

Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та
природокористування
Навчально-науковий інститут кібернетики, інформаційних
технологій та інженерії
Кафедра вищої математики

04-02-82М

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання практичних та лабораторних робіт з
навчальної дисципліни

«ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА»

для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського)
рівня за освітньо-професійними програмами
«Інформаційні системи та технології» спеціальності F6
«Інформаційні системи та технології» і «Цифрові
технології дистанційної освіти» спеціальності
A5.39 «Професійна освіта (Цифрові технології)»
денної та заочної форм навчання

Рекомендовано
науково-методичною
радою з якості ННІ КІТІ
Протокол № 2 від 03.12.2025 р.

Рівне – 2025

Методичні вказівки до виконання практичних робіт з навчальної дисципліни «Теорія ймовірностей і математична статистика» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійними програмами «Інформаційні системи та технології» спеціальності F6 «Інформаційні системи та технології» і «Цифрові технології дистанційної освіти» спеціальності A5.39 «Професійна освіта (Цифрові технології)» денної та заочної форм навчання. [Електронне видання] / Кушнір О. О., Кушнір В. П. Рівне : НУВГП, 2025. 69 с.

Укладачі:

Кушнір О. О., канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри вищої математики;

Кушнір В. П., канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої математики.

Відповідальний за випуск: Тадеєв П. О., доктор пед. наук, проф., зав. кафедри вищої математики.

Керівники груп забезпечення спеціальностей:

A5.39 «Професійна освіта (Цифрові технології)»:

Парфенюк О. В., к.п.н., доцент;

F6 «Інформаційні системи та технології»: Гладка О. М., к.т.н., доцент.

Попередня версія методичних вказівок:

04-02-47М, 04-02-54М

© О. О. Кушнір,
В. П. Кушнір, 2025
© НУВГП, 2025

Зміст

Вступ	4
§ 1. Елементи комбінаторики	5
§ 2. Випадкові події та їх імовірності.....	9
§ 3. Випадкові величини	14
§ 4. Розподіли випадкових величин.....	16
§ 5. Системи випадкових величин	20
§ 6. Елементи математичної статистики	22
§ 7. Виявлення залежностей між досліджуваними ознаками та оцінка тісноти їх зв'язку.....	31
Розв'язання задач	34
Відповіді до задач	65
Список використаних джерел	69

Вступ

Для фахівців з інформаційних систем та технологій та цифрових технологій важливо знати основи теорії ймовірностей та математичної статистики, бо інформація може бути статистичною, тому для її обробки та аналізу слід застосовувати методи теорії ймовірностей.

Метою методичних вказівок є залучення студентів до активної роботи на практичних заняттях та надання методичної допомоги з розв'язання задач математичної статистики за допомогою електронних таблиць вільної програми з відкритим кодом LibreOffice Calc.

Для цього пропонуються завдання різного рівня складності, щоб студенти могли під керівництвом викладача їх виконувати. До кожної теми сформульовані теоретичні питання, необхідні для виконання цих робіт.

Всього методичні вказівки містять 106 завдань із відповідями до них, а також наведені алгоритми виконання типових завдань з математичної статистики. Замість статистичних таблиць наводяться короткі інструкції з користування електронними таблицями LibreOffice Calc.

Програму LibreOffice Calc можна завантажити за посиланням https://www.libreoffice.org/download/download/?type=win-x86_64&lang=uk. Із двох запропонованих версій варто вибирати старішу, бо вона стабільніша.

§ 1. Елементи комбінаторики

Мета: Оволодіти основами комбінаторики для розв'язання різноманітних практичних задач.

Перелік теоретичних питань:

- 1) правило додавання;
- 2) правило множення;
- 3) розміщення з повтореннями та їх кількість;
- 4) розміщення без повторень та їх кількість;
- 5) перестановки без повторень та їх кількість;
- 6) комбінації без повторень та їх кількість;
- 7) перестановки з повтореннями та їх кількість;
- 8) комбінації з повтореннями та їх кількість;
- 9) формула включення-виключення.

Задачі на арифметичні дії

1. Скільки існує 4-цифрових PIN-кодів, усі цифри яких однакові?
2. Скільки існує 4-цифрових PIN-кодів, послідовні цифри яких утворюють геометричну прогресію?
3. Скільки існує 4-цифрових PIN-кодів, послідовні цифри яких утворюють арифметичну прогресію?
4. Скільки існує 7-цифрових чисел, що не діляться на 3?
5. Скільки існує 5-цифрових чисел, що діляться на 11?

6. Скільки існує 3-цифрових чисел, що діляться на 19?

7. Є 6 різних ключів від 6 шухляд. Нехай за 10 секунд можна перевірити, чи ключ підходить до шухляди. За який час можна гарантовано підібрати ключі до всіх шухляд?

8. Скільки існує 4-цифрових PIN-кодів, в яких сума двох перших цифр дорівнює сумі двох останніх цифр?

9. [1] В колективі програмістів 18 осіб знають C++, 25 знають Python, 29 знають Java, 7 знають C++ і Python, 5 знають C++ і Java, 11 знають Python і Java, 2 знають всі три мови програмування. Скільки програмістів знають а) хоча б одну з цих трьох мов? б) знають тільки одну з цих трьох мов?

Задачі на множення та розміщення

10. [1] Будівля має 4 входи. Скількома способами можна зайти і вийти з неї?

11. [1] Будівля має 6 входів. Скількома способами можна зайти і вийти з неї, не проходячи двічі через ті ж вхідні двері?

12. Скількома способами можна розподілити 5 різних картин по 3-х кабінетах?

13. Торговий агент намагається продати 5 різних картин, послідовно заходячи до трьох установ. Скільки є варіантів покупок картин установами?

14. Скількома способами можна з 8-ми кімнат вибрати кабінети директора, його заступника та бухгалтера?

15. [1] В аудиторії є 10 комп'ютерів. Скількома способами 6 студентів можуть сісти за ними?

16. У театральній групі є 8 акторів та 10 актрис. Потрібно

вибрати з них для різних ролей у виставі 5 акторів та 4 актриси. Скількома способами це можна зробити?

17. Скількома способами можна роздати 4-м дітям 4 різні подарунки так, щоб кожна дитина отримала подарунок?

18. Скільки існує 4-цифрових PIN-кодів, які не містять нулів?

19. [1] Скільки існує 5-цифрових чисел, усі цифри яких різні?

20. Скільки існує 5-цифрових чисел, які містять як парні, так і непарні цифри?

21. [1] Скільки існує 5-цифрових чисел, які не містять одиниць?

22. Скільки перестановок можна утворити з букв слова “місто”?

23. Скількома способами можна набрати у сумі за 2 модулі по 20 балів і до 60 балів за практичні заняття а) рівно 60 балів? б) не менше 60 балів? в) менше 60 балів?

Задачі на перестановки з повтореннями та комбінації

24. [1] Скількома способами можна вибрати 4-х делегатів конференції з колективу з 10 осіб?

25. Скільки існує 4-цифрових PIN-кодів, в яких кожна наступна цифра більша від попередньої?

26. [1] Скількома способами можна розділити на дві команди по 5 гравців 3-х студентів та 7-х студенток так, щоб у жодній команді не були лише студентки?

27. [1] У балетній групі є 8 танцюристів та 11 балерин.

Потрібно вибрати з них для виступу 3 пари. Скількома способами це можна зробити?

28. [1] Скільки перестановок можна утворити з букв слова “тетраedr”?

29. У 8 магазинах є 5 однакових ноутбуків певної моделі. Скільки є всього можливих розміщень цих ноутбуків по магазинах?

30. Відомо, що у кожному з 8 магазинів є принаймні 1 ноутбук певної моделі, а загальна кількість ноутбуків у цих магазинах 18. Скільки є всього можливих розміщень цих ноутбуків по магазинах?

31. У 8 магазинах є не більше 5 однакових ноутбуків певної моделі. Скільки є всього можливих розміщень цих ноутбуків по магазинах?

32. Скількома способами можна набрати у сумі за 2 модулі по 20 балів і до 60 балів за практичні заняття а) 74 бали? б) 90 балів? в) не менше 90 балів?

33. Скількома способами можна написати в рядку 10 нулів та 5 одиниць так, щоб жодні дві одиниці не стояли поряд?

34. Скількома способами можна посадити в ряду 5 студенток та 10 студентів так, щоб жодні дві студентки не сиділи поряд?

35. Скількома способами можна посадити за круглим столом 5 студенток та 10 студентів так, щоб жодні дві студентки не сиділи поряд?

36. Скількома способами можна написати по колу на дзизі 10 нулів та 5 одиниць так, щоб жодні дві одиниці не стояли поряд?

§ 2. Випадкові події та їх імовірності

Мета: Навчитися знаходити ймовірності складних подій.

Перелік теоретичних питань:

- 1) ймовірність протилежної події та суми подій;
- 2) класичне означення ймовірності;
- 3) геометричні ймовірності;
- 4) умовні ймовірності;
- 5) ймовірність добутку подій;
- 6) незалежні випадкові події;
- 7) формули повної ймовірності та Байєса;
- 8) формула Бернуллі та її наближення.

Додавання, віднімання та множення ймовірностей

37. Події A та B — несумісні, $P(A)=0,3$, $P(B)=0,4$.

Знайти $P(A \cup B)$.

38. $P(A)=0,3$, $P(B)=0,4$, $P(AB)=0,2$. Знайти $P(A \cup B)$.

39. Події A та B — незалежні, $P(A)=0,3$, $P(B)=0,4$.

Знайти $P(A \cup B)$.

40. Події A та B — несумісні, $P(A)=0,3$, $P(B)=0,4$.

Знайти $P(\overline{AB})$.

41. $P(A)=0,3$, $P(B)=0,4$, $P(AB)=0,2$. Знайти $P(\overline{AB})$.

42. Події A та B — незалежні, $P(A)=0,3$, $P(B)=0,4$.

Знайти $P(\overline{AB})$.

43. Події A , B та C — незалежні, $P(A)=0,3$, $P(B)=0,4$, $P(C)=0,5$.
Знайти $P(ABC)$.

44. Події A , B та C — незалежні, $P(A)=0,3$, $P(B)=0,4$, $P(C)=0,5$.
Знайти $P(A \cup BC)$.

45. Події A , B та C — незалежні, $P(A)=0,3$, $P(B)=0,4$, $P(C)=0,5$.
Знайти $P(\overline{ABC})$.

46. Події A , B та C — незалежні, $P(A)=0,3$, $P(B)=0,4$, $P(C)=0,5$.
Знайти $P((A \cup B)C)$.

47. Події A , B та C — незалежні, $P(A)=0,3$, $P(B)=0,4$, $P(C)=0,5$.
Знайти ймовірність того, що жодна з цих подій не відбудеться.

48. Події A , B та C — незалежні, $P(A)=0,3$, $P(B)=0,4$, $P(C)=0,5$.
Знайти $P(A \cup B \cup C)$.

49. [1] Події A , B та C — незалежні, $P(A)=0,3$, $P(B)=0,4$, $P(C)=0,5$. Знайти ймовірність того, що відбудеться тільки одна з цих подій.

50. [1] Події A , B та C — незалежні, $P(A)=0,3$, $P(B)=0,4$, $P(C)=0,5$. Знайти ймовірність того, що відбудуться тільки дві з цих подій.

51. [1] Події A , B та C — незалежні, $P(A)=0,3$, $P(B)=0,4$, $P(C)=0,5$. Знайти ймовірність того, що відбудуться не менше двох з цих подій.

52. Ймовірність високого врожаю озимої пшениці у певній місцевості дорівнює 0,7, а ячменю 0,75. Ймовірність того, що не вродить ні озима пшениця, ні ячмінь, дорівнює 0,2. Знайти ймовірність

того, що буде високий урожай і озимої пшениці, і ячменю.

53. Можливість отримати замовлення від клієнтів А, В, С — незалежні події. Нехай ймовірність отримати замовлення від клієнта А дорівнює 0,4, від клієнта В — 0,7, а від клієнта С — 0,8. Знайти ймовірність того, що буде не більше одного замовлення.

Класичне означення ймовірностей

54. Знайти ймовірність того, що при підкиданні двох кубиків випаде в сумі 8 очок.

55. 22 учасників змагань жеребкуванням ділять на дві команди по 11 учасників. Знайти ймовірність того, що двоє братів опиняться в різних командах.

56. В аудиторії є 12 комп'ютерів, на 5 із них встановлена операційна система Linux. Група з 6 студентів навчання сідають за комп'ютери. Знайти ймовірність того, що не менше 3 із них сядуть за комп'ютери з Linux.

