar{\lambda} = \frac{3\eta}{\rho \bar{v}},$$

де $\rho = 1,43 \text{ кг} / \text{м}^3$ – густина кисню; $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT_0}{\pi \mu}}$ – середня арифметична швидкість.

З врахуванням формули для середньої довжини вільного пробігу маємо:

$$\bar{\lambda} = \frac{3\eta}{\rho \bar{v}} = \frac{3\eta}{\rho \sqrt{\frac{8RT_0}{\pi \mu}}}.$$

Тут $\mu(\text{O}_2) = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг} / \text{моль}$ – молярна маса кисню.

Обчислимо:

$$\bar{\lambda} = \frac{3\eta}{\rho \sqrt{\frac{8RT_0}{\pi \mu}}} = \frac{3 \cdot 1,92 \cdot 10^{-5}}{1,43 \cdot \sqrt{\frac{8 \cdot 8,31 \cdot 273}{3,14 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}}} = 9,6 \cdot 10^{-8} \text{ м}.$$

Відповідь: $\bar{\lambda} = 9,6 \cdot 10^{-8} \text{ м}$.

Приклад 140. Визначити залежність коефіцієнта дифузії D ідеального газу від температури при ізохоричному процесі.

Дано:

O_2

$V = \text{const}$
 $D(T)?$

Розв'язання

Для ізохоричного процесу ($V = \text{const}$) виконується

закон Шарля: $\frac{p}{T} = \text{const}$. Коефіцієнт дифузії будь-якого газу

можна визначити через середню арифметичну швидкість і середню довжину вільного пробігу:

$$D = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda}.$$

Середня довжина вільного пробігу молекули:

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 n},$$

де $n = \frac{p}{kT} = \text{const}$, бо $\frac{p}{T} = \text{const}$, k – стала Больцмана – концентрація є величиною сталою.

Це означає, що при ізохоричному процесі середня довжина вільного пробігу $\bar{\lambda}$ не залежить від температури.

Середня арифметична швидкість:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}},$$

з аналізу формули видно залежність середньої швидкості $\bar{v}$ молекул від абсолютної температури як:

$$\bar{v}(T) \sim \sqrt{T}.$$

Отже, коефіцієнт дифузії залежить від температури так само: $D(T) \sim \sqrt{T}$.

Відповідь: $D(T) \sim \sqrt{T}$.

Приклад 141. Знайти кількість азоту, який проходить внаслідок дифузії через площадку 100 см^2 за 10 с , якщо градієнт густини в напрямку, перпендикулярному до площадки, дорівнює $1,26 \text{ кг/м}^4$. Температура азоту 27° С , середня довжина вільного пробігу молекул азоту 10^{-5} см .

Дано:

N_2

$$S = 100 \text{ см}^2 = 100 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$$

$$t = 10 \text{ с}$$

$$\frac{d\rho}{dz} = 1,26 \text{ кг/м}^4$$

$$t = 27^\circ \text{C} \Rightarrow T = 290 \text{ К}$$

$$\bar{\lambda} = 10^{-5} \text{ см} = 10^{-7} \text{ м}$$

$m?$

Розв'язання

Масу азоту знайдемо з закону Фіка:

$$dM = -D \frac{d\rho}{dz} dS dt$$

Для даних нашої задачі перепишемо формулу так:

$$m = D \frac{d\rho}{dz} S \cdot t.$$

Коефіцієнт дифузії будь-якого газу можна визначити через середню арифметичну швидкість і середню довжину вільного пробігу: $D = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda}$. Середня

арифметична швидкість: $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$.

Після підстановки цих виразів у формулу для маси маємо:

$$m = D \frac{d\rho}{dz} S \cdot t = \frac{1}{3} \bar{\lambda} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \frac{d\rho}{dz} S \cdot t,$$

де $\mu(N_2) = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ – молярна маса азоту.

Обчислимо:

$$m = \frac{1}{3} \bar{\lambda} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \frac{d\rho}{dz} S \cdot t = \frac{1}{3} \cdot 10^{-7} \sqrt{\frac{8 \cdot 8,31 \cdot 290}{3,14 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}} = 0,000001967 \approx 2 \cdot 10^{-6} \text{ кг}$$

Відповідь: $m = 2 \cdot 10^{-6} \text{ кг}$.

Приклад 142. Простір між двома коаксіальними циліндрами заповнено воднем (див.рис.) при атмосферному тиску. Радіус зовнішнього циліндра 10,5 см, а внутрішнього 10 см. Зовнішній циліндр А обертається з частотою 15 об/с. Яка сила діє на одиницю площі поверхні внутрішнього нерухомого циліндра В? Коефіцієнт внутрішнього тертя водню $\eta = 8,5 \cdot 10^{-6} \text{ кг/(м} \cdot \text{с)}$. Поверхні циліндрів вважати плоскими.

Дано:

H_2

$$R = 10,5 \text{ см} = 10,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$r = 10 \text{ см} = 10 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$\nu = 15 \text{ об/с}$$

$$\eta = 8,5 \cdot 10^{-6} \text{ кг/(м} \cdot \text{с)}$$

$f?$

Розв'язання

Оскільки поверхні циліндрів розглядаються як плоскі площини, силу, що діє на внутрішній нерухомий циліндр з боку газу, шари якого приводяться в рух зовнішнім циліндром А, можна знайти за формулою

Ньютона для в'язкого тертя: $F = \eta \frac{\Delta v}{\Delta y} S$. Тут Δv

– лінійна швидкість зовнішнього циліндра (і найближчого до нього шару водню) відносно внутрішнього нерухомого циліндра.

Зв'язок між лінійною та кутовою швидкістю:
 $\Delta v = \omega R = 2\pi\nu R$, де $\omega = 2\pi\nu$ – кутова швидкість, ν – частота обертання зовнішнього циліндра, R – радіус зовнішнього рухомого циліндра. r – радіус внутрішнього циліндра, $\Delta y = R - r$ відстань між циліндрами, S – площа внутрішнього циліндра.

Підставимо вирази для Δv і Δy у формулу для сили в'язкого тертя:

$$F = \eta \frac{\Delta v}{\Delta y} S = \eta \frac{2\pi\nu R}{R - r} S.$$

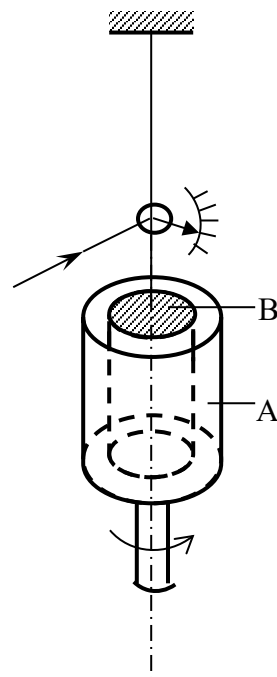
Оскільки потрібно визначити силу f , що припадає на одиницю площі $f = \frac{F}{S}$, то отримаємо вираз

для сили:
$$f = \frac{F}{S} = \eta \frac{2\pi\nu R}{R - r}.$$

Обчислимо:

$$f = \eta \frac{2\pi\nu R}{R - r} = 8,5 \cdot 10^{-6} \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 15 \cdot 10,5 \cdot 10^{-2}}{10,5 \cdot 10^{-2} - 10 \cdot 10^{-2}} = 1,7 \cdot 10^{-2} \text{ Н}.$$

Відповідь: $f = 1,7 \cdot 10^{-2} \text{ Н}.$



Приклад 143. Знайти коефіцієнт внутрішнього тертя азоту при нормальних умовах, якщо коефіцієнт дифузії для нього при цих умовах дорівнює $0,142 \text{ см}^2/\text{с}$.

Дано:

N_2

$$p_0 = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

$$T_0 = 273 \text{ К}$$

$$D = 0,142 \text{ см}^2/\text{с} = 0,142 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$$

$\eta?$

молекул.

Розв'язання

Динамічна в'язкість або коефіцієнт в'язкого тертя:

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda}, \text{ де } \bar{v} - \text{середня}$$

арифметична швидкість, $\bar{\lambda}$ – середня довжина вільного пробігу

Коефіцієнт дифузії будь-якого газу можна виразити через середню арифметичну швидкість і середню довжину вільного пробігу: $D = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda}.$

Тому між динамічною в'язкістю та коефіцієнтом дифузії існує зв'язок:
 $\eta = D\rho$.

Густина ρ знайдемо з рівняння стану ідеального газу для нормальних умов: $p_0 V_0 = \frac{m}{\mu} RT_0 \Rightarrow p_0 = \frac{m}{\mu V_0} RT_0 = \frac{\rho RT_0}{\mu} \Rightarrow \rho = \frac{p_0 \mu}{RT_0}$.

Тоді, після підстановки в останню формулу для в'язкого тертя, матимемо: $\eta = D\rho = \frac{D p_0 \mu}{RT_0}$.

Обчислимо: $\eta = \frac{D p_0 \mu}{RT_0} = \frac{0,142 \cdot 10^{-4} \cdot 1,01 \cdot 10^5 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}{8,31 \cdot 273} = 1,78 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$ або

$\text{Н} \cdot \text{с} / \text{м}^2$ або $\text{кг} / (\text{м} \cdot \text{с})$.

Тут $\mu(N_2) = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг} / \text{моль}$ – молярна маса азоту.

Відповідь: $\eta = 1,78 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$.

Приклад 144. Знайти ефективний діаметр молекули азоту, якщо при температурі 0°C коефіцієнт внутрішнього тертя дорівнює $\eta = 1,67 \cdot 10^{-5} \text{ кг} / (\text{м} \cdot \text{с})$?

Дано: N_2

$T_0 = 273 \text{ K}$

$\eta = 1,67 \cdot 10^{-5} \text{ кг} / (\text{м} \cdot \text{с})$
 σ ?

Розв'язання

Щоб знайти ефективний діаметр молекули, виразимо довжину її вільного пробігу через коефіцієнт внутрішнього тертя (динамічну в'язкість):

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda} \Rightarrow \bar{\lambda} = \frac{3\eta}{\rho \bar{v}},$$

де $\bar{v}$ – середня арифметична швидкість, $\bar{\lambda}$ – середня довжина вільного пробігу молекул, ρ – густина газу.

Середня арифметична швидкість: $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$. Після її підстановки в формулу для $\bar{\lambda}$, маємо:

$$\bar{\lambda} = \frac{3\eta}{\rho \bar{v}} = \frac{3\eta}{\rho \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}} \quad (1)$$

З іншої сторони середня довжина вільного пробігу молекули:

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n},$$

де $n = \frac{p_0}{kT_0} = \frac{1,01 \cdot 10^5}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273} = 2,68 \cdot 10^{25} = 2,7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ – концентрація молекул

при нормальних умовах – число Лошмідта.

З цієї формули довжини вільного пробігу виразимо ефективний діаметр молекули:

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n} \Rightarrow \sigma = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}\pi n \bar{\lambda}}} \quad (2)$$

Підставивши у формулу (2) вираз для $\bar{\lambda}$ з формули (1), матимемо робочу формулу для визначення σ – ефективного діаметра.

Якщо провести всі перетворення, для довільної температури буде така формула для обчислення ефективного діаметра:

$$\sigma = \left(\frac{2}{3\eta N_A} \sqrt{\frac{RT\mu}{\pi^3}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

Але можна піти таким шляхом: спочатку з формули (1) обчислити значення $\bar{\lambda}$:

$$\bar{\lambda} = \frac{3\eta}{\rho \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}} = \frac{3 \cdot 1,67 \cdot 10^{-5}}{1,25 \cdot \sqrt{\frac{8 \cdot 8,31 \cdot 273}{3,14 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}}} = 8,5 \cdot 10^{-8} \text{ м}.$$

Тут $\rho = 1,25 \text{ кг} / \text{м}^3$ – густина азоту, $\mu(N_2) = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг} / \text{моль}$ – молярна маса азоту.

Потім підставити отримане значення $\bar{\lambda}$ в формулу (2) та обчислити ефективний діаметр молекули:

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}\pi n \bar{\lambda}}} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2} \cdot 3,14 \cdot 2,7 \cdot 10^{25} \cdot 8,5 \cdot 10^{-8}}} = 3,1 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

Порівняємо з формулою (3):

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{3\eta N_A} \sqrt{\frac{RT\mu}{\pi^3}}} = \sqrt{\frac{2}{3 \cdot 1,67 \cdot 10^{-5} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}} \sqrt{\frac{8,31 \cdot 273 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}{3,14^3}}} \approx 3,082 \cdot 10^{-10} \text{ м}$$

або $\sigma = 3,1 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

Якщо дано інші коефіцієнти: дифузії, теплопровідності, – то ефективний діаметр знаходять за таким же алгоритмом.

Відповідь: $\sigma = 3,1 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

Приклад 145. Визначити залежність динамічної в'язкості η від температури T при ізобаричному процесі. Зобразити цю залежність на графіку.

Розв'язання

Ізобаричний процес $p = \text{const}$.

Динамічна в'язкість або коефіцієнт в'язкого тертя: $\eta = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda}$, де $\bar{v}$ – середня арифметична швидкість, $\bar{\lambda}$ – середня довжина вільного пробігу молекул.

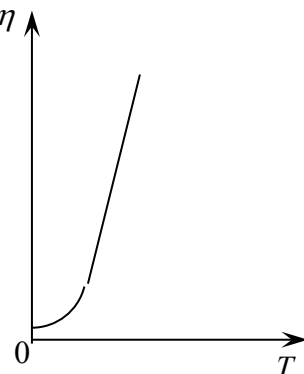
Середня арифметична швидкість: $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$, середня довжина вільного

пробігу молекули: $\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n}$.

Концентрацію n виразимо з рівняння стану: $p = nkT = \text{const}$ з умови

Концентрація $n = \frac{p}{kT} = \frac{\text{const}}{kT}$.

Підставимо вирази для $\bar{v}$, $\bar{\lambda}$, n у формулу для динамічної в'язкості:



$$\eta = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda} = \frac{1}{3} \rho \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \frac{1 \cdot kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p} = \text{const} \cdot \sqrt{T} \cdot T^2 = \text{const} \cdot \sqrt{T^3}$$

Отже, $\eta(T) \sim \sqrt{T^3}$.

Графік цієї залежності $\eta(T) \sim \sqrt{T^3}$ має вигляд: графік не проходить через нуль, бо абсолютний нуль поки не досягнутий і динамічна в'язкість не дорівнює нулю.

Відповідь: $\eta(T) \sim \sqrt{T^3}$.

Приклад 146. Знайти коефіцієнт дифузії та коефіцієнт внутрішнього тертя повітря при тиску 760 мм рт.ст. і температурі 10°C. Діаметр молекули повітря прийняти рівним $3 \cdot 10^{-10}$ м.

Розв'язання

Дано:

повітря

$$p = 760 \text{ мм рт.ст.} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

$$t = 10^\circ \text{C} \Rightarrow T = 283 \text{ К}$$

$$\sigma = 3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$$

$D?$ $\eta?$

Коефіцієнт дифузії будь-якого газу можна визначити через середню арифметичну швидкість і середню довжину вільного пробігу:

$$D = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda}.$$

Середня арифметична швидкість: $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$, де $\mu(\text{нов}) = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг / моль}$ – молярна маса повітря.

Середня довжина вільного пробігу молекули: $\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n}$.

Концентрацію n виразимо з рівняння стану: $p = nkT$. Концентрація $n = \frac{p}{kT}$.

Тоді $\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$.

Для коефіцієнта дифузії тоді маємо: $D = \frac{1}{3}\bar{v}\bar{\lambda} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$.

Обчислимо:

$$D = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8 \cdot 8,31 \cdot 283}{3,14 \cdot 29 \cdot 10^{-3}}} \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 283}{\sqrt{2} \cdot 3,14 \cdot (3 \cdot 10^{-10})^2 \cdot 1,01 \cdot 10^5} = 1,47 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 / \text{с}.$$

Тут $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж / К}$ – стала Больцмана.

Динамічна в'язкість або коефіцієнт внутрішнього тертя виражається через коефіцієнт дифузії та густину газу: $\eta = D\rho$.

Густину знайдемо з рівняння стану ідеального газу:

$$pV = \frac{m}{\mu}RT \Rightarrow p = \frac{m}{\mu V}RT = \frac{\rho RT}{\mu} \Rightarrow \rho = \frac{p\mu}{RT}.$$

Отже, $\eta = D\rho = D \frac{p\mu}{RT}$ – коефіцієнт внутрішнього тертя або динамічної в'язкості.

$$\text{Обчислимо: } \eta = D \frac{p\mu}{RT} = \frac{1,47 \cdot 10^{-5} \cdot 1,01 \cdot 10^5 \cdot 29 \cdot 10^{-3}}{8,31 \cdot 283} = 1,83 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}.$$

Відповідь: $D = 1,47 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 / \text{с}$; $\eta = 1,83 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$.

Приклад 147. У скільки разів коефіцієнт внутрішнього тертя кисню більший за коефіцієнт внутрішнього тертя азоту? Температура газів однакова.

Розв'язання

Дано:

Коефіцієнти внутрішнього тертя кисню та азоту,

$$\frac{T_1 = T_2}{\eta_1 / \eta_2 ?} \quad \text{відповідно: } \eta_1 = \frac{1}{3}\rho_1\bar{v}_1\bar{\lambda}_1 \text{ та } \eta_2 = \frac{1}{3}\rho_2\bar{v}_2\bar{\lambda}_2.$$

Середня довжина вільного пробігу молекули:

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$$

з огляду на те, що з рівняння стану: $p = nkT$ концентрація $n = \frac{p}{kT}$.

Середня арифметична швидкість: $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$, густина $\rho = \frac{p\mu}{RT}$ – з рівняння стану ідеального газу.

Підставимо ці вирази для $\bar{\lambda}$, $\bar{v}$ та ρ у формулу динамічної в'язкості та скоротимо, що можливо:

$$\eta_1 = \frac{1}{3} \rho_1 \bar{v}_1 \bar{\lambda}_1 = \frac{1}{3} \frac{p\mu_1}{RT} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu_1}} \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma_1^2 p} = \frac{k}{3\sqrt{2}R\pi\sigma_1^2} \sqrt{\frac{8RT\mu_1}{\pi}}$$

– для кисню.

Аналогічно коефіцієнт динамічної в'язкості для азоту:

$$\eta_2 = \frac{1}{3} \rho_2 \bar{v}_2 \bar{\lambda}_2 = \frac{k}{3\sqrt{2}R\pi\sigma_2^2} \sqrt{\frac{8RT\mu_2}{\pi}}.$$

Знайдемо відношення коефіцієнтів в'язкого тертя:

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}.$$

Тут $\sigma_1 = 2,9 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ – ефективний діаметр молекули кисню; $\sigma_2 = 3,1 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ – ефективний діаметр молекули азоту; $\mu_1(O_2) = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ – молярна маса кисню, $\mu_2(N_2) = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ – молярна маса азоту.

Обчислимо: $\frac{\eta_1}{\eta_2} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = \sqrt{\frac{32 \cdot 10^{-3}}{28 \cdot 10^{-3}}} \cdot \frac{(3,1 \cdot 10^{-10})^2}{(2,9 \cdot 10^{-10})^2} \approx 1,07 \text{ разів}.$

Відповідь: $\frac{\eta_1}{\eta_2} = 1,07.$

Приклад 148 Якої найбільшої швидкості може досягнути дощова крапля діаметром 0,3 мм? Діаметр молекули повітря прийняти рівним $3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$, температура повітря 0°C . Вважати, що для дощової краплі справедливий закон Стокса.

Дано:

$$d = 0,3 \text{ мм} = 0,3 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$t = 0^\circ \text{C} \Rightarrow T = 273 \text{ K}$$

$$\sigma = 3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$$

$$v_{\max} ?$$

Розв'язання

Вважаємо, що краплина має сферичну форму. Формула Стокса для сили в'язкого тертя, що діє зі сторони середовища при русі в ньому тіл сферичної форми: $F = 6\pi\eta r v$. Крапля падає в повітрі. на неї діють сили: F_A – виштовхувальна сила Архімеда, mg – сила тяжіння, F_B – сила в'язкості (див. рис.).

Рівнодійна цих сил: $\vec{R} = \vec{F}_A + \vec{F}_B + m\vec{g}$. Спроектуємо її на вісь ОХ: $R = mg - F_A - F_B$.

Швидкість зростатиме доти, поки рівнодійна не стане рівною нулю. Отже, швидкість досягне свого максимального значення v_{max} , коли $mg - F_A - F_B = 0 \Rightarrow F_B = mg - F_A$.

Вага краплини $mg = \rho_1 Vg$, де $\rho_1 = 10^3 \text{ кг/м}^3$ – густина води; $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ – об'єм краплі; $F_A = \rho_2 Vg$, де $\rho_2 = 1,29 \text{ кг/м}^3$ – густина повітря.

Після підстановки у формулу Стокса маємо:

$$F_B = 6\pi\eta v_{max} = \rho_1 Vg - \rho_2 Vg = Vg(\rho_1 - \rho_2).$$

$$\text{Отже, } 6\pi\eta v_{max} = Vg(\rho_1 - \rho_2) = \frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho_1 - \rho_2).$$

Після скорочення отримаємо:

$$v_{max} = \frac{2}{9} \frac{r^2 g(\rho_1 - \rho_2)}{\eta} = \frac{1}{18} \frac{d^2 g(\rho_1 - \rho_2)}{\eta}.$$

– максимально можлива швидкість для заданого діаметра.

Динамічну в'язкість можна взяти з таблиць. Але знайдемо її та порівняємо з табличним значенням.

Коефіцієнт внутрішнього тертя (динамічна в'язкість):

$$\eta = \frac{1}{3} \rho_2 \bar{v} \bar{\lambda}.$$

Середня довжина вільного пробігу молекули:

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$$

з огляду на те, що з рівняння стану: $p = nkT$ концентрація $n = \frac{p}{kT}$.

Тиск знайдемо з рівняння стану:

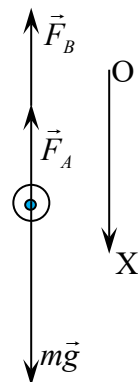
$$pV = \frac{m}{\mu_2} RT \Rightarrow p = \frac{m}{\mu_2 V} RT = \frac{\rho_2 RT}{\mu_2}.$$

Тоді

$$\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p} = \frac{kT\mu_2}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 \rho_2 RT} = \frac{\mu_2}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 \rho_2 N_A}.$$

Тут враховано, що $N_A = \frac{R}{k}$.

Отже, для молекул повітря середня довжина вільного пробігу:



$$\bar{\lambda} = \frac{\mu_2}{\sqrt{2}\pi\sigma^2\rho_2 N_A},$$

а середня арифметична швидкість:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu_2}}.$$

Динамічна в'язкість:

$$\eta = \frac{1}{3}\rho_2\bar{v}\bar{\lambda} = \frac{1}{3}\rho_2\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu_2}}\frac{\mu_2}{\sqrt{2}\pi\sigma^2\rho_2 N_A} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT\mu_2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 N_A}.$$

Динамічна в'язкість:

$$\eta = \frac{1}{3\sqrt{2}\pi\sigma^2 N_A}\sqrt{\frac{8RT\mu_2}{\pi}}.$$

Обчислимо:

$$\eta = \frac{1}{3\sqrt{2}\pi\sigma^2 N_A}\sqrt{\frac{8RT\mu_2}{\pi}} = \frac{1}{3\sqrt{2}\cdot 3,14\cdot (3\cdot 10^{-10})^2 \cdot 6,02\cdot 10^{23}}\sqrt{\frac{8\cdot 8,31\cdot 273\cdot 29\cdot 10^{-3}}{3,14}} = 1,79\cdot 10^{-5}\text{ Па}\cdot\text{с},$$

що повністю співпадає з табличним значенням $\eta = 1,8\cdot 10^{-5}\text{ Па}\cdot\text{с}$ для температури $t = 0^\circ\text{C}$.

Підставимо числові значення в формулу для максимальної швидкості:

$$v_{\max} = \frac{1}{18}\frac{d^2 g(\rho_1 - \rho_2)}{\eta} = \frac{1}{18}\cdot \frac{(0,3\cdot 10^{-3})^2 \cdot 9,8 \cdot (10^3 - 1,29)}{1,8\cdot 10^{-5}} \approx 2,732 \approx 2,7\text{ м/с}.$$

Відповідь: $v_{\max} = 2,7\text{ м/с}$.

Приклад 149. Коефіцієнт дифузії $D = 1,42\cdot 10^{-4}\text{ м}^2/\text{с}$, коефіцієнт внутрішнього тертя водню $\eta = 8,5\cdot 10^{-6}\text{ Па}\cdot\text{с}$. Знайти концентрацію молекул водню.

