

Міністерство освіти і науки України

Національний університет водного господарства
та природокористування

Я. Г. Іващук, С. П. Цецик, І. В. Самолюк

ВИЩА МАТЕМАТИКА ПРАКТИКУМ

*Навчальний посібник
Частина I*

Рівне 2025

УДК 517(075)

I-24

Рецензенти:

Сяський А. О., доктор технічних наук, професор, професор кафедри інформаційних технологій та моделювання Рівненського державного гуманітарного університету, м. Рівне;

Бомба А. Я., доктор технічних наук, професор, професор кафедри комп'ютерних наук та прикладної математики Навчально-наукового інституту, кібернетики, інформаційних технологій та інженерії Національного університету водного господарства та природокористування, м. Рівне.

Рекомендовано вченою радою Національного університету водного господарства та природокористування.

Протокол № 10 від 26 вересня 2025 р.

Івашук Я. Г., Цецик С. П., Самолюк І. В.

I-24 Вища математика. Практикум : навч. посіб. Частина I. [Електронне видання]. – Рівне: НУВГП, 2025. – 229 с.

ISBN 978-966-327-670-0

Перша частина навчального посібника складається з таких розділів курсу вищої математики: «Елементи лінійної та векторної алгебри й аналітичної геометрії», «Вступ до математичного аналізу», «Диференціальне числення функції однієї змінної» та «Диференціальне числення функції декількох змінних». Виклад навчального матеріалу побудовано за схемою: наведено необхідні теоретичні відомості, подано приклади розв'язання типових задач та запропоновано завдання для самостійного розв'язування. Практикум містить також тестові завдання, що будуть корисні для підготовки до модульних контролів, екзаменів та заліків.

Посібник рекомендовано для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня усіх освітньо-професійних програм спеціальностей НУВГП усіх форм навчання, що вивчають вищу математику.

УДК 517(075)

ISBN 978-966-327-670-0

© Я. Г. Івашук, С. П. Цецик, І. В. Самолюк, 2025

© Національний університет водного господарства та природокористування, 2025

ЗМІСТ

	ПЕРЕДМОВА.....	5
Розділ 1.	ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ ТА ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ Й АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ.....	6
1.1.	Визначники та системи лінійних алгебраїчних рівнянь.....	6
1.1.1.	Визначники другого і третього порядків.....	6
1.1.2.	Властивості визначників.....	9
1.1.3.	Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Формули Крамера.....	13
1.1.4.	Однорідні системи рівнянь.....	17
1.2.	Матриці та дії над ними.....	25
1.2.1.	Основні означення. Дії над матрицями. Обернена матриця.....	25
1.2.2.	Матричний метод розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.....	31
1.2.3.	Ранг матриці. Теорема Кронекера-Капеллі існування розв'язків систем лінійних рівнянь.....	35
1.3.	Вектори.....	46
1.3.1.	Основні поняття про вектори. Лінійні операції над векторами. Скалярний добуток двох векторів.....	46
1.3.2.	Векторний добуток двох та мішаний добуток трьох векторів.....	55
1.4.	Елементи аналітичної геометрії.....	66
1.4.1.	Найпростіші задачі аналітичної геометрії. Пряма лінія на площині. Різні види рівнянь прямої лінії. Кут між двома прямими. Відстань від точки до прямої.....	66
1.4.2.	Лінії другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола.....	80
1.4.3.	Площина і пряма лінія у тривимірному просторі. Основні задачі.....	92
1.4.4.	Поверхні другого порядку.....	103
Розділ 2.	ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ...	122

2.1.	Поняття функції однієї змінної. Область визначення	122
2.2.	Числова послідовність і її границя.....	125
2.3.	Знаходження границі функції. Невизначені вирази. Розкриття невизначеностей.....	128
2.4.	Порівняння нескінченно малих функцій	136
2.5.	Перша і друга важливі границі	138
2.6.	Неперервність і точки розриву функції.....	143
Розділ 3.	ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ.....	154
3.1.	Похідна функції в точці. Геометричний та фізичний зміст похідної. Правила диференціювання. Похідна складеної функції... ..	154
3.2.	Диференціал функції. Похідні вищих порядків. Похідна неявної та параметрично заданої функції. Правило Лопіталя	163
3.3.	Монотонність і екстремуми функції. Опуклість і вгнутість графіка функції. Асимптоти.....	169
3.4.	Загальна схема дослідження функції і побудова її графіка. Найбільше та найменше значення функції на відрізку. Еластичність функції.....	178
Розділ 4.	ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ.....	193
4.1.	Функція двох змінних та її область визначення. Частинні і повний прирости функції двох змінних. Частинні похідні.....	193
4.2.	Частинні похідні вищих порядків. Повний диференціал функції двох змінних. Похідна за напрямом і градієнт функції трьох змінних.....	199
4.3.	Екстремуми функції двох змінних. Необхідні та достатні умови існування екстремуму функції двох змінних. Найбільше та найменше значення функції в замкнутій обмеженій області.....	210
	ЛІТЕРАТУРА.....	229

ПЕРЕДМОВА

Метою освітньої компоненти «Вища математика» є формування у здобувачів математичної компетентності, що передбачає: розвиток інтелекту, аналітичного та синтетичного мислення, відповідної математичної культури, інтуїції; оволодіння математичним апаратом, необхідним для вивчення спеціальних дисциплін; формування вмінь застосовувати теоретичні знання до аналізу, моделювання та розв'язання задач прикладного характеру у межах своєї спеціальності.

Перша частина навчального посібника включає чотири розділи курсу вищої математики: «Елементи лінійної та векторної алгебри й аналітичної геометрії», «Вступ до математичного аналізу», «Диференціальне числення функції однієї змінної» та «Диференціальне числення функції декількох змінних».

У кожному розділі навчальний матеріал розбитий на окремі теми, у яких в стислій формі викладено необхідні теоретичні відомості, наведено розв'язання типових задач та запропоновано завдання для самостійного розв'язання. Також у кінці кожної теми наведено тестові завдання, що допоможуть студентам підготуватися до поточних та підсумкових модульних контролів.

Практикум рекомендовано для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня усіх освітньо-професійних програм спеціальностей НУВГП усіх форм навчання, що вивчають вищу математику.

Розділ 1

ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ ТА ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ Й АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

1.1. Визначники та системи лінійних алгебраїчних рівнянь

1.1.1. Визначники другого і третього порядків

Нехай задано квадратну таблицю, що складається з чотирьох чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Визначником другого порядку, що відповідає таблиці A називають число, яке позначається символом Δ і визначається:

$$\Delta = \Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}, \quad (1.1)$$

де a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} – елементи визначника. Перший індекс у записі елемента вказує на номер рядка, у якому він знаходиться, а другий індекс – на номер стовпця елемента. Окрім того, елементи a_{11} та a_{22} утворюють головну діагональ, а елементи a_{12} , a_{21} – побічну діагональ.

Отже, визначник другого порядку рівний різниці добутків елементів головної та побічної діагоналей.

Розглянемо квадратну таблицю, що складається з дев'яти чисел

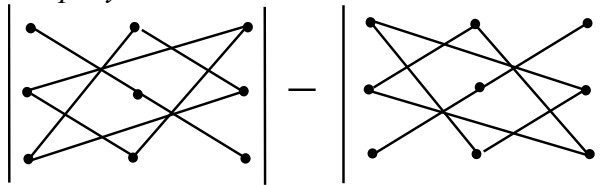
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Визначником третього порядку, що відповідає таблиці A , називають число, що позначається символом $\Delta(A)$ і визначається:

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}. \quad (1.2)$$

Числа a_{ij} , де $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$, називаються елементами визначника.

Обчислюється визначник третього порядку за правилом трикутника:



Мінором деякого елемента a_{ij} називається визначник M_{ij} , одержаний із заданого визначника в результаті викреслення рядка i стовпця, на перетині яких знаходиться розглядуваний елемент.

Алгебраїчним доповненням деякого елемента a_{ij} визначника називається мінор цього елемента, помножений на коефіцієнт $(-1)^{i+j}$, де i, j – номери викреслюваних рядка і стовпця. Тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}. \quad (1.3)$$

Приклад 1. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. $\Delta = (-3) \cdot 4 - 2 \cdot 5 = -22$.

Приклад 2. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 10 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. $\Delta = \begin{vmatrix} 10 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 20 - (-9) = 29$.

Приклад 3. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -8 - 6 = -14$.

Приклад 4. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$.

Розв'язання

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix} = (a+b)(a+b) - (a-b)(a-b) = (a+b)^2 - \\ &- (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) = a^2 + 2ab + b^2 - \\ &- a^2 + 2ab - b^2 = 4ab. \end{aligned}$$

Приклад 5

Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 \sin \frac{\pi}{12} \\ \cos \frac{\pi}{12} & 1 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. $\Delta = 2 + 4 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = 2 + 2 \sin \frac{\pi}{6} = 3$.

Приклад 6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ за

правилом трикутника.

Розв'язання

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 \cdot (-2) - 3 \cdot (-1) \cdot 1 - \\ - 2 \cdot 0 \cdot 0 = -12 + 2 + 3 = -7.$$

Приклад 7. Обчислити мінори M_{12} , M_{31} та алгебраїчні доповнення A_{12} , A_{22} , A_{23} визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 7 & 2 & -5 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = -10 - 42 = -52,$$

$$M_{31} = -24 - 15 = -39,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 M_{12} = -1 \cdot (-52) = 52,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = (-1)^4 M_{22} = -50,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{12} = (-1)^5 M_{23} = -34.$$

1.1.2. Властивості визначників

1. Величина визначника не зміниться, якщо його рядки замінити відповідними стовпцями і навпаки. Для визначника третього порядку ця властивість запишеться так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

З цієї властивості випливає рівноправність рядків і стовпців визначника. Тому всі подальші властивості справедливі і для рядків і для стовпців.

2. Якщо у визначнику поміняти місцями лише два рядки або два стовпці, то знак визначника зміниться на протилежний.

3. Спільний множник усіх елементів деякого рядка (стовпця) можна винести за знак визначника.

4. Якщо відповідні елементи двох рядків (стовпців) визначника пропорційні, то визначник дорівнює нулю.

5. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника рівні нулю, то і сам визначник рівний нулю.

6. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника задано у вигляді суми двох елементів, тоді визначник можна подати у вигляді суми двох визначників. Причому в одному з визначників елементи відповідного рядка (стовпця) є першими доданками, а в другому – другими доданками, наприклад:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} + a''_{12} \\ a_{21} & a'_{22} + a''_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a'_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a''_{12} \\ a_{21} & a''_{22} \end{vmatrix}.$$

7. Якщо до елементів деякого рядка (стовпця) визначника додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), які помножені на одне і те ж число, то визначник не змінить своєї величини:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + k a_{11} \\ a_{21} & a_{22} + k a_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

8. Визначник дорівнює сумі добутоків елементів деякого рядка (стовпця) на їх відповідні алгебраїчні доповнення. Наприклад, для визначника третього порядку справедливі рівності:

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}, & \Delta &= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}, \\ \Delta &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}, & \Delta &= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}, \end{aligned}$$

$$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}, \quad \Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}.$$

Приклад 8. Обчислити визначник третього порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 6 & -3 & 8 \end{vmatrix} \text{ розклавши його за елементами першого}$$

рядка.

Розв'язання

$$\begin{aligned} \Delta &= 3 \cdot A_{11} + 4 \cdot A_{12} + 2 \cdot A_{13} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} + \\ &+ 4 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = \\ &= 3 \cdot 31 - 4 \cdot (-38) + 2 \cdot (-9) = 227. \end{aligned}$$

Метод розкладу визначника за елементами деякого рядка або стовпця особливо ефективний тоді, коли у визначнику всі елементи будь-якого рядка (стовпця), крім одного, дорівнюють нулю. Тоді визначник варто розкласти за елементами цього рядка (стовпця).

Приклад 9. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Розкладемо визначник за елементами першого рядка, маємо:

$$\Delta = 3 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (35 - 24) = 33.$$

Користуючись властивістю (7) незмінності визначника при додаванні до елементів деякого рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця) помножених на одне і те ж число, можна заданий визначник звести до визначника у якому всі елементи

будь-якого рядка (стовпця), крім одного, будуть дорівнювати нулю.