Геометричні ймовірності

57. Поїзди метро приходять на станцію з інтервалом 4 хв. Знайти ймовірність того, що пасажирові доведеться чекати більше 3 хв.

58. Поїзди метро приходять на станцію з інтервалом 4 хв. Знайти ймовірність того, що пасажирові доведеться чекати в сумі а) за дві поїздки більше 5 хв; б) за три поїздки більше 9 хв.

59. Мотузка довжиною 3 м рветься на дві частини. Знайти ймовірність того, що довжина довшої частини буде не меншою від 2 м.

60. Після заокруглення числа x отримали 2,5. Знайти ймовірність того, що $x > 2,52$.

61. Два числа а) спочатку заокруглюють з точністю до сотих, а

потім додають; б) спочатку додають, а потім заокруглюють до сотих. Знайти ймовірність того, що вийдуть різні відповіді. Зробити висновок.

62. Три числа а) спочатку заокруглюють з точністю до сотих, а потім додають; б) спочатку додають, а потім заокруглюють до сотих. Знайти ймовірність того, що вийдуть різні відповіді.

63. У прямокутнику $0 < x < 5$, $0 < y < 3$ вибирається точка так, що ймовірність потрапити в область всередині прямокутника пропорційна площі цієї області. Знайти ймовірності таких подій: а) $\min\{x, y\} < 1$, б) $\max\{x, y\} > 2$, в) $\min\{x, y\} > 4$, г) $\max\{x, y\} < 4$.

Умовні ймовірності. Ймовірність добутку подій

64. $P(A)=0,3$, $P(B)=0,4$, $P(AB)=0,2$.

Знайти умовні ймовірності а) $P_B(A)$; б) $P_A(B)$.

65. Ймовірність високого врожаю озимої пшениці у певній місцевості дорівнює 0,7, а ячменю 0,75. Ймовірність того, що не вродить ні озима пшениця, ні ячмінь, дорівнює 0,2. Відомо, що озима пшениця вродила добре. Знайти ймовірність того, що буде високий урожай ячменю.

66. Гральний кубик підкидається двічі. Відомо, що при другому киданні випало більше число, ніж при першому. Знайти ймовірність того, що при другому киданні випало 6.

67. Покупець вирішив перевірити 3 з 10 виробів партії. Знайти ймовірність того, що він виявить брак, якщо в партії є 2 браковані вироби. Зробити висновок.

68. Можливість отримати замовлення від клієнтів А, В, С — незалежні події. Нехай ймовірність отримати замовлення від клієнта А дорівнює 0,4, від клієнта В — 0,7, а від клієнта С — 0,8. Відомо, що

було не менше двох замовлень. Знайти ймовірність того, що було замовлення від клієнта А.

Формули повної ймовірності та Байєса

69. [1] У складальний цех надходять деталі: 40%-з першого верстату, 35%-з другого верстату, 25%-з третього верстату. Ймовірність виготовлення бракованої деталі 1-им верстатом дорівнює 0,03, 2-м — 0,02, 3-м — 0,04. Скільки відсотків бракованих деталей у складальному цеху?

70. Ймовірність того, що виріб задовольняє стандарт 0,9. Пропонується спрощена система перевірки виробу, яка дає позитивний результат з ймовірністю 0,98 для стандартних виробів та з ймовірністю 0,01 для нестандартних. а) Яка ймовірність того, що виріб, який пройшов перевірку, є нестандартним? б) Яка ймовірність того, що виріб, який не пройшов перевірку є стандартним? Зробити висновки.

Формула Бернуллі та її наближення

71. Нехай $P(A)=0,3$. Знайти $P_6(2)$.

72. Нехай $P(A)=0,2$. Знайти ймовірність того, що в 4 випробуваннях подія А відбудеться хоча б один раз.

73. Нехай $P(A)=0,4$. Знайти ймовірність того, що в 5 випробуваннях подія А відбудеться не більше 3-х разів.

74. Нехай $P(A)=0,002$. Знайти $P_{1000}(3)$.

75. Нехай $P(A)=0,6$. Знайти $P_{200}(115)$.

76. Нехай $P(A)=0,5$. Знайти $P_{500}(245, 260)$.

§ 3. Випадкові величини

Мета: Навчитися будувати графіки функцій розподілу випадкових величин та знаходити їх числові характеристики.

Перелік теоретичних питань:

- 1) обчислення ймовірності потрапляння випадкової величини в даний проміжок за функцією розподілу;
- 2) закон розподілу дискретної випадкової величини, її математичне сподівання, мода, медіана, дисперсія та середнє квадратичне відхилення;
- 3) властивості щільності розподілу неперервної випадкової величини, її математичне сподівання, мода, медіана, дисперсія та середнє квадратичне відхилення;
- 4) рівномірний розподіл;
- 5) біномний розподіл;
- 6) гіпергеометричний розподіл.

Дискретні випадкові величини

77. При якому значенні числа p наступна таблиця задаватиме закон розподілу дискретної випадкової величини X ?

X	2	3	5	7
P	0,2	0,4	p	0,3

Знайти для цієї випадкової величини моду, математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення. Побудувати графік її функції розподілу та знайти медіану. Яка

ймовірність того, що X набуде значення більше від її моди?

78. За умовою задачі 53 знайти закон розподілу кількості замовлень, її моду, медіану, математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення. Яка ймовірність того, що ця випадкова величина набуде значення більше від її медіани?

79. За умовою задачі 56 знайти закон розподілу кількості комп'ютерів з операційною системою Linux, за якими сядуть студенти, її моду, медіану, математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення. Яка ймовірність того, що ця випадкова величина набуде значення більше від її математичного сподівання?

Неперервні випадкові величини

80. При якому значенні числа c наступна функція є щільністю розподілу деякої випадкової величини X ?

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq -1; \\ \frac{c}{\sqrt{1-x^2}} & \text{якщо } -1 < x < 1; \\ 0, & \text{якщо } x \geq 1. \end{cases}$$

Знайти для X моду, математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення. Побудувати графік її функції розподілу та знайти медіану. Яка ймовірність того, що X набуде значення більше від її медіани?

81. За умовою задачі 58 знайти функцію та щільність розподілу сумарного часу очікування пасажиром поїздів метро за

дві поїздки, його моду, медіану, математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення. Яка ймовірність того, що ця випадкова величина набуде значення від 3 хв до 6 хв?

82. В квадраті зі стороною 10 см вибирається точка так, що ймовірність потрапити в область всередині прямокутника пропорційна площі цієї області. Знайти функцію розподілу максимальної відстані від цієї точки до сторони квадрата, її моду, медіану, математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення. Яка ймовірність того, що ця випадкова величина набуде значення від 3 см до 8 см?

§ 4. Розподіли випадкових величин

Мета: Навчитися використовувати розподіли випадкових величин для розв'язування практичних задач та за допомогою електронних таблиць знаходити ймовірності набування випадковими величинами значень із заданого числового проміжку, познайомитися з поняттям квантилів.

Перелік теоретичних питань:

- 1) нормальний розподіл;
- 2) показниковий розподіл;
- 3) геометричний розподіл;
- 4) розподіл Пуассона;
- 5) найпростіший потік.

Інформація про деякі функції програми LibreOffice Calc

У LibreOffice Calc можна використовувати наступні функції, які стосуються нормального розподілу:

1. PHI — щільність стандартного нормального розподілу

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

2. GAUSS — функція Лапласа

$$\Phi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_0^t \varphi(x) dx.$$

3. NORM.S.DIST — функція стандартного нормального розподілу

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} + \Phi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^t \varphi(x) dx,$$

якщо другий аргумент 1, то його щільність $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, якщо другий аргумент 0.

4. NORM.S.INV — квантиль u_γ стандартного нормального розподілу ($\Phi(u_\gamma) = \gamma$).

5. STANDARDIZE — z-стандартизація $z = \frac{t - \mu}{\sigma}$.

6. NORM.DIST=NORMDIST — функція нормального розподілу

$F(t) = \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right)$, якщо четвертий аргумент 1 та його щільність

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}},$$

якщо четвертий аргумент 0. (Ця функція є композицією NORM.S.DIST з STANDARDIZE у випадку 1).

7. NORM.INV=NORMINV — квантиль x_γ нормального розподілу ($F(x_\gamma) = \gamma$).

8. ERF.PRECISE — функція помилок

$$\text{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-x^2} dx = 2\Phi_0(t\sqrt{2}).$$

У свою чергу функція Лапласа $\Phi_0(t) = \frac{1}{2} \text{erf}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$.

9. ERFC.PRECISE — доповнювальна функція помилок

$$\text{erfc}(t) = 1 - \text{erf}(t).$$

Для розподілу Пуассона є функції POISSON=POISSON.DIST. Вони при значенні 0 останнього аргумента видають закон розподілу, а при значенні 1 — правобічну границю функції розподілу. Якщо 1-й аргумент функції POISSON 0, то вона видає $\text{EXP}(-x)$, де x — другий її аргумент. Так ми можемо знаходити значення функції показникового розподілу $1 - \text{EXP}(-\lambda x)$. Звісно, можна також використовувати для цього математичну функцію EXP. А для знаходження квантилів показникового розподілу є обернена до EXP математична функція LN.

Нормальний розподіл

83. Певна група людей має середню масу 72 кг і середнє квадратичне відхилення 7 кг. Знайти ймовірність того, що маса окремо взятої людини з цієї групи а) менша від 80 кг; б) менша від 60 кг в) більша від 90 кг г) знаходиться в межах від 65 кг до 75 кг. Яку величину не перевищить маса людини з даної групи з імовірністю 0,95? Яка ймовірність того, що сумарна маса 4-х людей, які увійшли до ліфта, не перевищить 320 кг?

84. Випадкові похибки експерименту мають нормальний розподіл із середнім квадратичним відхиленням 15. Проведено 16 експериментів та знайдено середнє арифметичне цих вимірів. Яка ймовірність, що його відхилення за абсолютною величиною від математичного сподівання буде а) не більше від 3? б) більшим від 10? Скільки потрібно провести експериментів, щоб з імовірністю 0,95 відхилення їх середнього арифметичного від математичного сподівання було не більшим від 5?

Показниковий розподіл

85. Двоє працівників ремонтують прилади. Час ремонту приладу має показниковий розподіл із параметром $\lambda=2/\text{год}$. Той працівник, який раніше закінчить ремонт приладу, візьметься за ремонт 3-го приладу. Знайти а) ймовірність того, що він закінчить ремонт 3-го приладу раніше, ніж його напарник свій перший прилад; б) ймовірність того, що протягом години 1-й та 2-й прилади будуть відремонтовані; в) ймовірність того, що 1-й прилад буде ремонтуватися від 20 хв до 40 хв.

Геометричний розподіл

86. Троє гравців по черзі підкидають кубик. Виграє той, у кого першого випаде 6. Одне підкидання кубика триває 10 секунд. Знайти а) ймовірність перемоги 2-го гравця; б) ймовірність того, що гра триватиме довше двох хвилин; в) середню тривалість гри.

Розподіл Пуассона; найпростіший потік

87. Середня кількість замовлень таксі, які надходять на диспетчерський пункт за одну хвилину, дорівнює 3. Знайти ймовірність того, що за 2 хвилини буде а) 4 замовлення; б) менше 4 замовлень; в) не менше 4 замовлень. Знайти середній час між замовленнями та його дисперсію й середнє квадратичне відхилення.

88. Скільки в середньому родзинок має бути в булочках, щоб з імовірністю 0,99 у навімання вибраній булочці було не менше однієї родзинки?

§ 5. Системи випадкових величин

Мета: Навчитися знаходити числові характеристики двовимірних випадкових величин, познайомитися з двовимірним нормальним розподілом, знаходити рівняння лінійної регресії. Зрозуміти теоретично, що таке регресія і кореляція.

Перелік теоретичних питань:

- 1) двовимірні випадкові величини, їх розподіли;
- 2) незалежні випадкові величини;

- 3) математичне сподівання, коваріаційна матриця;
- 4) коефіцієнт кореляції та його властивості;
- 5) умовні розподіли та умовні математичні сподівання;
- 6) кореляційне відношення;
- 7) лінійна регресія;
- 8) двовимірний нормальний розподіл та властивості нормально розподілених випадкових величин.

Вказівки: Електронні таблиці зручні для дослідження двовимірних дискретних розподілів, оскільки дозволяють автоматично виконувати прості операції множення рядків та знаходження сум їх елементів. Для виконання обчислень на початку комірки набираємо “=”.

89. При якому значенні числа p наступна таблиця задаватиме закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини (X, Y) ?