Розв'язання

Дано:

$$D = 1,42\cdot 10^{-4}\text{ м}^2/\text{с}$$

$$\eta = 8,5\cdot 10^{-6}\text{ Па}\cdot\text{с}$$

$n?$

Динамічна в'язкість або коефіцієнт внутрішнього тертя виражається через коефіцієнт дифузії та густину газу: $\eta = D\rho$.

Густину, тобто масу 1 м^3 речовини, можна визначити як добуток маси однієї молекули на концентрацію – кількість молекул в 1 м^3 : $\rho = nm_0$. Тоді з формули для динамічної в'язкості знайдемо концентрацію n :

$$\eta = D\rho = Dnm_0 \Rightarrow n = \frac{\eta}{Dm_0}.$$

Маса однієї молекули: $m_0 = \frac{\mu}{N_A}$, де $\mu = 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ – молярна маса водню, $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ – стала Авогадро.

Тоді концентрація молекул: $n = \frac{\eta}{Dm_0} = \frac{\eta N_A}{D\mu}$.

Обчислимо: $n = \frac{\eta N_A}{D\mu} = \frac{8,5 \cdot 10^{-6} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{1,42 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 1,8 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$.

Відповідь: $n = 1,8 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$.

Приклад 150. Знайти коефіцієнт теплопровідності повітря при температурі 10°C і тиску 10^5 Н/м^2 . Діаметр молекули повітря дорівнює $\sigma = 3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

Розв'язання

Дано: $t = 10^\circ \text{C} \Rightarrow T = 283 \text{ К}$
 $p = 10^5 \text{ Н/м}^2$
 $\sigma = 3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$
 $\chi?$

Коефіцієнт теплопровідності визначається за формулою:

$$\chi = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} c_V, \quad (1)$$

де c_V – питома теплоємність газу при сталому об'ємі. Для повітря $c_V = 729 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$ – з таблиць (або обчислити за формулою: $c_V = \frac{i}{2} \frac{R}{\mu}$).

Густину повітря визначимо з рівняння стану ідеального газу:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \Rightarrow p = \frac{m}{\mu V} RT = \frac{\rho RT}{\mu} \Rightarrow \rho = \frac{p\mu}{RT}. \quad (2)$$

Середня довжина вільного пробігу молекули:

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 p} \quad (3)$$

з огляду на те, що з рівняння стану: $p = nkT$ концентрація $n = \frac{p}{kT}$.

Середня арифметична швидкість:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}. \quad (4)$$

Підставимо густину ρ (2), середню довжину вільного пробігу молекул $\bar{\lambda}$ (3) та середню арифметичну швидкість $\bar{v}$ (4) у формулу (1) для коефіцієнта теплопровідності:

$$\chi = \frac{1}{3} \overline{\rho v \lambda c_v} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} \frac{p \mu}{RT} \frac{kT}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 p} c_v.$$

Тиск p і температура T скоротяться, врахуємо, що $N_A = \frac{R}{k}$.

Тоді для коефіцієнта теплопровідності отримаємо:

$$\chi = \frac{\mu}{3} \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} \frac{c_v}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 N_A}.$$

Обчислимо, врахувавши, що для повітря $\mu = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ – молярна маса та $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ – стала Авогадро:

$$\chi = \frac{29 \cdot 10^{-3}}{3} \sqrt{\frac{8 \cdot 8,31 \cdot 283}{3,14 \cdot 29 \cdot 10^{-3}}} \frac{729}{\sqrt{2} \cdot 3,14 \cdot (3 \cdot 10^{-10})^2 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}} = 1,3 \cdot 10^{-2} \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$$

Відповідь: $\chi = 1,3 \cdot 10^{-2} \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$.

Приклад 151. Знайти коефіцієнт теплопровідності водню, якщо відомо, що коефіцієнт внутрішнього тертя для нього при певних умовах $\eta = 8,6 \cdot 10^{-6} \text{ Па} \cdot \text{с}$.

Дано:

$$\eta = 8,5 \cdot 10^{-6} \text{ Па} \cdot \text{с}$$

χ ?

Розв'язання

Коефіцієнт теплопровідності визначається за формулою:

$$\chi = \frac{1}{3} \overline{\rho v \lambda c_v}, \quad (1)$$

де c_v – питома теплоємність газу при сталому об'ємі, $\eta = \frac{1}{3} \rho_2 \overline{v \lambda}$ – коефіцієнт внутрішнього тертя (динамічна в'язкість). Тобто, коефіцієнт теплопровідності можна виразити через коефіцієнт внутрішнього тертя: $\chi = \eta c_v$.

Питома теплоємність водню знайдемо через молярну теплоємність (або візьмемо з таблиць): $C_v = \mu c_v \Rightarrow c_v = \frac{C_v}{\mu} = \frac{iR}{2\mu}$ – питома теплоємність при

сталому об'ємі, де $C_v = \frac{i}{2} R$ – молярна теплоємність при сталому об'ємі, $i = 5$ – кількість ступенів вільності молекули водню (двохатомні молекули мають 5 ступенів вільності).

Отже, коефіцієнт теплопровідності з врахуванням формули для питомої теплоємності c_v : $\chi = \eta c_v = \frac{\eta i R}{2\mu}$, де $\mu = 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ – молярна маса водню. Обчислимо коефіцієнт теплопровідності водню:

$$\chi = \frac{\eta i R}{2\mu} = \frac{8,5 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 8,31}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} \approx 0,893 \approx 0,09 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}.$$

Відповідь: $\chi = 0,09 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}.$

Приклад 152. Яка кількість тепла витрачається щогодини через вікно за рахунок теплопровідності повітря, що міститься між рамами? Площа кожної рами 4 м^2 , відстань між рамами 30 см . Температура в приміщенні 18°С , а ззовні мінус 20°С . Діаметр молекули повітря $3 \cdot 10^{-8} \text{ см}$. Атмосферний тиск 760 мм рт.ст. (Вважати, що температура повітря між рамами дорівнює середньому арифметичному температур приміщення і зовнішнього простору).

Розв'язання

Дано:

$$S = 4 \text{ м}^2; h = 30 \text{ см} = 30 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$t_1 = -20^\circ \text{С} \Rightarrow T_1 = 253 \text{ К};$$

$$t_2 = 18^\circ \text{С} \Rightarrow T_2 = 291 \text{ К}$$

$$p = 760 \text{ мм рт.ст.} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$$

$$\sigma = 3 \cdot 10^{-10} \text{ м}; t = 3600 \text{ с}$$

$Q?$

Кількість теплоти, що передається від теплого приміщення назовні через віконні рами площею S за час t визначається за формулою:

$$Q = \chi \frac{\Delta T}{\Delta y} St.$$

Коефіцієнт теплопровідності повітря було знайдено у розв'язку у одній з

попередніх задач: $\chi = 1,3 \cdot 10^{-2} \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$

Пересвідчимося, що при середній температурі між рамами

$$T_{\text{сер}} = \frac{T_1 + T_2}{2} = \frac{253 + 291}{2} = 272 \text{ К} \quad \text{коефіцієнт теплопровідності буде}$$

практично таким самим.

Для коефіцієнта теплопровідності маємо (задача №218):

$$\chi = \frac{\mu}{3} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \frac{c_v}{\sqrt{2\pi\sigma^2 N_A}}.$$

Обчислимо, врахувавши, що для повітря $\mu = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ – молярна маса та $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ – стала Авогадро, $c_v = 729 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$ – з таблиць питома теплоємність повітря:

$$\chi = \frac{29 \cdot 10^{-3}}{3} \sqrt{\frac{8 \cdot 8,31 \cdot 272}{3,14 \cdot 29 \cdot 10^{-3}}} \frac{729}{\sqrt{2} \cdot 3,14 \cdot (3 \cdot 10^{-10})^2 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}} \approx 0,01305 \approx 1,31 \cdot 10^{-2} \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$$

Тобто отримане значення практично співпадає з раніше розрахованим. $\Delta y = h$ – відстань між рамами.

Отже, обчислимо кількість теплоти, що виходить через рами назовні:

$$Q = \chi \frac{\Delta T}{\Delta y} St = \frac{1,31 \cdot 10^{-2} \cdot (291 - 253) \cdot 4 \cdot 3600}{30 \cdot 10^{-2}} \approx 2389,44 \text{ Дж} \approx 2,4 \text{ кДж}.$$

Виразимо в калоріях. 1 кал – це 4,19 Дж. Отже $Q = 2,4 \text{ кДж} = 5,703 \text{ ккал}$.

Відповідь: $Q = 5,7 \text{ ккал}$.

Приклад 153. Визначити коефіцієнт теплопровідності вуглекислого газу при тиску 2 атм і температурі 0°C , якщо коефіцієнт дифузії газу $1,04 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 / \text{с}$.

Дано:

$$p = 2 \text{ атм} = 2 \cdot 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

$$t = 0^\circ \text{C} \Rightarrow T = 273 \text{ К}$$

$$D = 1,04 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 / \text{с}$$

χ ?

Розв'язання

Коефіцієнт теплопровідності визначається за формулою:

$$\chi = \frac{1}{3} \overline{\rho v \lambda c_v},$$

де c_v – питома теплоємність газу при сталому об'ємі. Для вуглекислого газу $c_v = 654 \text{ Дж} / (\text{кг} \cdot \text{К})$ – з таблиць.

Коефіцієнт дифузії визначається за формулою:

$$D = \frac{1}{3} \overline{v \lambda}.$$

Тоді коефіцієнт теплопровідності можна виразити через коефіцієнт дифузії:

$$\chi = \frac{1}{3} \overline{\rho v \lambda c_v} = D \rho c_v.$$

Значення густини газу знайдемо з рівняння стану ідеального газу:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \Rightarrow p = \frac{m}{\mu V} RT = \frac{\rho RT}{\mu} \Rightarrow \rho = \frac{p \mu}{RT}.$$

Тоді коефіцієнт теплопровідності:

$$\chi = D \rho c_v = D \frac{p \mu}{RT} c_v.$$

Обчислимо, врахувавши, що для вуглекислого газу $\mu = 44 \cdot 10^{-3} \text{ кг} / \text{моль}$ – молярна маса:

$$\chi = D \frac{p \mu}{RT} c_v = 1,04 \cdot 10^{-5} \frac{2 \cdot 1,01 \cdot 10^5 \cdot 44 \cdot 10^{-3}}{8,31 \cdot 273} \cdot 654 = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ Вт} / (\text{м} \cdot \text{К}).$$

Задачі, в умовах яких дані інші коефіцієнти, розв'язуються аналогічно.

Відповідь: $\chi = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ Вт} / (\text{м} \cdot \text{К})$.

Приклад 154. Вуглекислий газ і азот знаходяться при однакових температурі і тиску. Знайти для цих газів відношення: 1) коефіцієнтів дифузії; 2) коефіцієнтів внутрішнього тертя; 3) коефіцієнтів теплопровідності. Діаметри молекул цих газів вважати однаковими.

Розв'язання

Дано:

CO₂ – 1-ий; N₂ – 2-ий

$$p_1 = p_2 = p$$

$$T_1 = T_2 = T$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$$

$$\frac{D_1}{D_2} ? \quad \frac{\eta_1}{\eta_2} ? \quad \frac{\chi_1}{\chi_2} ?$$

1. Визначення коефіцієнтів дифузії

Коефіцієнт дифузії будь-якого газу можна визначити через середню арифметичну швидкість і середню довжину вільного пробігу:

$$D = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda}.$$

Середня арифметична швидкість:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}.$$

Середня довжина вільного пробігу молекули:

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n}.$$

Тоді коефіцієнти дифузії для 1-го і 2-го газів:

$$D_1 = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu_1}} \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n};$$

$$D_2 = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu_2}} \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n}.$$

Концентрація $n = \frac{p}{kT}$ теж однакова, бо тиск і температура однакові.

$\mu_1 = 44 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ – молярна маса вуглекислого газу;

$\mu_2 = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ – молярна маса азоту.

1. Відношення коефіцієнтів дифузії:

$$\frac{D_1}{D_2} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} = \sqrt{\frac{28 \cdot 10^{-3}}{44 \cdot 10^{-3}}} = 0,8.$$

2. Визначення коефіцієнтів внутрішнього тертя

Коефіцієнт внутрішнього тертя (динамічну в'язкість) можна виразити через коефіцієнт дифузії:

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda} = D\rho.$$

Тоді коефіцієнти внутрішнього тертя для 1-го і 2-го газів:

$$\eta_1 = D_1 \rho_1;$$

$$\eta_2 = D_2 \rho_2.$$

Знайдемо їх відношення, врахувавши, що густина з рівняння стану:

$$\rho = \frac{p\mu}{RT}$$

$$(pV = \frac{m}{\mu} RT \Rightarrow p = \frac{m}{\mu V} RT = \frac{\rho RT}{\mu} \Rightarrow \rho = \frac{p\mu}{RT}).$$

2. Визначимо відношення коефіцієнтів внутрішнього тертя:

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{D_1}{D_2} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{D_1}{D_2} \frac{\mu_1}{\mu_2} = 0,8 \cdot \frac{44 \cdot 10^{-3}}{28 \cdot 10^{-3}} = 1,257 = 1,26.$$

Тут враховано, що

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

3. Визначення коефіцієнтів теплопровідності газу

Коефіцієнт теплопровідності визначається за формулою:

$$\chi = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda} c_V,$$

Його можна виразити через коефіцієнт внутрішнього тертя і питому теплоємність при сталому об'ємі:

$$\chi = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda} c_V = D \rho c_V = \eta c_V.$$

Тоді коефіцієнти теплопровідності для 1-го і 2-го газів:

$$\chi_1 = \eta_1 c_{V1};$$

$$\chi_2 = \eta_2 c_{V2}.$$

Питомі теплоємності для сталого об'єму беремо з таблиць: для вуглекислого газу $c_{V1} = 654 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$; для азоту $c_{V2} = 741 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$.

3. Відношення коефіцієнтів теплопровідності:

$$\frac{\chi_1}{\chi_2} = \frac{\eta_1}{\eta_2} \cdot \frac{c_{V1}}{c_{V2}} = 1,26 \cdot \frac{654}{741} = 1,257 = 0,96.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{D_1}{D_2} = 0,8; \quad \frac{\eta_1}{\eta_2} = 1,26; \quad \frac{\chi_1}{\chi_2} = 0,96.$$

Розділ 3. Задачі для самостійного розв'язування

3.1. Молекулярна фізика

Рівняння стану ідеального газу

1. Скільки молекул міститься в 1 см^3 води, яка маса молекули води, який приблизно розмір молекули води? ($m_0 = 3 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$, $N = 0,33 \cdot 10^{23}$ молекул, $d = 3,11 \cdot 10^{-10} \text{ м}$).
2. Визначити середню відстань $\bar{b}$ між центрами молекул водяної пари в нормальних умовах, порівняти її з діаметром самих молекул ($\bar{b} = 3,1 \cdot 10^{-10} \text{ м}$).
3. Скільки молекул містять 2 г водяної пари? ($N = 6,7 \cdot 10^{22}$ молекул).
4. Скільки молекул буде знаходитися в 1 см^3 посудини при 10°C , якщо посудину відкачано до $p = 1 \cdot 10^{-11} \text{ мм рт.ст.}$? ($3,4 \cdot 10^5$).
5. Визначити масу однієї молекули наступних газів: 1) кисню O_2 , 2) азоту N_2 , 3) окису азоту NO ((1) $5,3 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$; 2) $4,65 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$; 3) $4,99 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$).
6. Визначити кількість речовини ν та кількість молекул у балоні з киснем масою 0,5 кг. (15,6 моль, $9,4 \cdot 10^{24}$ молекул).
7. У балоні місткістю $V = 3 \text{ л}$ знаходиться кисень масою 4 г. Визначити кількість речовини ν газу і концентрацію n його молекул ($\nu = 0,125$ моль; $n = 2,51 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$).
8. Яка кількість молів газу знаходиться в балоні об'ємом 10 м^3 при тиску 720 мм рт. ст. і температурі 17°C ? (415 моль).
9. Яка кількість речовини ϵ в газовому балоні об'ємом 2 л при тиску $1,013 \text{ МПа}$ і температурі 10°C . (0,86 моль).
10. Визначити об'єм, який займає 2 г водню, якщо концентрація молекул $n = 2 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}$ ($3 \cdot 10^3 \text{ м}^3$).
11. В балоні об'ємом 3 л є кисень масою 10 г. Визначити концентрацію молекул газу. ($6,27 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$).
12. Визначити концентрацію n молекул ідеального газу при температурі $T = 300 \text{ К}$ і тиску $p = 1 \text{ МПа}$ ($n = 2,42 \cdot 10^{17} \text{ м}^{-3}$).
13. Знайти масу атома: 1) водню, 2) гелію.
($m = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ (водню); $m = 6,64 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ (гелію)).
14. У скільки разів вага повітря взимку (7°C) більша за його вагу влітку (37°C)? Тиск однаковий (1,1 рази).
15. 10 г кисню знаходяться під тиском 3 атм при температурі 10°C . Після розширення внаслідок нагрівання при постійному тиску кисень зайняв об'єм 10 л. Знайти: 1) об'єм газу до розширення; 2) густину газу до

- розширення; 3) температуру газу після розширення; 4) густину газу після розширення.
- (1) $V_1 = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$; 2) $\rho_1 = 4,14 \text{ кг/м}^3$ [примітка: при переводі фізичної атмосфери в Па: $1 \text{ атм} = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ Па}$]; 3) $T_2 = 1170 \text{ К}$; 4) $\rho_2 = 1 \text{ кг/м}^3$).
16. Колбу об'ємом $V = 300 \text{ см}^3$, що містить розріджене повітря, закрито пробкою з краном. Для вимірювання тиску в колбі шийку колби занурили у воду на незначну глибину і відкрили кран. В результаті у колбу увійшла вода масою $m = 292 \text{ г}$. Визначити початковий тиск p у колбі, якщо атмосферний тиск $p_0 = 100 \text{ кПа}$. ($2,67 \cdot 10^3 \text{ Па}$).
17. В балоні знаходилось 10 кг газу при тиску 10 МПа . Знайти, яку масу газу взяли з балона, якщо тиск став рівним $2,5 \text{ МПа}$. Температуру вважати постійною ($7,5 \text{ кг}$).
18. Яка маса повітря вийде з кімнати об'ємом 100 м^3 після підвищення температури від 10 до 25° C , якщо атмосферний тиск 102 кПа ? ($6,35 \text{ кг}$).
- 19* Яка кількість нейтронів, протонів та електронів міститься в 1 мг алюмінію? Густина алюмінію 2700 кг/м^3 , атомна маса 27 , номер в періодичній системі 13 ($2,9 \cdot 10^{20}$ електронів та протонів, $3,1 \cdot 10^{20}$ нейтронів).
20. У відкритій посудині при $t_1 = 20^\circ \text{ C}$ є повітря $m_1 = 150 \text{ г}$. На яку величину Δm зменшиться маса повітря в посудині при нагріванні її до $t_1 = 100^\circ \text{ C}$? Зміною розмірів посудини при нагріванні знехтувати ($\Delta m = 32,2 \text{ г}$).
21. Балон для газового зварювання місткістю 20 л був заповнений киснем при температурі 15° C . Коли частину кисню витратили, тиск у балоні знизився на $506,5 \text{ кПа}$. Скільки кисню було витрачено ($\Delta m = 0,135 \text{ кг}$).
22. Температура повітря в посудині об'ємом 5 л становить 27° C , його тиск $2,026 \text{ МПа}$. Визначити масу повітря, яке потрібно випустити з посудини, щоб тиск у ній знизився до $1,013 \text{ МПа}$ ($\Delta m = 0,059 \text{ кг}$).
23. Відкрита посудина нагріта до температури $t_2 = 450^\circ \text{ C}$. Яка частина маси повітря залишилась в ній в порівнянні з тією кількістю, яка була при $t_1 = 27^\circ \text{ C}$? Розширенням посудини знехтувати ($m_2/m_1 = 0,415$).
24. Балон з повітрям, тиск якого 97 кПа , сполучений з поршневим повітряним насосом. Після п'яти ходів поршня тиск повітря в балоні став 29 кПа . Визначити відношення об'ємів балона та циліндра поршневого насоса ($V_1/V_2 = 3,68$).
- 25* Циліндрична посудина поділена на дві частини рухомим поршнем. Яке буде положення поршня у рівновазі, коли в одну частину посудини вміщено деяку вагову кількість кисню, а в другу – таку ж кількість водню, якщо загальна довжина посудини становить 85 см ? ($\ell_1 = 5 \text{ см}$, $\ell_2 = 80 \text{ см}$)
26. Балон місткістю 12 л заповнений азотом при тиску $8,1 \text{ МПа}$ і температурі 17° C . Знайти масу азоту ($1,13 \text{ кг}$).

27. Яким може бути найменший об'єм балона, що містить 6,4 кг кисню, якщо його стінка при температурі 20°C витримує тиск 160 кгс/см^2 ? ($3,1 \cdot 10^{-2}\text{ м}^3$)
28. Газ в кількості $m=16\text{ г}$ при тиску $p=10^6\text{ Н/м}^2$ і температурі $t=112^{\circ}\text{C}$ займає об'єм $V=1600\text{ см}^3$. Визначити який це газ (кисень).
29. Манометр на балоні із стиснутим повітрям при температурі 18°C показує тиск 84 кгс/см^2 . Який буде тиск, якщо температура повітря знизиться до мінус 23°C ? Зміною об'єма балону від охолодження знехтувати (72 кгс/см^2 або в СІ $7,1 \cdot 10^6\text{ Н/м}^2$).
30. Яка температура 2 г азоту, що займають об'єм 820 см^3 при тиску 2 атм (279K)
31. Який об'єм займають 10 г кисню при тиску 750 мм рт. ст. та температурі 20°C ($7,6 \cdot 10^{-3}\text{ м}^3$).
32. У кулі діаметром 20 см міститься 7 г повітря. До якої температури можна нагріти цю кулю, якщо максимальний тиск, який витримують стінки кулі $3 \cdot 10^5\text{ Н/м}^2$ (625 K).
33. Балон місткістю 12 л наповнили азотом при тиску $8,1 \cdot 10^6\text{ Н/м}^2$ і температурі 17°C . Визначити масу азоту в балоні (1,13 кг).
34. Визначити масу повітря в приміщенні, що має висоту 4 м та площу 100 м^2 . Температура в приміщенні 20°C , тиск 760 мм рт. ст. (483 кг).
35. 5 г азоту, що знаходиться в закритій посудині місткістю 4 л при температурі 20°C , нагрівають до температури 40°C . Знайти тиск газу до і після нагрівання ($p_1=1,087 \cdot 10^5\text{ Па}$; $p_2=1,16 \cdot 10^5\text{ Па}$).
36. Балони електричних ламп старого зразку часто заповнювали інертним газом, який під час горіння лампи нагрівався приблизно до 100°C . Яким має бути тиск газу у холодному балоні (при кімнатній температурі 22°C), щоб під час горіння лампи він був не вищий від атмосферного? (0,8 атм).
38. Знайти тиск одного кілограм молю газу, якщо при температурі 300 К його об'єм 1 м^3 ($2,5 \cdot 10^6\text{ Н/м}^2$).
39. 10 г кисню знаходяться під тиском $0,303\text{ мкПа}$ при температурі 10°C . Після розширення, внаслідок нагрівання при постійному тиску, кисень зайняв об'єм 10 л. Знайти об'єм газу до розширення і температуру газу після розширення ($V_1=2,4 \cdot 10^{-3}\text{ м}^3$; $T_2=1,18 \cdot 10^3\text{ K}$).
40. Знайти густину водню при температурі 15°C і тиску 730 мм рт.ст. ($\rho = 0,081\text{ кг/м}^3$)
41. Густина деякого газу при температурі 10°C і тиску $2 \cdot 10^5\text{ Па}$ дорівнює $0,34\text{ кг/м}^3$. Чому дорівнює маса одного моля цього газу, що це за газ? ($\mu = 4 \cdot 10^{-3}\text{ кг/моль}$)
42. Густина газу при тиску $2 \cdot 10^5\text{ Н/м}^2$ і температурі 7°C дорівнює $2,41\text{ кг/м}^3$. Яка молярна маса цього газу? Який це газ ($\mu = 28 \cdot 10^{-3}\text{ кг/моль}$).