Приклад 10. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$,

використавши властивість (7) визначників.

Розв'язання. До елементів другого і третього стовпців додамо відповідні елементи першого стовпця помножені відповідно для другого стовпця на (-2), а для третього – на 3, одержимо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 11 \\ -2 & 5 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 11 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = 25 - 55 = -30.$$

Зауважимо, що цей метод можна використовувати для обчислення визначників вищих порядків.

Приклад 11

Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 981 & 982 & 983 \\ 984 & 985 & 986 \\ 987 & 988 & 989 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Елементи першого стовпця помножимо на (-1) і додамо до відповідних елементів другого та третього стовпців, матимемо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 981 & 1 & 2 \\ 984 & 1 & 2 \\ 987 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \text{ оскільки елементи другого та третього}$$

рядків пропорційні.

Приклад 12. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Розв’язання. До елементів другого стовпця додамо відповідні елементи першого стовпця помножені на (-1) . Тоді розкладено визначник за елементами другого стовпця. В утвореному визначнику третього порядку поступимо аналогічно: до елементів другого стовпця додамо відповідні елементи першого стовпця помножені на (-1) .

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= -3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-2 - 1) = -18. \end{aligned}$$

1.1.3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Формули Крамера

Розглянемо систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3, \end{cases} \quad (1.4)$$

де x, y, z – невідомі, $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{33}$ – коефіцієнти при невідомих, b_1, b_2, b_3 – вільні члени.

Якщо $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, то система (1.4) називається *однорідною*. Якщо хоча б одне з чисел b_1 , b_2 або b_3 не дорівнює нулю, то система алгебраїчних рівнянь називається *неоднорідною*.

Розв'язком системи рівнянь (1.4) називається впорядкований набір чисел $(x^0; y^0; z^0)$, який при підстановці цих чисел замість відповідних змінних перетворює кожне з рівнянь системи на правильну рівність (тотожність).

Система рівнянь (1.4) називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок. Система, яка не має розв'язку, називається *несумісною*.

Сумісна система, яка має лише один розв'язок, називається *визначеною*; система, що має більше ніж один розв'язок – *невизначеною*.

Якщо визначник системи (1.4), складений з коефіцієнтів при невідомих

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то дана система має *єдиний розв'язок*, який знаходиться за *формулами Крамера*:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad (1.5)$$

$$\text{де } \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} -$$

визначники, що утворюють із визначника Δ послідовною заміною в ньому відповідно першого, другого і третього стовпчиків стовпчиком вільних членів.

Зауваження. Якщо в системі (1.4) визначник $\Delta = 0$, але хоча б один з визначників $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ не рівний нулю, то система несумісна. Якщо ж $\Delta = 0$ і всі визначники $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, то система має нескінченну множину розв'язків, або несумісна.

Приклад 13. Розв'язати систему рівнянь за формулами Крамера

$$\begin{cases} x - 2y + z = 8, \\ 3x + 4y + 2z = 3, \\ 2x + y - 3z = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -12 - 8 + 3 - 8 - 2 - 18 = -45 \neq 0.$$

Отже, система має єдиний розв'язок.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -96 + 3 - 4 - 4 - 16 - 18 = -135;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 32 + 3 - 6 - 2 + 72 = 90;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 12 + 24 - 64 - 3 + 6 = -45.$$

За формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-135}{-45} = 3; \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{90}{-45} = -2; \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-45}{-45} = 1.$$

Розв'язок системи: $x = 3, y = -2, z = 1$.

Приклад 14. Розв'язати систему рівнянь за формулами Крамера

$$\begin{cases} x + 2z = -3, \\ 2x + 3y = 5, \\ 3y + z = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 12 = 15 \neq 0.$$

Отже, система має єдиний розв'язок.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -9 + 30 - 6 = 15;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 4 + 6 = 15;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 18 - 15 = -30.$$

За формулами Крамера маємо:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1; \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1; \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -2.$$

Розв'язок системи: $x = 1, y = 1, z = -2$.

1.1.4. Однорідні системи рівнянь

Розглянемо однорідну систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

Така система має безліч розв'язків.

Для їх знаходження складемо матрицю $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, та

створимо визначники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Нехай $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, тоді система (1.6) рівносильна одному рівнянню, наприклад першому:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0,$$

а отже

$$x_3 = -\frac{a_{11}x_1 + a_{12}x_2}{a_{13}}, \quad a_{13} \neq 0.$$

Система має безліч розв'язків:

$$x_1 \in R; x_2 \in R; x_3 = -\frac{a_{11}x_1 + a_{12}x_2}{a_{13}}. \quad (1.7)$$

Нехай хоча б один із визначників $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ відмінний від нуля, наприклад $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, тоді

система (1.6) запишеться у вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = -a_{13}x_3, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = -a_{23}x_3. \end{cases}$$

Оскільки x_3 може набувати будь-яких дійсних значень, покладемо $x_3 = \Delta_3 t$, де t – довільне дійсне число, тоді за формулами Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta_3} = \frac{\Delta_1 \cdot x_3}{\Delta_3}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta_3} = \frac{-\Delta_2 \cdot x_3}{\Delta_3},$$

легко отримати розв'язок:

$$x_1 = \Delta_1 t, \quad x_2 = -\Delta_2 t, \quad x_3 = \Delta_3 t, \quad t \in R. \quad (1.8)$$

Розглянемо однорідну систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0. \end{cases} \quad (1.9)$$

Нехай $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$, тоді система (1.9) має

єдиний нульовий розв'язок: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Якщо $\Delta = 0$, а хоча б один із мінорів другого порядку визначника не дорівнює нулю, наприклад мінор

(визначник) $M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, тоді система (1.9)

рівносильна системі (1.6) і розв'язками системи (1.9) будуть розв'язки системи (1.6), тобто:

$$x_1 = \Delta_1 t, \quad x_2 = -\Delta_2 t, \quad x_3 = \Delta_3 t, \quad t \in R, \quad (1.10)$$

$$\text{де } \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \quad (1.11)$$

Приклад 15. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо визначник даної однорідної системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 10 + 2 - 1 - 5 - 8 = -24.$$

Оскільки $\Delta = -24 \neq 0$, то система має єдиний нульовий розв'язок: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Приклад 16. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо визначник даної однорідної системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 12 + 6 - 6 - 1 - 27 + 16 = 0.$$

Оскільки $\Delta = 0$, то дана система має безліч розв'язків. Скористаємося формулами (1.9).

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 2 = 11,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 4 = -7.$$

Тоді $x_1 = 5t$; $x_2 = -11t$; $x_3 = -7t$, $t \in R$.

Запитання для самоконтролю

1. Що називається визначником другого порядку?
2. Як обчислюється визначник другого порядку?
3. Що називається визначником третього порядку?
4. Як обчислюється визначник третього порядку?
5. Дайте означення мінора та алгебраїчного доповнення елемента визначника.
6. Сформулюйте властивості визначників.
7. Що називається розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь?
8. Запишіть формули Крамера для розв'язання систем лінійних неоднорідних алгебраїчних рівнянь. За якої умови така система має єдиний розв'язок?
9. Яка система лінійних алгебраїчних рівнянь називається однорідною?
10. Запишіть формули для знаходження всіх розв'язків однорідної системи двох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими.
11. Запишіть формули для знаходження всіх розв'язків однорідної системи трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими.

Завдання для самостійного розв'язування

Приклад 1. Обчислити визначники другого порядку:

$$a) \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}; \quad б) \begin{vmatrix} \cos 8x & -\sin 5x \\ \sin 8x & \cos 5x \end{vmatrix}.$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0$.

Приклад 3. Обчислити визначники третього порядку:

$$\begin{aligned}
 & \text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}; \\
 & \text{г) } \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{д) } \begin{vmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 \end{vmatrix}; \quad \text{е) } \begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Приклад 4. Розв'язати системи рівнянь за формулами Крамера:

$$\text{a) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 9x_3 = 28, \\ 7x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -1, \\ 7x_1 + 9x_2 - 9x_3 = 5. \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x + y + z = 1, \\ x - y + 2z = -5, \\ 4x + y + 4z = -2. \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} 3x + 2y + z = 0, \\ 2x + 5y + 3z = 0, \\ 3x + 4y + 2z = 0. \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} x - y - z = 0, \\ x + 4y + 2z = 0, \\ 3x + 7y + 3z = 0. \end{cases} \quad \text{е) } \begin{cases} 3x - 2y + 5z = 0, \\ x + 2y - 3z = 0. \end{cases}$$

Відповіді

1. а) 18; б) $\cos 3x$.

2. $x_1 = -1$, $x_2 = -4$.

3. а) 18; б) 180; в) -20; г) -31; д) 0; е) -48.

4. а) $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$; б) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$;

в) $x = 1$, $y = 2$, $z = -2$; г) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$;

д) $x_1 = 2t$, $x_2 = -3t$, $x_3 = 5t$, $t \in R$;

е) $x_1 = -2t$, $x_2 = 7t$, $x_3 = 4t$, $t \in R$.

Тести

1. Як обчислюється визначник другого порядку

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} ?$$

- А) $a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}$;
- б) $a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}$;
- в) $a_{11} + a_{22} + a_{12} + a_{21}$;
- г) $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$;
- д) $a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22}$.

2. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$.

- А) -7; б) -1; в) 1; г) 7; д) 0.

3. Якщо у визначнику поміняти місцями два рядки (стовпчики) то значення визначника:

- а) не зміниться;
- б) зміниться на протилежне;
- в) стане абсолютною величиною;
- г) збільшиться у два рази;
- д) буде рівне нулю.

4. Мінором елемента визначника називається:

- а) визначник, отриманий із заданого шляхом викреслення рядка та стовпчика, в якому знаходиться цей елемент;
- б) найбільший за модулем елемент визначника;
- в) найменший за модулем елемент визначника;
- г) визначник, отриманий із заданого шляхом викреслення рядка, в якому знаходиться цей елемент;
- д) визначник, отриманий із заданого шляхом викреслення стовпчика, в якому знаходиться цей елемент.

5. Для визначника $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$ записати мінор

M_{21} .

А) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$.

6. Для визначника $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$ записати мінор A_{32} .

А) -1; б) 1; в) -2; г) 3; д) 0.

7. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$.

А) 24; б) -24; в) 27; г) -27; д) 0.

8. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix}$.

А) 20; б) -5; в) 3; г) 17; д) 0.

9. Який з числових виразів є розкладом визначника

$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$ за елементами третього стовпця?

А) $1 \cdot (-8) + 0 + (-3) \cdot 4$;
 б) $1 \cdot (-13) + 0 + (-3) \cdot (-4)$;
 в) $1 \cdot (-6) + 0 + (-3) \cdot 6$;

з) $1 \cdot (-9) + 0 + (-3) \cdot 10$;

д) $1 \cdot 8 + 0 + (-3) \cdot (-4)$.

10. Задано систему лінійних алгебраїчних рівнянь
$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$$
. Обчислити $x + y$.

А) -1; б) 1; в) -2; з) 3; д) 0.

11. Система лінійних алгебраїчних рівнянь має єдиний розв'язок, тоді і тільки тоді, коли:

- а) головний визначник більший нуля;
- б) головний визначник менший нуля;
- в) головний визначник дорівнює нулю;
- з) головний визначник не дорівнює нулю;
- д) всі визначники рівні нулю.

12. Якщо головний визначник системи лінійних алгебраїчних рівнянь дорівнює нулю, а хоча б один із решти визначників відмінний від нуля, то система:

- а) не має розв'язку;
- б) має один розв'язок;
- в) має два розв'язки;
- з) має безліч розв'язків;
- д) має три розв'язки.

13. Якщо всі визначники системи лінійних алгебраїчних рівнянь дорівнюють нулю, то система:

- а) не має розв'язку;
- б) має один розв'язок;
- в) має два розв'язки;
- з) може не мати розв'язку або мати нескінчену кількість розв'язків;
- д) має безліч розв'язків.

Відповіді

1. з). 2. б). 3. б). 4. а). 5. д). 6. а). 7. в). 8. а). 9. б). 10. д).
11. з). 12. а). 13. з).