X	0	1	2
Y			
2	0,3	p	0
3	0	0,2	0,1
5	0	0,1	0,2

Знайти одновимірні закони розподілу випадкових величин X та Y , їхні математичні сподівання, кореляційну матрицю, коефіцієнт кореляції, рівняння лінійної регресії Y на X та X на Y ,

$D(Y-X)$ та $D(3X+2Y)$, умовне математичне сподівання Y за умови, що $X=1$, закон розподілу умовного математичного сподівання Y за X , кореляційне відношення Y на X . Охарактеризувати зв'язок між випадковими величинами.

90. Нехай X та Y — незалежні випадкові величини, які мають розподіл $N(0, 1)$, $U = 5X + 3Y - 7$; $V = 4X - Y + 2$. Знайти та охарактеризувати зв'язок між U та V .

§ 6. Елементи математичної статистики

Мета: Навчитися обробляти статистичну інформацію та приймати рішення на її основі.

Перелік теоретичних питань:

- 1) варіаційний ряд;
- 2) емпірична функція розподілу;
- 3) вибіркові числові характеристики;
- 4) незсунена оцінка дисперсії;
- 5) надійні інтервали для ймовірності події та параметрів нормального розподілу;
- 6) параметричні статистичні критерії;
- 7) перевірка гіпотез про розподіл випадкової величини;
- 8) перевірка гіпотези про незалежність випадкових величин.

Обробка статистичної інформації

Вказівки: Вибіркове середнє можна знайти, використавши значок Σ — Середнє значення. Крім того можна використати статистичні функції AVERAGE, AVERAGEA.

Вибіркову дисперсію S^2 можна знайти за допомогою кожної з наступних статистичних функцій: VARP = VARPA = VAR.P,

а незсунену оцінку дисперсії $S_e^2 = \frac{n}{n-1} S^2$ — VAR=VARA= VAR.S.

Вибіркове середнє квадратичне відхилення S знаходимо, добуваємо квадратний корінь (функція SQRT) з S^2 або безпосередньо за допомогою статистичних функцій STDEVP = STDEVPA = STDEV.P.

S_e знаходимо, добуваючи квадратний корінь із S_e^2 або використовуючи статистичні функції STDEV = STDEVA = STDEV.S.

91. Для вибірки 1, 2, 5, 4, 3, 4, 3, 4, 2, 4, 3, 1, 2, 4 утворити варіаційний ряд, побудувати графік емпіричної функції розподілу, знайти обсяг, розмах, вибіркові моду, медіану, середнє та середнє квадратичне відхилення. Знайти незсунену оцінку дисперсії та оцінити ймовірність того, що випадкова величина набуде значення більше від 3.

Надійні інтервали

Вказівки: За допомогою програми LibreOffice Calc можна з великою точністю знаходити значення оберненої бета-функції для знаходження надійних інтервалів ймовірності події точним методом Клоппера-Пірсона.

Нижню межу однобічного надійного інтервалу знаходимо, викликавши команду = BETA.INV($1 - \gamma$; k ; $n - k + 1$), де γ — його надійність, n — кількість випробувань, а k — кількість успіхів.

Для знаходження верхньої межі однобічного надійного інтервалу викликаємо команду = BETA.INV γ ; $k + 1$; $n - k$). Двобічний надійний інтервал має вигляд

$$(\text{= BETA.INV}((1 - \gamma)/2; k; n - k + 1), \text{= BETA.INV}((1 + \gamma)/2; k + 1; n - k)).$$

Надійність інтервалу (p , 1) знаходиться так:

$$\text{= BINOM.DIST}(k - 1; n; p; 1),$$

надійність інтервалу (0, p): $\text{= } 1 - \text{BINOM.DIST}(k; n; p; 1)$, а надійність двобічного надійного інтервалу (l , u) можна знайти, віднявши $\text{= BINOM.DIST}(k; n; u; 1)$ від $\text{= BINOM.DIST}(k - 1; n; l; 1)$.

Квантілі t -розподілу Стюдента знаходяться за допомогою функції T.INV. Також для знаходження квантіля побудови двобічного надійного інтервалу надійності γ можна набрати $\text{= TINV}(1 - \gamma, n - 1)$, де n — обсяг вибірки, $n - 1$ — кількість ступенів вільності. Зауважте, що $\text{T.INV.2T} = \text{TINV}$.

Безпосередньо відхилення від вибіркового середнього в надійному інтервалі для математичного сподівання можна знайти, набравши $\text{= CONFIDENCE.T}(1 - \gamma; S_g; n)$, де n — обсяг вибірки.

Функція Т-розподілу — статистична функція T.DIST;

$\text{T.DIST.RT} = 1 - \text{T.DIST}$; $\text{T.DIST.2T} = 2 * \text{T.DIST.RT}$ визначена тільки при додатних значеннях 1-го аргумента;

$\text{TDIST} = \text{T.DIST.2T}$, якщо останній аргумент $= 2$ та $\text{TDIST} = \text{T.DIST.RT}$, якщо останній аргумент $= 1$, визначена тільки при додатних значеннях 1-го аргумента.

Квантилі χ^2 -квадрат розподілу Хельмерта-Пірсона обчислює функція $\text{CHISQ.INV}=\text{CHISQINV}$. Їх також можна знайти $= \text{CHISQ.INV.RT}(1 - \gamma; n)$ та $= \text{CHIINV}(1 - \gamma; n)$ (тут n — кількість ступенів вільності, а не обсяг вибірки). Функція χ^2 -квадрат-розподілу — статистична функція CHISQ.DIST .

92. Серед 250 деталей, виготовлених верстатом-автоматом, виявилось 32 нестандартних. Знайти двобічний надійний інтервал Клоппера-Пірсона ймовірності p виготовлення нестандартної деталі з надійністю 0,95. Знайти верхню оцінку p з такою ж надійністю. З якою надійністю можна стверджувати, що $p < 0,15$?

93. Побудувати інтервали надійності 0,95 для математичного сподівання та дисперсії за вибіркою з нормального розподілу 8, 11, 11, 10. З якою надійністю можна стверджувати, що математичне сподівання більше від 7?

Параметричні статистичні критерії

Вказівки: Виявляти наявність різниці середніх потрібно за допомогою t -критерію Стьюдента навіть якщо розподіл не є нормальним, а наявність різниці дисперсій — за допомогою F -критерію Фішера. Для перевірки рівності (чи нерівності) дисперсії заданому числу, використовуємо факт, що випадкова величина

$$\frac{(n-1)S_e^2}{\sigma^2} \text{ має } \chi^2\text{-квадрат розподіл Хельмерта-Пірсона з } n-1$$

ступенями вільності.

Квантилі F -розподілу Беренса-Фішера-Снедекора можна

знайти за допомогою статистичної функції F.INV. Але для застосування F-критерію Фішера зручнішими є функції F.INV.RT = FINV, оскільки $FINV(1 - \alpha; m; n) = F.INV(\alpha; m; n)$.

Перевірити гіпотезу про рівність дисперсій за двома незв'язними вибірками можна, використавши статистичну функцію F.TEST. Якщо результат буде більшим від вказаного рівня значущості, то немає підстав відкидати гіпотезу про рівність дисперсій за F-критерієм Фішера.

Набравши = T.TEST(Дані 1; Дані 2; 2; 1), можна перевірити гіпотезу про рівність математичних сподівань при загальній альтернативі у зв'язній вибірці. Якщо результат буде більшим від вказаного рівня значущості, то немає підстав стверджувати, що математичні сподівання різні. У випадку однобічної альтернативи слід набирати = T.TEST(Дані 1; Дані 2; 1; 1), але альтернативна гіпотеза приймається лише тоді, коли значення отриманої функції менше від заданого рівня значущості і відношення між середніми таке ж, яке очікується між математичними сподіваннями.

Перевірити гіпотезу про рівність математичних сподівань при загальній альтернативі за двома незв'язними вибірками у припущенні, що дисперсії рівні, можна, набравши = T.TEST(Дані 1; Дані 2; 2; 2). Якщо ж альтернатива однобічна, то набираємо =T.TEST(Дані 1; Дані 2; 1; 2). Якщо виявиться, що отриманий результат менший від заданого рівня значущості, то приймається альтернативна гіпотеза за умови, що відношення між середніми таке ж, яке очікується між математичними сподіваннями.

Якщо ж дисперсії незв'язних вибірок не рівні, то використовуються функції = T.TEST(Дані 1; Дані 2; 2; 3) та = T.TEST(Дані 1; Дані 2; 1; 3) при загальній та однобічній альтернативах відповідно.

94. При перевірці 10 електролічильників вимірювалося значення величини X , яка для стандартного лічильника має дорівнювати 1. Перевірити гіпотезу про відсутність систематичної похибки на рівні значущості 0,05. Результати вимірювання наступні:

i	1	2	3	4	5
x_i	0,983	1,002	0,998	0,996	1,002
i	6	7	8	9	10
x_i	0,983	0,994	0,991	1,005	0,986

95. [2] Маса пакунок з природним барвником має становити 50 кг, а дисперсія не повинна перевищувати $0,01 \text{ кг}^2$. При обстеженні 10 пакунків отримали такі маси (в кг):

50,1 50,07 49,93 49,81 49,7 49,76 50,08 50,18 49,79 50,02

Чи зазначені вимоги виконуються на рівні значущості 0,05?

96. Із 6 партій сировини виготовлено бетон двома способами: одним способом із трьох партій та удосконаленим способом із трьох інших партій. 1-й спосіб: 290 311 284.

2-й спосіб: 309 318 318.

За результатами вимірювання спротиву стиску перевірити, чи при другому способі якість бетону краща на рівні значущості 0,01.

97. 10 різних ділянок землі поділили навпіл та засіяли

сіянками різних типів. Перевірити гіпотезу про відсутність залежності урожаю від типу сіянки на рівні значущості 0,05 за наступними даними:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
8	8,4	8	6,4	8,6	7,7	7,7	5,6	5,6	6,2
5,6	7,4	7,3	6,4	7,5	6,1	6,6	6	5,5	5,5

98. Перевірити гіпотезу про рівність дисперсій на рівні значущості 0,05 у двох вибірках за такими даними:

$$S_X^2 = 385,52; n_X = 64; S_Y^2 = 636,24; n_Y = 17.$$

Перевірка гіпотез про розподіли випадкових величин

Вказівки: Для можливості застосування критерію хі-квадрат Пірсона потрібно прослідкувати, щоб теоретичні частоти були не меншими від 5. В іншому випадку деякі з проміжків потрібно об'єднати. Хі-квадрат

статистику знаходимо за формулою $\sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$, де n_i — емпіричні

частоти, n'_i — теоретичні частоти. Кількість ступенів вільності знаходимо за формулою $k - l - s$, де k — кількість проміжків, s — кількість оцінюваних параметрів. При перевірці гіпотези про відсутність зв'язку між випадковими величинами кількість ступенів вільності дорівнює $(k - l) * (l - 1)$, де k — кількість рядків, а l — кількість стовпчиків.

Перед застосуванням χ^2 -критерію Пірсона для перевірки гіпотези про неперервний розподіл потрібно розподілити дані по проміжках. Проміжки краще вибирати так, щоб ймовірності потрапити до них були однаковими. Тоді будуть рівними і теоретичні частоти. Оскільки нормальний розподіл має 2 параметри, то при їх оцінюванні кількість ступенів вільності χ^2 -критерію Пірсона буде $k - 3$, де k — кількість інтервалів групування. Отже, має бути не менше 4 інтервалів. Крім того, теоретичні частоти інтервалів не мають бути меншими 5. Тому мінімальний обсяг вибірки, при якому можна застосовувати χ^2 -критерій Пірсона, $4 \cdot 5 = 20$.

При $20 \leq n \leq 40$ варто розподіляти дані на 4 проміжки, при $41 \leq n \leq 59$ — на 5 проміжків, при $60 \leq n \leq 100$ — на 6 проміжків, а при $n > 100$ кількість проміжків обчислювати за формулою $k = 1 + \lceil \log_2 n \rceil$, де n — обсяг вибірки.

Для перевірки складної гіпотези про нормальний розподіл за критерієм Колмогорова слід використовувати статистику Стефенса

$$\lambda^n = D_n \left(\sqrt{n} - 0,01 + \frac{0,85}{\sqrt{n}} \right) \text{ і таблицю критичних точок Ліліфорса:}$$

Рівень значущості α	0,15	0,1	0,05	0,025	0,01
Критична точка	0,775	0,819	0,895	0,955	1,035

Для обчислення квантилів показникового розподілу використовуємо математичну функцію = LN: $x_\alpha = -\bar{x} * \text{LN}(1 - \alpha)$.