43. До якої температури потрібно нагріти ідеальний газ, щоб його густина зменшилася у два рази порівняно з густиною цього газу при $t_0 = 0^\circ\text{C}$?
($T=2T_0=546\text{ K}$)
44. При якому тиску p густина ρ газоподібного азоту, що має температуру $t = -73^\circ\text{C}$, складає 0,4 густини води кімнатної температури $\rho_0 = 10^3\text{ кг/м}^3$?
($p = 2,4 \cdot 10^7\text{ Н/м}^2$)
45. У балоні міститься газ метан під тиском 200 атм при температурі 27°C . Знайти густину газу в балоні. Маса одного моля метану CH_4
 $\mu = 16 \cdot 10^{-3}\text{ кг/моль}$ (129 кг/м^3).
46. Атмосфера Венери складається переважно з вуглекислого газу CO_2 . Визначити, у скільки разів густина ρ_1 атмосфери біля поверхні Венери більша від густини ρ_2 атмосфери біля поверхні Землі. Прийняти, що тиск p_1 атмосфери Венери більший від тиску p_2 атмосфери Землі в 100 разів, а середня температура T_1 на поверхні Венери складає $7/3$ від температури T_2 на Землі (65 разів).
47. Визначити густину повітря в камері шин автомобіля, якщо тиск у камері $0,28\text{ МПа}$ (надлишковий), а температура 20°C ($\rho = 3,35\text{ кг/м}^3$).
48. Вузька циліндрична запаяна з одного кінця трубка розташована горизонтально. Повітря в трубці, об'єм якого 240 мм^3 , відмежовується від атмосфери стовпчиком ртуті довжиною 15 см . Якщо трубку поставити вертикально відкритим кінцем до верху, то об'єм повітря в ній буде 200 мм^3 . Визначити атмосферний тиск ($99 \cdot 10^3\text{ Па}$).
49. Два балони сполучені між собою трубкою з краном. В першому балоні міститься 3 л газу при тиску 2 атм , а в другому – 4 л при тиску 1 атм . Який тиск (в атм) буде в балонах, якщо відкрити кран? Температура весь час залишається сталою ($1,4\text{ атм}$).
50. 6 г вуглекислого газу (CO_2) і 5 г закису азоту (N_2O) заповнюють посудину місткістю 2 дм^3 . Який загальний тиск у посудині при температурі 127°C ? ($4,15 \cdot 10^5\text{ Па}$).
51. Який об'єм V займає суміш газів – азоту масою $m_1 = 1\text{ кг}$ і гелію масою $m_2 = 1\text{ кг}$, при нормальних умовах: $T_0 = 273\text{ K}$;
 $p_0 = 1,01 \cdot 10^5\text{ Па} = 760\text{ мм рт.ст.} = 1\text{ атм}$ ($6,4\text{ м}^3$).
52. Балони місткістю $V_1 = 20\text{ л}$ і $V_2 = 44\text{ л}$ заповнені газом. Тиск у першому балоні $p_1 = 2,4\text{ МПа}$, у другому – $p_2 = 1,6\text{ МПа}$. Визначити загальний тиск p та парціальні тиски p'_1 і p'_2 після сполучення балонів, якщо температура газу залишилася попередньою ($0,76\text{ МПа}$; $1,12\text{ МПа}$; $1,88\text{ МПа}$).
53. Вважаючи, що в повітрі міститься $23,6$ вагових % кисню та $76,4$ вагових % азоту, знайти густину повітря при тиску 750 мм рт. ст. і температурі 13°C .

- Знайти парціальні тиски кисню та азоту в цих умовах.
 $(\rho = 1,2 \text{ кг/м}^3; p_1 = 2,1 \cdot 10^4 \text{ Па}; p_2 = 7,9 \cdot 10^4 \text{ Па})$.
54. У посудині знаходиться суміш 10 г вуглекислого газу і 15 г азоту. Знайти густину цієї суміші при температурі 27°C і тиску $1,5 \cdot 10^5 \text{ Па}$.
 $(\rho = 1,97 \text{ кг/м}^3)$.
55. Знайти густину суміші 10^{-2} кг вуглекислого газу і $1,5 \cdot 10^{-2} \text{ кг}$ азоту при температурі 300 K і тиску $0,15 \text{ МПа}$ $(\rho = 1,97 \text{ кг/м}^3)$.
56. Знайти молярну масу суміші, що утворилася з $3,8 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$ кисню і $2,2 \cdot 10^{-2} \text{ кг}$ вуглекислого газу $(\mu = 4 \cdot 10^{-2} \text{ кг/моль})$.
57. У 1 кг сухого повітря знаходиться $m_1 = 232 \text{ г}$ кисню і $m_2 = 768 \text{ г}$ азоту. Знайти відносну молярну масу повітря.
 $(\mu_{\text{сум}} = 28,8 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}; \mu_{\text{відн}} = 28,8 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль})$.
58. Визначити молярну масу газу, властивості якого відповідають властивостям суміші 160 г кисню та 120 г азоту $(\mu = 30,2 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль})$.
59. У балоні, об'єм якого 14 дм^3 , міститься 64 г суміші гелію з киснем при температурі 7°C та тиску $12 \cdot 10^5 \text{ Па}$. Знайти масу гелію та масу кисню.
 $(m_1 = 24 \cdot 10^{-3} \text{ кг}; m_2 = 40 \cdot 10^{-3} \text{ кг})$.
60. У двох однакових за об'ємом посудинах міститься повітря: в одній – при температурі T_1 і тиску p_1 , в другій – при температурі T_2 і тиску p_2 . Посудини сполучають між собою і нагрівають до температури T . Який тиск встановиться в посудинах? Розширенням посудини при нагріванні знехтувати. $(p = \frac{T}{2} \left(\frac{p_1}{T_1} + \frac{p_2}{T_2} \right))$
61. Накреслити графіки ізоермічного, ізобарного та ізохорного процесів в ідеальному газі у системах координат pV , pT , VT . Порівняти ці графіки.
62. На рис. 1 зображено графік зміни стану ідеального газу в координатах VT . Виразити ці процеси графічно в координатах pV та pT . Назвати ці процеси.
63. Зміна стану ідеального газу сталої маси зображена на рис. 2. В т. 1 температура газу T_0 . Визначити температуру газу в т. 2, 3, 4.
 $(T_2 = 3T_0; T_3 = 6T_0; T_4 = 2T_0)$.
64. При нагріванні газу отримали графік залежності тиску від абсолютної температури у вигляді прямої,

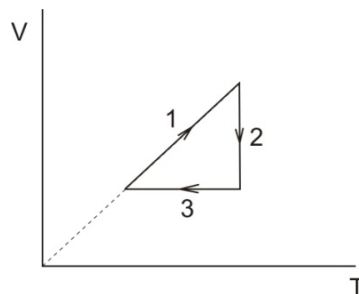


Рис. 1

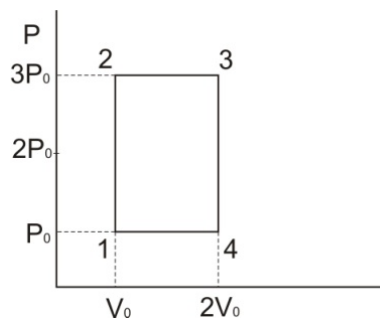


Рис. 2

подовження якої перетинає вісь p у деякій точці вище (нижче) початку координат. Визначити, стискався, чи розширювався газ під час нагрівання («вище» – стискається, «нижче» – розширюється).

65. У двох різних посудинах знаходиться по 1 молю різних газів (див. рис. 3). Вважаючи гази ідеальними, вказати у скільки разів різняться між собою молярні маси газів, густини газів; тиски газів за однакових температур; тиски газів, якщо абсолютна температура газу в першій посудині у 4 рази вища? (0,25; 1; 4; 16).

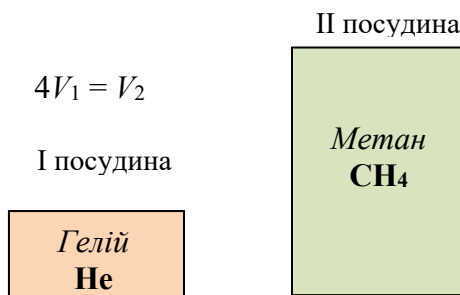


Рис. 3

Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів (МКТ), швидкості молекул

66. Тиск p газу дорівнює 1 МПа , концентрація n його молекул рівна $1 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$. Визначити: 1) температуру T газу; 2) середню кінетичну енергію $E_k^{(1)}$ поступального руху молекули.
(1) $T = 7,25 \text{ К}$; 2) $E_k^{(1)} = 1,5 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$
67. Молекула кисню при нормальних умовах рухається з середньою квадратичною швидкістю 425 м/с . Визначити середню кінетичну енергію поступального руху молекули. ($E_k^{(1)} = 4,8 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$)
68. Визначити середню кінетичну енергію поступального руху молекули аміаку, а також повну кінетичну енергію молекул одного моля аміаку при температурі 373 К . ($E_k^{(1)} = 7,73 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$; $E_k = 9,3 \text{ кДж}$).
69. Визначити сумарну енергію теплового руху всіх молекул кисню (O_2), що займають об'єм $V = 5,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ при тиску $p = 202,6 \text{ кПа}$. ($E_k = 2,79 \text{ кДж}$)
70. Густина деякого газу $\rho = 0,06 \text{ кг/м}^3$, середня квадратична швидкість його молекул $v_{\text{кв}} = 500 \text{ м/с}$. Знайти тиск газу на стінки посудини. (5 кПа)
71. Кількість речовини деякого газу $\nu = 1,5 \text{ моль}$, температура $t = 120^\circ \text{C}$, тиск $P = 200 \text{ Па}$. Знайти об'єм газу. ($24,5 \text{ м}^3$)
72. При якій температурі середня кінетична енергія $E_k^{(1)}$ поступального руху молекули газу рівна $4,14 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$? (200 К)
73. Посудина із внутрішнім об'ємом $V = 4 \text{ л}$ містить $m = 0,6 \text{ г}$ деякого газу під тиском $p = 2 \text{ атм}$. Визначити середню квадратичну швидкість молекул газу. ($2 \cdot 10^3 \text{ м/с}$)

74. Яка температура відповідає середній квадратичній швидкості молекул вуглекислого газу 200 м/с? ($t = -203^{\circ}\text{C}$)
75. Середня квадратична швидкість руху молекул деякого газу, що перебуває під тиском 50 кПа, дорівнює 449 м/с. Визначити густину газу при цих умовах. ($\rho = 0,744 \text{ кг/м}^3$)
76. При якій температурі середня квадратична швидкість молекул кисню дорівнює швидкості молекул азоту при температурі 373 К. ($T=426 \text{ К}$)
77. *Кінетична енергія поступального руху молекул азоту, що знаходиться в об'ємі 20 дм³, дорівнює 5 кДж, а середня квадратична швидкість його молекул рівна 2 км/с. Знайти: 1) масу азоту в балоні; 2) тиск, під яким знаходиться азот (1) $m=2,5 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$; 2) $p=1,67 \cdot 10^5 \text{ Па}$)
78. Визначити середню кінетичну енергію $E_{\kappa}^{(1)}$ поступального руху та середнє значення $W_k^{(1)}$ повної кінетичної енергії молекули водяної пари при температурі $T = 600 \text{ К}$. Знайти також кінетичну енергію E_{κ} поступального руху всіх молекул пари, що міститься в двох кіломолях речовини. ($1,24 \cdot 10^{-20} \text{ Дж}$; $2,48 \cdot 10^{-20} \text{ Дж}$; $14,95 \text{ МДж}$).
79. Визначити середнє значення $W_k^{(1)}$ повної кінетичної енергії однієї молекули гелію, кисню та водяної пари при температурі $T = 400 \text{ К}$. ($8,28 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$; $1,38 \cdot 10^{-20} \text{ Дж}$; $1,66 \cdot 10^{-20} \text{ Дж}$)
80. Визначити кінетичну енергію $E_{\kappa 1}^{(1)}$ що припадає в середньому на одну ступінь вільності молекули азоту при температурі $T = 1 \text{ К}$, а також середню кінетичну енергію $E_{\kappa}^{(1)}$ поступального руху, середню кінетичну енергію $E_{об}^{(1)}$ обертального руху та середнє значення повної кінетичної енергії $W_k^{(1)}$ однієї молекули. ($6,9 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$; $20,7 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$; $34,5 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$)
81. Знайти середню арифметичну швидкість молекул газу, коли відомо, що середня квадратична швидкість 400 м/с. ($\bar{v} = 370 \text{ м/с}$)
82. Знайти найбільш імовірну, середню арифметичну та середню квадратичну швидкості молекул газу, густина якого при тиску 40 кПа дорівнює $0,3 \text{ кг/м}^3$. ($v_{im} = 516,4 \text{ м/с}$; $\bar{v} = 582,8 \text{ м/с}$; $v_{кв} = 632,4 \text{ м/с}$)
83. Знайти середню квадратичну швидкість молекул повітря за температури 17° С . Молярна маса повітря $29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$. ($v_{кв} = 500 \text{ м/с}$)
84. Визначити середню квадратичну швидкість $v_{кв}$ молекул газу масою $m = 0,3 \text{ г}$, що знаходиться в посудині місткістю $V = 2 \text{ л}$ під тиском $p = 200 \text{ кПа}$. ($2 \cdot 10^3 \text{ м/с}$)

85. Знайти відношення середніх квадратичних швидкостей молекул гелію та азоту при однакових температурах. (2,65)
86. Знайти середню квадратичну $v_{\text{кв}}$, середню арифметичну $\bar{v}$ та найімовірнішу $v_{\text{ім}}$ швидкості молекул водню. Обчислення виконати для трьох значень температури: 1) $T = 20\text{K}$; 2) $T = 300\text{K}$; 3) $T = 5000\text{K}$.
(1) 500 м/с; 462 м/с; 407 м/с; 2) 1,94 км/с; 1,79 км/с; 1,58 км/с; 3) 790 км/с; 730 км/с; 648 км/с)
87. При якій температурі T середня квадратична швидкість атомів гелію буде дорівнювати другій космічній швидкості $v_2 = 11,2\text{км/с}$? (20,1 К)
88. Знайти середню арифметичну швидкість $\bar{v}$ молекул газу, якщо їх середня квадратична швидкість $v_{\text{кв}} = 1\text{ км/с}$. (0,92 км/с)
89. *Посудина, що містить деяку масу одноатомного газу, рухається зі швидкістю u . На скільки збільшиться середній квадрат швидкості теплового руху молекул при зупинці посудини? Теплоємність, теплопровідність і маса стінок посудини зникаюче малі. (u)
90. При температурі $t = 527^\circ\text{C}$ найбільш імовірна швидкість молекул деякого газу $v_{\text{ім}} = 1820\text{м/с}$. Встановити, який це газ ($4 \cdot 10^{-3}\text{ кг}$)
91. Яка частина молекул кисню при 0°C володіє швидкістю від 900 м/с до 1000 м/с? (1,1%)
92. Яка частина молекул водню при 0°C володіє швидкістю від 2000 м/с до 2100 м/с? (4,5%)
93. Чому дорівнює при нормальних умовах (н.у.) число молекул кисню в 1м^3 , швидкість яких лежить в інтервалі від 100 м/с до 110 м/с? ($1,06 \cdot 10^{23}$)
94. У скільки разів число молекул ΔN_1 , швидкості яких лежать в інтервалі від $v_{\text{ім}}$ до $v_{\text{ім}} + \Delta v$ більше від числа молекул ΔN_2 , швидкості яких лежать в інтервалі від $v_{\text{кв}}$ до $v_{\text{кв}} + \Delta v$? (1,1 рази)
95. Яка частина молекул азоту, що знаходиться при температурі T , має швидкості в інтервалі від $v_{\text{ім}}$ до $v_{\text{ім}} + \Delta v$, де $\Delta v = 20\text{м/с}$? Задачу розв'язати для 1) $T = 400\text{K}$ і 2) $T = 900\text{K}$. (1) 3,4%; 2) 2,2%)
96. Знайти відношення числа молекул кисню, швидкості яких при температурі $t = 127^\circ\text{C}$ лежать у межах від 598 до 602 м/с, до числа молекул, швидкості яких лежать у межах від 298 до 302 м/с. (1,1)
97. У закритій посудині міститься $m = 0,1\text{кг}$ кисню. Обчислити кількість молекул кисню, швидкості яких лежать у межах від 195 до 205 м/с при $t = 0^\circ\text{C}$. ($2,3 \cdot 10^{22}$)
98. Яка частина молекул азоту при температурі $t = 150^\circ\text{C}$ володіє швидкостями в інтервалі від $v_1 = 300\text{м/с}$ до $v_2 = 800\text{м/с}$? (70%)

Примітка. Скористатися таблицею, яка відображає залежність долі молекул $\frac{N_x}{N}$, швидкості яких перевищують задане значення відносної швидкості u , від величини u

u	$\frac{N_x}{N}$	u	$\frac{N_x}{N}$	u	$\frac{N_x}{N}$
0	1,000	0,6	0,868	1,25	0,374
0,2	0,994	0,7	0,806	1,5	0,213
0,4	0,957	0,8	0,734	2,0	0,046
0,5	0,918	1,0	0,572	2,5	0,0057

Примітка. Скористатися таблицею з задачі № 98

[1) 57%; 2) 43%]

99. Оцінити масу повітря у вашій кімнаті.

100. В балоні знаходиться 8г кисню при температурі 1600 К. Яке число молекул кисню має кінетичну енергію поступального руху, яка перевищує значення $E_k^{(1)} = 6,65 \cdot 10^{-20}$ Дж ?

Примітка. Скористатися таблицею з задачі № 98

$(1,8 \cdot 10^{22})$

101. В балоні знаходиться 2,5г кисню. Знайти число молекул кисню, швидкості яких перевищують значення середньої квадратичної швидкості.

Примітка. Скористатися таблицею з задачі № 98

$(1,9 \cdot 10^{22})$

102. Яка швидкість руху атомів срібла в досліді Штерна, якщо частота обертання циліндрів дорівнює 1250 об/хв ? Радіуси циліндрів 8см та 2см , а відстань між смужками напиленого срібла 1мм . (627 м/с)

103. *За графіком, зображеним на рис. 4., визначте абсолютну температуру азоту у випадку I та II. Оцініть для випадку I частину молекул, швидкість яких перевищує 500 м/с. (для $u > 500$ м/с 0,37)

104. Вважаючи температури різних газів однаковими (рис. 5) вкажіть газ I, якщо II – це вуглекислий газ. Визначте температуру газів та середні квадратичні швидкості їх молекул.

$(\mu_I = 0,054$ кг/моль; $T = 380$ К; $u_I = 514$ м/с; $u_{II} = 465$ м/с)

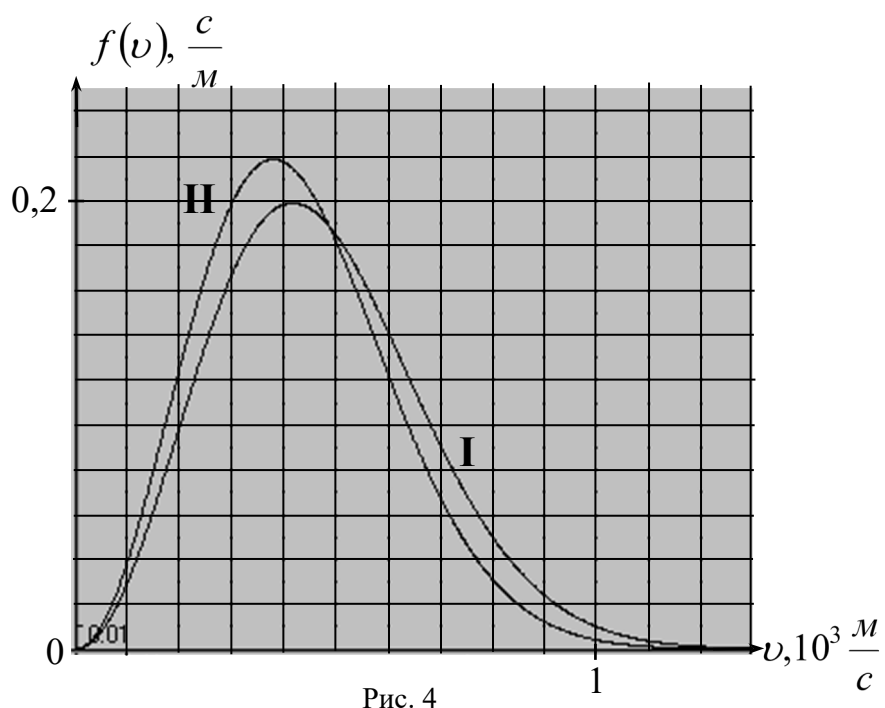


Рис. 4

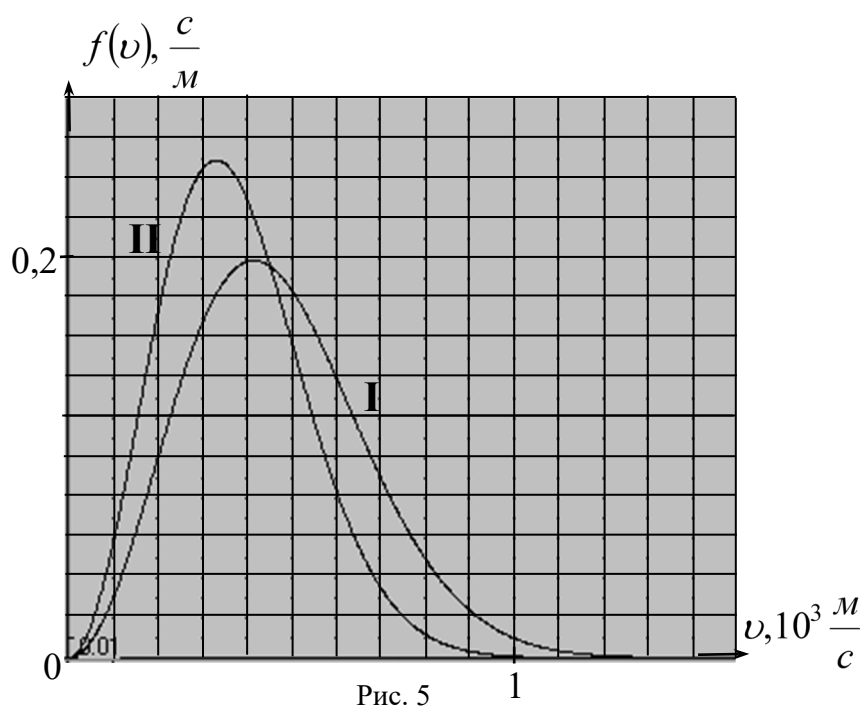


Рис. 5

105. Тиск повітря на рівні моря $p_0 = 750 \text{ мм рт. ст.}$, а на вершині гори – 590 мм рт. ст. . Яка висота гори, якщо температура повітря 5°C ? (1950 м)
106. Висотна космічна станція розміщена на висоті 3250 м над рівнем моря. Знайти тиск повітря на цій висоті. Температуру повітря вважати постійною і рівною 5°C . Молярна маса повітря $\mu = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$. Тиск на рівні моря 760 мм рт. ст. (510 мм рт. ст.)
107. На якій висоті тиск повітря становить 75% його тиску на рівні моря? Температура повітря стала і дорівнює 0°C . (2,3 км)
108. На якій висоті над поверхнею Землі атмосферний тиск у два рази менший, ніж на поверхні, якщо температура повітря стала і дорівнює 0°C ? (5533 м)
109. На скільки більший тиск повітря в шахті на глибині 1 км, ніж на поверхні Землі, якщо температура 0°C ? (1,13)
110. Знайти формулу для тиску повітря у шахті на глибині 1 км, якщо тиск на поверхні Землі p_0 . Температура 0°C . (1,133 p_0)
111. У кабіні літака барометр показує 675 мм рт. ст. . На якій висоті летить літак, якщо на аеродромі барометр показував 750 мм рт. ст. ? Температура повітря 17°C . (895 м)