1.2. Матриці та дії над ними

1.2.1. Основні означення. Дії над матрицями. Обернена матриця

Впорядкована таблиця чисел, що містить m рядків і n стовпців називається *матрицею* і записується у вигляді:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Круглі дужки – знак матриці. Пара чисел (m, n) визначає *розмір* матриці.

Якщо $m \neq n$, то матриця називається *прямокутною*.

Якщо $m = n$, то матриця називається *квадратною*, а число $m = n$ називається *порядком* цієї матриці.

Квадратну матрицю, у якій всі елементи, окрім елементів головної діагоналі, рівні нулю, називаються *діагональною*.

Діагональну матрицю, в якій всі діагональні елементи рівні одиниці, називають *одиничною* і позначають буквою E .

Одинична матриця третього порядку записується:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

Визначник, складений з елементів квадратної матриці A , називають визначником цієї матриці і позначають $\Delta(A)$. Матрицю, що містить лише один стовпець, називають *матрицею-стовпцем*, а якщо вона містить один рядок, – то *матрицею-рядком*.

Дві матриці називаються *рівними*, якщо вони однакового розміру та мають рівні відповідні елементи.

Сумою двох матриць однакового розміру є матриця, елементи якої дорівнюють сумі відповідних елементів цих матриць.

При множенні матриці на число потрібно всі її елементи помножити на це число.

Помножити матрицю A на матрицю B можна якщо число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B . Елемент C_{ik} матриці $C = A \cdot B$ дорівнює сумі добутків елементів i -го рядка матриці A на відповідні елементи k -го стовпця матриці B . В цьому випадку, якщо (m, n) – розмір матриці A , а (n, p) – розмір матриці B , то (m, p) – розмір матриці C .

Матриця A' , одержана з матриці A шляхом заміни рядків відповідними стовпцями або навпаки, називається *транспонованою* по відношенні до матриці A .

Матриця A^{-1} називається оберненою до квадратної матриці A , якщо

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E, \quad (1.14)$$

де E – *одинична матриця*.

Для існування оберненої матриці A^{-1} необхідно і достатньо, щоб визначник матриці A не дорівнював нулю ($\Delta(A) \neq 0$). Такі матриці називаються *неособливими*.

Щоб знайти матрицю A^{-1} , обернену до неособливої матриці A , потрібно:

1. Обчислити визначник $\det A = \Delta$;
2. Знайти алгебраїчні доповнення A_{ij} елементів a_{ij} визначника Δ ;
3. Скласти із чисел A_{ij} матрицю A^* ;

4. Транспонувати матрицю A^* , утворивши матрицю $\tilde{A} = (A^*)'$. Матриця $\tilde{A}$ називається приєднаною до матриці A ;

5. Скласти обернену матрицю A^{-1} : $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \tilde{A}$.

Можна показати, що оберненою до матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ є матриця $A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$,

де A_{ij} – відповідні алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} визначника матриці A .

Приклад 1. Знайти $A + B$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 8 & 7 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2. Знайти $3A + 2B$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

$$\begin{aligned} 3A + 2B &= 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 6 \\ 15 & 6 & -9 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} 10 & 4 & 2 \\ 6 & -8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 1 & 8 \\ 21 & -2 & -5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Приклад 3. Знайти $A \cdot B$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B , тому матриці є узгодженими, а отже їх можна перемножити:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 5 \cdot 2 + (-2)(-1) + 3 \cdot 3 & 5 \cdot 3 + (-2)5 + 3 \cdot 4 \\ 2 \cdot 2 + 1(-1) + 4 \cdot 3 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 4 \cdot 4 \\ 1 \cdot 2 + 0(-1) + 1 \cdot 3 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 17 \\ 15 & 27 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Приклад 4. Знайти $A \cdot B$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 6+1+15 & 4+2+6 & 8+3+3 \\ 12-2+5 & 8-4+2 & 16-6+1 \\ 9+5-10 & 6+10-4 & 12+15-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 12 & 14 \\ 15 & 6 & 11 \\ 4 & 12 & 25 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Приклад 5. Знайти $A \cdot B$ і $B \cdot A$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = (3 \ 2 \ 6).$$

Розв'язання

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (3 \ 2 \ 6) = \begin{pmatrix} 15 & 10 & 30 \\ -6 & -4 & -12 \\ 9 & 6 & 18 \end{pmatrix};$$

$$B \cdot A = (3 \ 2 \ 6) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = (15 - 4 + 18) = (29).$$

Приклад 6. Знайти $A \cdot B$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+10+3 \\ -4+15+15 \\ 2+20+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 26 \\ 28 \end{pmatrix}.$$

Приклад 7. Знайти матрицю A^{-1} , обернену до матриці

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Обчислимо визначник матриці:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 6 + 8 + 4 + 9 + 16 = 43 \neq 0.$$

Знаходимо алгебраїчні доповнення елементів цього визначника:

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 7; & A_{12} &= -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -10; & A_{13} &= \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6; \\
 A_{21} &= -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6; & A_{22} &= \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -16; & A_{23} &= -\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1; \\
 A_{31} &= \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -1; & A_{32} &= -\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 17; & A_{33} &= \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 7.
 \end{aligned}$$

Складаємо матрицю:

$$A^* = \begin{pmatrix} -7 & -10 & 6 \\ 6 & -16 & 1 \\ -1 & 17 & 7 \end{pmatrix} \text{ і транспонуємо її:}$$

$$\tilde{A} = (A^*)' = \begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ -10 & -16 & 17 \\ 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо матрицю A^{-1} , обернену до матриці A :

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \tilde{A} = \frac{1}{43} \begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ -10 & -16 & 17 \\ 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Виконаємо перевірку. За правилом множення матриць маємо:

$$\begin{aligned}
 A \cdot A^{-1} &= \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{43} \begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ -10 & -16 & 17 \\ 6 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{43} \begin{pmatrix} 43 & 0 & 0 \\ 0 & 43 & 0 \\ 0 & 0 & 43 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A^{-1} \cdot A &= \frac{1}{43} \begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ -10 & -16 & 17 \\ 6 & 1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{43} \begin{pmatrix} 43 & 0 & 0 \\ 0 & 43 & 0 \\ 0 & 0 & 43 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.
 \end{aligned}$$

Приклад 8. Знайти матрицю A^{-1} , обернену до матриці

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Обчислюємо визначник матриці:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 12 - 10 = 2 \neq 0.$$

Знаходимо алгебраїчні доповнення елементів визначника:

$$A_{11} = -4; \quad A_{12} = -2; \quad A_{21} = -5; \quad A_{22} = -3.$$

Складаємо матрицю

$$A^* = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} \text{ і транспонуємо її: } \tilde{A} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Шукана обернена матриця: } A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1.2.2. Матричний метод розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Нехай задана система рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \quad (1.15)$$

Складемо матриці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \text{матриця системи};$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \text{матриця-стовпець з вільних членів};$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \text{матриця-стовпець з невідомих}.$$

Дану систему рівнянь записуємо в матричній формі – матричним рівнянням:

$$AX = B. \quad (1.16)$$

Якщо матриця A – неособлива ($\Delta(A) \neq 0$), то отримуємо розв'язок системи рівнянь у матричній формі:

$$X = A^{-1}B. \quad (1.17)$$

Приклад 9. Розв'язати систему рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо систему рівнянь в матричній формі – матричним рівнянням $AX = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Визначник матриці A складено з коефіцієнтів при невідомих системи:

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 24 \neq 0.$$

Розв'язок системи рівнянь в матричній формі: $X = A^{-1} \cdot B$.
Знайдемо обернену матрицю A^{-1} , для цього обчислимо алгебраїчні доповнення елементів визначника заданої системи:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1; & A_{12} &= -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 11; & A_{13} &= \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7; \\ A_{21} &= -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 7; & A_{22} &= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -5; & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1; \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5; & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7; & A_{33} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -11. \end{aligned}$$

Складаємо матриці:

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & 11 & 7 \\ 7 & -5 & -1 \\ 5 & -7 & -11 \end{pmatrix} \text{ і } \tilde{A} = (A^*)' = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 \\ 11 & -5 & -7 \\ 7 & -1 & -11 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Обернена матриця: } A^{-1} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 \\ 11 & -5 & -7 \\ 7 & -1 & -11 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{Шуканий розв'язок: } X &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 \\ 11 & -5 & -7 \\ 7 & -1 & -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{24} \begin{pmatrix} -6 + 35 - 5 \\ 66 - 25 + 7 \\ 42 - 5 + 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 24 \\ 48 \\ 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Відповідь: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2$.

Приклад 10. Розв'язати систему рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9, \\ 2x - y + 3z = 5, \\ 4x + 3y - 5z = 3. \end{cases}$$

Розв'язання. Відповідне матричне рівняння для даної системи: $AX = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Визначник матриці A , складений з коефіцієнтів при невідомих системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 50 \neq 0.$$

Розв'язок системи рівнянь в матричній формі: $X = A^{-1} \cdot B$.

Після знаходження оберненої матриці A^{-1} , одержимо:

$$A^{-1} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} -4 & 13 & 7 \\ 22 & -9 & -1 \\ 10 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок даної системи:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} -4 & 13 & 7 \\ 22 & -9 & -1 \\ 10 & 5 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $x = 1$, $y = 3$, $z = 2$.

1.2.3. Ранг матриці. Теорема Кронекера-Капеллі існування розв'язків систем лінійних рівнянь

Для дослідження існування розв'язків систем лінійних алгебраїчних рівнянь визначають ранг матриці, який знаходять за допомогою основних елементарних перетворень над матрицею.

Мінором k -го порядку матриці A називається визначник квадратної матриці, елементи якої знаходяться на перетині довільно вибраних k рядків та k стовпців.

Рангом матриці називається найбільший із порядків її мінорів, відмінних від нуля.

Ранг матриці A позначають символом $r = \text{rang} A = Rg A$.

Ранг матриці не зміниться, якщо над матрицею виконати елементарні перетворення.

Елементарними перетвореннями матриць називаються такі перетворення:

- 1) заміна рядків стовпцями, а стовпців – відповідними рядками;
- 2) перестановка двох паралельних рядків (стовпців) матриці;
- 3) множення елементів рядка (стовпця) на число, відмінне від нуля;
- 4) додавання до елементів деякого рядка (стовпця) елементів паралельного рядка (стовпця), помножених на те ж саме число;
- 5) викреслення рядка, всі елементи якого рівні нулю.

Матриці, що отримуються одна з одної за допомогою елементарних перетворень, називаються еквівалентними і з'єднуються знаком $\sim$.

За допомогою елементарних перетворень матриці можна отримати її еквівалентну матрицю, в якій усі або частина елементів головної діагоналі одиниці, а всі решта

елементів матриці нулі. Тоді ранг матриці буде співпадати з числом одиниць на головній діагоналі.

Приклад 11. Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$

$$\sim \left| \begin{array}{l} \text{перший рядок домножимо на } (-2) \\ \text{та додаємо його до третього рядка} \end{array} \right| \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \left| \text{викреслюємо нульовий рядок} \right| \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{l} \text{домножимо перший стовпець} \\ \text{на } (-2) \text{ та додамо його до відповідних} \\ \text{елементів третього стовпця} \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{l} \text{домножимо другий стовпець на} \\ (-2) \text{ та додамо його до відповідних} \\ \text{елементів четвертого стовпця} \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Rightarrow \operatorname{Rg}(A) = 2.$$

Теорема Кронекера-Капеллі. Розглянемо систему трьох лінійних рівнянь із трьома невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \quad (1.18)$$

Розглянемо матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ та } B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix},$$

які називаються відповідно *основною матрицею* системи та її *розширеною матрицею*.

Система (1.18) сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг розширеної матриці системи рівний рангу основної матриці системи, тобто $\operatorname{Rg}(B) = \operatorname{Rg}(A)$.

Зокрема, якщо $\operatorname{Rg}(A) = \operatorname{Rg}(B) = 3$, то система має єдиний розв'язок $(x^0; y^0; z^0)$. Якщо $\operatorname{Rg}(A) = \operatorname{Rg}(B) = 2$ або $\operatorname{Rg}(A) = \operatorname{Rg}(B) = 1$, то система має нескінченну множину розв'язків. Якщо $\operatorname{Rg}(B) \neq \operatorname{Rg}(A)$, то система (1.18) – несутісна.