99. Задано дискретний варіаційний ряд:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	15	12	9	6	4	2	1	1

Перевірити гіпотези на рівні значущості 0,05:

- а) про розподіл Пуассона;
- б) про геометричний розподіл;
- в) про біномний розподіл.

100. Перевірити гіпотезу про нормальний розподіл вимірів Міллікеном заряду електрона на рівні значущості 0,01 за даним інтервальним рядом обсягу 58:

4,74 4,747 4,749 4,758 4,761 4,764 4,764 4,764 4,765 4,767
 4,768 4,769 4,769 4,771 4,771 4,772 4,772 4,772 4,774 4,775
 4,775 4,776 4,777 4,777 4,778 4,779 4,779 4,779 4,781 4,781
 4,782 4,783 4,783 4,785 4,785 4,785 4,788 4,788 4,789 4,789
 4,790 4,790 4,790 4,791 4,791 4,791 4,792 4,792 4,795 4,797
 4,799 4,799 4,801 4,805 4,806 4,808 4,809 4,810.

101. Чи можна за даними в таблиці зробити висновок про залежність між однобічним розвитком рук та очей (на рівні значущості 0,05)?

	лівоокі	однаковоокі	правоокі
лівші	34	62	28
однаковорукі	27	28	20
правші	57	105	52

§ 7. Виявлення залежностей між досліджуваними ознаками та оцінка тісноти їх зв'язку

Мета: Навчитися виявляти залежності між випадковими величинами та оцінювати тісноту їх зв'язку.

Перелік теоретичних питань:

- 1) вибіровий коефіцієнт кореляції Пірсона;
- 2) вибірове рівняння прямої лінії регресії;
- 3) дисперсійний аналіз.

Кореляція та лінійна регресія

Вказівки: Якщо розподіли обох випадкових величин нормальні, то тіснота їхнього зв'язку характеризується коефіцієнтом кореляції Браує-Пірсона. В інших випадках цей коефіцієнт характеризує тільки тісноту їх лінійного зв'язку. За допомогою t -розподілу Стюдента можна перевірити наявність зв'язку між нормально розподіленими випадковими величинами, а також і в інших випадках, якщо обсяг вибірки великий. Тоді статистика

$$\hat{t} = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \sqrt{n-2} \text{ матиме } t\text{-розподіл із } n-2 \text{ ступенями вільності.}$$

Абсолютне значення цієї статистики слід порівнювати з

$$=T.INV.2T(\alpha, n-2), \text{ де } \alpha \text{ — рівень значущості.}$$

Коефіцієнт кореляції обчислюється за допомогою статистичних функцій PEARSON або CORREL.

Для знаходження рівняння лінійної регресії використовуються статистичні функції SLOPE (нахил) та INTERCEPT (відрізок).

Щоб побудувати надійний інтервал для коефіцієнта кореляції, використовується перетворення Фішера (статистична функція FISHER)

та обернене перетворення (статистична функція FISHERINV).

102. Обчислити вибіркового коефіцієнта кореляції Пірсона випадкових величин X і Y та знайти вибірконе рівняння лінійної регресії Y на X . Зобразити графічно елементи вибірки та пряму лінійної регресії Y на X . Перевірити гіпотезу про наявність зв'язку на рівні значущості 0,05. Охарактеризувати зв'язок між випадковими величинами. Побудувати інтервал надійності 0,95 для коефіцієнта кореляції. Зробити висновок.

x_i	1	2	3	2	1
y_i	3	4	6	3	2

103. Темміс досліджував зв'язок між діаметром пилинок фуксії та кількістю отворів у них для виходу пилкових трубок.

Діаметр в мк (Y)	Кількість отворів (X)				
	0	1	2	3	4
10	3				
15	7	3			
20		6			
25		1			
30			4		
35			5		
40			1	3	
45				4	
50				3	3
55					4
60					3

Обчислити вибіркового коефіцієнта кореляції Пірсона випадкових величин X і Y та знайти вибіркве рівняння лінійної регресії Y на X . Зобразити графічно елементи вибірки та пряму лінійної регресії Y на X . Побудувати інтервал надійності 0,99 для коефіцієнта кореляції. Оцінити кореляційне відношення Y на X . Перевірити гіпотезу про наявність зв'язку на рівні значущості 0,01. Охарактеризувати зв'язок між випадковими величинами.

Дисперсійний аналіз

Вказівки: Дисперсійний аналіз можна застосовувати не тільки для вивчення нормально розподілених випадкових величин, але й тоді, коли дисперсії в групах однакові або ж приблизно однакові обсяги груп.

Квантілі F -розподілу знаходяться за допомогою статистичної функції $F.INV$, а сама функція F -розподілу $F.DIST$. Але для знаходження квантилів за заданим рівнем значущості зручніше використовувати статистичні функції $FINV=F.INV.RT$, а рівень значущості, якому відповідає знайдена F -статистика знаходить функція $FDIST$ (без крапки). Таким чином, крапка в цих випадках змінює функцію. Другий аргумент усіх цих функцій — кількість ступенів вільності чисельника, а 3-й — кількість ступенів вільності знаменника.

104. В однофакторному дисперсійному аналізі при 4-х рівнях фактора X є вибірки залежної змінної обсягів 8, 9, 4 та 5 відповідно. Скільки ступенів вільності має а) міжгрупова сума квадратів ? б) повна сума квадратів SS ? в) залишкова сума квадратів ?

105. Заповнити таблицю однофакторного дисперсійного аналізу у випадку незв'язаних груп однакового обсягу.

	df	SS	MS	F
Між групами	5	16		
Всередині груп				
Всього	23	70		

106. Перевірити гіпотезу про рівність середніх значень результативної випадкової величини на рівнях А, В, С фактора у зв'язаних вибірках на рівні значущості 0,05.

Методи	X	Y	Z	U	V
А	38	30	62	41	27
Б	9	32	5	3	9
В	55	58	61	53	17

Розв'язання задач Формула Бернуллі та її наближення

74. Використавши вбудовану функцію програми LibreOffice Calc =BINOM.DIST(3;1000;2/1000;0), отримаємо 0,1806.

(Якщо розв'язувати за наближеною формулою Пуассона =POISSON.DIST(3;2;0), то матимемо трохи інше значення 0,1804.)

75. =BINOM.DIST(115;200;3/5;0), що дає в результаті 0,04400.

(При наближеному обчисленні з формулою Муавра-Лапласа отримаємо 0,04438.)

76. Знаходимо =BINOM.DIST(260;500;1/2;1) та
=BINOM.DIST(244;500;1/2;1). Різниця цих значень

$0,826168 - 0,311405 = 0,514763$ є шуканою відповіддю у цій задачі.

(Якщо розв'язувати за наближеною інтегральною формулою Муавра-Лапласа, то матимемо $0,514790$.)

Розподіли випадкових величин

Задача № 83. $\mu=72$; $\sigma=7$.

$$a) = \text{NORMDIST}(80; 72; 7; 1) \approx 0,8735;$$

$$b) = \text{NORMDIST}(60; 72; 7; 1) \approx 0,0432;$$

$$в) = 1 - \text{NORMDIST}(90; 72; 7; 1) \approx 0,0051;$$

$$\begin{aligned} r) &= \text{NORMDIST}(75; 72; 7; 1) - \text{NORMDIST}(65; 72; 7; 1) \approx 0,5072; \\ &= \text{NORMINV}(0,95; 72; 7) \approx 83,51. \end{aligned}$$

Щоб знайти відповідь на останнє питання задачі, знаходимо дисперсію маси однієї людини $DX = \sigma^2 = 49 \text{ кг}^2$.

Тоді, за властивістю дисперсії суми незалежних випадкових величин, дисперсія маси 4-х людей

$$\begin{aligned} DY &= D(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) = D(X_1) + D(X_2) + D(X_3) + D(X_4) = \\ &= 49 * 4 = 196 \text{ кг}^2, \end{aligned}$$

а середнє квадратичне відхилення $\sigma(Y) = \sqrt{DY} = 14 \text{ кг}$.

$$\begin{aligned} MY &= M(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) = M(X_1) + M(X_2) + M(X_3) + M(X_4) = \\ &= 72 * 4 = 288 \text{ кг}. \end{aligned}$$

Далі знаходимо $= \text{NORMDIST}(320; 288; 14; 1) \approx 0,9889$.

Задача № 84. $\sigma = 15$, $n = 16$.

Тоді $DX = \sigma^2 = 225$. За властивостями дисперсії,

$$\begin{aligned} D\bar{x} &= D\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}(D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_n)) = \\ &= \frac{DX}{n} = \frac{225}{16} \Rightarrow \sigma(\bar{x}) = \sqrt{D(\bar{x})} = \frac{15}{4} = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}} = 3,75. \end{aligned}$$

Далі знаходимо

$$a) = 2 * \text{GAUSS}(3 / 3,75) \approx 0,5763;$$

$$б) = 1 - 2 * \text{GAUSS}(10 / 3,75) \approx 0,00766.$$

Для відповіді на останнє запитання задачі спочатку потрібно розв'язати рівняння $2\Phi_0(x) = 0,95$, яке рівносильне рівнянню $2(\Phi(x) - 0,5) = 0,95$, з якого отримуємо $\Phi(x) = 0,975$, тому $x = u_{0,975}$. Знаходимо це число, набравши $= \text{NORM.S.INV}(0,975) \approx 1,96$.

$$\text{Отже, } \frac{5}{\sigma} \sqrt{n} \approx 1,96, \text{ звідки знаходимо } n \approx (3 * 1,96)^2 \approx 34,6.$$

Для гарантії заокруглювати потрібно до більшого. Отже, $n=35$.

Задача № 85. $\lambda = 2/\text{год}$.

а) Очевидно, що відповідь не залежить від того, хто із працівників раніше відремонтує свій прилад та візьметься за ремонт 3-го. Але, оскільки показниковий розподіл — “нестаріючий”, то він має однакові шанси відремонтувати 3-й прилад раніше чи пізніше від того, коли його напарник відремонтує свій 1-й прилад. Тому відповідь 0,5.

б) Оскільки ймовірність добутку незалежних подій дорівнює добуткові їх імовірностей, то потрібно піднести до квадрату ймовірність того, що один працівник відремонтує свій прилад за годину: $p = (1 - e^{-\lambda t})^2$. Тоді набираємо $= (1 - \text{EXP}(-2*1))^2 \approx 0,7476$.

в) Переводимо хвилини в години: 20 хв = 1/3 год, 40 хв = 2/3 год. Далі знаходимо $= \text{EXP}(-2*1/3) - \text{EXP}(-2*2/3) \approx 0,2498$.

Задача № 86. $t=10$ с.

а) Позначимо x ймовірність перемоги 2-го гравця. Ця подія може статися лише в тому випадку, коли у 1-го гравця не випаде 6. Ймовірність цього 5/6. Якщо ж після цього у 2-го гравця випаде 6 (ймовірність цього 1/6), то він уже виграє. Але він може виграти і тоді, коли в нього 6 не випаде. Для цього необхідно, щоб у 3-го гравця не випала 6 (ймовірність цього 5/6). Після цього знову підкидатиме кубик 1-й гравець — усе починається спочатку. За цих умов ймовірність перемоги 2-го гравця x . Таким чином, $x = \frac{5}{6} \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot x \right)$, звідки $x = 30 / 91$.

б) Щоб гра тривала довше 2-х хвилин, тобто 120 секунд, необхідно, щоб було більше від $120/10=12$ підкидань кубика. Отже, принаймні 13 разів має не випадати 6. Ймовірність цієї події $= (5/6)^{13} \approx 0,09346$.

в) Математичне сподівання геометричного розподілу $\frac{q}{p^2}$. Такою буде середня кількість промахів — невипадання 6. Завершується гра випаданням 6. Тоді математичне сподівання кількості підкидань $\frac{q}{p^2} + 1$.

Кожне підкидання триває $t=10$ с.

$$\text{Отже, середня тривалість гри } \left(\frac{q}{p^2} + 1 \right) t = 310 \text{ с} = 5 \text{ хв. } 10 \text{ с.}$$

Задача № 87. $\lambda = 3/\text{хв.}$ Тоді $a = 3*2 = 6$.

$$\text{а) } = \text{POISSON.DIST}(4;6;0) \approx 0,1339;$$

$$\text{б) } = \text{POISSON.DIST}(3,5;6;1) \approx 0,1512;$$

$$\text{в) } = 1 - 0,1512 = 0,8488.$$

Середній час між замовленнями $T = 1/\lambda = 3$ хв. Цей розподіл — показниковий. Його дисперсія $\frac{1}{\lambda^2} = 9 \text{ хв}^2$, а середнє квадратичне відхилення $1/\lambda = 3$ хв.

Задача № 88. $p=0,99$.