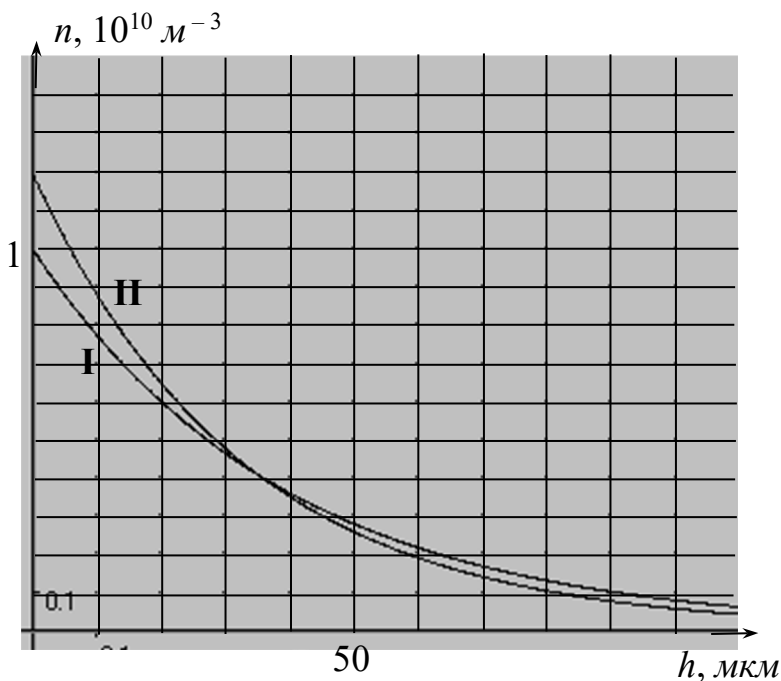


Рис. 6

112. Маса m_0 кожної порошинки, завислої в повітрі, дорівнює 1 аг (атто – 10^{-18}). Відношення концентрації n_1 порошинок на висоті $h_1 = 0,1 \text{ м}$ до їх

- концентрації n_0 на висоті $h_0 = 0$ дорівнює 0,787. Температура повітря $T = 300\text{K}$. Знайти за цими даними значення числа Авогадро.
($6,1 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$)
113. У сухому нерухомому повітрі зависли часточки диму, середня маса яких $1,1 \cdot 10^{-14} \text{ г}$. За графіком, зображеним на рисунку 6, вкажіть у скільки разів відрізняються кількості завислих частинок диму, що містяться в циліндричному стовпі одиничної площі основи і висотою 35мм, у кожному з випадків. Знайдіть значення температури повітря у випадку II.
($n_{II}/n_I = 1$; 248,5K)
114. Визначити довжину вільного пробігу молекул вуглекислого газу при температурі 100°C і тиску $0,1 \text{ мм рт.ст.}$. Діаметр молекули прийняти рівним $3,2 \cdot 10^{-8} \text{ см}$. ($8,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}$)
115. Знайти середнє число зіткнень за 1с молекул вуглекислого газу при температурі 100°C , якщо середня довжина вільного пробігу при цих умовах дорівнює $8,7 \cdot 10^{-2} \text{ см}$. ($4,9 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$)
116. Визначити середнє число зіткнень молекули кисню з іншими молекулами за 1с при нормальних умовах. Прийняти ефективний діаметр молекули кисню $\sigma = 2,9 \cdot 10^{-8} \text{ см}$. ($4,2 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$)
117. Скільки разів за 1 с стикається молекула азоту з іншими молекулами при температурі 7°C і тиску $10^{-4} \text{ мм рт.ст.}$. Діаметр молекули азоту $3 \cdot 10^{-8} \text{ см}$. ($6,9 \cdot 10^2 \text{ с}^{-1}$)
118. Визначити число всіх зіткнень між молекулами за 1 с в 1 см^3 азоту при нормальних умовах. Ефективний діаметр молекули азоту $\sigma = 3 \cdot 10^{-8} \text{ см}$.
($7,39 \cdot 10^{28} \text{ с}^{-1}$)
119. Визначити число всіх зіткнень між молекулами за 1с в 1 см^3 кисню при температурі 27°C і тиску 750 мм рт.ст. Ефективний діаметр молекули кисню $\sigma = 2,9 \cdot 10^{-8} \text{ см}$. ($9,67 \cdot 10^{28} \text{ с}^{-1}$)
120. Знайти залежність середнього числа зіткнень $\bar{z}$ молекул ідеального газу за 1 с від температури T у наступних процесах: 1) ізохоричному, 2) ізобаричному. Зобразити ці залежності на графіках.
(1. $\bar{z} \sim \sqrt{T}$; 2. $\bar{z} \sim \frac{1}{\sqrt{T}}$).
121. Знайти середнє число зіткнень за 1 с молекул газу, якщо середня довжина вільного пробігу $\bar{\lambda} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ см}$, а середня арифметична швидкість його молекул 500 м/с . (10^8 с^{-1})
122. Середня довжина вільного пробігу молекул вуглекислого газу при нормальних умовах дорівнює $\bar{\lambda} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ см}$. Визначити середнє число зіткнень молекули з іншими молекулами за 1 с. ($9,06 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$)

123. Знайти середню довжину вільного пробігу молекул азоту при температурі 17°C і тиску 10^4 Па . (10^{-6} м)
124. В посудині знаходиться вуглекислий газ, густина якого $\rho = 1,7 \text{ кг/м}^3$; середня довжина вільного пробігу його молекул в цих умовах дорівнює $\bar{\lambda} = 7,9 \cdot 10^{-6} \text{ см}$. Знайти діаметр молекул вуглекислого газу. ($3,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}$)
125. Знайти середній час між двома послідовними зіткненнями молекул азоту при температурі 10°C і тиску 1 мм рт. ст. . ($1,6 \cdot 10^{-7} \text{ с}$)
126. Знайти залежність середньої довжини вільного пробігу $\bar{\lambda}$ молекул ідеального газу від тиску p у наступних процесах: 1) ізохоричному, 2) ізотермічному. Зобразити ці залежності на графіках.
(1. не залежить; 2. $\bar{\lambda} \sim \frac{1}{p}$).
127. Знайти залежність середньої довжини вільного пробігу $\bar{\lambda}$ молекул ідеального газу від температури T у наступних процесах: 1) ізохоричному, 2) ізобаричному. Зобразити ці залежності на графіках.
(1. не залежить; 2. $\bar{\lambda} \sim T$).
128. Яке найбільше число молекул водню може бути в 1 см^3 сферичної посудини, діаметр якої дорівнює 10 см , щоб молекули, пролітаючи від стінки до стінки, не зазнавали взаємних зіткнень? Діаметр молекули газу прийняти рівним $\sigma = 2,3 \cdot 10^{-8} \text{ см}$. ($4,25 \cdot 10^{13}$)
129. Який тиск у посудині діаметром 20 см , якщо в ній досягнуто середнього вакууму при температурі 0°C ? $\sigma = 3 \cdot 10^{-8} \text{ см}$. ($3,5 \cdot 10^{-4} \text{ мм рт. ст.}$)

3.2. Реальні гази та рідини. Фазові переходи. Явища перенесення

Реальні гази та рідини. Фазові переходи

130. Знайти критичний молярний об'єм азоту за відомими параметрами $T_{кр}$ і $p_{кр}$. ($V_{0к} = 115,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$)
131. Знайти критичний об'єм 1 кмоль кисню за відомими для нього значеннями $T_{кр}$ і $p_{кр}$. ($V_{к} = 9,45 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3$)
132. Для води відомі поправки Ван-дер-Ваальса $a = 0,554 \frac{\text{Дж} \cdot \text{м}^3}{\text{моль}^2}$;
 $b = 3,06 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}$. Чому дорівнює критичний тиск і критична

- температура? Визначити критичний об'єм для 1 г води. ($p_{кр} = 224 \text{ атм}$;
 $T_{кр} = 655 \text{ К}$; $t_{кр} = 382^\circ \text{С}$; $V_{кр} = 5 \text{ см}^3$).
133. Визначити густину водяної пари в критичному стані з відомої поправки b в рівнянні Ван-дер-Ваальса. ($\rho = 200 \text{ кг/м}^3$).
134. Знайти густину гелію в критичному стані з відомих для гелію значень критичних величин $T_{кр}$ і $p_{кр}$. ($\rho = 57 \text{ кг/м}^3$)
135. Розрахувати густину кисню у критичному стані. ($\rho = 338 \text{ кг/м}^3$)
136. За критичними значеннями температури $T_{кр}$ і тиску $p_{кр}$ знайдіть значення поправок Ван-де-Ваальса a і b для кисню.
 $(a = 0,136 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^4}{\text{моль}^2}; b = 3,16 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}})$.
137. Визначити середню довжину вільного пробігу молекул аргону при нормальних умовах, якщо для нього відомі $T_{кр}$ і $p_{кр}$. ($\bar{\lambda} = 9,74 \cdot 10^{-8} \text{ м}$).
138. Знайти ефективний діаметр молекули азоту двома способами: 1) за відомим значенням середньої довжини вільного пробігу молекул при нормальних умовах ($\bar{\lambda} = 9,5 \cdot 10^{-6} \text{ см}$); 2) з відомої величини поправки b в рівнянні Ван-дер-Ваальса. (1). $\sigma = 2,98 \cdot 10^{-10} \text{ м}$; 2) $\sigma = 3,1 \cdot 10^{-10} \text{ м}$)
139. Обчислити, користуючись формулою Ван-дер-Ваальса, тиск 1,1 кг вуглекислого газу, що міститься у балоні місткістю 20л при температурі 13°С . Порівняти результат з тиском ідеального газу при тих самих умовах.
 $(p_1 = 25,4 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2; p_2 = 29,7 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2)$
140. В об'ємі 10^{-4} м^3 при тиску 10^8 Н/м^2 міститься 0,01 кг гелію. Яка температура газу? Якою б була температура газу, якби він був ідеальним?
 $(T_1 = 104 \text{ К}; T_2 = 482 \text{ К})$
141. Знайти тиск 16г кисню, що міститься в посудині місткістю 1л при температурі 7°С . Газ розглядати як 1) ідеальний; 2) реальний.
 $(p_1 = 10,62 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2; p_2 = 11,46 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2)$
142. 4г аргону займають об'єм $0,1 \text{ дм}^3$ при тиску $25 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$. Знайти температуру газу, вважаючи його ідеальним і реальним. ($T_1 \approx 301 \text{ К}$;
 $T_2 = 307 \text{ К}$)
143. Визначити температуру 11г вуглекислого газу, що займає об'єм $2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ при тиску $3 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$, вважаючи газ ідеальним та реальним.
 $(T_1 = 289 \text{ К}; T_2 = 293 \text{ К})$
144. Яка температура 2г азоту, що займають об'єм 20 см^3 при тиску 2 атм ? Газ розглядати як 1) ідеальний; 2) реальний. (При невеликих тисках газ веде себе як ідеальний, $T_1 = 280 \text{ К}$; $T_2 = 280 \text{ К}$.)

145. Знайти поправки a і b для гелію в рівнянні Ван-де-Ваальса, якщо $T_{кр} = 5,2K$, а $p_{кр} = 2,25 атм$. ($a = 3,5 \cdot 10^{-3} \frac{Н \cdot м^4}{моль^2}$; $b = 2,37 \cdot 10^{-5} \frac{м^3}{моль}$)
146. Знайти поправки Ван-де-Ваальса a і b для азоту, якщо в критичному стані його температура дорівнює $T_{кр} = 126K$, а тиск $p_{кр} = 33,5 атм$.
($a = 0,136 \frac{Н \cdot м^4}{моль^2}$; $b = 3,86 \cdot 10^{-5} \frac{м^3}{моль}$).
147. Знайти значення сталих a і b в рівнянні Ван-де-Ваальса для бензолу при відомих для нього значеннях $T_{кр}$ і $p_{кр}$.
($a = 1,92 \frac{Н \cdot м^4}{моль^2}$; $b = 12,2 \cdot 10^{-5} \frac{м^3}{моль}$)
148. Знайти значення сталих Ван-де-Ваальса для вуглекислого газу за допомогою його критичних параметрів $p_{кр} = 73 атм$ і $t_{кр} = 31^\circ C$.
($a = 0,364 \frac{Н \cdot м^4}{моль^2}$; $b = 4,3 \cdot 10^{-5} \frac{м^3}{моль}$).
149. Визначити критичний тиск і температуру для вуглекислого газу, якщо $a = 0,364 \frac{Дж \cdot м^3}{моль^2}$ і $b = 4,3 \cdot 10^{-5} \frac{м^3}{моль}$. ($p_{кр} = 73 атм$; $t_{кр} = 31,1^\circ C$).
150. Обчислити критичну температуру і тиск аргону.
($T_{кр} = 151K$; $p_{кр} = 4,87 \cdot 10^6 Н / м^2$).
151. Обчислити критичну температуру і тиск гелію.
($T_{кр} = 5,2K$; $p_{кр} = 0,23 \cdot 10^6 Н / м^2$).
152. Азот при тиску 200 кПа має густину $\rho = 2,25 кг / м^3$. Визначити температуру і тиск газу, вважаючи його 1) ідеальним; 2) реальним.
(1. $T_{ид} = 299,5K$, $p_{ид} = 0$; 2. $T = 299K$, $p_i = 878 Па$)
153. В закритій посудині об'ємом $V = 0,5 м^3$ знаходиться 0,6 кмоль вуглекислого газу при тиску $p = 3 \cdot 10^6 Па$. Використовуючи рівняння Ван-дер-Ваальса, знайти, у скільки разів потрібно збільшити температуру газу, щоб тиск збільшився вдвічі. (1,85)
154. Кисень масою $m = 32 кг$ адіабатично розширюється у вакуум від об'єму $V_1 = 0,5 м^3$ до об'єму $V_2 = 2 м^3$. Знайти зниження температури ΔT газу при цьому розширенні. Значення сталої a у рівнянні Ван-дер-Ваальса взяти з таблиць. ($\Delta T = 9,8K$)
155. Маса $m = 20 кг$ азоту адіабатично розширюється у вакуум від об'єму $V_1 = 1 м^3$ до об'єму $V_2 = 2 м^3$. Знайти зниження температури ΔT газу

Значення сталої a у рівнянні Ван-дер-Ваальса взяти з таблиць.
($\Delta T = 2,33 K$)

156. Кількість $\nu = 1 \text{ кмоль}$ гелію займає об'єм $V = 0,237 \text{ м}^3$ при температурі $t = -200^\circ \text{C}$. Знайти тиск газу, використовуючи рівняння Ван-дер-Ваальса у зведених величинах. ($p = 2,7 \text{ МПа}$)

Властивості пари. Вологість. Рівняння Клапейрона-Клаузіуса

157. 39,2 кг сухої пари заповнює котел при температурі 200°C . Визначити об'єм котла, якщо пружність пари 15,83 атм. ($V = 5 \text{ м}^3$).
158. Знайти густину насиченої пари води при температурі 50°C .
($\rho = 8,2 \cdot 10^{-2} \text{ кг/м}^3$).
159. У скільки разів густина насиченої пари при температурі 16°C менша за густину води. (74000 разів)
160. У скільки разів густина насиченої пари води більша при температурі 200°C , ніж при температурі 100°C ? (12 раз)
161. Густина вологого повітря при температурі 27°C і тиску $1,03 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$ дорівнює $1,19 \text{ кг/м}^3$. Визначити абсолютну (ρ_1) і відносну (φ) вологість повітря, якщо при температурі 27°C густина насиченої пари $0,027 \text{ кг/м}^3$.
($\rho_1 = 0,014 \text{ кг/м}^3$; $\varphi = 50\%$)
162. У закритій посудині місткістю 10 л міститься вода і 16 г кисню. Тиск у посудині при температурі 327°C становить 5 атм. Знайти масу води (при $t = 300^\circ \text{C}$ вся вода перетворюється на пару). (9,3 г)
163. У циліндрі під поршнем є водяна пара при температурі 50°C , яка чинить тиск 58,5 мм рт. ст. Який буде тиск пари в посудині, якщо об'єм, зайнятий паром, зменшиться в два рази? ($p = 92 \text{ мм рт. ст.}$)
164. У котел об'ємом 5 м^3 накачали 20 кг води і нагріли до 180°C . Знайти масу і тиск пари в котлі. Густина насиченої пари води при температурі 180°C дорівнює $5,05 \text{ кг/м}^3$. ($p = 8,4 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$)
165. Скільки молекул міститься в 1 кг насиченої та ненасиченої пари ртуті і води? ($N_1 = 3 \cdot 10^{24}$; $N_2 = 3,3 \cdot 10^{25}$)
166. Визначити абсолютну вологість повітря, якщо парціальний тиск пари в ньому $p = 1,4 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2$, а температура 60°C . ($\rho_{\text{II}} = 0,091 \text{ кг/м}^3$).
167. Балон місткістю 100 л заповнено сухим повітрям при нормальних умовах. У нього вводять 2 г води і, закривши балон, нагрівають до 50°C . Чому дорівнює відносна вологість повітря в балоні і загальний тиск вологого повітря? ($\varphi = 24\%$; $p = 921,8 \text{ мм рт. ст.}$)

168. Абсолютна вологість повітря при температурі 60°C дорівнює $0,005\text{ кг/м}^3$. Визначити абсолютну вологість після зниження температури до 20°C . Тиск насиченої пари при цій температурі 2335 Н/м^2 .
 $(\rho_2 = \rho_1 = 0,005\text{ кг/м}^3)$
169. У кімнаті при температурі 20°C відносна вологість повітря 20% . Скільки треба випарувати води, щоб збільшити вологість до 50% , якщо об'єм кімнати 40 м^3 ? Густина насиченої пари води при 20°C дорівнює $\rho_H = 1,73 \cdot 10^{-2}\text{ кг/м}^3$. $(\Delta m = 0,208\text{ кг})$
170. Відносна вологість у приміщенні при температурі 20°C дорівнює 70% . Визначити відносну вологість у цьому приміщенні, якщо температура підвищилася до 25°C при сталому об'ємі і відсутності води. $(\varphi = 52\%)$
171. Відносна вологість повітря ввечері при 16°C дорівнювала 60% . Вночі температура знизилася до 4°C і випала роса. Скільки водяної пари сконденсувалося при цьому в 1 м^3 повітря? $(\Delta \rho = 1,76\text{ г/м}^3)$
172. Знайти питомий об'єм води в рідкому і пароподібному стані при нормальних умовах. $(V_p = 10^{-3}\frac{\text{м}^3}{\text{кг}}; V_{II} = 1,25\frac{\text{м}^3}{\text{кг}})$
173. Тиск насиченої водяної пари при 36°C дорівнює $44,6\text{ мм рт. ст.}$. Скільки важить при цій температурі 1 м^3 вологого повітря при відносній вологості 80% і тиску 1 атм ? $(P = 11\text{ Н})$
174. Яка кількість ртуті міститься в 1 м^3 повітря у приміщенні, зараженому ртуттю, при температурі 20°C , якщо тиск насиченої пари ртуті при цій температурі $1,1 \cdot 10^{-3}\text{ мм рт. ст.}$? $(m = 0,012\text{ г})$
175. Розрахувати тиск насиченої пари води при температурі 150°C . Взяти теплоту випаровування води $\Delta H = 44020\text{ Дж/моль}$. $(p_1 = 5,36\text{ атм})$
176. Тиск насиченої ртутної пари при температурах $t_1 = 100^{\circ}\text{C}$ і $t_2 = 120^{\circ}\text{C}$ дорівнює, відповідно, $p_1 = 37,3\text{ Па}$ та $p_2 = 101,3\text{ Па}$. Знайти середнє значення питомої теплоти пароутворення r ртуті у заданому інтервалі температур. $(r = 0,302\text{ МДж/кг})$
177. Тиск насиченої пари етилового спирту ($\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$) при температурах $t_1 = 40^{\circ}\text{C}$ і $t_2 = 60^{\circ}\text{C}$ дорівнює, відповідно, $p_1 = 17,7\text{ кПа}$ та $p_2 = 67,9\text{ кПа}$. Знайти зміну ентропії ΔS при випаровуванні маси $m = 1\text{ г}$ етилового спирту, що знаходиться при температурі $t = 50^{\circ}\text{C}$. $(\Delta S = 2,86\text{ Дж/К})$
178. Зміна ентропії при плавленні 1 моля льоду дорівнює 25 Дж/К . Визначити, наскільки зміниться температура плавлення льоду при збільшенні зовнішнього тиску на 1 МПа . Густина льоду $\rho_1 = 0,9\text{ г/см}^3$, води $\rho_2 = 1\text{ г/см}^3$. $(\Delta T = -0,08\text{ К})$

Рідини. Поверхневий натяг

179. Яку силу потрібно прикласти до горизонтального алюмінієвого кільця висотою 10 см, щоб відірвати його від поверхні води? Внутрішній діаметр кільця 50 мм, зовнішній – 52 мм. Густина алюмінію $\rho = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. Коефіцієнт поверхневого натягу води $\sigma = \alpha = 72,6 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м}$. Яку частину від знайденої сили становлять сили поверхневого натягу?
($F = 65,62 \text{ мН}$; $F_2 / F = 35,4\%$)
180. Котел об'ємом 2 м^3 заповнений водою під тиском 300 атм. Скільки витече води, якщо в кришці котла з'явиться тріщина? ($\Delta V = 28 \text{ л}$)
181. На якій глибині густина води на 0,1% більша, ніж густина води біля поверхні? ($h = 220 \text{ м}$)
182. Спирт краплями витікає з посудини через вертикальну трубку діаметром 2 мм. Вважаючи, що краплі відриваються через 1 секунду одна за одною, знайти, за який час витече 10 г спирту. Вважати, що діаметр шийки краплі в момент відриву дорівнює діаметру трубки. Коефіцієнт поверхневого натягу спирту $\alpha = 20 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м}$. ($\tau = 780 \text{ с} = 13 \text{ хв}$)
183. З вертикальної трубки з внутрішнім радіусом $r = 1 \text{ мм}$ витікають краплі води. Знайти радіус краплі в момент відриву. Краплю вважати сферичною. Діаметр краплі в момент відриву вважати рівним внутрішньому діаметру трубки. (2,2 мм)
184. Прямокутна рама поділена на дві частини пересувною перекладинкою, яка паралельна одній із сторін рами. Обидві частини затягуються плівками різних рідин, коефіцієнти поверхневого натягу яких відповідно дорівнюють $\alpha_1 = 40 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м}$ та $\alpha_2 = 70 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м}$. Визначити силу, що діє на перекладинку, якщо довжина її 10 см. ($F = 6 \cdot 10^{-3} \text{ Н}$)
185. Тонке алюмінієве кільце радіусом 7,8 см і вагою 7 гс, дотикається до розчину мила. Яке треба прикласти зусилля, щоб відірвати кільце від розчину? ($F = 11 \cdot 10^{-2} \text{ Н}$)
186. Алюмінієве кільце висотою 10 см, з внутрішнім діаметром 50 мм, зовнішнім – 52 мм підвісили на пружині так, щоб воно дотикалося до поверхні рідини. Відомо, що під дією сили 1 гс пружина видовжується на 1 мм. При опусканні поверхні рідини кільце відірвалось від неї в той момент, коли пружина розтягнута на 5,4 мм. Знайти коефіцієнт поверхневого натягу рідини. ($\alpha = 30,6 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м}$)
187. Знайти зміну вільної енергії двох мильних бульбашок радіусом 3 см кожна при злитті їх в одну, якщо коефіцієнт поверхневого натягу $\alpha = 45 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м}$. ($\Delta U = 4,2 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}$).