Приклад 12. Дослідити систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо ранги основної та розширеної матриць системи рівнянь за допомогою елементарних перетворень.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rg}(A) = 2.$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & -8 \\ 0 & 5 & 5 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \Rightarrow$$

$$\text{Rg}(B) = 3.$$

Оскільки $\text{Rg}(A) \neq \text{Rg}(B)$, то система несутісна.

Запитання для самоконтролю

1. Що називається матрицею?
2. Дайте визначення квадратної, діагональної та одиничної матриць.
3. Які матриці називаються рівними?
4. Як додати дві матриці? Чи всі матриці можна додавати?
5. Як помножити матрицю на число?
6. За яких умов можлива операція множення двох матриць?
7. Сформулюйте правило множення двох матриць.
8. Дайте означення оберненої матриці. Яка умова існування оберненої матриці? Як знайти матрицю обернену до заданої?
9. Як записати систему лінійних рівнянь у матричній формі?

10. Як знайти матричний розв'язок системи лінійних рівнянь?

11. Що називається рангом матриці і як його можна знайти?

12. Назвіть елементарні перетворення над матрицями.

13. Сформулюйте теорему Кронекера – Капеллі.

Завдання для самостійного розв'язування

Приклад 1. Знайти добутки матриць:

$$a) \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}; \quad б) \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2. Знайти обернену матрицю A^{-1} , якщо:

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad б) A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Приклад 3. Розв'язати систему рівнянь матричним методом:

$$a) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases} \quad б) \begin{cases} x + y + z = 1, \\ x - y + 2z = -5, \\ 4x + y + 4z = -2. \end{cases}$$

Приклад 4. Знайти ранги матриць:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Приклад 5. Дослідити систему рівнянь і знайти її розв'язок, якщо вона сумісна:

$$a) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 5. \end{cases} \quad б) \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 3, \\ 3x_1 + 15x_2 + 12x_3 = 5. \end{cases}$$

Відповіді

$$1. a) \begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}; \quad б) \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -9 & -2 & 5 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$2. a) \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -8 \\ -2 & 4 & 10 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}; \quad б) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix};$$

$$3. a) x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1; \quad б) x = 1, y = 2, z = -2.$$

$$4. Rg(A) = 3, \quad Rg(B) = 2.$$

$$5. a) x_1 = \frac{11 - x_3}{5}, x_1 = \frac{2(x_3 - 1)}{5}, x_3 \in R$$

б) система несумісна.

Тести

$$1. \text{ Нехай } A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Які з операцій мають зміст?

$$a) 2A+3C; \quad б) 2A-B; \quad в) 2B+C; \quad г) A+2D-3C; \quad д) 5C+A^T.$$

$$2. \text{ Вказати розмір матриці } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$a) (3 \times 2); \quad б) (2 \times 2); \quad в) (2 \times 3); \quad г) (3 \times 3); \quad д) (3 \times 4).$$

3. Вказати тип матриці $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- а) діагональна;
- б) одинична;
- в) вектор-рядок;
- г) вектор-стовпець;
- д) нульова.

4. Вказати тип матриці $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- а) діагональна;
- б) одинична;
- в) матриця-рядок;
- г) матриця-стовпець;
- д) нульова.

5. Вказати тип матриці $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- а) діагональна;
- б) одинична;
- в) матриця-рядок;
- г) матриця-стовпець;
- д) нульова.

6. Вказати тип матриці $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

- а) діагональна;
- б) одинична;
- в) матриця-рядок;
- г) матриця-стовпець;
- д) нульова.

7. Вказати тип матриці $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- а) діагональна;
- б) одинична;
- в) матриця-рядок;
- г) матриця-стовпець;
- д) нульова.

8. Задано матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Знайти

$2A + 5B$.

- а) $\begin{pmatrix} 16 & 25 \\ 13 & -8 \end{pmatrix}$;
- б) $\begin{pmatrix} 6 & -25 \\ 13 & -8 \end{pmatrix}$;
- в) $\begin{pmatrix} 1 & 25 \\ -13 & -8 \end{pmatrix}$;
- г) $\begin{pmatrix} 10 & 25 \\ -13 & -8 \end{pmatrix}$;
- д) $\begin{pmatrix} -16 & -25 \\ -13 & 8 \end{pmatrix}$.

9. Задано матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Знайти $A \cdot B$.

$$a) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 6 & 6 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix};$$

$$б) \begin{pmatrix} -8 & 0 & 7 \\ 6 & 10 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix};$$

$$в) \begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 \\ 16 & 10 & 4 \\ 13 & 5 & 7 \end{pmatrix};$$

$$г) \begin{pmatrix} -8 & 0 & 7 \\ 6 & 10 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix};$$

$$д) \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 7 & 3 \\ 8 & 11 & 14 \end{pmatrix}.$$

10. Задано матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Знайти $B \cdot A$.

$$a) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 6 & 6 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix};$$

$$б) \begin{pmatrix} -8 & 0 & 7 \\ 6 & 10 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix};$$

$$в) \begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 \\ 16 & 10 & 4 \\ 13 & 5 & 7 \end{pmatrix};$$

$$г) \begin{pmatrix} -8 & 0 & 7 \\ 6 & 10 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix};$$

$$д) \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 7 & 3 \\ 8 & 11 & 14 \end{pmatrix}.$$

11. Знайти матрицю A^{-1} , обернену до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$а) \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix};$$

$$б) \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix};$$

$$в) \begin{pmatrix} 1 & 25 \\ -13 & -8 \end{pmatrix};$$

$$г) \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix};$$

$$\partial) \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

$$12. \text{ Знайти ранг матриці } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$a) Rg(A) = 3;$$

$$б) Rg(A) = 1;$$

$$в) Rg(A) = 2;$$

$$г) Rg(A) = -1;$$

д) визначити неможливо.

$$13. \text{ Знайти ранг матриці } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$a) Rg(A) = 4;$$

$$б) Rg(A) = 1;$$

$$в) Rg(A) = 2;$$

$$г) Rg(A) = 3;$$

$$д) Rg(A) = 0.$$

Відповіді

1. б). 2. в). 3. а). 4. б). 5. д). 6. в). 7. г). 8. а). 9. в). 10. д).

11. а). 12. в). 13. г).

1.3. Вектори

1.3.1. Основні поняття про вектори. Лінійні операції над векторами. Скалярний добуток двох векторів

Вектор – це напрямлений відрізок прямої. Вектор позначають: $\overrightarrow{AB}$ або $\vec{a}$.

Вектор зображується відрізком зі стрілкою на кінці. При цьому точку A називають початком вектора, а точка B – його кінцем (рис. 1.1).

Довжину вектора називають його *модулем* і позначають $|\overrightarrow{AB}|$ або $|\vec{a}|$.

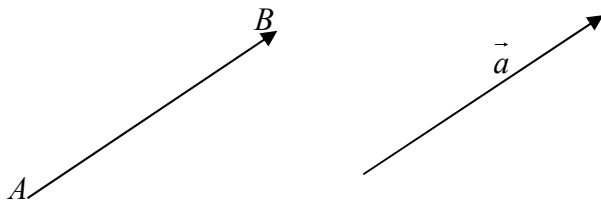


Рис. 1.1

Вектор $\vec{a}$ називається *одичним*, якщо $|\vec{a}| = 1$.

Вектор, у якого початок і кінець співпадають, називається *нульовим вектором*. Позначення: $\vec{0}$.

Вектори називають *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Два ненульові вектори називають *рівними*, якщо:

- 1) рівні їх довжини;
- 2) вектори колінеарні;
- 3) вектори направлені в одну сторону.

Сумою векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, який напрямлений від початку вектора $\vec{a}$ до кінця вектора $\vec{b}$, за умови, що кінець вектора $\vec{a}$ співпадає з початком вектора $\vec{b}$ (правило трикутника) (рис. 1.2).

Також суму $\vec{a} + \vec{b}$ векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ можна знайти за правилом паралелограма (рис. 1.3).

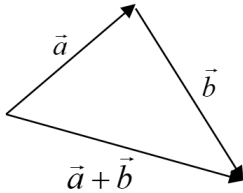


Рис. 1.2

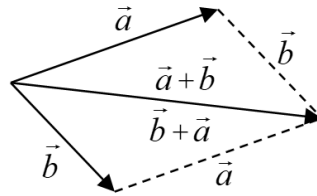


Рис. 1.3

Різницею двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається такий третій вектор $\vec{c}$, сума якого з вектором $\vec{b}$ дорівнює вектору $\vec{a}$, тобто $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$, якщо $\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$.

Побудуємо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ з одного початку. Тоді вектор-різниця $\vec{c}$ буде з'єднувати кінець вектора $\vec{b}$ з кінцем вектора $\vec{a}$ (рис. 1.4).

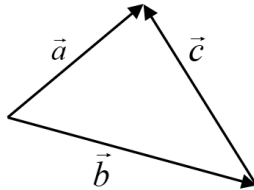


Рис. 1.4

Добутком вектора $\vec{a}$ на число λ називається вектор $\lambda \vec{a}$, який колінеарний вектору $\vec{a}$, має довжину $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$, зберігає напрямок вектора $\vec{a}$, якщо $\lambda > 0$, і має протилежний напрямок, якщо $\lambda < 0$.

Числовою віссю називають пряму, на якій вибрано:

- 1) деяку точку O , початок відліку;
- 2) додатний напрям, який позначають стрілкою;
- 3) масштаб для вимірювання довжини.

Проекцією вектора $\vec{a}$ на вісь l називається довжина відрізка A_1B_1 між основами перпендикулярів, опущених із точок A і B на вісь l взята зі знаком (+), якщо напрямок відрізка A_1B_1 співпадає з напрямком осі l і зі знаком (-) – у протилежному випадку (рис. 1.5). Записують $pr_l \vec{AB} = A_1B_1$ або $pr_l \vec{a} = A_1B_1$.

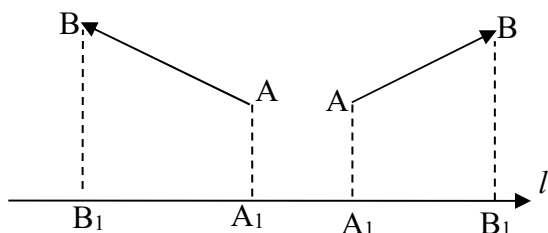


Рис. 1.5

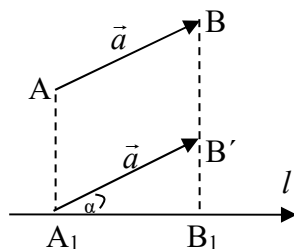


Рис. 1.6

Справедливими є теореми про проекції:

1. Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь l дорівнює модулю вектора $\vec{a}$, помноженому на косинус кута між віссю l і вектором $\vec{a}$: $pr_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos \alpha$ (рис. 1.6).

2. Проекція суми векторів на вісь l дорівнює сумі їх проекцій на ту ж вісь.

3. Якщо вектор $\vec{a}$ помножити на число λ , то його проекція на вісь l теж помножиться на це число: $pr_l(\lambda\vec{a}) = \lambda pr_l\vec{a}$.

Нехай задано три вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Будь-який вектор $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, де α, β, γ – деякі скаляри (числа), називається *лінійною комбінацією векторів $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$* . Цей вектор утворений з векторів $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ за допомогою лінійних операцій додавання і множення векторів на число.

Вектори називаються *лінійно залежними*, якщо будь-який із них є лінійною комбінацією інших.

У протилежному випадку ці вектори називаються *лінійно незалежними*.

Два вектори лінійно залежні тоді і тільки тоді, якщо вони колінеарні.

Три вектори лінійно залежні тоді і тільки тоді, якщо вони паралельні до однієї площини.

Чотири і більше вектори завжди лінійно залежні.