Ймовірність того, що буде менше однієї родзинки, тобто 0 родзинок $\text{EXP}(-a) = 1 - p = 0,01$. Тоді $a = -\text{LN}(0,01) \approx 4,605$. Середнє значення розподілу Пуассона дорівнює його параметрові a . Отже, в булочках у середньому має бути по 4,605 родзинок.

Системи випадкових величин

Задача № 89.

1. Переносимо таблицю в LibreOffice Calc. Додаємо всі ймовірності в рядках і стовпчиках (не включаючи в суму значення X та Y). Віднімаємо від 1 загальну суму. Отримаємо число p . Замінюємо в таблиці літеру p на отримане число.

$Y X$	0	1	2	
2	0,3	0,1	0	0,4
3	0	0,2	0,1	0,3
5	0	0,1	0,2	0,3
	0,3	0,4	0,3	1

2. Перший та останній рядки таблиці задають закон розподілу випадкової величини X , а 1-й та останній стовпчики — закон розподілу Y (без вільних полів). Перепишемо їх у окремі таблиці.

X	0	1	2
P	0,3	0,4	0,3

Y	2	3	5
P	0,4	0,3	0,3

3. Для обчислення математичних сподівань множимо числа на їх імовірності та знаходимо суму добутків.

4. У коваріаційну матрицю записуються дисперсії та коваріація. Для знаходження DX віднімаємо від кожного значення випадкової величини X її математичне сподівання, підносимо до квадрату, множимо на відповідну ймовірність та додаємо. Так само знаходимо і $DY = 3,2$.

X	0	1	2	Σ	
P	0,3	0,4	0,3	1	
$x_i p_i$	0	0,4	0,6	1	$= MX$
$X-MX$	-1	0	1		
$(X-MX)^2$	1	0	1		
$(x_i-MX)^2 p_i$	0,3	0	0,3	0,6	$= DX$

5. Для знаходження коваріації усі ймовірності двовимірного закону розподілу p_{ij} множимо на $(x_i - MX)$ та на $(y_i - MY)$ та додаємо усі ці добутки.

$Y - MY X - MX$	-1	0	1	Σ	
-1,2	0,36	0	0	0,36	
-0,2	0	0	-0,02	-0,02	
1,8	0	0	0,36	0,36	
Σ	0,36	0	0,34	0,7	$=\text{cov}(X, Y)$

6. Записуємо кореляційну матрицю $K(X, Y) = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,7 \\ 0,7 & 1,56 \end{pmatrix}$.

7. Для знаходження коефіцієнта кореляції спочатку добуваємо корені з обох дисперсій, отримуючи таким чином середні квадратичні відхилення. Потім ділимо коваріацію на їхній добуток. Отримуємо

$$\rho(X, Y) \approx 0,7235.$$

8. В рівнянні лінійної регресії Y на X коефіцієнт a біля $(X - MX)$ обчислюємо, поділивши коваріацію на DX . Записуємо рівняння лінійної регресії $Y_X = MY + a(X - MX)$.

$$Y_X \approx 3,2 + 1,1667(X - 1).$$

9. Аналогічно знаходимо $X_Y = MX + \frac{\text{cov}(Y, X)}{DY}(Y - MY)$.

$$X_Y \approx 1 + 0,4487(Y - 3,2).$$

10. Знаходимо $D(Y - X) = DY - 2\text{cov}(Y, X) + DX = 0,76$.

11. Знаходимо

$$D(3X + 2Y) = 3^2 DX + 2 * 3 * 2 * cov(Y, X) + 2^2 DY = 20,04.$$

12. Випишемо частину двовимірного закону розподілу, що відповідає $X = 1$.

Y	2	3	5	Σ
P	0,1	0,2	0,1	0,4

13. Знаходимо умовні ймовірності, поділивши безумовні на їхню суму.

Y	2	3	5	Σ
P	0,25	0,5	0,25	1

14. Тепер знаходимо $M(Y/X=1)$, помноживши значення Y на умовні ймовірності та додавши.

Y	2	3	5	Σ
P	0,1	0,2	0,1	0,4
$P(Y/X=1)$	0,25	0,5	0,25	1
	0,5	1,5	1,25	3,25 = $M(Y / X=1)$

15. Аналогічно знаходимо умовне математичне сподівання Y при інших значеннях X.

16. Запишемо таблицю закону розподілу умовного математичного сподівання Y відносно X, взявши ймовірності відповідних значень X.

$M(Y/X)$	2	3,25	4,333
P	0,3	0,4	0,3

17. За цією таблицею обчислюємо дисперсію умовного математичного сподівання та його середнє квадратичне відхилення.

$M(Y/X)$	2	3,25	4,333		
P	0,3	0,4	0,3		
$z_i p_i$	0,6	1,3	1,3	3,2	$= MZ$
$Z-MZ$	-1,2	0,05	1,133		
$(Z-MZ)^2$	1,44	0,0025	1,2844		
$(Z-MZ)^2$	1,44	0,0025	1,2844		
	0,432	0,001	0,3853	0,8183	$= DM(Y/X)$

18. Поділивши останнє на середнє квадратичне відхилення Y , отримаємо кореляційне відношення $\eta(Y/X) \approx 0,7243$. Воно виявилось не набагато більшим від коефіцієнта кореляції $\rho(X, Y) \approx 0,7235$. Отже, регресія Y на X близька до лінійної функції.

19. Оскільки кореляційне відношення лежить в межах від 0,7 до 0,9, то кореляційний зв'язок між випадковими величинами сильний. Врахувавши, що коефіцієнт кореляції додатний, стверджуємо, що кореляційний зв'язок прямий.

Задача № 90. Оскільки випадкові величини нормально розподілені, то обидві регресії — лінійні функції, обидва кореляційні відношення дорівнюють модулю коефіцієнта кореляції. Останній знаходимо за формулою “косинуса кута між векторами”:

$$\rho = \frac{5 \cdot 4 + 3 \cdot (-1)}{\sqrt{2+3^2} \cdot \sqrt{2+(-1)^2}} = \frac{17}{\sqrt{4 \cdot 17}} = \frac{\sqrt{4}}{2} \approx 0,7071.$$

Отже, кореляційний зв'язок прямий, сильний.

Рівняння регресії $U_V = -7 + (V - 2)$, звідки $U_V = V - 9$;

$$V_U = 2 + 0,5 (U + 7), \text{ звідки } V_U = 0,5 U + 5,5.$$

Обробка статистичної інформації

Задача № 91.

1. Вносимо вибірку в електронну таблицю. Для контролю підраховуємо кількість її елементів (обсяг). Потім копіюємо її для подальшої обробки.
2. Варіаційний ряд утворюємо, впорядкувавши вибірку за зростанням. Для цього вибираємо в меню Дані — Сортування за зростанням — Поточне вибране.
3. Записуємо обсяг вибірки $n = 14$ (можна використати значок Σ — кількість), підраховуємо частоти усіх варіант та складаємо таблицю дискретного варіаційного ряду.

X	1	2	3	4	5	Σ
n	2	3	3	5	1	14

4. Знаходимо відносні частоти, поділивши частоти на обсяг вибірки.

X	1	2	3	4	5	Σ
n	2	3	3	5	1	14
ω	0,143	0,214	0,214	0,357	0,071	1

5. Додаючи послідовно відносні частоти, знаходимо значення правобічної границі емпіричної функції розподілу для кожної варіанти вибірки (або накопичені відносні частоти).

X	1	2	3	4	5
n	2	3	3	5	1
ω	0,143	0,214	0,214	0,357	0,071
$F_{14}^*(x+)$	0,143	0,357	0,571	0,929	1

6. Зсунувши значення правобічної границі вправо, знайдемо саму емпіричну функцію розподілу.

X	1	2	3	4	5
n	2	3	3	5	1
ω	0,143	0,214	0,214	0,357	0,071
$F_{14}^*(x+)$	0,143	0,357	0,571	0,929	1
$F_{14}^*(x)$	0	0,143	0,357	0,571	0,929

7. Тепер можна зобразити графік емпіричної функції розподілу. Він має східчастий вигляд.
8. Обсяг $n = 14$; розмах — різниця між найбільшою та найменшою варіантами $R = 5 - 1 = 4$. Вибіркова мода — це варіанта з найбільшою частотою. Найбільша частота 5 у варіанти 4. Отже, мода $Mo = 4$.
9. У вибірковій медіані емпірична функція розподілу переходить через 0,5. Із таблиці видно, що

$$F_{14}^*(3) = 0,357 \leq 0,5 \leq 0,571 = F_{14}^*(3+).$$

Отже, вибірка медіана $Md = 3$.

10. Під вибіркою вставляємо значок Σ — Середнє значення. Знаходимо вибіркове середнє $\bar{x} = 3$.
11. Під варіаційним рядом вставляємо статистичну функцію STDEV.P. Отримуємо $S \approx 1,1952$.
12. Незсунену оцінку дисперсії знаходимо функцією VAR, вибравши діапазон чисел, що містять саму вибірку. Маємо $S_e^2 \approx 1,5385$.
13. Ймовірність події оцінюємо за її відносною частотою. Підраховуємо кількість елементів вибірки (легше варіаційного ряду), які більші від 3, та ділимо на обсяг. Простіше додати відносні частоти варіант, більших від 3.

$$P(X > 3) \approx v_{14}(X > 3) = (5+1)/14 \approx 0,4286.$$

Надійні інтервали

Задача № 92. $n = 250, k = 32, \gamma = 0,95$.

Використаємо вбудовані функції програми LibreOffice Calc.

= BETA.INV((1 – 0,95)/2; 32; 250 – 32 + 1). Отримали 0,0892.

= BETA.INV((1 + 0,95)/2; 32 + 1; 250 – 32). Отримали 0,1759.

Отже, надійний інтервал Клоппера-Пірсона для ймовірності виготовити нестандартну деталь (0,0892; 0,1759).

Для знаходження тільки верхньої оцінки виготовити нестандартну деталь вводимо = BETA.INV(0,95; 32 + 1; 250 – 32). Отримали 0,1681.

Отже, з надійністю 0,95 можна стверджувати, що $p < 0,1681$.

Далі вводимо = 1 – BINOM.DIST(32; 250; 0,15; 1)

(або = BETADIST(0, 15; 32 + 1; 250 – 32; 0)). Отримали 0,81095.

Отже, з надійністю 0,81095 можна стверджувати, що $p < 0,15$.

Задача № 93. Вибірка 8, 11, 11, 10, $\gamma = 0,95$.

1. Під вибіркою вставляємо значок Σ — Середнє значення. Отримуємо вибіркове середнє $\bar{x} = 10$.
2. Незсунену оцінку дисперсії знаходимо функцією VAR, вибравши діапазон чисел, що містять саму вибірку. Маємо $S_g^2 = 2$.
3. Знаходимо $S_g = \sqrt{2}$, набравши =SQRT(2) $\approx 1,414$.
4. Знаходимо квантиль рівня $(1 + \gamma) / 2 = 0,975$ t -розподілу

Стьюдента з $n - I = 3$ ступенями вільності, набравши = T.INV(0,975; 3) або = TINV(0,05; 3). Отримаємо $\approx 3,182$.

5. Тепер можемо знайти двобічний надійний інтервал для математичного сподівання за формулами

$$\left(\bar{x} - \frac{S_{\epsilon}}{\sqrt{n}} t_{(I+\gamma)/2}, \bar{x} + \frac{S_{\epsilon}}{\sqrt{n}} t_{(I+\gamma)/2} \right).$$

Отримаємо $10 \pm 2,250$, тобто (7,75; 12,25).

6. Для побудови надійного інтервалу для дисперсії відшукаємо квантілі хі-квадрат розподілу Хельмерта-Пірсона рівнів $(1 + \gamma) / 2 = 0,975$ та

$(1 - \gamma) / 2 = 0,025$ з $n - 1 = 3$ ступенями вільності.

= CHISQINV(0,975; 3) $\approx 9,3484$; = CHISQINV(0,025; 3) $\approx 0,2158$.

7. Знаходимо двобічний надійний інтервал для дисперсії за

формулами $\left(\frac{(n-I)S_{\epsilon}^2}{k_{(I+\gamma)/2}}, \frac{(n-I)S_{\epsilon}^2}{k_{(I-\gamma)/2}} \right)$. Отримуємо (0,64; 27,80).

8. = T.DIST.RT $\left((7 - \bar{x}) * \sqrt{n} / S_{\epsilon}; 3\right) \approx 0,9880$.

Параметричні статистичні критерії

Задача № 94. $n = 10$, $a = 1$; $\alpha = 0,05$. Одна вибірка. Двобічний критерій для перевірки математичного сподівання.