188. Яку роботу проти сил поверхневого натягу треба виконати, щоб видути мильну бульбашку діаметром 4 см. Коефіцієнт поверхневого натягу для мильного розчину $\alpha = 45 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м}$. ($A = 4,32 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}$)
189. Сірник довжиною 4 см плаває по поверхні води. Якщо з одного боку сірника обережно налити мильний розчин, то сірник рухатиметься. В який бік він рухатиметься? Перевірити це на досліді. Обчислити силу, яка рухатиме сірник. Для води коефіцієнт поверхневого натягу $\alpha = 73 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м}$, для мильного розчину $\alpha = 45 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м}$. ($F = 112 \cdot 10^{-5} \text{ Н}$)
190. Визначити вагу водяної краплі, що відривається від трубки, внутрішній діаметр якої 1 мм. Вважати, що діаметр шийки краплі дорівнює діаметру отвору. ($P = 22,6 \cdot 10^{-5} \text{ Н}$)
191. Кільце з внутрішнім діаметром $d_1 = 25 \text{ мм}$ і зовнішнім $d_2 = 26 \text{ мм}$ підвішене на пружині і дотикається до поверхні рідини. Жорсткість пружини $k = 9,8 \cdot 10^{-7} \text{ Н/м}$. При опусканні поверхні рідини кільце відірвалося від неї при розтягуванні пружини на $\Delta \ell = 5,3 \text{ мм}$. Знайти поверхневий натяг рідини. ($\alpha = 0,032 \text{ Н/м}$)
192. Щоб визначити коефіцієнт поверхневого натягу рідини, зважують краплі, що відриваються від трубки, і вимірюють діаметр трубки в місці відриву крапель. Виявляється, що 318 крапель рідини мають масу 5 г, а діаметр трубки дорівнює 0,7 мм. Знайти коефіцієнт поверхневого натягу. ($\alpha = 7 \cdot 10^{-2} \text{ Н/м}$)
193. Визначити вільну енергію поверхні мильної бульбашки діаметром 10 см, якщо коефіцієнт поверхневого натягу мильного розчину $\alpha = 45 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м}$. ($U = 2,83 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}$)
194. Рамка з рухомою нижньою перекладиною довжиною 15 см затянута мильною плівкою. Яку роботу треба виконати проти сил поверхневого натягу, щоб розтягнути плівку на 4 см. Для мильного розчину $\alpha = 45 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м}$. ($A = 4,32 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}$)
195. Яку роботу проти сил поверхневого натягу треба виконати, щоб видути мильну бульбашку діаметром 4 см? Для мильного розчину $\alpha = 45 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м}$. ($A = 2,26 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}$)
196. Яку роботу проти сил поверхневого натягу треба виконати, щоб у два рази збільшити об'єм мильної бульбашки, радіус якої 1 см? Вважати, що $\alpha = 43 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м}$. ($A = 6,4 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}$)
197. Дві мильні бульбашки, радіуси яких дорівнюють 2 і 3 см, з'єднуються в одну. Визначити, скільки при цьому звільняється поверхневої енергії, якщо $\alpha = 7 \cdot 10^{-2} \text{ Н/м}$. ($2,02 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}$)
198. Яку роботу проти сил поверхневого натягу треба виконати, щоб видуваючи мильну бульбашку, збільшити її діаметр від 1 до 9 см? ($A = 2,3 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}$)

199. Мильна бульбашка сферичної форми видувається так, що її радіус щосекунди збільшується на 1 см. Обчислити, яка потрібна потужність, щоб видути бульбашку радіусом 5 см. ($N = 10^{-3} \text{ Вт}$)
200. У фільтрувальному папері вода піднімається на висоту 20 см. Обчислити діаметр капілярів у папері, вважаючи, що вони циліндричної форми і крайовий кут дорівнює нулю. ($d = 0,14 \text{ мм}$)
201. На яку висоту піднімається вода в капілярі радіусом 0,001 см, якщо $\alpha = 7 \cdot 10^{-2} \text{ Н/м}$? ($h = 1,427 \text{ м}$)
202. На яку висоту піднімається вода в капілярах ґрунту діаметром 0,3 мм і в стеблинах жита діаметром капілярів 0,02 мм? ($h_1 = 0,1 \text{ м}$; $h_2 = 1,5 \text{ м}$)
203. У гніті вода піднімається на висоту 8 см. На яку висоту по тому самому гноту піднімається гас? ($h_2 = 4,1 \cdot 10^{-2} \text{ м}$)
204. Обчислити різницю рівнів води в капілярах діаметрами 0,5 і 1 мм, які занурені в посудину з водою. Яка була б різниця рівнів, якби капіляри занурили в посудину з ртуттю. ($h_1 = 3 \text{ см}$; $h_2 = 1,5 \text{ см}$)
205. Знайти різницю рівнів ртуті у двох сполучених капілярах діаметрами 1 і 2 мм. ($h = 7,5 \text{ мм}$)
206. У сполучених капілярних трубках, радіуси яких 0,5 і 2 мм, різниця рівнів ртуті 10,5 мм. Визначити коефіцієнт поверхневого натягу ртуті. Незмочування вважати повним. ($\alpha = 0,5 \text{ Н/м}$)
207. Знайти коефіцієнт поверхневого натягу рідини, якщо в капілярі, діаметр якого дорівнює 1 мм, вона піднімається на висоту 32,6 мм. Густина рідини 1 г/см^3 . ($\alpha = 80 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м}$)
208. В одній і тій самій капілярній трубці вода піднімається на висоту 60 мм, гас – на висоту 31,2 мм. Знайти коефіцієнт поверхневого натягу гасу. Вважати, що коефіцієнт поверхневого натягу води дорівнює $72 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м}$. ($\alpha_2 = 3 \cdot 10^{-2} \text{ Н/м}$)
209. Яким повинен бути найбільший діаметр пор у гніті газової лампи, щоб гас піднявся з дна до пальника (висота $h = 10 \text{ см}$)? Вважати пори циліндричними трубками, а змочування повним. ($d = 0,15 \text{ мм}$)
210. Яким повинен бути внутрішній діаметр капіляра, щоб при повному змочуванні вода в ньому піднялась на 2 см? Задачу розв'язати для таких випадків: капіляр міститься 1) на Землі; 2) на Місяці. Потрібні дані взяти з таблиць. (1) $d = 1,5 \text{ мм}$; 2) $d = 8,8 \text{ мм}$)
211. Визначити, на скільки тиск у мильній бульбашці більший від зовнішнього, якщо радіус її 1 см і $\alpha = 45 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м}$. ($\Delta p = 18 \text{ Н/м}^2$)
212. Під яким тиском перебуває повітря в бульбашці радіусом $6 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ безпосередньо під поверхнею води при нормальному атмосферному тиску, якщо $\alpha = 0,073 \text{ Н/м}$? ($p = 1,256 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$)

213. Який діаметр мильної бульбашки, якщо надлишковий тиск в ній дорівнює $2,3 \text{ Н/м}^2$? ($d = 14 \text{ см}$)

214. Дві мильні бульбашки радіусами r_1 та r_2 видуті на різних кінцях однієї й тієї самої трубки (рис. 7). Рідина однакова. Якщо видування припинити, то одна бульбашка збільшуватиметься, а друга зменшуватиметься. Чому? Довести математично.

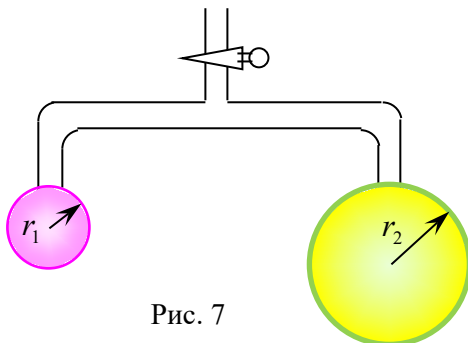


Рис. 7

215. На кінцях трубки, яка має вигляд трійника, видуті бульбашки з рідин, коефіцієнти поверхневого натягу яких α_1 та α_2 (рис. 8). Яке повинно бути відношення радіусів бульбашок, щоб вони були в рівновазі. ($r_1/r_2 = \alpha_1/\alpha_2$)

216. На поверхню води поклали жирну (повністю незмочувану водою) стальну голку ($\rho_{ст} = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$). Який найбільший діаметр голки, при якому вона ще може триматися на воді. Законом Архімеда знехтувати. ($d = 1,6 \text{ мм}$)

217. У дні посудини з ртуттю є круглий отвір діаметром $d = 0,5 \text{ мм}$. Площа дна посудини $S = 30 \text{ см}^2$. Частина ртуті виліється. Яка маса ртуті залишиться у посудині? ($m = 1,22 \text{ кг}$)

218. Між двома вертикальними плоско-паралельними пластинками, які знаходяться на відстані $0,25 \text{ мм}$ одна від одної, налито рідину. Знайти густину рідини, якщо відомо, що висота підняття рідини між пластинами дорівнює $3,1 \text{ см}$. $\alpha = 45 \text{ мН/м}$. Змочування повне. ($\rho = 790 \text{ кг/м}^3$)

Явища перенесення в газах. Внутрішнє тертя. Теплопровідність. Дифузія

219. Знайти коефіцієнт дифузії кисню при нормальних умовах. ($1,4 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$)

220. Коефіцієнт дифузії кисню при температурі $t = 0^\circ \text{ C}$ дорівнює $D = 0,19 \text{ см}^2/\text{с}$. Визначити середню довжину вільного пробігу $\bar{\lambda}$ молекул кисню. ($\bar{\lambda} = 134 \text{ нм}$)

221. Визначити залежність коефіцієнта дифузії D ідеального газу від температури при ізобарному процесі. ($D(T) \sim \sqrt{T^3}$)

222. Визначити залежність коефіцієнта дифузії D ідеального газу від тиску при наступних процесах: 1) ізотермічному; 2) ізохорному процесі. ($D(p) \sim 1/p$; $D(p) \sim \sqrt{p}$)

223. Знайти динамічну в'язкість азоту при нормальних умовах, якщо коефіцієнт дифузії для нього при цих умовах дорівнює $0,142 \text{ см}^2/\text{с}$.
 $(\eta = 1,78 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}^2})$
224. Знайти ефективний діаметр молекул кисню, якщо при температурі 0°С коефіцієнт внутрішнього тертя дорівнює $\eta = 18,8 \cdot 10^{-6} \text{ Па} \cdot \text{с}$?
 $(\sigma = 3 \cdot 10^{-10} \text{ м})$
225. Визначити залежність динамічної в'язкості η від температури T при: ізохоричному процесі. Зобразити цю залежність на графіку.
 $(\eta(T) \sim \sqrt{T})$
226. Визначити залежність динамічної в'язкості η від тиску p при наступних процесах: 1) ізотермічному процесі; 2) ізохоричному процесі. Зобразити ці залежності на графіках. (1) не залежить; 2) $\eta(p) \sim \sqrt{p}$)
227. Коефіцієнт дифузії і внутрішнього тертя водню при деяких умовах дорівнюють відповідно: $D = 1,42 \text{ см}^2/\text{с}$ і $\eta = 8,5 \cdot 10^{-6} \text{ Па} \cdot \text{с}$. Знайти число молекул водню в 1 м^3 при цих умовах. $(1,8 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3})$
228. Коефіцієнт дифузії і внутрішнього тертя кисню дорівнюють відповідно $D = 1,22 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ і $\eta = 1,95 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$. Знайти при цих умовах:
 1) густину кисню; 2) середню довжину вільного пробігу його молекул;
 3) середню арифметичну швидкість його молекул.
 $(1. \rho = 1,6 \text{ кг}/\text{м}^3$; $2. \bar{\lambda} = 8,3 \cdot 10^{-8} \text{ м}$; $3. \bar{v} = 440,5 \text{ м}/\text{с})$
229. Коефіцієнт внутрішнього тертя повітря при нормальних умовах дорівнює $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$. Знайти середню довжину вільного пробігу молекул.
 $(\bar{\lambda} = 0,9 \cdot 10^{-5} \text{ см})$
230. Знайти середню довжину вільного пробігу молекул гелію при температурі 0°С і тиску 760 мм рт.ст. , якщо коефіцієнт внутрішнього тертя гелію $\eta = 1,86 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$. Визначити діаметр його молекул.
 $(\bar{\lambda} = 2,2 \cdot 10^{-7} \text{ м}$; $\sigma = 1,9 \cdot 10^{-10} \text{ м})$
231. Знайти силу, що діє на кожний квадратний метр поверхні крила літака, який летить зі швидкістю $360 \text{ км}/\text{год}$ і захоплює при цьому шар повітря товщиною 4 см . Діаметр молекули повітря $3 \cdot 10^{-8} \text{ см}$. Температура повітря 0°С . $(f = 4,5 \cdot 10^{-2} \text{ Н}/\text{м}^2)$
232. Визначити коефіцієнт в'язкості газу, що міститься між двома циліндрами з радіусами $5,2$ і 5 см . Висота внутрішнього циліндра 25 см . Зовнішній циліндр обертається з кутовою швидкістю $6 \text{ об}/\text{с}$. При цьому на внутрішній циліндр діє сила $1,38 \cdot 10^{-3} \text{ Н}$. Поверхні циліндрів вважати плоскими.
 $(\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с})$

233. Коефіцієнт дифузії вуглекислого газу в нормальних умовах $D = 10^{-5} \text{ м}^2 / \text{с}$. Визначити коефіцієнт внутрішнього тертя вуглекислого газу в цих умовах. ($\eta = 1,96 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$)
234. Між двома пластинками, розміщеними на відстані 1 мм одна від одної, підтримується різниця температур $\Delta T = 1^\circ \text{C}$. Площа кожної пластинки $S = 100 \text{ см}^2$. Яка кількість теплоти передається за рахунок теплопровідності повітря від однієї пластинки до другої за 10 хв при нормальних умовах? Діаметр молекули повітря $3 \cdot 10^{-8} \text{ см}$. ($Q = 78 \text{ Дж}$)
235. Визначити коефіцієнт теплопровідності аргону при нормальному тиску і температурі 27°C . ($\chi = 7,65 \cdot 10^{-3} \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{K})$)
236. Побудувати графік залежності коефіцієнта теплопровідності водню від температури в інтервалі від 100 до 600 К через кожні 100° .
237. Дві пластинки площею $S = 100 \text{ см}^2$ кожна містяться в азоті на відстані 2 мм одна від одної. Температура однієї пластинки 0°C , а другої 14°C . Внаслідок теплопровідності газу між пластинками за 1 годину пройшло 780 калорій теплоти. Визначити розміри молекул азоту. ($\sigma = 3,16 \cdot 10^{-10} \text{ м}$)
238. Знайти коефіцієнт теплопровідності водню, якщо коефіцієнт внутрішнього тертя водню в тих самих умовах дорівнює $\eta = 8,6 \cdot 10^{-6} \text{ Па} \cdot \text{с}$. ($\chi = 9 \cdot 10^{-2} \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{K})$)
239. Знайти коефіцієнт теплопровідності хлору якщо коефіцієнт внутрішнього тертя хлору в тих самих умовах дорівнює $\eta = 1,25 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$. ($\chi = 3,77 \cdot 10^{-3} \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{K})$)
240. Знайти залежність коефіцієнта теплопровідності χ від температури T при наступних процесах: 1. ізобаричному; 2. ізохоричному процесі. Зобразити ці залежності на графіках. (1. $\chi(T) \sim \sqrt{T^3}$; 2. $\chi(T) \sim \sqrt{T}$)
241. Знайти залежність коефіцієнта теплопровідності χ від тиску p при наступних процесах: 1. ізотермічному; 2. ізохоричному процесі. Зобразити ці залежності на графіках. (1. не залежить; 2. $\chi(p) \sim \sqrt{p}$)
242. Простір між двома великими паралельними пластинами, відстань між якими дорівнює 5 мм, заповнено гелієм. Температура T_1 однієї пластини підтримується рівною 290 К, іншої – $T_2 = 310 \text{ K}$. Обчислити густину теплового потоку $q = \frac{Q}{\Delta S \Delta t}$. (217 Вт/м²)

3.3. Якісні задачі для самостійного розв'язування

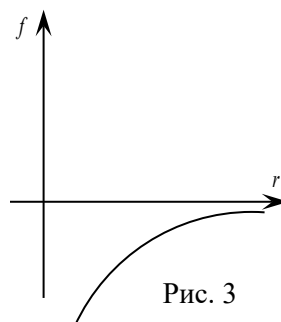
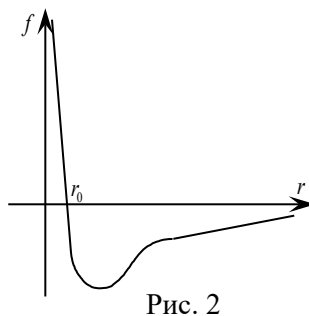
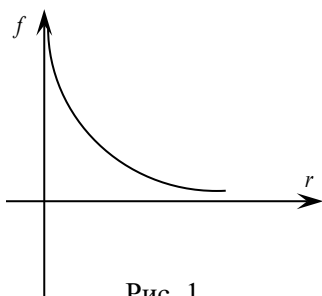
243. Під час накачування повітря в гумову камеру одночасно збільшується його об'єм і тиск. Чи не суперечить це закону Бойля-Маріотта?
244. Чому влітку шини коліс автомобілів накачують повітрям до меншого тиску ніж взимку?
245. Якої форми необхідно взяти посудину, щоб сила тиску на дно дорівнювала вазі рідини? Була більша? Менша ваги рідини?
246. У посудині, наповненій до краю водою, плаває кусок льоду. Чи виллється вода з посудини, коли лід розтане?
247. Дві кульки – мідна та алюмінієва, зрівноважені на пружинних терезах. Чи порушиться рівновага терезів, якщо кульки упустити у воду?
248. Чи можна перелити воду з однієї склянки в іншу, знаходячись в кабіні штучного супутника Землі
249. Повітря складається з азоту, кисню та інших газів. Чи однакова кінетична енергія поступального руху молекул цих газів при даній температурі?
250. Якими способами можна змінити внутрішню енергію тіла?
251. В якому випадку зміна тиску газу буде більшою: при адіабатній чи ізотермічній зміні об'єму?
252. Накреслити криві ізобарного, ізохорного, ізотермічного процесів на діаграмах залежності: $V T$, $P T$, $P V$ (вважати газ ідеальним).
253. Як пояснити утворення роси і туману?
254. Коли і чому на дроті лінії електропередач з'являється іній?
255. Об'єм посудини, в якій міститься насичена пара, ізотермічно збільшили в 5 разів. Що сталося з тиском пари? Розгляньте два випадки: а. пара під час усього розширення не втратила стан насичення; б. на певному етапі розширення пара стала ненасиченою.
256. Поясніть причини виникнення туману. Чому туман зникає після сходу Сонця?
257. Чому після дощу стає холодніше? Пояснити це явище.

Розділ 4. Тестові завдання

Матеріал, що пропонується в тестових завданнях, націлений не тільки на перевірку отриманих з навчального посібника знань, а також на їх поглиблення шляхом самостійного опрацювання ряду запитань.

Тестові завдання № 1

1. Як рухаються молекули?
 - Коливаються біля положень рівноваги.
 - Перебувають в стані спокою.
 - Характеризуються хаотичним прямолінійним рухом.
 - Стрибкоподібно переміщуються з одного положення рівноваги в інше.
2. Експериментальні і теоретичні дані показують, що міжмолекулярні сили f обернено пропорційні n -тому степеню відділі між молекулами. Вказати, яке можливе значення n для сил притягання.
 - $n = 7$;
 - $n = 9-15$;
 - $n = 2$;
 - $n = 1$.
3. Згідно експериментальних і теоретичних даних міжмолекулярні сили f обернено-пропорційні n -тому степеню відділі між молекулами. Вказати, яке можливе значення n для сил відштовхування.
 - $n = 7$;
 - $n = 9-15$;
 - $n = 2$;
 - $n = 1$.
4. Яка з наведених кривих ілюструє залежність сил притягання від віддалі між молекулами?



5. Яка з наведених кривих ілюструє залежність сил відштовхування від віддалі між молекулами?

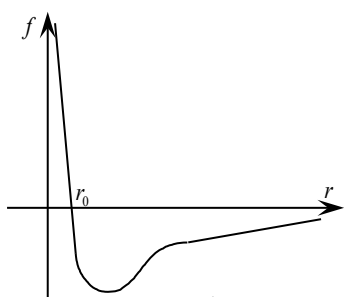


Рис. 1

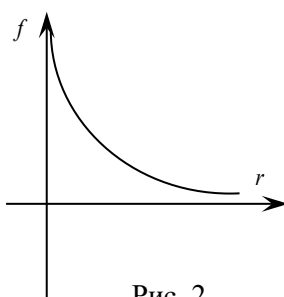


Рис. 2

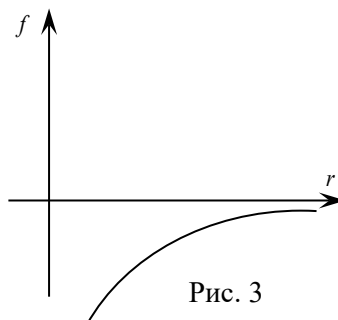


Рис. 3

6. Яка з наведених кривих ілюструє залежність рівнодіючої сил притягання і відштовхування від віддалі між молекулами?

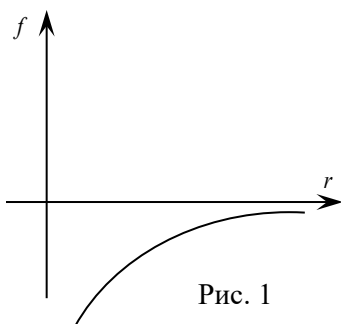


Рис. 1

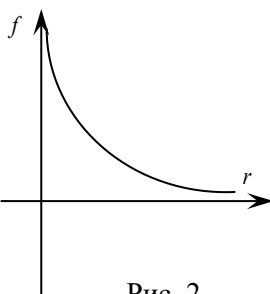


Рис. 2

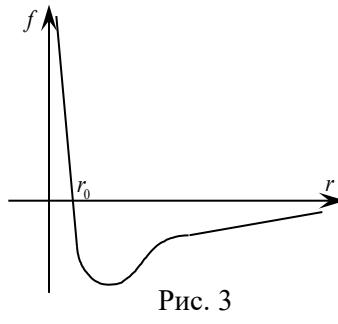


Рис. 3

7. При якому співвідношенні сил відштовхування (f_e) і сил притягання (f_n) частинки знаходяться в так званому рівноважному стані?

- $f_e > f_n$;
- $f_e < f_n$;
- $f_e < f_n$;
- $f_e = f_n$.

8. Якому значенню потенціальної енергії відповідає поняття стійкої рівноваги?

- $E_n = 0$;
- $E_n = E_n^{(\min)}$;
- $E_n = E_n^{(\max)}$;
- $E_n > 0$.

9. Яке з наведених рівнянь є рівнянням стану одного моля ідеального газу?

- $pV^2 = RT$;

- $\frac{pV}{R} = T$;
- $pV = \frac{m}{\mu} RT$;
- $pR = VT$.

10. Вказати рівняння стану ідеального газу для одиниці маси, де $B = \frac{R}{\mu}$ – питома газова стала

- $pV_0 = RT$;
- $pV = BT$;
- $pV = \frac{m}{\mu} RT$;
- $\frac{p}{B} = \frac{V}{T}$.

11. Вказати рівняння стану ідеального газу для будь-якої маси газу.

- $pV = \frac{c}{m} T$;
- $pV_0 = RT$;
- $pV = \frac{m}{\mu} RT$;
- $\frac{m}{\mu} pV = RT$.

12. Яке з наведених співвідношень є основним рівнянням молекулярно-кінетичної теорії? Тут $\langle u^2 \rangle$ – середній квадрат швидкості молекул.

- $p = \frac{3}{2} n \frac{mu^2}{2}$;
- $p = 2nkT$;
- $p = \frac{2}{3} n \frac{m\langle u^2 \rangle}{2}$;
- $p = p_0 nkT$.

13. Вказати формулу середньої кінетичної енергії поступального руху молекул ідеального газу.

- $E = kT$;

- $E = \frac{1}{2}kT$;
- $E = \frac{7}{2}kT$;
- $E = \frac{3}{2}kT$.

14. Яке значення з наведених співвідношень є сталою Больцмана? Тут $N = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ – стала Авогадро.

- $k = \frac{R}{\mu N}$;
- $k = RN$;
- $k = \mu \frac{R}{N}$;
- $k = \frac{R}{N}$.

15. Стала Больцмана дорівнює $1,38 \cdot 10^{-23}$.

- ерг./К;
- Дж/моль · К;
- Дж/К;
- ккал/К.

16. Універсальна газова стала дорівнює 8,31.

- ерг./К;
- Дж/моль · К;
- ккал/кмоль · К;
- Дж/К.

17. Чому дорівнює число Лошмідта?

- $2,7 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3}$;
- $1,8 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$;
- $2,7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$;
- $1,8 \cdot 10^{18} \text{ м}^{-3}$.

18. Яке співвідношення існує між одиницями тиску бар і Н/м²?

- $1 \text{ бар} = 2 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2$;
- $1 \text{ бар} = 76 \text{ Н/м}^2$;
- $1 \text{ бар} = 1,01 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$;
- $1 \text{ бар} = 10^5 \text{ Н/м}^2$.

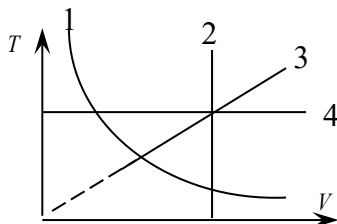
19. Яке співвідношення існує між одиницями тиску атм, кГ/см², Н/м²?