Нехай вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ і $\vec{d}$ не лежать в одній площині. Тоді запис

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} \quad (1.19)$$

називають *розкладом вектора $\vec{d}$ за напрямками трьох не паралельних одній площині векторів $\vec{a}, \vec{b}$ та $\vec{c}$* . Доданки $\alpha\vec{a}, \beta\vec{b}$ і $\gamma\vec{c}$ називається *складовими або компонентами вектора* (рис. 1.7).

Сукупність лінійно незалежних векторів, називається *координатним базисом*.

Якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють базис, то запис $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ визначає *розклад вектора $\vec{d}$ в цьому*

базисі. Числа α, β, γ однозначно виражають вектор $\vec{d}$ і називаються *координатами вектора $\vec{d}$* .

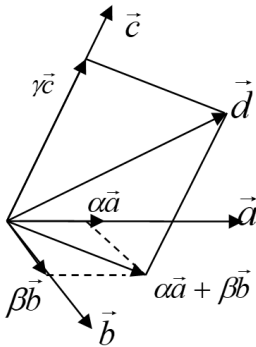


Рис. 1.7

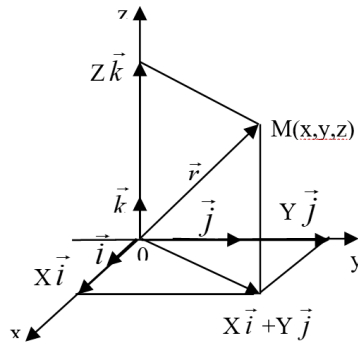


Рис. 1.8

Три взаємно перпендикулярні вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ одиничної довжини, які називають *ортами*, утворюють координатний базис Декарта.

Система координат, яка побудована на цьому базисі, називається *декартовою прямокутною системою координат* з осями Ox, Oy, Oz .

Положення довільної точки $M(x, y, z)$ у цій системі цілком визначається її радіусом-вектором $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ (рис. 1.8).

Спроектуємо цей вектор на осі координат Ox, Oy, Oz і позначимо через X, Y, Z проекції на них вектора $\vec{r}$. Аналогічно до формули (1.19) його можна записати

$$\vec{r} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}, \quad (1.20)$$

де вектори $X\vec{i}, Y\vec{j}, Z\vec{k}$ називаються *складовими вектора $\vec{r}$* і утворюються розтягом базисних векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ на величини проекцій (координат) X, Y, Z .

Зображення вектора $\vec{r}$ у вигляді суми (1.20) називається його розкладом у базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Часто використовують скорочений запис формули (1.20):

$$\vec{r} = (X; Y; Z). \quad (1.21)$$

На основі формул (1.20) і (1.21) довільний вектор $\vec{a}$ з проекціями a_x, a_y, a_z можна записати у вигляді

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}. \quad (1.22)$$

Нехай дано два вектори $\vec{a} = X_1 \vec{i} + Y_1 \vec{j} + Z_1 \vec{k}$, $\vec{b} = X_2 \vec{i} + Y_2 \vec{j} + Z_2 \vec{k}$ та число $\lambda \in R$.

Справедливими є рівності:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (X_1 \pm X_2) \vec{i} + (Y_1 \pm Y_2) \vec{j} + (Z_1 \pm Z_2) \vec{k}, \quad (1.23)$$

$$\lambda \vec{a} = \lambda X_1 \vec{i} + \lambda Y_1 \vec{j} + \lambda Z_1 \vec{k}. \quad (1.24)$$

Тобто при додаванні (відніманні) векторів їх відповідні координати додаються (віднімаються), а при множенні вектора на число всі його координати множаться на це число.

Якщо початок вектора міститься в точці $A(x_1; y_1; z_1)$, а кінець – в точці $B(x_2; y_2; z_2)$, то координати вектора визначаються:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1). \quad (1.25)$$

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними.

Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначається $\vec{a} \cdot \vec{b}$ або $(\vec{a}, \vec{b})$. За означенням:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})), \quad (1.26)$$

де $(\vec{a}, \vec{b})$ – кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

Зауважимо, що кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ – це той кут, який не більший за π , тобто $0 \leq (\vec{a}, \vec{b}) \leq \pi$.

Скалярний добуток не залежить від порядку співмножників, тобто $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

Число $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2$ – скалярний квадрат вектора $\vec{a}$. Тоді $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Якщо вектори задані координатами: $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$, то їх скалярний добуток визначається як сума добутків однойменних координат:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (1.27)$$

Довжина вектора $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ визначається як корінь квадратний із суми квадратів його координат:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (1.28)$$

Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (позначається $\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$) знаходиться за формулою:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \quad (1.29)$$

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – колінеарні, тобто $\vec{a} = \lambda \vec{b}$, то

$$\frac{a_x}{a_y} = \frac{b_x}{b_y} = \frac{c_x}{c_y}. \quad (1.30)$$

Косинуси кутів, які утворює вектор $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ з координатними осями Ox , Oy і Oz , називаються його *напрямними косинусами* і позначаються $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$.

Оскільки напрямок координатних осей задається напрямком базисних векторів (орт) $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$, $\vec{k} = (0; 0; 1)$, то на основі формули (1.29) маємо:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ \cos \beta &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ \cos \gamma &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.\end{aligned}\tag{1.31}$$

Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь вектора $\vec{b}$ знаходиться за формулою:

$$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.\tag{1.32}$$

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ *перпендикулярні*, то їх скалярний добуток рівний нулю: .

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.\tag{1.33}$$

Приклад 1. Дано точки: $A (3; -1; 2)$, $B (4; 3; 1)$, $C (5; 2; 3)$. Знайти вектор $\vec{a} = 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{BC}$.

Розв'язання

$$\overrightarrow{AB} = (4-3; 3+1; 1-2) = (1; 4; -1), \quad \overrightarrow{BC} = (5-4; 2-3; 3-1) = (1; -1; 2),$$

$$3\overrightarrow{AB} = (3; 12; -3), \quad 4\overrightarrow{BC} = (4; -4; 8), \quad \vec{a} = (3+4; 12-4; -3+8) = (7; 8; 5).$$

Приклад 2. Знайти: $(4\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b})$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\varphi = \frac{2}{3}\pi$ (кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$).

Розв'язання

$$\begin{aligned} (4\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) &= 4\vec{a}^2 + 3\vec{b} \cdot \vec{a} - 8\vec{a} \cdot \vec{b} - 6\vec{b}^2 = \\ &= 4|\vec{a}|^2 - 5|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi - 6|\vec{b}|^2 = 4 \cdot 4 - 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 6 \cdot 9 = -23. \end{aligned}$$

Приклад 3. Знайти: $|2\vec{a} - 3\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, кут між векторами $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Розв'язання

$$\begin{aligned} |2\vec{a} - 3\vec{b}| &= \sqrt{(2\vec{a} - 3\vec{b})^2} = \sqrt{4\vec{a}^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2} = \\ &= \sqrt{4|\vec{a}|^2 - 12|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi + 9|\vec{b}|^2} = \sqrt{4 \cdot 16 - 12 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} - 9 \cdot 4} = \\ &= \sqrt{52} = 2\sqrt{13}. \end{aligned}$$

Приклад 4. Дано трикутник з вершинами в точках: $A(1; 1; -2)$, $B(3; 2; 1)$, $C(2; 4; -1)$. Знайти внутрішній кут φ при вершині B і проекцію вектора $\vec{BA}$ на вісь вектора $\vec{BC}$ та проекцію вектора $\vec{BC}$ на вісь вектора $\vec{BA}$.

Розв'язання. Шуканий кут φ – це кут між векторами $\vec{BA}$ та $\vec{BC}$. В даному випадку, маємо $\vec{BA} = (-2; -1; -3)$ і $\vec{BC} = (-1; 2; -2)$. Тому $\cos\varphi = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}||\vec{BC}|} =$

$$= \frac{(-2)(-1) + (-1)2 + (-3)(-2)}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2}} =$$

$$= \frac{6}{3 \cdot \sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{14}}; \Rightarrow \varphi = \arccos \frac{2}{\sqrt{14}} \approx \arccos 0,53 \approx 57^{\circ} 99'.$$

Проекція вектора $\overrightarrow{BA}$ на вісь вектора $\overrightarrow{BC}$ та проекція вектора $\overrightarrow{BC}$ на вісь вектора $\overrightarrow{BA}$ відповідно дорівнюють:

$$np_{\overrightarrow{BC}} \overrightarrow{BA} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{6}{\sqrt{14}};$$

$$np_{\overrightarrow{BA}} \overrightarrow{BC} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|} = \frac{6}{3} = 2.$$

1.3.2. Векторний добуток двох та мішаний добуток трьох векторів

Три вектори називаються впорядкованою трійкою векторів, якщо вказано, який з них перший, який – другий і який – третій.

Три некопланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють *праву трійку векторів*, якщо після зведення їх до спільного початку, з кінця вектора $\vec{c}$ видно, що найкоротший поворот від вектора $\vec{a}$ до $\vec{b}$ відбувається проти руху стрілки годинника. У протилежному випадку трійка векторів називається лівою. На рис. 1.9 трійка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ є правою, а трійка $\vec{b}$, $\vec{a}$, $\vec{c}$ – лівою.

Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається *вектор* $\vec{c}$, що задовольняє трьом умовам:

1) його довжина чисельно рівна площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi, \text{ де } \varphi = (\vec{a}, \vec{b});$$

2) він перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;

3) напрям вектора $\vec{c}$ вибирається так, щоб трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ була правою (рис. 1.9).

Векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначається символами: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ або $[\vec{a}, \vec{b}]$.

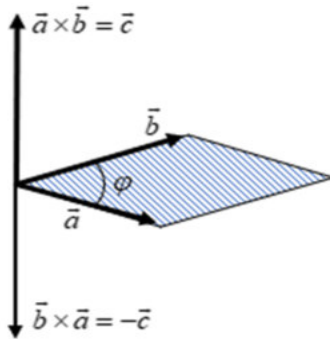


Рис. 1.9

Зауважимо, що векторний добуток залежить від порядку співмножників, тобто $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ – антикомутативність множення.

З означення векторного добутку випливає, що площа трикутника ABC у якого $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ визначається за формулою:

$$S = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|. \quad (1.34)$$

У координатній формі векторний добуток векторів $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ та $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$ визначається:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (1.35)$$

Мішаним або скалярно-векторним добутком трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називається векторний добуток $\vec{a} \times \vec{b}$ векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, скалярно помножений на вектор $\vec{c}$.

Мішаний добуток позначають $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Тобто за означенням

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

У координатній формі мішаний добуток векторів $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$ і $\vec{c} = (c_x; c_y; c_z)$ визначається за формулою:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (1.36)$$

Вектори називаються *компланарними*, якщо вони лежать в одній площині або в паралельних площинах.

Мішаний добуток трьох некопланарних векторів є число, модуль якого дорівнює *об'єму паралелепіпеда*, побудованого на цих векторах

$$V = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|. \quad (1.37)$$

Об'єм трикутної піраміди, заданої вершинами $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$, $D(x_4; y_4; z_4)$ визначається за формулою:

$$V = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6} \det \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}. \quad (1.38)$$

Для компланарних векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ їх мішаний добуток дорівнює нулю:

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0. \quad (1.39)$$

Приклад 5. Знайти векторний добуток векторів
 $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}, \vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}.$

Розв'язання

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} = \\ &= -5\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}. \end{aligned}$$

Приклад 6. Обчислити площу трикутника з вершинами в точках: $A(1; -1; 2), B(5; -6; 2), C(1; 3; -1).$

Розв'язання. Площу трикутника знайдемо за формулою $S = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|$, де $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (4; -5; 0),$
 $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = (0; 4; -3).$

Оскільки

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = \\ &= 15\vec{i} + 12\vec{j} + 16\vec{k}. \end{aligned}$$

$$\text{Тоді } |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{15^2 + 12^2 + 16^2} = \sqrt{625} = 25.$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 25 = 12,5 \text{ (кв.од.)}$$

Приклад 7. Знайти об'єм трикутної піраміди з вершинами в точках $A(2; 2; 2), B(4; 3; 3), C(4; 5; 4),$

$D(5; 5; 6)$ і довжину її висоти H , опущеної з вершини D на грань ABC .