1. Вносимо вибірку в електронну таблицю.
2. Знаходимо вибіркове середнє значення, вибравши Σ — Середнє

значення. Отримуємо 0,986.

3. Знаходимо S_g за допомогою статистичної функції STDEV. Отримуємо приблизно 0,008055.
4. Знаходимо модуль (абсолютне значення) відхилення вибіркового середнього від норми $= \text{ABS}(0,986 - 1) = 0,014$.
5. Множимо його на квадратний корінь з обсягу вибірки $\cdot \text{SQRT}(10)$ та ділимо на S_g . В результаті отримуємо t -статистику $\approx 2,355$.
6. Знаходимо двобічний квантиль t -розподілу Стюдента $= \text{T.INV.2T}(\alpha; n - 1)$, підставивши $\alpha = 0,05$, $n - 1 = 9$. Отримали приблизно 2,262.
7. Оскільки t -статистика $2,355 > 2,262$, то робимо висновок, що є систематична похибка. Середнє значення величини X відрізняється від стандартного.

Задача № 95. $n = 10$, $m=50$; $\sigma^2 \leq 0,01$; $\alpha=0,05$. Одна вибірка. Двобічний критерій для перевірки математичного сподівання та однобічний для перевірки дисперсії.

1. Копіюємо розв'язок попередньої задачі, замінивши вибірку та 1 на 50.
2. Оскільки t -статистика $1,051 < 2,262$, то робимо висновок, що немає підстав відкидати основну гіпотезу, що маса пакунка з природним барвником відрізняється від 50 кг.
3. Побудуємо однобічний надійний інтервал для дисперсії

$$\left(\frac{(n-1)S_g^2}{k_\gamma}, +\infty \right), \text{ де } \gamma = 1 - \alpha. \text{ Для цього знаходимо квантиль}$$

χ^2 -квадрат розподілу з $n - 1 = 9$ ступенями вільності рівня $\gamma = 1 - \alpha$:
 $k_\gamma = \text{CHISQ.INV.RT}(\alpha; n - 1) = \text{CHISQ.INV.RT}(0,05; 9) \approx 16,92$.

4. Підносимо S_6 до квадрату. Результат множимо на $n - 1 = 9$ та ділимо на квантиль 16,92. Отримуємо надійний інтервал $(0,0151; +\infty)$.

5. Оскільки число 0,01 не належить до цього надійного інтервалу, то гіпотеза, що $\sigma^2 \leq 0,01 \text{ к}^2$ відкидається на рівні значущості $\alpha = 0,05$. Із надійністю 0,95 можна стверджувати, що дисперсія більша від $0,015 \text{ к}^2$.

Задача № 96. $n_1 = 3$, $n_2 = 3$; $\alpha = 0,01$. У цій задачі, на відміну від попередніх, є дві незв'язні вибірки. Крім того, в цьому випадку слід використовувати однобічний критерій для перевірки рівності математичних сподівань, бо сказано, що другий спосіб є удосконаленим, значить очікується, що він має бути міцнішим.

1-й спосіб розв'язування

1. Заносимо дані до електронної таблиці. Знаходимо вибіркові середні значення спротиву тиску кожної з двох марок бетону та незсунені оцінки дисперсій (VAR).
2. Оскільки обсяги вибірок рівні, то t -статистику можна обчислювати за формулою
$$\hat{t}_{2n-2} = \sqrt{n} \frac{\bar{y} - \bar{x}}{\sqrt{S_x^2 + S_y^2}}.$$
 Тут $n = 3$, $\bar{y}$ — середнє значення міцності удосконаленої марки бетону.
3. Знаходимо однобічний квантиль t -розподілу Стюдента = T.INV($1 - \alpha$; $2n - 2$), підставивши $1 - \alpha = 1 - 0,01 = 0,99$, $2n - 2 = 4$. Отримали приблизно 3,747.
4. Оскільки t -статистика 2,294 менша від квантиля 3,747, то даних експерименту недостатньо, щоб стверджувати, що міцність бетону удосконаленої марки вища.

2-й спосіб розв'язування

1. Заносимо дані до електронної таблиці. Знаходимо вибірккові середні значення спротиву тиску кожної з двох марок бетону.
2. Вибіркове середнє спротиву тиску удосконаленої марки бетону вище, ніж звичайної. Залишилося перевірити чи ймовірність помилки 1-го роду є меншою від заданого рівня значущості. Щоб з'ясувати, яку форму критерію Стюдента можна використати, спочатку перевіримо рівність дисперсій.
3. Набираємо $= F.TEST(\text{Дані 1}; \text{Дані 2}) \approx 0,2368 > 0,05$. Отже, немає підстав стверджувати, що дисперсії відрізняються.
4. $= T.TEST(\text{Дані 1}; \text{Дані 2}; 1; 2) \approx 0,0417 > 0,01$. Даних недостатньо, щоб стверджувати, що міцність бетону удосконаленої марки вища.

Зауваження

1. Якби був заданий рівень значущості 0,05, то була б прийнята альтернативна гіпотеза, що удосконалена марка бетону міцніша.
2. Все-таки незсунені оцінки дисперсій сильно відрізняються. Очевидно, що критерій Фішера не дозволив зробити висновок, що дисперсії різні через малі обсяги вибірок. Тому спробуємо застосувати t -критерій Стюдента, не припускаючи рівності дисперсій.
3. $= T.TEST(\text{Дані 1}; \text{Дані 2}; 1; 3) \approx 0,061$. Це число більше навіть від 0,05. Вибірки такого малого обсягу ($n = 3$) не дозволили зробити висновок, що міцність удосконаленої марки бетону вища.

Задача № 97. $n = 10$, $\alpha = 0,05$. Вибірка зв'язна, двобічний критерій для перевірки рівності математичних сподівань, бо сіялки рівноправні.

1-й спосіб розв'язування

1. Заносимо дані до електронної таблиці та віднімаємо від останнього рядка попередній. Далі працюватимемо з однією отриманою вибіркою різниць — так само, як у задачах 94, 95. Цього разу перевіряємо середнє значення 0.
2. Оскільки $3,214 > 2,262$, то на рівні значущості 0,05 є різниця між сіялками. При застосуванні сіялки 1-го типу урожай вищий.

2-й спосіб розв'язування

1. Заносимо дані до електронної таблиці.
2. $= T.TEST(\text{Дані 1}; \text{Дані 2}; 2; 1) \approx 0,0106$. Це менше від заданого рівня значущості $\alpha = 0,05$. Урожай таки залежить від типу сіялки.
3. Знайшовши вибіркові середні урожаю, робимо висновок, що при застосуванні сіялки 1-го типу урожай вищий.

Задача № 98. $S_X^2 = 385,52$; $n_X = 64$; $S_Y^2 = 636,24$; $n_Y = 17$, $\alpha = 0,05$. Двобічний критерій перевірки рівності дисперсій.

1. Ділимо більшу незсунену дисперсію на меншу. Отримаємо F-статистику приблизно 1,650.
2. Оскільки більшою є незсунена оцінка дисперсії випадкової величини Y , то кількість ступенів вільності чисельника $n_Y - 1 = 17 - 1 = 16$.
3. Тоді кількість ступенів вільності знаменника,

$$n_X - 1 = 64 - 1 = 63.$$

4. Оскільки ми вибирали більшу незсунену оцінку дисперсії, рівень значущості ділимо на 2: $= 0,05 / 2 = 0,025$.

5. Знаходимо квантиль F -розподілу Беренса-Фішера-Снедекора $= F.INV.RT(0,025; 16; 63) \approx 2,022$.

6. Оскільки F -статистика $1,650 < 2,022$, то на рівні значущості $0,05$ немає підстав стверджувати, що дисперсії X та Y відрізняються між собою.

Перевірка статистичних гіпотез про дискретний розподіл та про відсутність зв'язку

Задача № 99. $\alpha = 0,05$, Пуассона, геометричний, біномний.

Оскільки всі вказані розподіли є параметричними, потрібно насамперед оцінити їхні параметри. Для цього оцінюємо математичне сподівання.

1. Вносимо дані в електронну таблицю. Обчислюємо обсяг вибірки N , як суму частот: $N = 50$.
2. Знаходимо вибіркове середнє значення, помноживши рядки, знайшовши суми та поділивши суму добутків на обсяг вибірки N . Отримуємо $\bar{x} = 1,74$. Це число й буде оцінкою параметра a розподілу Пуассона.

0	1	2	3	4	5	6	7	Σ	$\bar{x}$
15	12	9	6	4	2	1	1	50	
0	12	18	18	16	10	6	7	87	1,74

3. Оскільки математичне сподівання геометричного розподілу дорівнює $1/p - 1$, то оцінку параметра p геометричного розподілу знаходимо з рівняння $1/p - 1 = 1,74$. Отже, для геометричного розподілу $p \approx 0,3650$.

4. Математичне сподівання біномного розподілу дорівнює np . Найбільш правдоподібно, що кількість випробувань n дорівнює максимальній кількості успіхів, тобто $n = 7$. Тоді оцінкою p біномного розподілу буде $1,74 / 7 \approx 0,2486$.

5. Знаходимо закон розподілу Пуассона з параметром $a = 1,74$. Для цього використовуємо статистичну функцію = POISSON.DIST(x ; 1,74; 0), де x — можливі значення розподілу Пуассона від 0 до 6. Усі інші значення від 7 до нескінченності об'єднуємо в одну комірку, а його ймовірність знаходимо, віднявши від 1 суму решти ймовірностей.

6. Обчислюємо теоретичні частоти, помноживши ймовірності на обсяг вибірки $N = 50$.

7. Об'єднуємо комірки з теоретичними частотами, меншими від 5.

0	1	2	3	4 і більше	Σ
8,776	15,27	13,29	7,705	4,96	50

8. У 5-й комірці теоретична частота менша від 5. Об'єднаємо її з попередньою. Випишемо також емпіричні частоти.

0	1	2	3 і більше	Σ
8,78	15,27	13,29	12,67	50
15	12	9	14	50

9. Тепер знайдемо різниці між теоретичними та емпіричними частотами, піднесемо їх до квадрату та поділимо на теоретичні частоти.

x_i	0	1	2	3 і більше	Σ
n'_i	8,78	15,27	13,29	12,67	50
n_i	15	12	9	14	50
$n_i - n'_i$	6,22	-3,27	-4,29	1,33	0
$(n_i - n'_i)^2$	38,74	10,69	18,36	1,77	
$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$	4,41	0,70	1,38	0,13	6,64

10. Сума в останньому рядку 6,64 є значенням хі-квадрат статистики. Її потрібно порівняти з квантилем хі-квадрат розподілу рівня $1 - 0,05 = 0,95$. Було оцінено один параметр — a . Отже, потрібно знайти квантиль з двома ступенями вільності.

11. $= \text{CHISQ.INV}(0,95; 2) \approx 5,99$.

12. Оскільки $6,64 > 5,99$, то гіпотеза про розподіл Пуассона відкидається.

13. Знаходимо геометричний розподіл за формулою $(1-p)^k p$, $0 \leq k \leq 6$. Ймовірність останньої комірки “7 і більше” знаходимо, віднявши від 1 суму ймовірностей у перших 7 комірках.

0	1	2	3	4	5	6	7 і >
0,365	0,232	0,147	0,093	0,059	0,038	0,024	0,042

14. Обчислюємо теоретичні частоти, помноживши ймовірності на обсяг вибірки $N = 50$.

0	1	2	3	4	5	6	7 і >
0,365	0,232	0,147	0,093	0,059	0,038	0,024	0,042
18,25	11,59	7,36	4,67	2,97	1,88	1,20	2,08

15. Об'єднуємо комірку $x=3$ з коміркою $x=4$, а також 3 останні.

0	1	2	3 або 4	5 і >
18,25	11,59	7,36	7,64	5,16

16. Підраховуємо емпіричні частоти та обчислюємо хі-квадрат статистику.

x_i	0	1	2	3 або 4	5 і >	Σ
n'_i	18,25	11,59	7,36	7,64	5,16	50
n_i	15	12	9	10	4	50
$n_i - n'_i$	-3,25	0,41	1,64	2,36	-1,16	0
$(n_i - n'_i)^2$	10,55	0,17	2,69	5,57	1,35	
$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$	0,58	0,01	0,37	0,73	0,26	1,95

17. Був оцінений 1 параметр. $= \text{CHISQ.INV}(0,95; 3) \approx 7,81$.

18. Оскільки $1,95 < 7,81$, то немає підстав відкидати гіпотезу про геометричний розподіл на рівні значущості 0,05.