- $1 \text{ атм.} = 1,03 \text{ кГ/см}^2 = 9,8 \text{ Н/м}^2$;

- $1 \text{ атм.} = 1 \text{ кГ/см}^2 = 9,8 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2$;
 - $1 \text{ атм.} = 1,01 \text{ кГ/см}^2 = 10^5 \text{ Н/м}^2$;
 - $1 \text{ атм.} = 1 \text{ кГ/см}^2 = 9,8 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^2$.
20. Суміш гелію з аргоном важить 5 г і займає об'єм 10 л при 25°C і тиску 1 атм. Визначить склад суміші у вагових %. Вагові проценти:
- 70,4 He; Ar 29,6;
 - 80 He; Ar 20;
 - 74,4 He; Ar 26,6;
 - 72,5 He; Ar 27,5.
21. Чому дорівнює імпульс сили при пружному ударі молекули газу в стінку посудини?
- $2mv$;
 - $m \frac{v}{2}$;
 - mv^2 ;
 - $2m\sqrt{v}$.
22. Яке з наведених співвідношень є законом Шарля?
- $p = \text{const} \cdot T$;
 - $p = p_0(1 - \beta t)$;
 - $V = V_0 \text{const} \cdot T$;
 - $\frac{p}{n} = \text{const} \cdot V$.
23. Яке з наведених співвідношень є законом Гей-Люссака?
- $pV = \text{const}$;
 - $V = V_0(1 - \alpha t)$;
 - $V = \text{const} \cdot T$;
 - $p = VT$.
24. Яким законом описується ізотермічний процес, що протікає в ідеальному газі?
- Дальтона;
 - $pV = \text{const}$;
 - $V = \text{const} \cdot T$;
 - Авогадро.
25. Ідеальний газ знаходиться при сталій температурі. Яким законом можна описати зміну його параметрів за умови, що тиску 1 атм. відповідає об'єм V ; 2 атм. $\frac{1}{2}V$; 3 атм. $\frac{1}{3}V$ і т.д.

- Гей-Люссака;
- Шарля;
- Бойля-Маріотта;
- Авогадро.

26. Який з наведених графіків відповідає ізобарі?



27. Вказати графік ізотермічного, ізобарного і ізохорного процесів в координатах pV (тиск, об'єм).

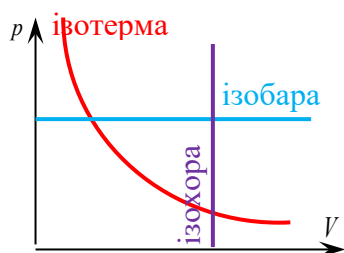


Рис. 1

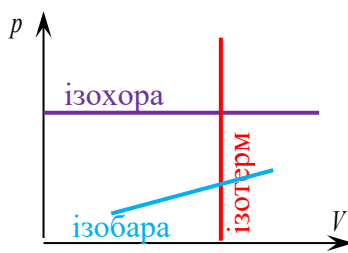


Рис. 2

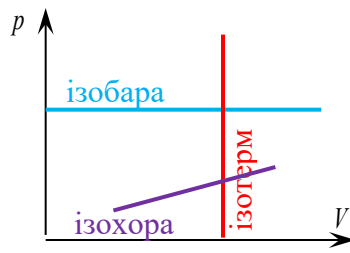


Рис. 3

28. Вказати графік ізотермічного, ізобарного і ізохорного процесів в координатах VT (об'єм, температура).

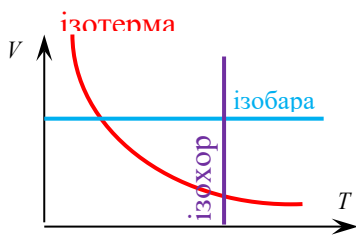


Рис. 1

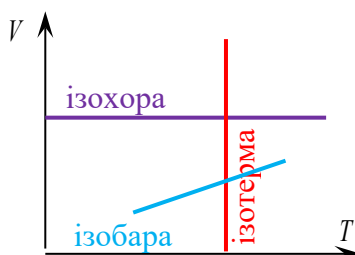


Рис. 2

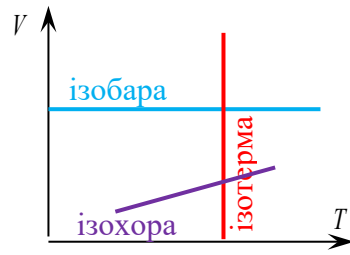


Рис. 3

29. Вказати графік графік ізотермічного, ізобарного і ізохорного процесів в координатах pT (тиск, температура).

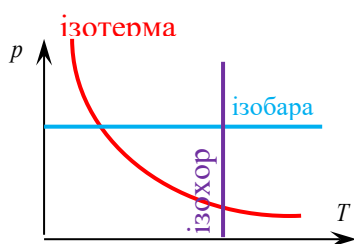


Рис. 1

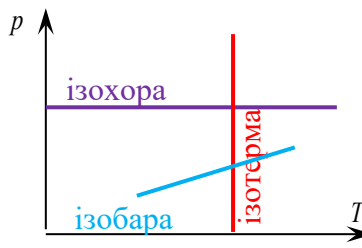


Рис. 2

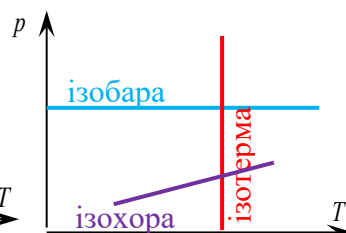


Рис. 3

30. Який з процесів в координатах VT відповідає процесу рис.

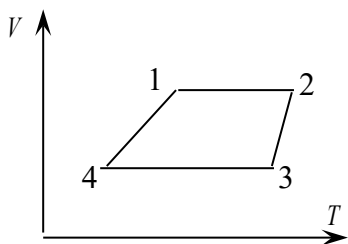


Рис. 1

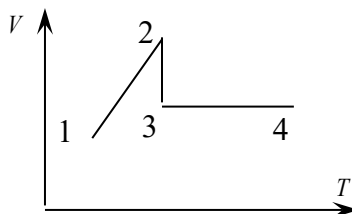


Рис. 2

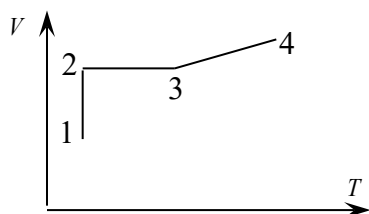


Рис. 3

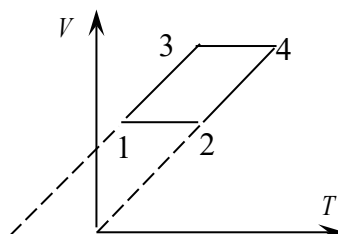
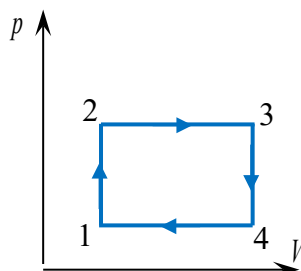


Рис. 4

31. Перевести процес, виражений в координатах (pV) – див. рис., – в координати (VT) та (pT) .
у координатах (VT) :



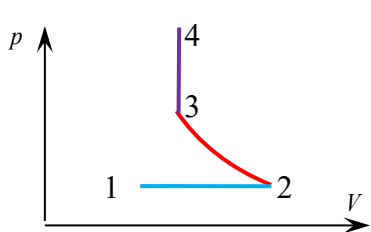


Рис. 1

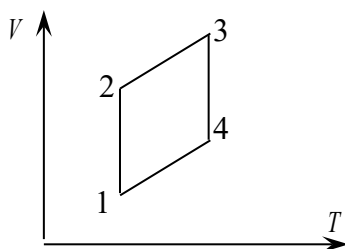


Рис. 2

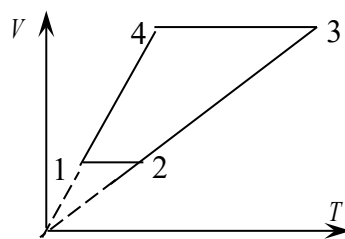


Рис. 3

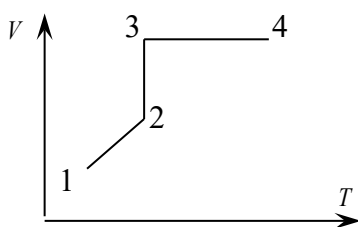


Рис. 4

у координатах (pT)

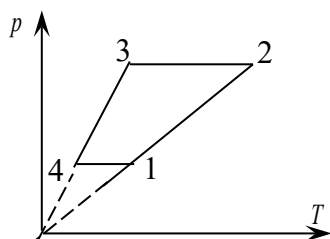


Рис. 1

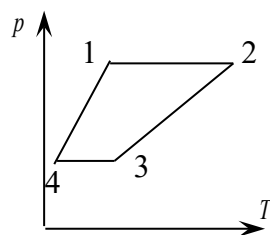


Рис. 2

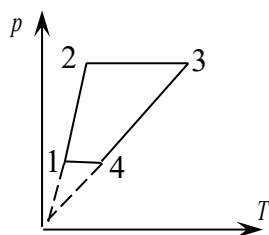


Рис. 3

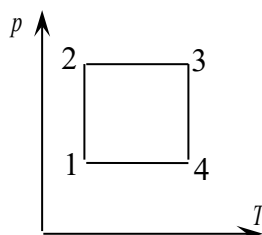


Рис. 4

32. Що таке абсолютна атомна маса?

- Виражена в грамах істинна маса атома елемента;
- Відношення маси атома певного елемента до порядкового номера;
- Відношення маси атома певного елемента до маси атома карбону.

33. Відношення маси атома певного елемента до Яку кількість атомів містить один моль $NaCl$?

- $6 \cdot 10^{23}$ атомів;
- $2,6 \cdot 10^{23}$ атомів;
- $6 \cdot 10^{23}$ йонів хлору і в $6 \cdot 10^{23}$ йонів натрію;
- $(6 \cdot 10^{23})^2$ атомів.

34. Що таке молярна маса (грам–молекула)?

- Добуток маси атомів елементів на їх кількість в одному молі;
- Частина від ділення маси речовини в грамах на кількість речовини в молях
- Відношення маси речовини в грамах до числа Авогадро.

35. За певних умов з посудини випустили 80% (по масі) газу, тиск газу в посудині при цьому зріс у 4 рази. Як змінилась при цьому абсолютна температура газу в посудині? Газ вважати ідеальним.

- Зросла у 4 рази.
- Зросла в 20 разів
- Зросла в 40 разів.
- Зросла в 16 разів.

36. За певних умов кількість ідеального газу в посудині збільшили в 4 рази, а абсолютна температура газу при цьому зменшилась в 2 рази. Як змінився при цьому тиск?

- Зросте в 4 рази;
- Не зміниться;
- Зросте в 2 рази;
- Зросте у 8 разів.

37. В двох посудинах об'ємом V і $3V$ при однаковому тиску знаходиться відповідно 1 і 6 кмолів ідеального газу. Яке співвідношення існує між температурами газу в цих посудинах?

- $T_2 = \frac{1}{2} T_1$;
- $T_2 = T_1$;
- $T_2 = 2T_1$;
- $T_2 = \frac{1}{6} T_1$.

38. В двох посудинах об'ємом V і $2V$ при однакових температурах знаходиться ідеальний газ під тиском 2 і 8 атм, відповідно. Яке співвідношення існує між масами цього газу?

- $m_2 = 4m_1$;
- $m_2 = 16m_1$;
- $m_2 = 6m_1$;
- $m_2 = 8m_1$.

39. Швидкість газових молекул, визначена методом Штерна, (S – відстань між смужками – шарами молекул у нерухомому та рухомому стані приладу) дорівнює:

- $v = \frac{R(R-r)}{\omega R}$;
- $v = \frac{\omega R(R-r)}{S^2}$;
- $v = \frac{\omega R(R-r)}{S}$;
- $v = \frac{\omega^2 R + r}{S}$.

40. Чому дорівнює середньоквадратична швидкість газових молекул?

- $\overline{v^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$;
- $\overline{v^2} = \sqrt{\frac{kT}{\pi m}}$;
- $\overline{v^2} = \sqrt{\frac{8kT}{\mu}}$;
- $\overline{v^2} = \sqrt{\frac{\pi kT}{2m}}$.

41. Чому дорівнює середня арифметична швидкість газових молекул?

- $\overline{v} = \sqrt{\frac{8\pi T}{km}}$;
- $\overline{v} = \sqrt{\frac{8kT}{m}}$;
- $\overline{v} = \sqrt{\frac{3kT}{\pi m}}$;
- $\overline{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$.

42. Чому дорівнює найбільш ймовірна швидкість газових молекул?

- $v_i = \sqrt{\frac{kT}{2m}};$
- $v_i = 2\sqrt{\frac{kT}{m}};$
- $v_i = \sqrt{\frac{2kT}{m}};$
- $v_i = \sqrt{\frac{2m}{kT}}.$

43. Яка з швидкостей (середня квадратична, середня арифметична чи найбільш ймовірна) молекул даної маси газу найбільша за абсолютним значенням.

- Середня квадратична;
- Середня арифметична;
- Найбільш ймовірна.

44. Якою з швидкостей (середньою квадратичною, середньою арифметичною чи найбільш ймовірною) володіє найбільша кількість молекул даної маси газу?

- Середньою квадратичною;
- Середньою арифметичною;
- Найбільш ймовірною.

45. Що станеться з максимумом кривої Максвелла при підвищенні температури газу?

- Залишиться незмінним;
- Зміниться вправо від осі ординат;
- Зміниться вліво від осі ординат.

46. Який фізичний зміст має площа, що обмежена кривою Максвелла, віссю абсцис і двома ординатами, що відповідають значенням швидкості v і $v + \Delta v$?

- Ця площа чисельно рівна числу частинок, що мають швидкість у вказаному інтервалі;
- Ця площа чисельно рівна числу частинок, що мають середню квадратичну швидкість;
- Ця площа рівна числу частинок, що мають середню арифметичну швидкість.

47. Як зміниться середня квадратична швидкість молекул ідеального газу при пониженні його температури в 3 рази?

- Зросте в 2 рази;
- Не зміниться;
- Зменшиться в 3 рази;
- Зменшиться в $\sqrt{3}$ рази.

48. Найбільш ймовірна швидкість газіваних молекул ідеального газу зросла в 3 рази. Як при цьому змінилась температура газу?

- $T_2 = 9T_1$;
- $T_2 = \sqrt{3}T_1$;
- $T_2 = 3\sqrt{T_1}$;
- $T_2 = 9\sqrt{T_1}$.

49. Найбільш ймовірна швидкість молекул ідеального газу зросла в 3 рази. Як зміниться при цьому середня квадратична швидкість?

- Зросте в $\sqrt{3}$ рази;
- Не зміниться;
- Зменшиться в $\sqrt{3}$ рази;
- Зросте у $1/3$ рази.

50. Що розуміють під середньою швидкістю сукупності газових молекул?

- Швидкість будь-якої окремої молекули, що входить в цю сукупність;
- Середнє значення швидкості по ансамблю;
- Середнє значення швидкості будь-якої молекули, що входить в цю сукупність, по часі;
- Середнє значення швидкості всіх молекул по координатах.

51. Чому рівна концентрація частинок n_h , що хаотично рухаються в полі сили тяжіння на висотах $h \neq 0$, якщо абсолютна температура $T = \infty$?

- $n_h = n_0$;
- $n_h = 0$;
- $n_h = \frac{n_0}{2}$;
- $n_h = \frac{n_0}{l}$.

52. Чому рівна концентрація частинок n_h , що хаотично рухаються в полі сили тяжіння на висотах $h \neq 0$, якщо абсолютна температура $T = 0$?

- $n_h = n_0$;
- $n_h = 0$;
- $n_h = \frac{n_0}{2}$;
- $n_h = \frac{n_0}{l}$.

53. Як змінюється площа під кривою, яка описує Максвелівський розподіл молекул за швидкостями, в залежності від температури?

- Не змінюється;
- Зросте пропорційно до $T^{3/2}$;

- Зменшується пропорційно до $T^{3/2}$;
 - Зростає пропорційно до $\sqrt{T}$.
54. Як зміниться тиск газу з висотою?
- Не змінюється;
 - Зростає пропорційно до h^2 ;
 - Зменшується по експоненті;
 - Зростає по експоненті.
55. Яке з наведених співвідношень є барометричною формулою?
- $p = p_0 \exp - \frac{2mg}{kT} h$;
 - $p = p_0 \exp \left(- \frac{gh}{kT} \right)$;
 - $p = p_0 \exp \left(- \frac{mgh}{kT} \right)$;
 - $p = p_0 \exp \left(- \frac{2mgh}{kT} \right)$.
56. Чому дорівнює середня відносна молекулярна маса μ суміші ідеальних газів, маси складових якої рівні M_1, M_2, M_3 , відносні молекулярні маси, відповідно, μ_1, μ_2, μ_3 ; M – маса суміші?
- $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$;
 - $\frac{1}{\mu} = \frac{M_1}{M} \frac{1}{\mu_1} + \frac{M_2}{M} \frac{1}{\mu_2} + \frac{M_3}{M} \frac{1}{\mu_3}$;
 - $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3}$;
 - $\frac{1}{\mu} = \frac{M_1}{M} \mu_1 + \frac{M_2}{M} \mu_2 + \frac{M_3}{M} \mu_3$.
57. Який об'єм займає моль ідеального газу при $t = 123^\circ \text{C}$ і тиску 3 атм.
- $V = 20,9$ л;
 - $V = 15,9$ л;
 - $V = 10,9$ л;
 - $V = 5,9$ л.
58. Густина ідеального газу у вертикальній закритій циліндричній трубці визначається барометричною формулою $\rho = \rho_0 \exp \left\{ \frac{\mu}{RT} gx \right\}$. Чому дорівнює результуюча всіх сил тиску на стінки?
- $2/3$ ваги газу;
 - $0,5$ ваги газу;
 - ваги газу;
 - $1/5$ ваги газу.

Тестові завдання № 2

1. Що таке довжина вільного пробігу молекул ідеального газу?
 - Віддаль між двома співударами молекул;
 - Найкоротша віддаль між двома співударами молекул;
 - Найбільша віддаль між двома співударами молекул;
 - Логарифм з середнього значення віддалі між двома співударами молекул.
2. Яка залежність між довжиною вільного пробігу молекул і концентрацією молекул в одиниці об'єму?
 - Логарифмічна;
 - Оберненопропорційна;
 - Прямопропорційна;
 - Квадратична.
3. Яка залежність між довжиною вільного пробігу молекул і густиною ідеального газу?
 - Логарифмічна;
 - Прямопропорційна;
 - Оберненопропорційна;
 - Квадратична.
4. Яка залежність між довжиною вільного перебігу молекул і тиском?
 - Логарифмічна;
 - Оберненопропорційна;
 - Прямопропорційна;
 - Квадратична.
5. Яка залежність середнього числа зіткнень молекул газу від концентрації молекул в одиниці об'єму?
 - Прямопропорційна;
 - Оберненопропорційна;
 - Квадратична;
 - Логарифмічна.
6. Яка залежність середнього числа зіткнень молекул газу від його густини?
 - Оберненопропорційна;
 - Прямопропорційна;
 - Квадратична;
 - Логарифмічна.
7. Як зміниться довжина вільного пробігу молекул ідеального газу з підвищенням температури?
 - Не змінюється.
 - Зменшується.
 - Зростає.
8. Яке з наведених співвідношень відноситься до залежності між довжиною вільного пробігу молекул і тиском ідеального газу?

- $\bar{\lambda}_1 p_2 = \bar{\lambda}_2 p_1$.
 - $\frac{\bar{\lambda}_1}{p_1} = \frac{\bar{\lambda}_2}{p_2}$.
 - $\bar{\lambda}_1 \sqrt{p_1} = \bar{\lambda}_2 \sqrt{p_2}$.
 - $\bar{\lambda}_1 p_1 = \bar{\lambda}_2 p_2$.
9. Яким з наведених співвідношень задається ефективний діаметр молекули?
Тут C – стала Сезерленда; d_0 – ефективний діаметр молекули при $T \rightarrow \infty$.
- $d = d_0(1 + T)$;
 - $d = d_0 \left(1 + \frac{C}{T}\right)$;
 - $d = d_0 \sqrt{1 + \frac{C}{T}}$;
 - $d = d_0 \sqrt{\frac{C}{T}}$.
10. Як змінюється ефективний розмір молекули з пониженням температури газу?
- Не змінюється;
 - Зростає;
 - Зменшується.
11. В двох посудинах при однаковій температурі знаходиться газ одного сорту під тиском 2 р і 8 р, відповідно. Яке буде співвідношення між середніми довжинами вільного пробігу цього газу?
- $\bar{\lambda}_1 = 8\bar{\lambda}_2$;
 - $\bar{\lambda}_1 = 6\bar{\lambda}_2$;
 - $\bar{\lambda}_1 = 4\bar{\lambda}_2$;
 - $\bar{\lambda}_1 = 2\bar{\lambda}_2$.
12. Ідеальний газ стисують адіабатно. Як при цьому залежить від тиску довжина вільного пробігу молекул?
- $\lambda \sim p^{\frac{1}{\gamma}}$;
 - $\lambda \sim p^{-\gamma}$;
 - $\lambda \sim p^{-\frac{1}{\gamma}}$;
 - $\lambda \sim p^{\gamma}$.
13. Як залежить від тиску число зіткнень між молекулами ідеального газу при його адіабатному стисненні?

- $Z \sim p^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}};$
- $Z \sim p^{\gamma+1};$
- $Z \sim p^{\frac{1}{2\gamma}};$
- $Z \sim p^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}.$

14. Яка залежність середнього числа зіткнень молекул газу від тиску?

- Оберненопропорційна;
- Логарифмічна;
- Квадратична;
- Прямопропорційна.

15. Вказати вираз, що виражає середнє число зіткнень фіксованої молекули з іншими молекулами, якщо вважати, що вони нерухомі.

- $4\pi r^2 n_0 \bar{v};$
- $4\sqrt{2}\pi r^2 n_0 \bar{v};$
- $\frac{1}{4\sqrt{2}\pi r^2 n_0}.$

16. Вказати вираз, що виражає середнє число зіткнень фіксованої молекули з іншими молекулами, якщо вважати, що всі молекули рухаються.

- $4\pi r^2 n_0 \bar{v};$
- $4\sqrt{2}\pi r^2 n_0 \bar{v};$
- $\frac{1}{\pi r^2 n_0}.$

17. Вказати вираз для середньої довжини вільного пробігу молекул газу.

- $4\pi r^2 n_0 \bar{v};$
- $\frac{1}{\pi r^2 n_0};$
- $\frac{1}{4\sqrt{2}\pi r^2 n_0}.$

18. Чому рівна густина газу, якщо для нього коефіцієнт внутрішнього тертя $\eta = 12 \text{ кг}/(\text{м} \cdot \text{с})$, а коефіцієнт дифузії рівний $2 \text{ м}/\text{с}$?

- $6 \text{ кг}/\text{м}^3;$
- $24 \text{ кг}/\text{м}^3;$
- $48 \text{ кг}/\text{м}^3;$
- $3 \text{ кг}/\text{м}^3.$

19. Яке з перерахованих явищ відноситься до явищ перенесення?

- Конвекція;
- Теплопровідність;

- Випромінювання;
 - Випаровування.
20. Перенесення якої фізичної характеристики описує рівняння теплопровідності?
- Кількості руху;
 - Енергії;
 - Маси.
21. Перенесення якої фізичної характеристики описує рівняння дифузії?
- Кількості руху;
 - Енергії;
 - Маси.
22. Перенесення якої фізичної характеристики описує рівняння внутрішнього тертя?
- Імпульсу напрямленого руху молекул;
 - Енергії;
 - Маси.
23. Вказати рівняння, по якому визначається маса газу, що переноситься в результаті дифузії.
- $-\frac{1}{3}\bar{\lambda}\bar{v}\frac{\Delta\rho}{\Delta x}\Delta S\Delta t$;
 - $-\frac{1}{3}\bar{\lambda}\bar{v}\rho c_v\frac{\Delta T}{\Delta x}\Delta S\Delta t$;
 - $-\frac{1}{3}\bar{\lambda}\bar{v}\rho\frac{\Delta v}{\Delta x}\Delta S\Delta t$.
24. Вказати рівняння, по якому визначається кількість теплоти, що переноситься в результаті теплопровідності газу.
- $-\frac{1}{3}\bar{\lambda}\bar{v}\frac{\Delta\rho}{\Delta x}\Delta S\Delta t$;
 - $-\frac{1}{3}\bar{\lambda}\bar{v}\rho c_v\frac{\Delta T}{\Delta x}\Delta S\Delta t$;
 - $-\frac{1}{3}\bar{\lambda}\bar{v}\rho\frac{\Delta v}{\Delta x}\Delta S\Delta t$.
25. Вказати рівняння, по якому визначається сила внутрішнього тертя, що виникає в площині дотику двох ковзаючи один відносно одного шарів газу.
- $-\frac{1}{3}\bar{\lambda}\bar{v}\frac{\Delta\rho}{\Delta x}\Delta S\Delta t$;
 - $-\frac{1}{3}\bar{\lambda}\bar{v}\rho c_v\frac{\Delta T}{\Delta x}\Delta S\Delta t$;
 - $-\frac{1}{3}\bar{\lambda}\bar{v}\rho\frac{\Delta v}{\Delta x}\Delta S\Delta t$.
26. Вказати вираз, що виражає коефіцієнт дифузії газу.