Розв'язання. Об'єм піраміди знайдемо за формулою $V = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}|$, де вектори $\overrightarrow{AB} = (2; 1; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (2; 3; 2)$ та $\overrightarrow{AD} = (3; 3; 4)$ співпадають з ребрами піраміди. Тоді

$$V = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |24 + 6 + 6 - 9 - 8 - 12| =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 7 = \frac{7}{6} (\text{куб.од}).$$

З елементарної математики відомо, що об'єм трикутної піраміди дорівнює $\frac{1}{3}$ добутку площі основи піраміди на її висоту, тобто

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} \cdot H.$$

Прирівнюючи дві формули, за якими обчислюється об'єм піраміди, отримаємо формулу для обчислення висоти піраміди:

$$H = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}.$$

$$\text{Отже, } \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k},$$

$$\text{а } |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{21}.$$

Тоді висота $H = \frac{7}{\sqrt{21}} = \sqrt{\frac{7}{3}}$ (лін. од.).

Приклад 8. З'ясувати, чи компланарні вектори $\vec{a} = (2; 3; -1)$, $\vec{b} = (2; -2; 6)$ та $\vec{c} = (1; 9; -11)$.

Розв'язання. Знайдемо мішаний добуток заданих векторів. Маємо:

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 6 \\ 1 & 9 & -11 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 9 & -11 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -11 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, задані вектори – компланарні.

Запитання для самоконтролю

1. Що називається вектором? Як він позначається?
2. Як знайти координати вектора за його відомим початком та кінцем?
3. Що називається модулем вектора і як він визначається?
4. Які вектори називаються колінеарними? рівними?
5. Які дії над векторами називаються лінійними і як їх виконувати?
6. Що називається скалярним добутком векторів? Як він позначається?
7. Як знайти скалярний добуток двох векторів, заданих своїми координатами?
8. Як знайти кут між двома векторами?
9. Як знайти проекцію одного вектора на вісь іншого вектора?
10. Яка умова перпендикулярності двох векторів?
11. Що називається векторним добутком двох векторів? Як він позначається?

12. Як визначається векторний добуток двох векторів, заданих своїми координатами?

13. Яка умова колінеарності двох векторів?

14. Як за допомогою векторного добутку векторів знайти площу паралелограма? трикутника?

15. Що називається мішаним добутком трьох векторів? Як він позначається?

16. Як визначається мішаний добуток векторів у координатній формі?

17. Як за допомогою мішаного добутку векторів знайти об'єм паралелепіпеда? трикутної піраміди?

18. Які вектори називаються компланарними?

19. Яка умова компланарності трьох векторів?

Завдання для самостійного розв'язування

Приклад 1. Дано $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 30$.

Визначити $|\vec{a} + \vec{b}|$.

Приклад 2. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = 60^\circ$, $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 8$. Знайти $|\vec{a} + \vec{b}|$ і $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Приклад 3. Дано $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, кут між векторами $\varphi = 120^\circ$. Знайти $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$.

Приклад 4. Дано вершини трикутника $A (-1; -2; 4)$, $B (-4; -2; 0)$, $C (3; -2; 1)$. Знайти внутрішній кут при вершині A .

Приклад 5. Дано $A (4; 1; 0)$, $B (2; 2; 1)$, $C (6; 3; 1)$. Знайти $\text{пр}_{\vec{AC}} \vec{AB}$.

Приклад 6. При якому значенні α вектори $\vec{p} = (2; 0; \alpha)$ і $\vec{q} = (3; 4; 2)$ перпендикулярні?

Приклад 7. Обчислити площу трикутника з вершинами в точках: $A(-1; 0; 2)$, $B(1; -2; 5)$, $C(3; 0; -4)$.

Приклад 8. Знайти об'єм піраміди з вершинами в точках: $A(2; -1; 1)$, $B(5; 5; 4)$, $C(3; 2; -1)$ і $D(4; 1; 3)$.

Приклад 9. Довести, що точки $A(1; 2; 3)$, $B(0; 5; 5)$, $C(3; -1; -1)$ та $D(-2; 14; 9)$ лежать в одній площині.

Відповіді

1. 20. 2. $\sqrt{129}$. 3. -61. 4. $\varphi = \frac{\pi}{2}$. 5. $-\frac{1}{3}$. 6. $\alpha = -3$.
7. 14 кв.од. 8. 3 куб.од.

Тести

1. Знайти координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(2; -1; 3)$, $B(1; 1; 1)$.

- а) $(-1; 2; -2)$;
б) $(1; 2; -2)$;
в) $(-1; -2; -2)$;
г) $(1; 2; 2)$;
д) $(2; -1; 1)$.

2. Знайти довжину вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(2; -1; 3)$, $B(1; 1; 1)$.

- а) $\sqrt{3}$; б) 5; в) $\sqrt{5}$; г) 3; д) 4.

3. За якою формулою обчислюється скалярний добуток векторів $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ та $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$?

- а) $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$;
б) $a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z$;
в) $(a_x b_x; a_y b_y; a_z b_z)$;

$$з) \sqrt{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z} ;$$

д) жодна з наведених.

4. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a} = (2; -1; 3)$

та $\vec{b} = (4; 0; -2)$.

а) 1; б) 5; в) 2; з) (8; 0; -6); д) 4.

5. Необхідною і достатньою умовою перпендикулярності двох векторів є:

$$а) \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} ;$$

$$б) \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 ;$$

$$в) [\vec{a}, \vec{b}] = 0 ;$$

$$з) |\vec{a}| = 0 ;$$

$$д) \vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0 .$$

6. Умовою колінеарності двох векторів є:

$$а) \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} ;$$

$$б) \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 ;$$

$$в) [\vec{a}, \vec{b}] = 0 ;$$

$$з) |\vec{a}| = 0 ;$$

$$д) \vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0 .$$

7. Скалярний добуток двох векторів це:

а) вектор;

б) матриця;

в) число;

з) визначник;

д) жодне з наведеного.

8. Векторний добуток двох векторів це:

- а) вектор;
- б) матриця;
- в) число;
- г) визначник;
- д) жодне з наведеного.

9. Мішаний добуток трьох векторів це:

- а) вектор;
- б) матриця;
- в) число;
- г) визначник;
- д) жодне з наведеного.

10. Вибрати формулу для обчислення векторного добутку векторів, якщо $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$, $\vec{c} = (c_x; c_y; c_z)$.

- а) $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$;
- б) $(a_x b_x, a_y b_y, a_z b_z)$;
- в) $(a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$;

г) $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$.

11. Вибрати формулу для обчислення мішаного добутку векторів, якщо $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$, $\vec{c} = (c_x; c_y; c_z)$.

- а) $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$;

$$\text{б)} (a_x b_x, a_y b_y, a_z b_z);$$

$$\text{в)} (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z);$$

$$\text{г)} \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix};$$

$$\text{д)} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

12. Якщо мішаний добуток трьох ненульових векторів дорівнює нулю, то вектори:

а) перпендикулярні;

б) колінеарні;

в) лінійно незалежні;

г) компланарні;

д) жодне з наведеного.

13. Знайти проекцію вектора $\vec{a} = (-1; 2; -2)$ на вектор $\vec{b} = (2; 0; 2)$.

а) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; б) $-\frac{3}{\sqrt{2}}$; в) $\frac{3}{\sqrt{2}}$; г) 3; д) 0.

14. Знайти косинус кута між векторами $\vec{a} = (-1; 2; -2)$ і $\vec{b} = (-2; 1; 2)$.

а) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; б) $-\frac{3}{\sqrt{2}}$; в) $\frac{3}{\sqrt{2}}$; г) 3; д) 0.

15. Знайти векторний добуток векторів: $\vec{a} = (2; -2; 1)$, $\vec{b} = (-1; 3; 1)$.

а) -7 ; б) $(-5; -3; 4)$; в) $(-5; 3; 4)$; г) $(-5; -3; -4)$; д) 0.

16. Знайти змішаний добуток векторів: $\vec{a} = (3; -5; 0)$,
 $\vec{b} = (0; 2; 3)$, $\vec{c} = (1; 4; 0)$.

а) -51; б) 51; в) $(5; -1; 1)$; г) $(-5; 3; 4)$; д) 50.

17. Обчислити площу трикутника ABC , у вершинах якого лежать точки $A(2; 2; 2)$, $B(4; 0; 3)$, $C(0; 1; 0)$.

а) $\frac{\sqrt{65}}{2}$; б) 33; в) 12; г) 18; д) 50.

18. Вершини трикутної піраміди $ABCD$ знаходяться в точках $A(1; 1; 1)$, $B(4; 4; 4)$, $C(3; 5; 5)$, $D(2; 4; 7)$. Знайти об'єм піраміди.

а) 16; б) 6; в) -3; г) 3; д) 18.

Відповіді

1. а). 2. г). 3. а). 4. в). 5. б). 6. а). 7. в). 8. а). 9. в). 10. д).
11. г). 12. г). 13. б). 14. д). 15. б). 16. а). 17. а). 18. д).

1.4. Елементи аналітичної геометрії

1.4.1. Найпростіші задачі аналітичної геометрії.
Пряма лінія на площині. Різні види рівнянь прямої лінії. Кут між двома прямими. Відстань від точки до прямої

Відстань між двома точками. Нехай в прямокутній декартовій системі координат задано дві точки $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$, тоді відстань d між ними знаходиться як довжина вектора $\overline{AB}$:

$$d = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (1.40)$$

Поділ відрізка у заданому відношенні. Нехай $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$ – дві точки, які є кінцями

відрізка AB . Координати точки $C(x_c; y_c; z_c)$, яка ділить цей відрізок у відношенні $\lambda = \frac{AC}{CB}$ знаходяться за формулами:

$$x_c = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y_c = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad z_c = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \quad (1.41)$$

Якщо точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ ділить відрізок AB навпіл ($\lambda = 1$), то

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad (1.42)$$

Найпростішою лінією на площині є *пряма лінія*.

Основні види рівнянь прямої лінії на площині в прямокутній системі координат Oxy :

1. Рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (A; B)$ (вектор $\vec{n} \neq \vec{0}$ називається *нормальним вектором*) задається у вигляді:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (1.43)$$

2. Будь-яке рівняння першого степеня відносно x і y , тобто

$$Ax + By + C = 0, \quad (1.44)$$

де A, B, C – сталі коефіцієнти і $A^2 + B^2 \neq 0$ визначає на площині пряму лінію. Це рівняння називається *загальним рівнянням прямої*.

3. Рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$ паралельно до вектора $\vec{s} = (l; m)$ (вектор $\vec{s} \neq \vec{0}$ *напрямний вектор*) задається у вигляді:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}. \quad (1.45)$$

Це рівняння називається *канонічним рівнянням прямої*.

4. *Параметричні рівняння прямої* можна отримати з канонічного, якщо покласти $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = t$, де t – параметр, $t \in R$. Тоді

$$\begin{cases} x = x_0 + tl, \\ y = y_0 + tm. \end{cases} \quad (1.46)$$

5. *Пряма лінія, яка проходить через дві точки* $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$ задається рівнянням:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \quad (1.47)$$

6. *Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом* має вигляд

$$y = kx + b, \quad (1.48)$$

де $k = \operatorname{tg} \alpha$, α – кут нахилу прямої з додатнім напрямом осі Ox .

7. *Рівняння прямої, що проходить через задану точку* $M_0(x_0; y_0)$ та має кутовий коефіцієнт k має вигляд:

$$y - y_0 = k(x - x_0). \quad (1.49)$$

8. *Рівняння прямої у відрізках* задається рівнянням:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad (1.50)$$

де a та b – відповідно абсциса й ордината точок перетину прямої з осями координат.

Кут між двома прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих.

Кутом між прямими l_1 і l_2 називається кут, на який потрібно повернути першу пряму l_1 навколо точки перетину цих прямих проти руху годинникової стрілки до співпадіння її з другою прямою l_2 .