19. Тепер знаходимо закон розподілу Бернуллі з параметрами $n = 7$, $p = 0,2486$ та знаходимо теоретичні частоти.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	Σ
p_i	0,133	0,311	0,311	0,173	0,058	0,012	0,01	0	1
n'_i	6,67	15,57	15,57	8,65	2,88	0,58	0,06	0	50

20. Щоб не було теоретичних частот, менших від 5, об'єднуємо 5 останніх комірок. Далі знаходимо хі-квадрат статистику.

x_i	0	1	2	3 і більше	Σ
n'_i	6,67	15,57	15,57	12,18	50
n_i	15	12	9	14	50
$n_i - n'_i$	8,33	-3,57	-6,57	1,82	0
$(n_i - n'_i)^2$	69,32	12,77	43,21	3,31	
$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$	10,39	0,82	2,77	0,27	14,25

21. Був оцінений 1 параметр. = $\text{CHISQ.INV}(0,95; 2) \approx 5,99$. Оскільки $14,25 > 5,99$, то гіпотеза про біномний розподіл відкидається.

Задача № 101. $\alpha=0,05$, гіпотеза про відсутність зв'язку.

1. Знаходимо суми чисел у рядках та у стовпчиках.

34	62	28	124
27	28	20	75
57	105	52	214
118	195	100	413

2. Знаходимо теоретичні частоти, помноживши суму в рядку на суму у стовпчику та поділивши на загальну суму.

35,43	58,55	30,02	124
21,43	35,41	18,16	75
61,14	101,04	51,82	214
118	195	100	413

3. Обчислюємо хі-квадрат статистику.

0,058	0,204	0,136	0,398
1,449	1,551	0,186	3,186
0,281	0,155	0,001	0,436
1,787	1,910	0,324	4,020

4. Кількість ступенів вільності $(3 - 1) * (3 - 1) = 4$.
5. $= \text{CHISQ.INV}(0,95; 4) \approx 9,488$.
6. Оскільки $4,02 < 9,488$, то немає підстав відкидати гіпотезу про відсутність зв'язку між однобічним розвитком рук та очей (на рівні значущості 0,05).

Перевірка гіпотези про неперервний розподіл за критеріями хі-квадрат та Колмогорова

Задача № 100. $\alpha = 0,01, n = 58$, нормальний розподіл.

1. Виберемо 5 проміжків. Але спочатку потрібно оцінити параметри.
2. Заносимо дані до електронної таблиці.
3. Знаходимо вибіркове середнє, скориставшись значком Σ та статистичною функцією $=\text{STDEV.S}$.
4. Отримуємо $\bar{x} \approx 4,781$; $S_g \approx 0,0153$.
5. Оскільки проміжків буде 5, знаходимо квінтилі стандартного нормального розподілу. $= \text{NORM.S.INV}(0, 2) \approx -0,8416$;
 $= \text{NORM.S.INV}(0, 4) \approx -0,2533$; $= \text{NORM.S.INV}(0, 6) \approx 0,2533$;
 $= \text{NORM.S.INV}(0, 8) \approx 0,8416$.
6. Множимо ці квінтилі на вибіркове середнє квадратичне відхилення та додаємо вибіркове середнє. В результаті ми отримаємо квінтилі розподілу, що перевіряється. Вони будуть кінцями проміжків.
7. Отже, маємо такі 5 проміжків: $(-\infty; 4,7679)$;
 $(4,7679; 4,7769)$; $(4,7769; 4,7847)$; $(4,7847; 4,7837)$;

$(4,7837; +\infty)$. Їх теоретичні частоти $= 58 / 5 = 11,6$.

8. Підраховуємо кількість ступенів вільності $5 - 2 - 1 = 2$.
9. Знаходимо квантиль $= \text{CHISQ.INV.RT}(0,01; 2) \approx 9,21$.
10. Підраховуємо емпіричні частоти. Для цього спочатку скопіюємо вибірку та перетворимо її на варіаційний ряд, вибравши в меню Дані — Сортування за зростанням — Поточне вибране.
11. Для підрахунку емпіричних частот зручно виділити відповідні проміжки чисел різними кольорами.
12. Складаємо таблицю відповідностей емпіричних та теоретичних частот.

10	12	11	15	10
11,6	11,6	11,6	11,6	11,6

13. Обчислюємо хі-квадрат статистику.

					Σ
10	12	11	15	10	58
11,6	11,6	11,6	11,6	11,6	58
1,6	-0,4	0,6	-3,4	1,6	0
2,56	0,16	0,36	11,56	2,56	
0,221	0,014	0,031	0,997	0,221	1,483

14. Оскільки $1,483 < 9,21$, то немає підстав відхиляти гіпотезу про нормальний розподіл вимірів Міллікеном заряду електрона на рівні значущості 0,01.

Задача № 100(б). $\alpha = 0,01, n = 58$, перевірити гіпотезу про нормальний розподіл за критерієм Колмогорова.

1. Знайдемо емпіричну функцію розподілу. Для цього починаємо з 0 та додаємо $k / 58$ при кожній наступній варіанті варіаційного ряду з частотою k .
2. Знаходимо правобічну границю емпіричної функції розподілу, зсунувши її значення на одну клітинку вгору та закінчивши таблицю одиницею.
3. Знайдемо значення нормального розподілу, який перевіряється, у кожній варіанті вибірки. Для цього зручно спочатку набрати стовпчики однакових значень з емпіричним середнім та S_g . Далі використовуємо функцію NORM.DIST з останнім аргументом 1.
4. Обчислюємо абсолютні значення різниць теоретичної та емпіричної функцій розподілу, а також теоретичної функції розподілу та правобічної границі емпіричної функції розподілу. Для цього використовуємо математичну функцію ABS.
5. Знаходимо максимальне відхилення за допомогою статистичної функції MAX. Отримуємо $D_{58} = 0,0629$.
6. Обчислюємо статистику Стефенса за формулою
$$\lambda^H = D_n \left(\sqrt{n} - 0,01 + \frac{0,85}{\sqrt{n}} \right) \approx 0,486.$$
7. З таблиці критичних точок Ліліфорса вибираємо точку 1,035, яка відповідає рівню значущості 0,01.
8. Оскільки $0,486 < 1,035$, то за критерієм Колмогорова немає підстав відкидати гіпотезу про нормальний розподіл на рівні значущості 0,01.

Задача № 100(в). $\alpha = 0,01, n = 58$, перевірити гіпотезу про рівномірний розподіл за критерієм хі-квадрат Пірсона.

1. Копіюємо вибірку та утворюємо варіаційний ряд.
2. Оцінюємо параметри рівномірного розподілу — найменшу та найбільшу варіанти 4,74 та 4,81.
3. Знаходимо довжину цього відрізка та ділимо її на 5. $h = 0,014$.
4. Записуємо відрізки поділу [4,74; 4,754], [4,754; 4,768], [4,768, 4,782], [4,782; 4,796], [4,796, 4,81].
5. Усі теоретичні частоти дорівнюють $58 / 5 = 11,6$.
6. За варіаційним рядом підраховуємо емпіричні частоти та заносимо їх у таблицю.

3	8	19	19	9
11,6	11,6	11,6	11,6	11,6

7. Обчислюємо хі-квадрат статистику

					Σ
3	8	19	19	9	58
11,6	11,6	11,6	11,6	11,6	58
8,6	3,6	-7,4	-7,4	2,6	0
73,96	12,96	54,76	54,76	6,76	
6,38	1,12	4,72	4,72	0,58	17,51

8. Як і у випадку перевірки нормального розподілу, було оцінено 2 параметри. Тому кількість ступенів вільності $5 - 1 - 2 = 2$.
9. Знаходимо квантиль $= \text{CHISQ.INV.RT}(0,01; 2) \approx 9,21$.
10. Оскільки $17,51 > 9,21$, то немає гіпотеза про рівномірний розподіл вимірів Міллікеном заряду електрона на рівні значущості 0,01 відкидається.

Кореляційний аналіз

Задача № 102. $\alpha = 0,05, \gamma = 0,95, n = 5$.

1. Заносимо дані до електронної таблиці.
2. За допомогою функції PEARSON обчислюємо коефіцієнт кореляції. Отримуємо $\rho \approx 0,906$.
3. За допомогою статистичної функції SLOPE знаходимо кутовий коефіцієнт рівняння прямої регресії приблизно 1,643.
4. За допомогою статистичної функції INTERSEPT знаходимо відрізок, який відтинає пряма регресії на осі (OY) приблизно 0,643.
5. Отже, рівняння прямої лінії регресії $y_x \approx 1,643 x + 0,643$.
6. Для побудови надійного інтервалу для коефіцієнта кореляції, знайдемо його перетворення Фішера за допомогою статистичної функції FISHER. Воно приблизно дорівнює 1,507.
7. Далі потрібно знайти квантиль стандартного нормального розподілу рівня $\frac{1+\gamma}{2} = 0,975$. Для цього використовуємо статистичну функцію NORM.S.INV. Шуканий квантиль приблизно дорівнює 1,96.
8. Тоді ділимо цей квантиль на $\sqrt{n-3}$, де $n = 5$ — обсяг вибірки. Отримуємо приблизно 1,386.
9. Віднімаємо та додаємо до перетворення Фішера знайдену величину. Дістанемо інтервал (0,121; 2,892).
10. Від кінців цього інтервалу знаходимо обернене перетворення

Фішера за допомогою статистичної функції. Отримаємо (0,120; 0,994) — надійний інтервал для коефіцієнта кореляції.

11. Для перевірки гіпотези про наявність зв'язку знаходимо t -статистику за формулою $\hat{t} = \frac{|r|}{\sqrt{1-r^2}} \sqrt{n-2}$. Вона приблизно дорівнює 3,715.

12. Знаходимо квантиль t -розподілу Стюдента рівня $\frac{1-\alpha}{2}$ із $n-2=3$ ступенями вільності. $=T.INV.2T(0,05; 3) \approx 3,182$.

13. Оскільки $3,715 > 3,182$, то на рівні значущості 0,05 можна стверджувати, що між випадковими величинами X та Y є кореляційний зв'язок.
14. Оскільки кореляційне відношення може бути більшим від модуля коефіцієнта кореляції, то з надійністю 0,975 можна стверджувати, що кореляційне відношення може бути в межах від 0,121 до 1. Це не дозволяє оцінити силу зв'язку між X та Y . Обсяг вибірки виявився надто малим, щоб зробити висновок.

Задача № 103. $\alpha = 0,01, \gamma = 0,99, n = 5$.

1. Заносимо дані до електронної таблиці. Обчисливши суми частот в рядках і стовпчиках, знайдемо обсяг вибірки $n = 50$, дискретний варіаційний ряд кількості отворів у пилинках фуксії (X) та інтервальний варіаційний ряд діаметрів цих пилинок (Y).

x_i	0	1	2	3	4	Σ
n_i	10	10	10	10	10	50

y_i	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	Σ
n_i	3	10	6	1	4	5	4	4	6	4	3	50

2. Знайдемо $\overline{xy}$, перемноживши частоти із значеннями X та Y і поділивши їх на обсяг вибірки. Отримуємо 88,2.
3. Знаходимо вибіркові середні, помноживши варіанти на їх частоти, додавши ці добутки та поділивши на обсяг вибірки. $\bar{x} = 2$ та $\bar{y} = 33,2$.
4. Знаходимо $\overline{x^2} = 6$ та $\overline{y^2} = 1354$.
5. Знаходимо $S_x^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = 2$ та $S_y^2 = \overline{y^2} - (\bar{y})^2 = 251,76$.
6. Добувши квадратні корені з цих виразів, отримаємо вибіркові середні квадратичні відхилення. $S_x \approx 1,414$; $S_y \approx 15,867$.
7. Обчислюємо вибірковий коефіцієнт кореляції за формулою

$$r_{XY} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{S_x S_y} \approx 0,9715.$$
8. Кутовий коефіцієнт рівняння прямої регресії знаходимо, помноживши вибірковий коефіцієнт кореляції на S_y та поділивши на S_x . Отримуємо 10,9.
9. Знаходимо відрізок, який відтинає пряма регресії на осі (OY), віднявши від $\bar{y}$ добуток кутового коефіцієнта на $\bar{x}$. Отримуємо 11,4.
10. Отже, вибіркове рівняння прямої лінії регресії $y_x = 10,9X + 11,4$.

11. Далі будемо надійний інтервал для коефіцієнта кореляції так само, як у попередній задачі тільки надійності 0,99. Отримуємо (0,941; 0,986).

12. Таким чином, з надійністю 0,995, кореляційне відношення не менше від 0,941.

13. Так само, як у попередній задачі, перевіряємо гіпотезу про наявність зв'язку на рівні значущості 0,01. Оскільки $28,4 > 2,68$, то на рівні значущості 0,05 можна стверджувати, що між випадковими величинами X та Y є кореляційний зв'язок (значущий).