- $\frac{1}{3} \overline{\lambda \nu \rho c_v}$;
- $\frac{1}{3} \overline{\lambda \nu}$;
- $\frac{1}{3} \overline{\lambda \nu \rho}$;
- $\frac{1}{3} \overline{\lambda \nu c_v}$.

27. Вказати вираз, що виражає коефіцієнт теплопровідності газу.

- $\frac{1}{3} \overline{\lambda \nu \rho c_v}$;
- $\frac{1}{3} \overline{\lambda \nu}$;
- $\frac{1}{3} \overline{\lambda \nu \rho}$;
- $\frac{1}{3} \overline{\lambda \nu c_v}$.

28. Вказати вираз, що виражає коефіцієнт внутрішнього тертя в газах.

- $\frac{1}{3} \overline{\lambda \nu}$;
- $\frac{1}{3} \overline{\lambda \nu \rho c_v}$;
- $\frac{1}{3} \overline{\lambda \nu \rho}$;
- $\frac{1}{3} \overline{\lambda \nu c_v}$.

29. Вказати одиницю виміру коефіцієнта дифузії газів в системі СІ.

- $\text{м}^2/\text{с}$;
- $\text{Дж}/\text{м} \cdot \text{с}$;
- $\text{кг}/\text{м} \cdot \text{с}$;
- $\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2$.

30. Вказати одиницю виміру коефіцієнта внутрішнього тертя в газах в системі СІ.

- $\text{м}^2/\text{с}$;
- $\text{Дж}/\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К}$;
- $\text{кг}/\text{м} \cdot \text{с}$;
- $\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}$.

31. Як зміниться коефіцієнт дифузії газу зі зміною температури?

- Не змінюється;
- Пропорційно до T ;
- Пропорційно до $\sqrt{T}$;
- Пропорційно до $T^{\frac{3}{2}}$.

32. Вказати одиницю виміру коефіцієнта теплопровідності газів в системі СІ.

- $\text{м}^2/\text{с}$;
- $\text{Дж}/\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К}$;
- $\text{кг}/\text{м} \cdot \text{с}$;
- $\text{кг}/\text{м} \cdot \text{с}^2$.

33. Яке з наведених рівнянь описує зміну різниці концентрації з часом при нестационарній дифузії? Тут τ – сталий час процесу дифузії.

- $\Delta n = \Delta n_0 \exp(-t)$;
- $\Delta n = \Delta n_0 \exp(-t/\tau)$;
- $\Delta n = \Delta n_0 \exp(t/\tau)$;
- $\Delta n = \Delta n_0 \exp(t)$.

34. Як змінюється коефіцієнт дифузії газу з тиском?

- $D \approx \frac{1}{p}$;
- $D \approx p$;
- $D \approx \sqrt{p}$.

35. Чому дорівнює коефіцієнт взаємної дифузії двох ідеальних газів?

- $D_{12} = \frac{1}{3}(\rho_2 \bar{v}_1 \bar{\lambda}_1 + \rho_1 \bar{v}_2 \bar{\lambda}_2)$;
- $D_{12} = \frac{1}{3} \left(\frac{\rho_2}{\rho} \bar{v}_1 \bar{\lambda}_1 + \frac{\rho_1}{\rho} \bar{v}_2 \bar{\lambda}_2 \right)$;
- $D_{12} = \frac{1}{3} \left(\frac{\rho_1}{\rho} \bar{v}_1 \bar{\lambda}_1 + \frac{\rho_2}{\rho} \bar{v}_2 \bar{\lambda}_2 \right)$;
- $D_{12} = \frac{1}{3} \left(\frac{\rho_2}{\rho} \bar{v}_1 \bar{\lambda}_2 + \frac{\rho_1}{\rho} \bar{v}_2 \bar{\lambda}_1 \right)$.

36. Чому дорівнює коефіцієнт термічної дифузії двох ідеальних газів? В

формулах введено позначення: $c = c_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{n_1}{n_1 + n_2}$. Також α – стала

термічної дифузії (ст. 306 «Молекулярна фізика», М.М. Клим, П.М. Якібчук)

- $\frac{D_{12}}{D_T} = \alpha c(1 - c)$;

- $D_T = \frac{\alpha}{D_{12}} c(1-c);$
- $D_T = \alpha D_{12} c(1-c);$
- $\frac{D_T}{D_{12}} = \alpha(1-c).$

37. Як змінюється коефіцієнт теплопровідності газів нормальних густин від тиску?

- Не змінюється;
- Зростає з підвищенням тиску.
- Зменшується з підвищенням тиску.
- $\chi \approx p^2.$

38. Як змінюється коефіцієнт теплопровідності газів з підвищенням температури?

- Не змінюється;
- Зростає пропорційно до $T^{\frac{1}{2}};$
- Зменшується пропорційно до $T^2;$
- Зростає швидше ніж $\sqrt{T}.$

39. Яке з наведених рівнянь описує зміну різниці температури газу при нестационарній теплопровідності?

- $\Delta T = \Delta T_0 \exp\left(-\frac{\chi \cdot S}{\rho c_v V L} t\right);$
- $\Delta T = \Delta T_0 \exp(-\chi t);$
- $\Delta T = \Delta T_0 \exp\left(-\frac{\chi}{\rho c_v V L} t\right);$
- $\Delta T = \Delta T_0 \exp\left(-\frac{S}{\rho c_v V L} t\right).$

40. Як залежить коефіцієнт внутрішнього тертя газів нормальних густин від тиску?

- Зростає з підвищенням тиску;
- Зменшується з підвищенням тиску;
- Не залежить.

41. Яке з наведених співвідношень описує зміну коефіцієнта внутрішнього тертя газу з температурою? Тут $\frac{2}{3} < n < \frac{3}{4}$ за І. Пулюєм.

- $\eta = \eta_0 (1 + \alpha t)^n;$
- $\eta = \eta_0 (1 + \alpha t);$
- $\eta = \eta_0 \cdot \alpha t;$

- $\eta = \eta_0 \cdot e^{-kt}$.

42. Який з наведених виразів є першим законом Фіка?

- $j = D \cdot \text{grad } n \cdot t$;

- $j = -D \frac{\Delta \rho}{\Delta x} \Delta t$;

- $j = -D \cdot \frac{dn}{dx} \cdot \rho$;

- $j = -D \cdot \frac{dn}{dx}$.

43. Який з наведених виразів є другим законом Фіка?

- $j = -D \frac{dn}{dz}$;

- $\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial n}{\partial z} \right)$;

- $\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial n}{\partial z} \right)$;

- $\frac{\partial j}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial n}{\partial z} \right)$.

44. Чому дорівнює середнє значення квадрату зміщення броунівської частинки?

- $\bar{x}^2 = Dt$;

- $\bar{x}^2 = 2\sqrt{Dt}$;

- $\bar{x}^2 = 2Dt$;

- $\bar{x}^2 = 2t\sqrt{D}$.

45. Чому дорівнює коефіцієнт температуропровідності, який має зміст коефіцієнта дифузії температури?

- $\kappa = \frac{\chi}{\rho c_V}$;

- $\kappa = \chi \rho c_V$;

- $\kappa = \frac{\chi}{c_V}$;

- $\kappa = \frac{\chi \rho}{c_V}$.

46. Яке співвідношення існує між коефіцієнтом внутрішнього тертя і коефіцієнтом дифузії?

- $\eta = \frac{D}{\rho}$;

- $\eta = D\rho$;
 - $\eta = 2\rho c_v D$;
 - $\eta = 2D\rho$.
47. Яке співвідношення існує між коефіцієнтом внутрішнього тертя і коефіцієнтом теплопровідності?
- $\chi = \rho D \eta$;
 - $\chi = D \eta c_v$;
 - $\chi = \eta c_v$;
 - $\chi = \eta c_v \rho$.
48. Як змінюється теплопередача в розріджених газах з пониженням тиску?
- Не змінюється;
 - Зростає пропорційно;
 - Зменшується пропорційно $1/p$;
 - Зростає пропорційно p^2 .
49. Яким співвідношенням описується рівновага в газах малої густини?
- $p_1 = p_2$;
 - $p_1 \sqrt{T_1} = p_2 \sqrt{T_2}$;
 - $\frac{p_1}{\sqrt{T_2}} = \frac{p_2}{\sqrt{T_1}}$;
 - $\frac{p_1}{\sqrt{T_1}} = \frac{p_2}{\sqrt{T_2}}$.

Тестові завдання № 3

1. Чому рівна величина об'єму нестискуваного простору в розрахунку на одну молекулу реального газу?
 - $4V_0$;
 - $4V_0 N$;
 - V_0 ;
 - $2V_0$.
2. Чому рівна величина об'єму нестискуваного простору в розрахунку на одну моль реального газу?
 - $4V_0$;
 - $4V_0 N$;
 - V_0 ;
 - $3V_0$.

3. Вказати рівняння стану реального газу для одного моля. V_0 – об'єм одного моля газу; V – об'єм довільної маси m газу.

- $\left(p + \frac{m^2}{\mu^2} \cdot \frac{a}{V^2}\right) \cdot \left(V - \frac{m}{\mu} b\right) = \frac{m}{\mu} RT$;
- $pV = \frac{m}{\mu} RT$;
- $\left(p + \frac{a}{V_0^2}\right) \cdot (V_0 - b) = RT$;
- $pV = RT$.

4. Вказати рівняння стану реального газу для будь-якої маси. V_0 – об'єм одного моля газу; V – об'єм довільної маси m газу.

- $pV = \frac{m}{\mu} RT$;
- $\left(p + \frac{a}{V_0^2}\right) \cdot (V_0 - b) = RT$;
- $pV = RT$;
- $\left(p + \frac{m^2}{\mu^2} \cdot \frac{a}{V^2}\right) \cdot \left(V - \frac{m}{\mu} b\right) = \frac{m}{\mu} RT$.

5. Яке з наведених співвідношень називається числом Амага?

- $\sigma = \frac{pV}{R}$;
- $\sigma = \frac{pV}{p_0 V_0}$;
- $\sigma = pV - p_0 V_0$;
- $\sigma = \frac{pV_0}{p_0 V}$.

6. Що називається точкою Бойля?

- Це температура, починаючи з якої числа Амага весь час зростають;
- Це температура, при якій газ переходить у рідину;
- Це температура, при якій газ починає розширюватись.

7. В яких координатах будуються ізотерми Амага?

- $p - V$;

- $p - VT$;
 - $pV - p$;
 - $pR - VT$.
8. В якому агрегатному стані буде перебувати речовина, коли мінімум потенціальної енергії, що визначає умову рівноваги, буде заданий співвідношенням $E_n^{(min)} \ll kT$?
- Газ;
 - Рідина;
 - Тверде тіло.
9. В якому агрегатному стані буде перебувати речовина, коли мінімум потенціальної енергії, що визначає умову рівноваги, буде заданий співвідношенням $E_n^{(min)} \approx kT$?
- Газ;
 - Рідина;
 - Тверде тіло.
10. В якому агрегатному стані буде перебувати речовина, коли мінімум потенціальної енергії, що визначає умову рівноваги, буде заданий співвідношенням $E_n^{(min)} \gg kT$?
- Газ;
 - Рідина;
 - Тверде тіло.
11. Чому дорівнює теоретичний об'єм речовини в критичній точці?
- $V_\kappa = 3b$;
 - $V_\kappa = Vb$;
 - $V_\kappa = 2V$;
 - $V_\kappa = \frac{3}{2}V$.
12. Яка температура називається критичною?
- Це температура, при якій ефект Джоуля–Томсона міняє знак;
 - Це найвища температура, при якій газ ще може бути перетворений в рідину;
 - Це температура, при якій теплоємність тіла починає залежати від температури.
13. Яке співвідношення існує між критичною температурою і сталими Ван-дер-Ваальса?

- $T_K = \frac{a}{3b};$
- $T_K = \frac{8a}{Rb};$
- $T_K = \frac{8a}{27Rb};$
- $T_K = \frac{a}{27Rb}.$

14. Яке з наведених співвідношень задає теоретичне значення критичного тиску?

- $p_K = \frac{8a}{27b};$
- $p_K = \frac{a}{27b^2};$
- $p_K = \frac{a}{27b};$
- $p_K = \frac{a}{3b}.$

15. Вказати зведене рівняння Ван-дер-Ваальса, де зведені величини $\tau = T / T_K$,

$$\pi = p / p_K; \quad \omega = \frac{V_0}{V_{0K}}.$$

- $(\pi + \tau) \cdot (3\omega - 1) = 8\tau;$
- $\left(\omega + \frac{\omega}{\pi}\right) \cdot (3\omega - 1) = \tau;$
- $\left(\pi + \frac{3}{\omega^2}\right) \cdot (3\omega - 1) = 8\tau;$
- $\left(\pi + \frac{3}{\omega}\right) \cdot (3\omega - 1) = 8\tau.$

16. Чому дорівнює критична температура газу, що описується рівнянням

$$\text{Бертло} \left(p + \frac{a}{TV^2} \right) \cdot (V - b) = RT ?$$

- $T_K = \sqrt{\frac{8a}{27Rb}};$

- $T_K = \sqrt{\frac{a}{27b}};$
- $T_K = \sqrt{\frac{8a}{Rb}};$
- $T_K = \sqrt{\frac{8a}{27b}}.$

17. Яку кількість теплоти треба надати молю газу, що описується рівнянням Ван-дер-Ваальса, для розширення його об'єму від V_1 до V_2 при сталій температурі?

- $Q = a \left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} \right);$
- $Q = a \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right);$
- $Q = \frac{a}{V_1} - \frac{b}{V_2};$
- $Q = b \left(\frac{a}{V_1 - V_2} \right).$

18. Як зміниться температура газу Ван-дер-Ваальса при ефекті Джоуля–Томсона, за умови, що стала $a = 0$?

- Не змінюється;
- Понижується;
- Зростає.

19. Встановіть співвідношення між температурою Бойля і критичною температурою для газу, що описується рівнянням Ван-дер-Ваальса.

- $T_B = 27T_K;$
- $T_B = \frac{const}{T_K};$
- $8T_B = T_K;$
- $T_B = \frac{27}{8}T_K.$

20. Як змінюється температура газу Ван-дер-Ваальса, при ефекті Джоуля–Томсона, за умови, що стала $b = 0$?

- Не змінюється;
- Знижується;
- Підвищується.

21. В чому суть додатнього ефекту Джоуля–Томсона?

- При зміні об'єму газу, його температура не міняється;
- При розширенні газу його температура знижується;
- При розширенні газу його температура підвищується.

22. В чому суть від'ємного ефекту Джоуля–Томсона?

- При зміні об'єму газу, його температура не міняється;
- При розширенні газу його температура підвищується;
- При розширенні газу його температура зменшується.

23. Що таке температура інверсії?

- Температура, при якій ефект Джоуля–Томсона міняє знак;
- Найвища температура, при якій газ не може бути перетворений в рідину;
- Температура, при якій теплоємність тіла починає залежати від температури.

24. Який ефект покладено в основу охолодження газів у зріджувальних машинах (машина Лінде)?

- Від'ємний ефект Джоуля–Томсона;
- Ефект нагрівання газу при розширенні;
- Додатній ефект Джоуля–Томсона.

25. Чому дорівнює робота газового потоку при явищі Джоуля–Томсона?

- $A = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1};$
- $A = 0;$
- $A = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{R}{\gamma - 1} (T_1 - T_2);$
- $A = \frac{m}{\mu} R (T_2 - T_1).$

26. Що називається вільною енергією?

- Частина потенціальної енергії, яка ізотермічно може перетворюватись в роботу;
- Відношення роботи ізотермічного утворення поверхні рідини до площі цієї поверхні;
- Це величина потенціальної енергії, яка припадає на одиницю об'єму рідини.

27. Що називається коефіцієнтом поверхневого натягу рідин?

- Частина потенціальної енергії, яка ізотермічно може перетворюватись в роботу;

- Відношення роботи ізотермічного утворення поверхні рідини до площі цієї поверхні;
 - Це величина потенціальної енергії, яка припадає на одиницю об'єму рідини.
28. Чим зумовлена наявність меніску в рідині?
- Силами взаємного притягання між молекулами поверхневого шару рідини;
 - Силами взаємного притягання між молекулами в середині рідини;
 - Силами притягання між молекулами рідини і матеріалу посудини.
29. Чим обумовлена наявність сили поверхневого натягу рідини?
- Силами взаємного притягання між молекулами поверхневого шару рідини;
 - Силами взаємного притягання між молекулами в середині рідини;
 - Силами притягання між молекулами рідини і матеріалу посудини.
30. Чим обумовлена поява додаткового тиску Лапласа?
- Силами взаємного притягання між молекулами поверхневого шару рідини;
 - Наявністю меніску;
 - Силами взаємного притягання між молекулами в середині рідини.
31. Як залежить від температури поверхневий натяг рідини – (гелій) в околі абсолютного нуля (явище надплинності)?
- Зростає;
 - Зменшується пропорційно T^{-2} ;
 - Не залежить;
 - Зростає пропорційно $T^{\frac{4}{3}}$.
32. Вказати формулу додаткового тиску Лапласа для випадку поверхні будь-якої форми.
- $2\sigma / R$;
 - σ / R ;
 - $\pm\sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$;
 - $\frac{2\sigma}{R_1 + R_2}$.
33. Вказати формулу додаткового тиску Лапласа для випадку сферичного поверхневого шару рідини.
- $2\sigma / R$;
 - σ / R ;

- $\pm\sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$

34. Вказати формулу додаткового тиску Лапласа для випадку циліндричного поверхневого шару рідини.

- $2\sigma / R;$
- $\sigma / R;$
- $2\sigma / 3R.$

35. Що відбувається з рідиною в капілярі для випадку змочуючої рідини?

- Опускається нижче рівня рідини в широкій посудині;
- Встановлюється на однаковому рівні з основною посудиною;
- Піднімається вище рівня рідини в широкій посудині.

36. Що відбувається з рідиною в капілярі для випадку незмочуючої рідини?

- Опускається нижче рівня рідини в широкій посудині;
- Встановлюється на однаковому рівні з основною посудиною;
- Піднімається вище рівня в рідині широкій посудині.

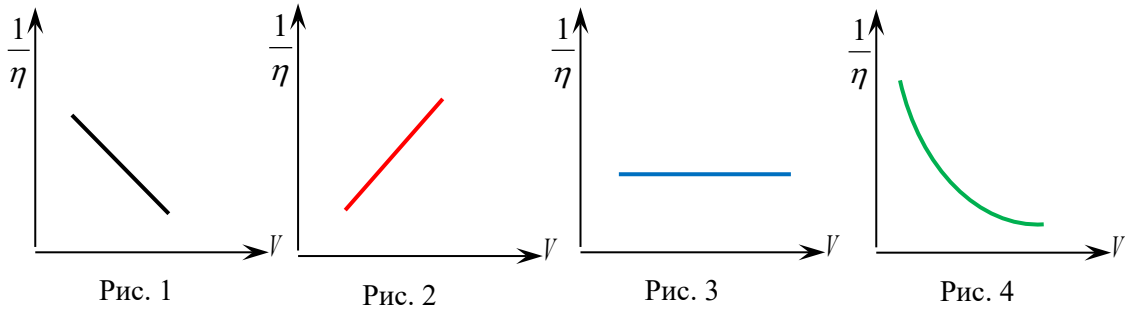
37. Яке з наведених співвідношень є формулою О.І. Бачинського? Тут b – рухливість молекул рідини; $\frac{1}{\eta}$ – плинність рідини; V – питомий об'єм рідини; C і ω – сталі, причому ω приблизно дорівнює сталій b у рівнянні Ван-дер-Ваальса. Тому різниця $V - \omega$ – «вільний об'єм» рідини.

- $\frac{1}{\eta} = cb;$
- $\eta = \frac{1}{c_1} \cdot \frac{1}{D};$
- $\eta = \frac{C}{V - \omega};$
- $\eta = \frac{V - \omega}{\rho}.$

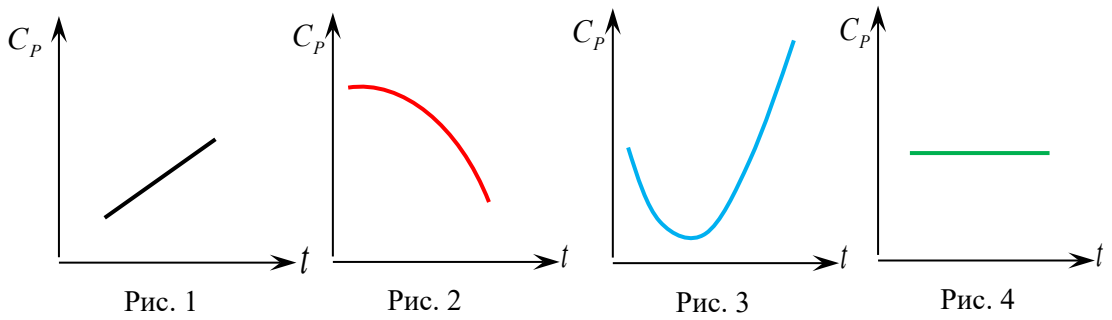
38. Як змінюється в'язкість рідини з підвищенням температури?

- Не змінюється;
- Зростає;
- Зменшується.
-

39. Який з наведених графіків дає залежність між в'язкістю і питомим об'ємом для більшості рідин?



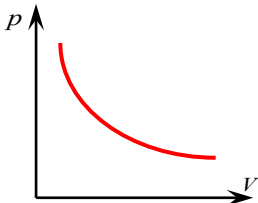
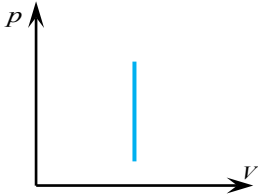
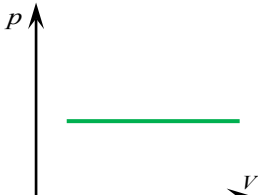
40. Який з наведених графіків дає температурну залежність теплоємності води?



Відповіді до завдань на відповідність

Завдання № 1

до теми «Основи молекулярно-кінетичної теорії газів»

№ з/п	Питання	№з/п	Відповіді
1.	Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів	1.	$k = \frac{R}{N_A}$
2.	Чому дорівнює універсальна газова стала?	2.	$B = \frac{R}{\mu}$
3.	Записати вираз для питомої газової сталої	3.	$p = \frac{2}{3} n \frac{m \langle u^2 \rangle}{2}$
4.	Який вигляд має об'єднаний газовий закон?	4.	8,31 Дж/(моль · К) або $8,31 \cdot 10^3$ Дж/(кмоль · К)
5.	Рівняння стану ідеального газу	5.	$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$
6.	Записати вираз для сталої Больцмана	6.	$pV = \frac{m}{\mu} RT$
7.	Як зображається графічно закон Бойля-Маріотта	7.	$2,7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ або $2,7 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$
8.	Як зображається графічно закон Шарля	8.	
9.	Чому рівне число Лошмідта?	9.	
10.	Як зображається графічно закон Гей-Люссака?	10.	