1. Нехай прямі задано загальними рівняннями:

$$\begin{aligned} l_1 : A_1x + B_1y + C_1 &= 0, \quad \vec{n}_1 = (A_1; B_1), \\ l_2 : A_2x + B_2y + C_2 &= 0, \quad \vec{n}_2 = (A_2; B_2). \end{aligned} \quad (1.51)$$

Кут φ між прямими дорівнює куту між їх нормальними векторами і обчислюється за формулою

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \quad (1.52)$$

Якщо прямі паралельні, то їх нормальні вектори колінеарні, а отже відповідні координати – пропорційні. Звідси маємо умову паралельності двох прямих:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}. \quad (1.53)$$

Якщо прямі перпендикулярні, то їх нормальні вектори також перпендикулярні, тобто скалярний добуток дорівнює нулеві. Звідси, отримуємо умову перпендикулярності прямих:

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0. \quad (1.54)$$

2. Нехай прямі задано рівняннями з кутовими коефіцієнтами:

$$\begin{aligned} l_1 : y &= k_1x + b_1, \quad k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1, \\ l_2 : y &= k_2x + b_2, \quad k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Гострий кут між двома прямими визначається за формулою:

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|. \quad (1.56)$$

Умовою паралельності двох прямих є рівність їхніх кутових коефіцієнтів:

$$k_1 = k_2. \quad (1.57)$$

Умова перпендикулярності двох прямих:

$$k_1 \cdot k_2 = -1. \quad (1.58)$$

Відстань від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ визначається за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (1.59)$$

Зауважимо, що відстань від точки до прямої – це довжина перпендикуляра d , опущеного з даної точки на пряму лінію.

Приклад 1. Дано координати вершин трикутника $A(0;1)$, $B(2;11)$, $C(10;7)$. Методами аналітичної геометрії знайти:

а) загальні рівняння прямих AB і AC , нормальні вектори та кутові коефіцієнти цих прямих;

б) рівняння прямої AB у відрізках;

в) загальне рівняння прямої AK , яка містить медіану трикутника ABC ;

г) загальне рівняння висоти CE та її довжину;

д) внутрішній кут φ при вершині A трикутника ABC ;

е) рівняння прямої, що проходить через точку B :

1) паралельно до прямої AC ;

2) перпендикулярно до прямої AC ;

є) координати центра ваги трикутника.

Виконати рисунок.

Розв'язання

а) Підставивши в рівняння прямої, що проходить через дві дані точки координати точок A і B , отримаємо рівняння прямої AB :

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}, \quad \frac{x-0}{2-0} = \frac{y-1}{11-1}, \quad \frac{x}{2} = \frac{y-1}{10}, \quad 10x = 2(y-1),$$

$5x - y + 1 = 0$, – загальне рівняння прямої AB , $\vec{n}_1 = (5; -1)$ – нормальний вектор прямої. Розв'яжемо рівняння прямої

AB відносно змінної y : $y=5x+1$ – рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, де $k_{AB}=5$.

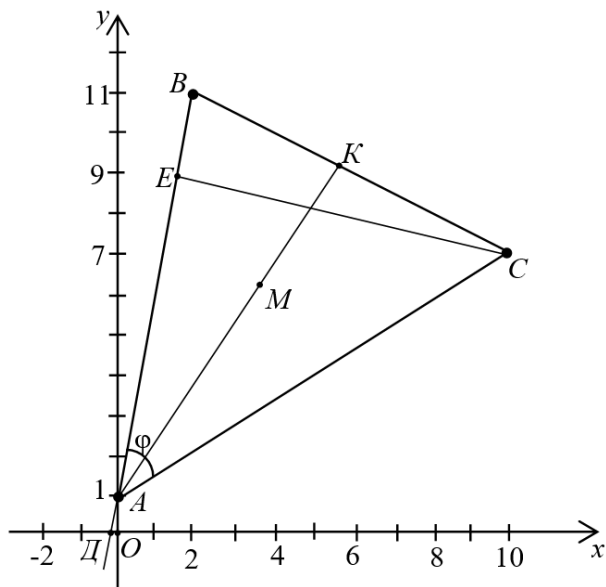


Рис. 1.10

Аналогічно знаходимо загальне рівняння прямої AC .

$$\frac{x-x_A}{x_C-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A}, \quad \frac{x-0}{10-0} = \frac{y-1}{7-1}, \quad \frac{x}{10} = \frac{y-1}{6}, \quad 6x = 10(y-1),$$

$3x - 5y + 5 = 0$, – загальне рівняння, $\overline{n}_2 = (3; -5)$ – нормальний вектор прямої.

$y = \frac{3}{5}x + 1$ – рівняння прямої AC з кутовим коефіцієнтом,

де $k_{AC} = \frac{3}{5}$.

б) Зведемо загальне рівняння прямої AB до рівняння у відрізках. Для цього перенесемо вільний член заданого рівняння в праву частину рівності і поділимо на нього обидві частини рівняння.

Отримаємо: $5x - y = -1$, $\frac{x}{-\frac{1}{5}} + \frac{y}{1} = 1$.

З цього рівняння видно, що пряма відтинає на осях координат відрізки $a = -\frac{1}{5}$ і $b = 1$, тобто, проходить через точки $D(-\frac{1}{5}; 0)$ та $A(0; 1)$.

в) Знайдемо спочатку координати точки K , як середини відрізка BC .

$$x_K = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{2 + 10}{2} = 6, \quad y_K = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{11 + 7}{2} = 9, \quad \text{тобто, } K(6; 9).$$

Знайдемо рівняння медіани AK як рівняння прямої, що проходить через точки A і K :

$$\frac{x - x_A}{x_K - x_A} = \frac{y - y_A}{y_K - y_A}, \quad \frac{x - 0}{6 - 0} = \frac{y - 1}{9 - 1}, \quad 4x - 3y + 3 = 0.$$

г) Оскільки нормальний вектор $\vec{n}_1 = (5; -1)$ прямої AB буде напрямним до прямої CE , то, скориставшись канонічним рівнянням прямої, знайдемо рівняння висоти :

$$\frac{x - x_C}{5} = \frac{y - y_C}{-1}, \quad \frac{x - 10}{5} = \frac{y - 7}{-1}, \quad -(x - 10) = 5(y - 7).$$

Звідки $x + 5y - 45 = 0$ – шукане рівняння.

Довжину цієї висоти знайдемо як відстань від точки C до прямої AB : $|CE| = \frac{|5 \cdot 10 - 7 + 1|}{\sqrt{5^2 + (-1)^2}} = \frac{44}{\sqrt{26}} \approx 8,63$ (лін. од.)

д) Внутрішній кут φ при вершині A заданого трикутника, знайдемо як кут між прямими AB і AC .

Оскільки $\vec{n}_1 = (5; -1)$, $\vec{n}_2 = (3; -5)$ – нормальні вектори

$$\begin{aligned} \text{цих прямих, то } \cos \varphi &= \cos(\overline{n_1}, \wedge \overline{n_2}) = \frac{\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}}{|\overline{n_1}| \cdot |\overline{n_2}|} = \\ &= \frac{5 \cdot 3 + (-1) \cdot (-5)}{\sqrt{5^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-5)^2}} = \frac{20}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{34}} \approx 0,673. \end{aligned}$$

Тоді $\varphi \approx \arccos 0,673 \approx 47^\circ$.

е) 1. Запишемо рівняння в'язки прямих, що проходять через точку $B(2;11)$: $y-11=k(x-2)$. Оскільки шукана пряма паралельна до прямої AC ($k_{AC} = \frac{3}{5}$ знайдено вище), то їх кутові коефіцієнти пов'язані співвідношенням $k = k_{AC} = \frac{3}{5}$. Тоді рівняння прямої, що проходить через точку B і паралельна до прямої AC запишеться:

$$y-11 = \frac{3}{5}(x-2) \text{ або } 3x-5y+49=0.$$

2. Аналогічно до випадку 1 маємо $y-11=k(x-2)$ – рівняння в'язки прямих, що проходять через точку B . Кутовий коефіцієнт шуканої прямої знайдемо з умови її перпендикулярності до прямої AC , тобто, $k \cdot k_{AC} = -1$, $k = -\frac{1}{k_{AC}} = -\frac{5}{3}$. Тоді $y-11 = \frac{3}{5}(x-2)$ або $5x+3y-47=0$ – рівняння прямої, що проходить через задану точку B перпендикулярно до прямої AC .

є) *I спосіб*. Координати точки M – центра ваги трикутника ABC (рис. 1.10), знайдемо за формулами:

$$x_M = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{0+2+10}{3} = 4,$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{1+11+7}{3} = \frac{19}{3} = 6\frac{1}{3}.$$

Шукана точка $M(4; 6\frac{1}{3})$.

II спосіб. Координати центра ваги трикутника співпадають з точкою перетину його медіан. Оскільки медіани в точці перетину діляться у відношенні 2:1 $\left(\lambda = \frac{|AM|}{|AK|} = 2 \right)$, то координати точки M – центра ваги

трикутника, знайдемо за формулами:

$$x_M = \frac{x_A + \lambda \cdot x_k}{1 + \lambda} = \frac{0 + 2 \cdot 6}{1 + 2} = 4,$$

$$y_M = \frac{y_A + \lambda y_k}{1 + \lambda} = \frac{1 + 2 \cdot 9}{1 + 2} = \frac{19}{3} = 6\frac{1}{3}.$$

Отже, $M(4; 6\frac{1}{3})$.

Приклад 2. Дано трикутник з вершинами в точках $A(-2;-2)$, $B(4;6)$, $C(1;2)$. Знайти довжину бісектриси внутрішнього кута при вершині B і медіани проведених з цієї вершини до сторони AC .

Розв'язання

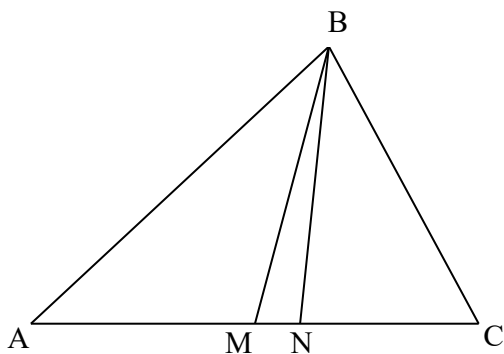


Рис. 1.11

Нехай M і N – відповідно середина сторони AC і точка перетину даної бісектриси з цією стороною (рис.1.11). Знаходимо координати точки M . Згідно з формулами поділу відрізка AC навпіл, маємо:

$$x_M = \frac{x_A + x_c}{2} = \frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2}; \quad y_M = \frac{y_A + y_c}{2} = \frac{-2+2}{2} = 0.$$

Точка $M\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$. Тому $MB = \sqrt{\left(4 + \frac{1}{2}\right)^2 + 6^2} = \frac{15}{2}$.

Координати точки N знайдемо, використовуючи формули поділу відрізка AC в заданому відношенні λ , де

$$\lambda = \frac{AM}{MC} = \frac{AB}{BC}, \quad AB = \sqrt{(4+2)^2 + (6+2)^2} = 10,$$

$$BC = \sqrt{(1-4)^2 + (2-6)^2} = 5. \text{ Отже, } \lambda = \frac{10}{5} = 2,$$

$$x_N = \frac{x_A + \lambda x_c}{1 + \lambda} = \frac{-2 + 2 \cdot 1}{3} = -\frac{1}{2} = 0;$$

$$y_N = \frac{y_A + \lambda y_c}{1 + \lambda} = \frac{-2 + 2 \cdot 2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Точка $N\left(0; \frac{2}{3}\right)$. Тому $NB = \sqrt{(4-0)^2 + \left(6 - \frac{2}{3}\right)^2} =$

$$= \sqrt{16 + \frac{16^2}{9}} = 4 \cdot \frac{5}{3} = \frac{20}{3}, \text{ звідки } x - 7y - 13 = 0.$$

Приклад 3. Знайти координати точки B симетричної до точки $A(6;7)$ відносно прямої лінії $2x + 3y - 7 = 0$.