14. Оскільки коефіцієнт кореляції додатний, то зв'язок прямий.

15. Оскільки коефіцієнт кореляції більший від 0,9, то зв'язок дуже сильний та близький до лінійного, бо різниця між кореляційним відношенням та коефіцієнтом лінійної кореляції Брава-Пірсона не може бути великою (вони обидва знаходяться в межах від 0,941 до 1 з надійністю 0,995.)

16. Висновок: зв'язок між діаметром пилинок фуксії та кількістю отворів у них для виходу пилових трубок кореляційний, значущий, дуже сильний, прямий, близький до лінійного.

Дисперсійний аналіз

Задача № 104. 4 рівні, обсяги 8; 9; 4; 5.

Оскільки загальний обсяг вибірки $8 + 9 + 4 + 5 = 26$, то повна сума квадратів SS має $26 - 1 = 25$ ступенів вільності.

Міжгрупова сума квадратів SS_{fac} має $4 - 1 = 3$ ступені вільності.

Решту $25 - 3 = 22$ ступенів вільності має залишкова дисперсія.

Цю кількість можна підрахувати безпосередньо так:

$$(8 - 1) + (9 - 1) + (4 - 1) + (5 - 1) = 7 + 8 + 3 + 4 = 22.$$

Задача № 105.

	df	SS	MS	F
Між групами	5	16	3,2	1,0667
Всередині груп	18	54	3	
Всього	23	70	3,043	

Задача № 106. 5-ма методами 3 значення фактора — вибірка зв'язна.

1. Знаходимо вибіркові середні значення результативної випадкової величини при кожному значенні фактора $\overline{y_A}$, $\overline{y_B}$, $\overline{y_C}$, а також у кожному вимірі $\overline{y_X}$, $\overline{y_Y}$, $\overline{y_Z}$, $\overline{y_U}$, $\overline{y_V}$ та загальне вибіркове середнє $\overline{y}$.

2. Знаходимо повну суму квадратів, помноживши 15 на вибіркoву дисперсію усієї вибірки (знайдену за допомогою статистичної функції VAR.P).

3. Знаходимо міжгрупову суму квадратів, помноживши 15 на

$$\text{VAR.P}(\overline{y_A}, \overline{y_B}, \overline{y_C}).$$

4. Знаходимо міжвимірну суму квадратів, помноживши 15 на

$$\text{VAR.P}(y_X, y_Y, y_Z, y_U, y_V).$$

5. Знаходимо залишкову суму квадратів, віднявши від повної міжгрупову та міжвимірну.
6. Знаходимо середні квадрати, поділивши суми квадратів на кількість ступенів вільності (для міжгрупової — на 2, для міжвимірної — на 4, а для залишкової — на $2 \cdot 4 = 8$). Отримуємо приблизно 1877; 284 та 184 відповідно.
7. Обчислюємо F -статистики, поділивши на залишкові середні квадрати міжгрупові та міжвимірні. Отримуємо приблизно 10,216 та 1,545 відповідно.
8. Знаходимо квантілі F -розподілу $= F.INV.RT(0,05; 2; 8) \approx 4,459$;
 $= F.INV.RT(0,05; 4; 8) \approx 3,838$.
9. Оскільки $1,545 < 3,838$, то результати вимірювання результативної ознаки не залежать від того, який метод використовувався на рівні значущості 0,05.
10. Оскільки $10,216 > 4,459$, то результативна випадкова величина залежить від значення, яке набуває фактор: А, В чи С.
11. Зауважимо, що $= F.INV.RT(0,05; 2; 8) \approx 8,649$, але F -статистика 10,216 більша і за цей квантіль. Отже, навіть на рівні значущості 0,01 основна гіпотеза відхиляється. Фактор таки впливає на результативну ознаку.

Відповіді до задач

1. 10. 2. 12. 3. 34. 4. 6 000 000. 5. 8181. 6. 47. 7. 150 с.
 8. 670. 9. а) 51; б) 32. 10. 16. 11. 30. 12. 243. 13. 1 024. 14. 336.

15. 151 200. 16. 33 868 800. 17. 24. 18. 6561. 19. 27 216. 20. 84 375.
 21. 52 488. 22. 120. 23. а)441; б)9 261 в)17640. 24. 210. 25. 210.
 26. 105. 27. 55 440. 28. 5 040. 29. 792. 30. 19 488. 31. 1287.
 32. а) 336; б) 66; в) 286. 33. 462. 34. 201 180 672 000.

35. 10 973 491 200. 36. 26. 37. 0,7. 38. 0,5. 39. 0,58. 40. 0,3. 41. 0,1.
 42. 0,18. 43. 0,06. 44. 0,44. 45. 0,09. 46. 0,29. 47. 0,21. 48. 0,79.
 49. 0,44. 50. 0,29. 51. 0,35. 52. 0,65. 53. 0,288. 54. 5/36. 55. 11/21.
 56. 0,5. 57. 1/4. 58. а)9/32; б)9/128. 59. 2/3. 60. 0,3. 61. 1/4. 62. 1/3.
 63. а) 7/15; б) 11/15; в) 0; г) 4/5. 64. а)0,5; б)2/3. 65. 13/14. 66. 1/3.
 67. 8/15. 68. 47/89. 69. 0,029. 70. а) 1/883; б) 2/13. 71. 0,324 135.
 72. 0,5904. 73. 0,91296. 74. $\approx 0,18$. 75. $\approx 0,044$. 76. $\approx 0,51$.

77. $p = 0,1$; $M_0 = 3$; $MX = 4,2$; $DX = 3,96$; $\sigma(X) \approx 1,99$; $Me = 3$;
 $P(X > 3) = 0,4$.

78. $P(X=0) = 0,036$; $P(X=1) = 0,252$; $P(X=2) = 0,488$; $P(X=3) = 0,224$;
 $M_0 = 2$; $Me = 2$; $MX = 1,9$; $DX = 0,61$; $\sigma(X) \approx 0,781$; $P(X > 2) = 0,224$.

79. $P(X = 0) = 1/132$; $P(X = 1) = 5/44$; $P(X = 2) = 25/66$;
 $P(X = 3) = 25/66$; $P(X = 4) = 5/44$; $P(X = 5) = 1/132$; моди немає;
 $Me=2,5$; $MX=2,5$; $DX=35/44$; $\sigma(X) \approx 0,892$; $P(X > 2,5) = 0,5$.

80. $c = 1/\pi$; моди немає; $MX = 0$; $DX = 0,5$; $\sigma(X) = \sqrt{2}/2$;
 $Me=0$; $P(X > 0) = 0,5$.

81. $F(t) = 0$ при $t < 0$, $F(t) = t^2/32$ при $0 \leq t \leq 4$ хв.,
 $F(t) = 1 - (8 - t)^2/32$ при $4 \text{ хв.} < t \leq 8 \text{ хв.}$, $F(t) = 1$ при $t > 8 \text{ хв.}$;

$f(t) = 0$ при $t < 0$ та при $t > 8$ хв., $f(t) = t/16$ при $0 \leq t \leq 4$ хв.,

$f(t) = (8 - t)/16$ при $4 \text{ хв.} < t \leq 8 \text{ хв.}$;

$M_0 = 4 \text{ хв.}$; $M_e = 4 \text{ хв.}$; $MX = 4 \text{ хв.}$;

$DX = 8/3 \text{ хв.}^2$; $\sigma(X) \approx 1,633 \text{ хв.}$; $P(3 \text{ хв.} < X < 6 \text{ хв.}) = 19/32$.

82. $F(t) = 0$ при $t < 55 \text{ см}$, $F(t) = (t - 5)^2/25$ при $5 \text{ см} < t \leq 10 \text{ см}$;

$F(t) = 1$ при $t > 10 \text{ см}$; $f(t) = 0$ при $t < 5 \text{ см}$ та при $t > 10 \text{ см}$,

$f(t) = 2(t - 5)/25$ при $5 \text{ см} < t \leq 10 \text{ см}$;

$M_0 = 10 \text{ см}$; $M_e = 5 + 5/\sqrt{2} \text{ см}$; $MX = 25/3 \text{ см}$; $DX = 25/18 \text{ см}^2$;

$\sigma(X) = 5\sqrt{2}/6 \text{ см}$; $P(3 \text{ см} < X < 8 \text{ см}) = 9/25$.

83. а) $\approx 0,8735$; б) $\approx 0,0432$; в) $\approx 0,0051$; г) $\approx 0,5072$; $\approx 83,5 \text{ кг}$; $\approx 0,9889$.

84. а) $\approx 0,5763$; б) $\approx 0,0077$;

85. а) $1/2$; б) $\approx 0,7476$; в) $\approx 0,2498$.

86. а) $5/11$; б) $\approx 0,1122$; в) 1 хв. .

87. а) $\approx 0,1339$; б) $\approx 0,1512$; в) $\approx 0,8488$; $MT = 20 \text{ с.}$; $DT = 400 \text{ с}^2$;
 $\sigma(T) = 20 \text{ с.}$

88. $\approx 4,605$.

89. $p = 0,1$; $P(X = 0) = 0,3$; $P(X = 1) = 0,4$; $P(X = 2) = 0,3$;
 $P(Y = 2) = 0,4$; $P(Y = 3) = 0,3$; $P(Y = 5) = 0,3$; $MX = 1$; $MY = 3,2$;
 $DX = 0,6$; $DY = 1,56$; $\text{cov}(X, Y) = 0,7$; $\rho(X, Y) \approx 0,7235$;
 $Y_X = 3,2 + 7(X - 1) / 6$; $D(Y - X) = 0,76$; $D(3X + 2Y) = 20,04$;
 $M(Y/X = 1) = 3,25$; $P(M(Y/X) = 3,25) = 0,4$; $P(M(Y/X) = 2) = 0,3$;

$P(M(Y/X) = 13/3) = 0,3$; $\eta_{Y/X} \approx 0,7243$; зв'язок кореляційний, сильний, прямий, регресія близька до лінійної.

90. $\eta_{U/V} = \eta_{V/U} = \sqrt{2}/2$; зв'язок кореляційний, сильний, прямий, регресія лінійна.

91. 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5; $n = 14$; $R = 4$; $S = 1,195$; $S^2_B = 20/13$; $v_{14}(X > 3) = 3/7$.

92. (0,09; 0,18); $P(p < 0,169) \approx 0,95$; $P(p < 0,15) \approx 0,81$.

93. (7,75; 12,25); (0,64; 28); 0,988.

94. Середнє значення не відхиляється суттєво від норми, оскільки $1,77 < 2,23$, але дисперсія зavelика, бо $29 > 18$.

95. Є систематична похибка в напрямку зменшення, оскільки $2,36 > 2,26$.

96. Не можна стверджувати, що при другому способі виготовлення якості бетону краща, бо $2,29 < 3,75$.

97. Урожай вищий при застосуванні сіялки 1-го типу, оскільки $3,21 > 2,26$.

98. Не можна сказати, що дисперсії різні, оскільки $1,65 < 2,02$.

99. Пуассона: $8,7 > 7,8$ — відкидається; геометричний: $6 < 7,8$ — приймається; біномний: $15 > 7,8$ — відкидається.

100. $1,48 < 9,21$ — приймається.

101. $4 < 9,5$ — не можна.

102. $r \approx 0,91$; $y_x \approx 1,64x + 0,64$; $3,71 > 3,18$ — зв'язок кореляційний, значущий, прямий; (0,12; 0,99) — вибірка замала,

щоб оцінити силу зв'язку.

103. $r \approx 0,97$; $y_x \approx 10,9X + 11,4$; (0,941; 0,986); $28,4 > 2,68$ — зв'язок кореляційний, значущий, дуже сильний, прямий, близький до лінійного.

104. а) 3; б) 25; в) 22.

105. Всередині груп: 20 і 54; MS: 3,2; 2,7; 2,8; $F \approx 1,18$.

106. $10,22 > 4,46$: результативна ознака залежить від рівня фактора.

Список використаних джерел

1. Шефтель З. Г. Теорія ймовірностей: Підручник. Київ: Вища школа, 1994. — 192 с. іл.

2. Турчин В.М. Математична статистика: Посібник. Київ: "Академія", 1999. — 240 с.

3. Леоненко М. М., Мішура Ю. С., Пархоменко В. М., Ядренко М. Й. Теоретико-ймовірнісні та стохастичні методи в економіці та фінансовій математиці. Київ: "Інформтехніка", 1995. — 380 с. URL <https://b-ok.cc/book/3130768/9a5575>

4. Карташов М. В. Імовірність, процеси, статистика: Посібник. Київ: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008. — 494 с.