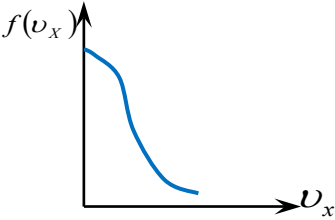
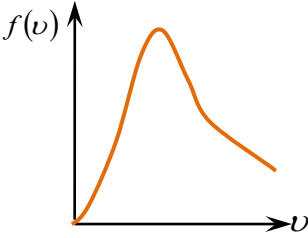
Завдання № 2

до теми «Основи молекулярно-кінетичної теорії газів»

№ з/п	Питання	№з/п	Відповіді
1.	Закон Шарля.	1.	$pV = const$
2.	Закон Бойля-Маріотта.	2.	$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots$
3.	Барометрична формула.	3.	$\frac{p}{T} = const$
4.	Закон Гей-Люссака.	4.	$p = p_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right)$
5.	Чому дорівнює число Авогадро?	5.	$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$
6.	Яка формула дає розподіл концентрації молекул за висотою?	6.	$\frac{V}{T} = const$
7.	Чому дорівнює число Лошмідта?	7.	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} / \text{К}$
8.	Який вигляд має об'єднаний газовий закон?	8.	$n = n_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right)$
9.	Який вигляд має закон Дальтона?	9.	$6,02318 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ або $6,02318 \cdot 10^{26} \text{ кмоль}^{-1}$
10.	Чому дорівнює стала Больцмана?	10.	$2,7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ або $2,7 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$

Завдання № 3

до теми «Основи молекулярно-кінетичної теорії газів»

№ з/п	Питання	№з/п	Відповіді
1.	Який вираз має функція розподілу швидкостей молекул за компонентами?	1.	$\sqrt{\frac{2kT}{m_0}}$
2.	Формула Максвелла.	2.	$n = n_0 \exp\left(-\frac{E}{kT}\right)$
3.	Який вираз має функція розподілу Максвелла?	3.	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{v_i} \exp\left(-\frac{v_x^2}{v_i^2}\right)$
4.	Середня арифметична швидкість молекул газу.	4.	$dn = n \cdot 4\pi v^2 \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right) dv$
5.	Найбільш імовірна швидкість молекул газу.	5.	$\frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{v_i^3} \exp\left(-\frac{v^2}{v_i^2}\right) \cdot v^2$
6.	E – положення Больцмана	6.	$\sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}$
7.	Формула Смолуховського.	7.	
8.	Як графічно зображається функція розподілу Максвелла?	8.	
9.	Як графічно зображається функція розподілу швидкостей молекул за компонентами?	9.	$\chi_T = -\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T}{V'_0}$
10.	Яким виразом описується ізотермічна стисливість ідеального газу?	10.	$\delta = \sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\langle n \rangle}}$

Зауваження до Завдання № 3

- До пункту **10)→9)** (ст. 166 «Молекулярна фізика», М.М. Клим, П.М. Якібчук)

Диференціальне рівняння стану $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = -1$ має загальний

характер та виконується для всіх тіл. Кожна частинна похідна рівняння має певний фізичний зміст:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \alpha V_0; \quad \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = \frac{1}{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V} = \frac{1}{\beta p_0}; \quad \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T} = -\frac{1}{\chi_T V'_0},$$

де α – температурний коефіцієнт об’ємного розширення тіла за сталого тиску;

β – температурний коефіцієнт тиску при сталому об’ємі;

χ_T – коефіцієнт ізотермічної стисливості;

V_0 , p_0 – об’єм та тиск системи при температурі $T_0 = 273K$; V'_0 – об’єм та тиск системи при тискові p_0 та температурі T .

- До пункту **7) →10)** (ст. 51 «Молекулярна фізика», М.М. Клим, П.М. Якібчук)

Згідно з теорією флуктуацій М. Смолуховського відносна флуктуація δ числа частинок, що завислі у рідині чи газі, дорівнює

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\langle n \rangle}},$$

де $\langle n \rangle$ – середнє число частинок в об’ємі.

- До пунктів **1) →3); 2) →4); 3) →5)**

використано матеріал ст. 24

Д.М. Фреїк, А.В. Лисак. Молекулярна фізика і термодинаміка : метод. посіб. Івано–Франківськ : ДНВЗ «Прикарпатський нац. університет ім. Василя Стефаника», 2014.

Розділ 5. Довідкові матеріали

Одиниці довжини, об'єму

$$1\text{мм} = 10^{-3}\text{ м};$$

$$1\text{см} = 10^{-2}\text{ м};$$

$$1\text{дм} = 10^{-1}\text{ м};$$

$$1\text{л} = 1\text{дм}^3 = 1 \cdot 10^{-3}\text{ м}^3;$$

$$1\text{см}^3 = 10^{-6}\text{ м}^3.$$

Одиниці маси

$$1\text{г} = 10^{-3}\text{ кг};$$

$$1\text{кг} = 10^3\text{ г};$$

$$1\text{а.о.м.} = 1,66 \cdot 10^{-27}\text{ кг} \text{ — атомна одиниця маси.}$$

Одиниці сили, тиску

$$1\text{кГс} = 9,8\text{ Н};$$

$$1\text{кГс} / \text{м}^2 = 9,8\text{ Па};$$

$$1\text{кГс} / \text{см}^2 = 9,8 \cdot 10^4\text{ Па або Н} / \text{м}^2;$$

$$1\text{кГс} / \text{мм}^2 = 9,8 \cdot 10^6\text{ Па};$$

$$760\text{мм рт.ст.} = 1,013 \cdot 10^5\text{ Па};$$

$$1\text{ мм.рт.ст} = 133,3\text{ Па.}$$

$$1\text{атм} = 1,013 \cdot 10^5\text{ Па (фізична атмосфера);}$$

$$1\text{Па} = 1,02 \cdot 10^{-5}\text{ атм}$$

$$1\text{ат} = 0,98 \cdot 10^5\text{ Па (технічна атмосфера);}$$

$$1\text{бар} = 10^5\text{ Па};$$

Одиниці роботи, енергії, кількості теплоти

$$1\text{кал} = 4,19\text{ Дж};$$

$$1\text{Дж} = 0,239\text{ кал};$$

Нормальні умови (н.у.):

$$T_0 = 273\text{ К};$$

$$p_0 = 1,01 \cdot 10^5\text{ Па} = 760\text{мм рт.ст.} = 1\text{атм}.$$

За нормальних умов (н.у.), молярний об'єм будь-якого газу, який поводить себе як ідеальний, рівний — $V_0 = 22,4\text{ л} = 22,4 \cdot 10^{-3}\text{ м}^3$

Одиниці вимірювання деяких фізичних величин (в СІ)

Робота, енергія	A, E	Дж
Кількість теплоти	Q	Дж
Потужність	P або N	Дж/с=Вт
Тиск	p	Па = Н/м ²
Молярна маса	μ	кг/моль
Концентрація	n	м ⁻³
Теплоємність питома	c	Дж/(кг·К)
Теплоємність молярна	C	Дж/(моль·К)
Теплоємність за сталого об'єму	C_V	Дж/(моль·К)
Теплоємність за сталого тиску	C_p	Дж/(моль·К)
Коефіцієнт поверхневого натягу	α	Н/м
Коефіцієнт динамічної в'язкості	η	Па·с = Н·с/м ² = кг/м·с
Коефіцієнт дифузії	D	м ² /с
Коефіцієнт теплопровідності	κ	Вт/м·К
Приріст ентропії	ΔS	Дж/К
Сталі Ван-дер-Ваальса	a та b	Н·м ⁴ /моль ² та м ³ /моль

Фундаментальні фізичні сталі

Гравітаційна стала	$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$
Прискорення вільного падіння	$g = 9,81 \text{ м/с}^2$
Стала Авогадро	$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Стала Больцмана	$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$
Стала Лошмідта	$n_0 = 2,69 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$
Універсальна газова стала	$R = 8,314 \text{ Дж/моль} \cdot \text{К}$
Молярний об'єм ідеального газу (н.у.)	$V_0 = 22,413 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 / \text{моль}$

Формат запису чисел

$$\begin{aligned}
 1\,000\,000 &= 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^6 \\
 100\,000 &= 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5 \\
 10\,000 &= 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4 \\
 1000 &= 10 \times 10 \times 10 = 10^3 \\
 100 &= 10 \times 10 = 10^2 \\
 10 &= 10 = 10^1 \\
 1 &= 1 = 10^0 \\
 0.1 &= 1/10 = 10^{-1} \\
 0.01 &= 1/100 = 1/10^2 = 10^{-2} \\
 0.001 &= 1/1000 = 1/10^3 = 10^{-3} \\
 0.000\,1 &= 1/10\,000 = 1/10^4 = 10^{-4} \\
 0.0\,000\,1 &= 1/100\,000 = 1/10^5 = 10^{-5} \\
 0.00\,000\,1 &= 1/1\,000\,000 = 1/10^6 = 10^{-6}
 \end{aligned}$$

Префікси для утворення кратних одиниць

Префікс	Позначення		Множник	Префікс	Позначення		Множник
тера	<i>T</i>	<i>T</i>	10^{12}	піко	<i>p</i>	<i>p</i>	10^{-12}
гіга	<i>G</i>	<i>G</i>	10^9	нано	<i>n</i>	<i>n</i>	10^{-9}
мега	<i>M</i>	<i>M</i>	10^6	мікро	<i>mk</i>	μ	10^{-6}
кіло	<i>k</i>	<i>k</i>	10^3	мілі	<i>m</i>	<i>m</i>	10^{-3}

Густина деяких речовин

Гази

Речовина	$\rho, \text{кг/м}^3$	Речовина	$\rho, \text{кг/м}^3$	Речовина	$\rho, \text{кг/м}^3$
азот	1,25	водень	0,09	кисень	1,43
амоніак	0,77	CO ₂	1,98	метан	0,71
ацетилен	1,17	гелій	0,18	неон	0,90
озон	2,14	повітря	1,29	CO	1,25
хлор	3,21				

Рідини

Речовина	$\rho, \text{кг/м}^3$	Речовина	$\rho, \text{кг/м}^3$	Речовина	$\rho, \text{кг/м}^3$
азот рідкий (-196°C)	790	гліцерин	1200	повітря рідке (-194°C)	860
бензин	700	гас	800	сірчана кислота	1840
бензол	880	рицинова олія	950	скипідар	850
вода ($+4^\circ \text{C}$)	1000	кисень рідкий (-196°C)	1140	спирт	800
вода морська	1030	нафта	800	ртуть	13600

Тверді тіла

Речовина	$\rho, \text{кг/м}^3$	Речовина	$\rho, \text{кг/м}^3$	Речовина	$\rho, \text{кг/м}^3$
алмаз	3500	мідь	8900	залізо	7900
алюміній	2700	нікель	8800	свинець	11300
золото	19300	олово	7300	сталь	7800
латунь	8500	платина	21400	скло	2700
лід	900	вольфрам	19300	чавун	7000

Молярні маси деяких речовин

Речовина	$\mu, 10^{-3} \text{кг/моль}$	Речовина	$\mu, 10^{-3} \text{кг/моль}$
Азот N_2	28	Карбону діоксид CO_2	44
Аргон Ar	40	Кисень O_2	32
Неон Ne	20	Повітря $-$	29
Вода H_2O	18	Ртуть Hg	201
Водень H_2	2	Кухонна сіль NaCl	58
Гелій He	4		

Ефективні діаметри молекул, атомів

Молекула	$\sigma, \text{м}$	Молекула	$\sigma, \text{м}$	Молекула	$\sigma, \text{м}$
Азот, N_2	$3,1 \cdot 10^{-10}$	Карбон діоксид CO_2	$3,3 \cdot 10^{-10}$	Кисень, O_2	$2,9 \cdot 10^{-10}$
Аргон, Ar	$2,9 \cdot 10^{-10}$	Водяна пара, H_2O	$2,6 \cdot 10^{-10}$	Карбон монооксид CO	$3,2 \cdot 10^{-10}$
Водень, H_2	$2,3 \cdot 10^{-10}$	Гелій, He	$1,9 \cdot 10^{-10}$	Хлор, Cl_2	$3,7 \cdot 10^{-10}$

Символи і відносні атомні маси деяких хімічних елементів

Н	He	C	N	O	Cu	K	Li	Na	Ar	Ne
1	4	12	14	16	64	39	6	23	40	20

Деякі параметри води:

питома теплота пароутворення при 100°C	$r = 2,26 \text{ МДж/кг}$
питома теплоємність	$c = 4,19 \text{ кДж/кг} \cdot \text{K}$
питома теплота плавлення льоду при 0°C	$\lambda = 3,35 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$

Питомі теплоємності деяких речовин:

сталь	$c = 460 \text{ Дж/кг} \cdot \text{K}$
лід	$c = 2100 \text{ Дж/кг} \cdot \text{K}$
свинець	$c = 126 - 130 \text{ Дж/кг} \cdot \text{K}$
вода	$c = 4,19 \cdot 10^3 \text{ Дж/кг} \cdot \text{K}$

Питома теплота плавлення:

свинець	$\lambda = 2,26 \cdot 10^4 \text{ Дж/кг}$
лід	$\lambda = 3,35 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$

Питомі теплоємності газів і пари

Речовина	$c_p, \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{K}}$	$c_v, \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{K}}$	$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$
Амоніак (NH ₃)	2140	1630	1,31
Азот (N ₂)	1040	741	1,41
Аргон (Ar)	532	320	1,66
Гелій (He)	5190–5240	3120–3140	1,66
Кисень (O ₂)	913–969	649	1,40
Метан (CH ₄)	2373	1854	1,28
Пара води (H ₂ O)	1820	1380	1,32
Повітря	1020	729	1,40
Карбон діоксид (CO ₂)	750–848	567–654	1,30

Коефіцієнти теплопровідності газів χ (за температури 0° C)

Речовина	$\chi, \frac{Вт}{м \cdot К}$
Аргон	0,16
Азот	0,023
Водень	0,14
Кисень	0,024
Повітря	0,026
Метан	0,031
СО ₂	0,014

Коефіцієнти внутрішнього тертя (динамічна в'язкість) η газів і пари

Речовина	$t, ^\circ C$	$\eta, 10^{-5} \frac{кг}{м \cdot с}$	Речовина	$t, ^\circ C$	$\eta, 10^{-5} \frac{кг}{м \cdot с}$
Азот	0	1,67	Пара повітря	0	0,87
СО ₂	0	1,37	Повітря	21,6	1,84
Гелій	0	1,86	Хлор	0	1,29
Кисень	0	1,92	Метан	20	1,2
Аргон	0	2,1	Неон	0	2,98
Амоніак	20	1,08	Хлор	20	1,47
Водень	20	0,95	Повітря	0	1,8
Криптон	0	2,33			

Сталі Ван-дер-Ваальса

Речовина	$a, \frac{Дж \cdot м^3}{моль^2}$	$b \cdot 10^{-5}, \frac{м^3}{моль}$
Водяна пара	0,556	3,06
СО ₂	0,364	4,26
Кисень	0,136	3,16
Аргон	0,132	3,22
Азот	0,136	3,85
Водень	$2,44 \cdot 10^{-2}$	2,63
Гелій	$3,43 \cdot 10^{-3}$	2,34

Критичні параметри деяких речовин (температура T_K і тиск p_K)

Речовина	T_K, K	$p_K, 10^6 \text{ Па}$	Речовина	T_K, K	$p_K, 10^6 \text{ Па}$
Азот	126	3,4	Водяна пара	647	22,0
Аргон	151	4,87	Гелій	5,2	0,23
Бензол	562	4,8	Кисень	154	5,07
Водень	33	1,3	CO ₂	304	7,4

Коефіцієнти поверхневого натягу α рідин (за температури 20° C)

Речовина	$\alpha, \text{ Н/м}$	Речовина	$\alpha, \text{ Н/м}$
Анілін	0,043	Золото (розпл. 1070° C)	0,61
Бензол	0,03	Рицинова олія	0,033
Ацетон	0,024	Мильний розчин води	0,045
Вода	0,073	Ртуть	0,5
Вода (70° C)	0,064	Срібло (розпл. 960° C)	0,78
Гас	0,03	Спирт	0,022
Гліцерин	0,064	Скипидар	0,027

Тиск і густина насиченої водяної пари

$t, ^\circ \text{C}$	$p, \text{ мм.рт.ст.}$	$\rho \cdot 10^{-3}, \text{ кг/м}^3$	$t, ^\circ \text{C}$	$p, \text{ мм.рт.ст.}$	$\rho \cdot 10^{-3}, \text{ кг/м}^3$
-10	1,95	2,14	11	9,8	10,0
-9	2,13	2,33	12	10,5	10,7
-8	2,32	2,54	13	11,2	11,4
-7	2,53	2,76	14	12,0	12,1
-6	2,76	2,99	15	12,8	12,8
-5	3,01	3,24	16	13,6	13,6
-4	3,28	3,51	17	14,5	14,5
-3	3,57	3,81	18	15,5	15,4
-2	3,88	4,13	19	16,5	16,3
-1	4,22	4,47	20	17,5	17,3
0	4,58	4,84	21	18,7	18,3
1	4,9	5,2	22	19,8	19,4
2	5,3	5,6	23	21,1	20,6
3	5,7	6,0	24	22,4	21,8
4	6,1	6,4	25	23,8	23,0
5	6,6	6,8	26	25,2	24,4
6	7,0	7,3	27	26,7	25,8
7	7,5	7,8	28	28,4	27,2
8	8,0	8,3	29	30,0	28,7
9	8,6	8,8	30	31,8	30,3
10	9,2	9,4		—	—

Література

1. Загальна фізика : інтерактивний комплекс навчально-методичного забезпечення / за ред. М. О. Ковалець, В. Ф. Орленка. Рівне : НУВГП, 2009. ч. I. 457 с.
2. Клим М. М., Якібчук П. М. Молекулярна фізика : навч. посіб. Львів : ЛНУ ім. І. Франка, 2003.
3. Бушок Г. Ф., Венгер Є. Ф. Курс фізики : навч. посіб. : у 2 кн. Київ : Либідь, 2001. Кн. 2.
4. Гончаренко С. У. Конкурсні задачі з фізики. 4-е стереотипне видання. Київ : Техніка, 1967.
5. Монастирський Г. Є., Гільчук А. В. Термодинаміка та молекулярна фізика. Збірник задач : навч. посіб. К. : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. URL: <https://ela.kpi.ua/items/623bad36-c0bd-44fd-bb3f-76fc83fc494e> (дата звернення; 24.06.2025).
6. Олімпіадні задачі. Всеукраїнський фізичний конкурс «Левеня – 2019». Інформаційний вісник / упоряд. В. Алексейчук. Львів : Каменярь, 2019.
7. Д. М. Фреїк, А. В. Лисак. Молекулярна фізика і термодинаміка : метод. посіб. Івано-Франківськ : ДНВЗ «Прикарпатський нац. університет ім. Василя Стефаника», 2014.
8. Методичні вказівки до виконання практичних і самостійних робіт із навчальної дисципліни «Фізика», розділ «МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА ТА ТЕРМОДИНАМІКА» / В. Ф. Орленко та ін. Рівне : НУВГП, 2014.
9. Методичні вказівки до курсу «Молекулярна фізика» для студентів фізичного факультету / Дутчак Я. Й., Кавич Й. В., Гапчин Б. М., Злобін Г. Г. Львів : ЛНУ ім. І. Франка, 1984.
10. University physics: with modern physics / Hugh D. Young, Roger A. Freedman, A. Lewis Ford. 13th ed. Boston : Pearson, 2011. 1521 p.
11. Paul G. Hewitt, John Suchocki, Leslie A. Hewitt. Conceptual physical science. Sixth edition. Boston : Pearson, 2015. 919 p.

Предметний покажчик

- Абсолютний нуль, 17
- Авогадро число, 11
- Агрегатні стани речовини, 8
- Адгезія, 164
- Амага, 136
- Аморфні тіла, 150
- Атмосфера
 - технічна, 295
 - фізична, 295
- Атомна одиниця маси, 11
- Бар, 295
- Ближній порядок, 9
- Больцмана стала, 27
- Вакуум, 86
- Випаровування, 151
- Висота підняття (опускання)
 - рідини у капілярі, 165
- Вологість
 - абсолютна, 158
 - відносна, 158
- Газ
 - ідеальний, 9, 14
 - реальний, 137
- Гігрометр, 158
 - волосяний, 158
 - конденсаційний, 159
 - психрометричний, 159
- Градiєнт
 - густини, 38
 - швидкості, 39
- Густина
 - газу, 45
 - парціальна
 - водяної пари, 158
- Дальній порядок, 10
- Диполь, 9
- Дифузія, 7, 38
- Діаграма станів, 156
- Дослід Штерна, 35, 85
- Дроселювання, 148
- Енергія
 - внутрішня
 - реального газу, 145, 146, 167
 - молекул поверхневого шару рідини, 168
 - поверхнева, 160
- Ефект
 - Джоуля–Томсона, 147
 - негативний, 148
 - позитивний, 149
- Ефективний діаметр молекули, 36
- Закон
 - Бойля–Маріотта, 15
 - Гей–Люссака, 16
 - Дальтона, 15, 28, 46
 - Ньютонa для в'язкого тертя, 40
 - об'єднаний газовий, 21
 - Фіка, 38
 - Фур'є, 40
 - Шарля, 18
- Зміна внутрішньої енергії при фазовому переході, 168
- Змочування, 164
- Ізобара, 17, 18
- Ізопрцеси, 15
- Ізотерма, 15
- Ізотерми
 - Амага, 136
 - Ван-дер-Ваальса, 138
- Ізохора, 19, 20
- Кипіння, 152
- Кількість
 - речовини, 11
 - ступенів вільності, 35
- Когезія, 163
- Коефіцієнт
 - в'язкого тертя (динамічна в'язкість), 40
 - Джоуля–Томсона, 149
 - дифузії, 38, 43
 - поверхневого натягу, 161
 - теплопровідності, 44

термічний, 17
Коефіцієнти кінетичні для явищ
перенесення, 44
Критична
температура, 144
точка, 156
Критичний
об'єм, 144
стан, 169
тиск, 144
Критичні параметри – зв'язок, 166
Маса
відносна атомна, 11
відносна молекулярна, 11
молярна, 11
суміші газів, 46
Метод
статистичний (молекулярно-
кінетичний), 13
термодинамічний, 13
Моль, 11
Насичена пара, 139
Незмочування, 164
Нормальні умови, 47
Об'єм
власний молекули, 133
заборонений, 133
зведений, 145
Опалесценція, 142
Основне рівняння
молекулярно-кінетичної теорії
(МКТ), 25, 46
Пара
насичена, 152
ненасичена, 152
Параметри критичні, 142, 143
Пароутворення, 151
Перехід
екзотермічний, 157
ендотермічний, 157
Питома теплота
пароутворення, 152
плавлення, 151
фазового переходу, 155

Плавлення, 150
Потрійна точка, 156
Процес
ізобарний, 16
ізотермічний, 15
ізохорний, 18
Пружність насиченої пари, 139
Радіус кривизни меніска, 163, 165
Рівняння
Ван-дер-Ваальса, 134
Клапейрона, 21
Клапейрона-Клаузіуса, 154
Ньютона для в'язкого тертя, 39
стану, 13
стану ідеального газу, 14, 21, 45
через концентрацію, 28
стану реального газу
зведене, 145
теплого балансу для ефекту
Джоуля-Томсона, 148
теплопровідності, 40
Розподіл
Больцмана, 30
за потенціальними енергіями,
30
Максвелла, 32
Рух броунівський, 8
Середня
кількість зіткнень молекул, 37
Середня довжина вільного пробігу
молекул, 37
Сила поверхневого натягу, 161
Сили
в'язкого тертя, 40
внутрішнього тертя, 39
Системи термодинамічні, 13
Співвідношення між швидкостями,
34
Сублімація, 156
Температура, 26
Бойля, 137, 138
зведена, 145
інверсії, 149
критична, 142

термодинамічна, 17
 Теплоємність
 молярна реального газу
 при сталому об'ємі, 146
 при сталому тиску, 146
 Теплопровідність, 40
 Теплота
 пароутворення (конденсації), 167
 плавлення (кристалізації), 167
 Тиск
 внутрішній, 134
 зведений, 145
 Лапласа, 163
 насиченої пари, 139
 парціальний, 28
 повний, 135
 Тіла
 аморфні, 150
 кристалічні, 150
 Точка
 Бойля, 137
 роси, 159
 Універсальна газова стала, 14
 Фаза, 149
 Фазовий перехід, 149
 I-го роду, 150
 II-го роду, 150
 Формула
 барометрична, 30
 Больцмана, 30
 для броунівських частинок, 85
 Формула Лапласа
 для загального випадку для
 поверхні двоякої кривизни,
 168
 для сферичної поверхневої
 плівки, 168
 Функція розподілу
 молекул за швидкостями, 32
 Хімічний потенціал речовини, 157
 Швидкість
 найбільш імовірна, 32, 33
 середня арифметична, 33
 середня квадратична, 27, 34
 Шкала
 Кельвіна, 17
 Цельсія, 17
 Явища перенесення, 37

Навчальне видання

*Мороз Микола Володимирович
Соляк Людмила Василівна
Гаєвський Валерій Ростиславович
Рудик Богдан Петрович
Гаращенко Олексій В'ячеславович
Лебедь Олександр Олександрович
Рибалко Андрій Володимирович*

МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА. ТЕОРІЯ, ЗАДАЧІ, ТЕСТИ

Навчальний посібник

Технічний редактор

Галина Сімчук

Друкується в авторській редакції

*Видавець і виготовлювач
Національний університет
водного господарства та природокористування,
вул. Соборна, 11, м. Рівне, 33028.*

*Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до
державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів
видавничої продукції РВ № 31 від 26.04.2005 р.*