Розв'язання. Точка B лежить на перпендикулярі до даної прямої, проведеному з точки A . Тому напишемо рівняння прямої AB , що проходить через точку $A(6;7)$ з напрямним вектором $\vec{S} = \vec{N}(2;3)$, де $\vec{N}$ – нормальний вектор даної прямої (рис.1.12):

$$\frac{x-6}{2} = \frac{y-7}{3}; \quad 3x-2y-4=0.$$

Знаходимо точку C перетину даної прямої зі знайденим перпендикуляром. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x+3y-7=0; \\ 3x-2y-4=0. \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+3y-7=0 \times 2 \\ 3x-2y-4=0 \times 3 \end{cases}; \quad 13x-26=0,$$

$$\begin{cases} x=2, \\ y=1. \end{cases} \quad C(2;1).$$

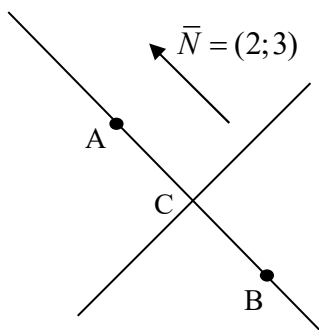


Рис. 1.12

Оскільки точка C є серединою відрізка AB , то маємо:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad \text{або:}$$

$$2 = \frac{6 + x_B}{2}, \quad x_B = -2; \quad 1 = \frac{7 + y_B}{2}, \quad y_B = -5.$$

Остаточно $B(-2; -5)$.

Приклад 4. Знайти гострий кут між двома прямими $x + y - 4 = 0$ і $6x - 2y + 3 = 0$.

Розв'язання. Знаходимо кутові коефіцієнти даних прямих:

$$x + y - 4 = 0, \quad y = -x + 4, \quad k_1 = -1;$$

$$6x - 2y + 3 = 0, \quad y = 3x + \frac{3}{2}, \quad k_2 = 3.$$

Шуканий кут φ визначаємо за формулою:

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right| = \left| \frac{3 + 1}{1 - 3} \right| = |-2| = 2; \quad \varphi = \arctg 2 = 63^\circ 30'.$$

Приклад 5. При якому значенні параметра λ пряма $\lambda x - 2y + 9 = 0$ буде паралельною до прямої $y = 4 - 3x$?

Розв'язання. Першу пряму задано загальним рівнянням, а другу – рівнянням з кутовим коефіцієнтом. Зведемо друге рівняння прямої до загального виду: $3x + y - 4 = 0$.

Тоді перша пряма має нормальний вектор $\vec{n}_1 = (\lambda; -2)$, а друга – $\vec{n}_2 = (3; 1)$. Якщо прямі паралельні, то їх нормальні вектори колінеарні ($\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$), тобто їх відповідні координати пропорційні. Отже отримаємо співвідношення $\frac{\lambda}{3} = \frac{-2}{1}$. Тоді $\lambda = \frac{3 \cdot (-2)}{1} = -6$.

Приклад 6. Обчислити відстань між паралельними прямими $5x - 12y + 26 = 0$ та $5x - 12y - 13 = 0$.

Розв'язання. Візьмемо на першій прямій довільну точку, наприклад $x = 2$, тоді $5 \cdot 2 - 12y + 26 = 0$. Звідки $12y = 36$, $\Rightarrow y = 3$. Отже, точка $M_0(2; 3)$ належить першій прямій. Знайдемо відстань між паралельними прямими, як відстань від точки M_0 до другої прямої за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|5 \cdot 2 - 12 \cdot 3 - 13|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{39}{13} = 3.$$

Приклад 7. Обчислити площу трикутника, обмеженого прямою $3x + 4y - 12 = 0$ і осями координат.

Розв'язання. Запишемо рівняння заданої прямої у відрізках $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Тоді $3x + 4y = 12 \Rightarrow \frac{3x}{12} + \frac{4y}{12} = \frac{12}{12} \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$.

Отже, маємо $a = 4$, $b = 3$, а площу трикутника обчислимо за формулою: $S_{\Delta} = \frac{|a| \cdot |b|}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ (кв. од.).

Приклад 8. Скласти канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку перетину прямих $2x + y - 1 = 0$ і $4x - 3y - 17 = 0$ паралельно вектору $\vec{a} = (3; -4)$.

Розв'язання. Знайдемо точку перетину прямих із системи рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0, \\ 4x - 3y - 17 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 1, \\ 4x - 3y = 17. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 3y = 3, \\ 4x - 3y = 17. \end{cases}$$

Для цього використаємо метод виключення змінних, додавши два рівняння системи, отримаємо:

$$\begin{cases} 10x = 20, \\ y = 1 - 2x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 1 - 2 \cdot 2 = -3. \end{cases}$$

Отже $M_0(2; -3)$ – точка перетину прямих.

Тоді шукане канонічне рівняння прямої $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$

запишеться у вигляді: $\frac{x - 2}{3} = \frac{y + 3}{-4}$.

Запитання для самоконтролю

1. Як знайти відстань між двома точками?
2. Наведіть формули поділу відрізка у заданому відношенні. Як знайти координати середини відрізка?

3. Наведіть рівняння прямої, що проходить через задану точку та має нормальний вектор.
4. Наведіть загальне рівняння прямої. Який геометричний зміст коефіцієнтів при невідомих?
5. Наведіть канонічне та параметричні рівняння прямих.
6. Наведіть рівняння прямої, що проходить через задану точку та має кутовий коефіцієнт.
7. Наведіть рівняння прямої у відрізках.
8. Як обчислити відстань від точки до прямої?
9. Як знайти кут між двома прямими?
10. Яка умова паралельності двох прямих?
11. Яка умова перпендикулярності двох прямих?

Завдання для самостійного розв'язування

Приклад 1. Задано дві суміжні вершини паралелограма $A(-3;5)$, $B(1;7)$ і точка перетину діагоналей $M(1;1)$. Знайти дві інші вершини.

Приклад 2. Задано вершини трикутника $A(1;4)$, $B(3;-9)$, $C(-5;2)$. Знайти довжину медіани проведеної з вершини B .

Приклад 3. Задано вершини трикутника $A(2;-5)$, $B(1;-2)$, $C(4;7)$. Знайти точку перетину зі стороною AC бісектриси, проведеної з внутрішнього кута B .

Приклад 4. Задано рівняння двох суміжних сторін прямокутника $2x - 3y + 5 = 0$, $3x + 2y - 7 = 0$ і одна з його вершин $A(2;-3)$. Знайти рівняння прямих, що містять дві інші сторони прямокутника.

Приклад 5. Знайти проекцію точки $P(-6;4)$ на пряму $4x - 5y + 3 = 0$.

Приклад 6. Написати рівняння сторін трикутника, якщо відома одна вершина $B(-4;-5)$ та рівняння двох висот

$$5x + 3y - 4 = 0 \text{ і } 3x + 8y + 13 = 0.$$

Приклад 7. Написати рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих $3x - y = 0$ і $x + 4y - 2 = 0$ перпендикулярно до прямої $2x + 7y = 0$.

Відповіді

1. $C(5; -3), D(1; -5)$. 2. 13. 3. $D\left(\frac{5}{2}; -2\right)$.
4. $2x - 3y - 13 = 0, 3x + 2y = 0$. 5. $Q(-2; -1)$.
6. $3x - 5y - 13 = 0, 8x - 3y + 17 = 0, 5x + 2y - 1 = 0$.
7. $91x - 26y - 2 = 0$.

1.4.2. Лінії другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола

Загальне рівняння лінії другого порядку має вигляд:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

де A, B, C, D, E, F – дійсні числа, причому хоча б одне з чисел A, B, C не дорівнює нулю.

Коло. Колом називається множина точок площини, віддалі яких від фіксованої точки, яка називається центром кола, є величина стала та називається радіусом.

Рівняння кола з центром в точці $M_0(x_0; y_0)$ і радіусом R в прямокутній системі координат має вигляд (рис. 1.13):

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad (1.60)$$

Зокрема, якщо центр кола співпадає з початком координат ($M_0(0; 0)$), то одержуємо канонічне рівняння кола:

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (1.61)$$

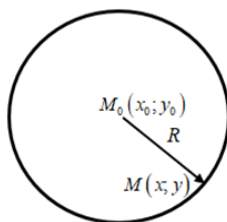


Рис. 1.13

Еліпс. Еліпсом називається множина точок площини, сума відстаней яких до двох заданих точок, які називаються фокусами, є величина стала (її позначають $2a$), за умови, що ця стала більша за відстань між фокусами (яку позначають $2c$).

Якщо систему координат вибрати так, щоб фокуси еліпса лежали на осі Ox симетрично відносно початку координат (рис. 1.14), то маємо *канонічне рівняння еліпса*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (1.62)$$

де $b^2 = a^2 - c^2$, $a > b$. Точки $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$, $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$ – вершини еліпса; $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$ – фокуси еліпса.

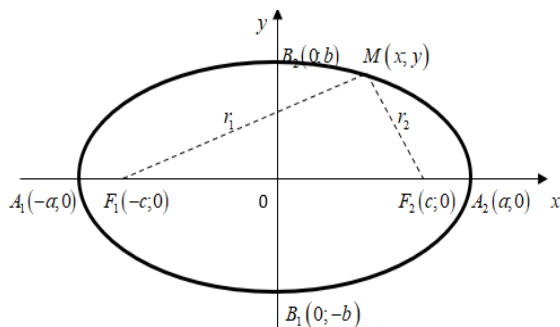


Рис. 1.14

Відрізок A_1A_2 називається *великою віссю еліпса*, довжина якої дорівнює $2a$, відрізок B_1B_2 – *малою віссю*, довжиною $2b$. Відповідно a – *велика піввісь*, b – *мала піввісь* еліпса.

Величина $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$ називається *ексцентриситетом еліпса*. Ексцентриситет характеризує форму еліпса (міру його стиску). Для еліпса $0 < \varepsilon < 1$. Чим сильніше стиснено еліпс, тим більший його ексцентриситет. При малих значеннях ексцентриситету еліпс дуже мало відрізняється від кола. При $\varepsilon = 0$ еліпс перетворюється в коло.

Еліпс, центр якого знаходиться в точці $M_0(x_0; y_0)$, а осі симетрії паралельні осям координат, описується рівнянням:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (1.63)$$

Гіпербола. Гіперболою називається множина точок площини, абсолютна величина різниці відстаней яких до двох заданих точок, які називаються фокусами, є величина стала (її позначають $2a$), за умови, що ця стала менша за відстань між фокусами (її позначають $2c$).

Якщо систему координат вибрати так, щоб фокуси гіперболи лежали на осі Ox симетрично відносно початку координат (рис. 1.15), то одержимо *канонічне рівняння гіперболи*:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (1.64)$$

де $b^2 = c^2 - a^2$, a – дійсна піввісь, b – уявна піввісь. Точки $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$ – вершини гіперболи, а $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$ – фокуси гіперболи.

Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$.

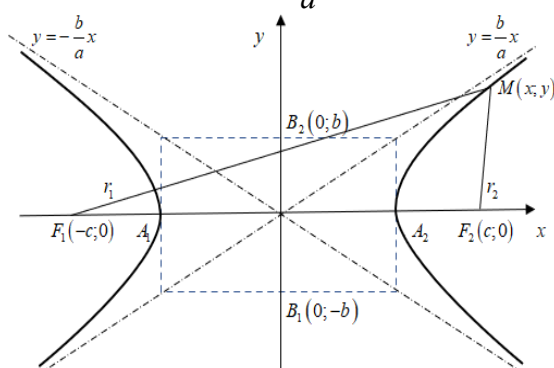


Рис. 1.15

Прямі $y = \pm \frac{b}{a}x$ називається *асимптотами гіперболи*.

Рівняння виду

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (1.65)$$

є рівнянням гіперболи, центр якої розміщено в точці $M_0(x_0; y_0)$, а осі симетрії гіперболи паралельні осям координат.

Парабола. Параболою називається множина точок площини рівновіддалених від даної точки, яка називається фокусом і даної прямої, яка називається директрисою.

Якщо директрисою параболи є пряма $x = -\frac{p}{2}$, яка перпендикулярна до осі Ox , а фокус розміщено в точці $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ (рис. 1.16), де параметр параболи (відстань від

фокуса до директриси) $p > 0$, то маємо таке *канонічне рівняння параболі*:

$$y^2 = 2px. \quad (1.66)$$

Вісь симетрії параболі називається *віссю параболі*. Точка перетину параболі з віссю симетрії називається *вершиною параболі*.

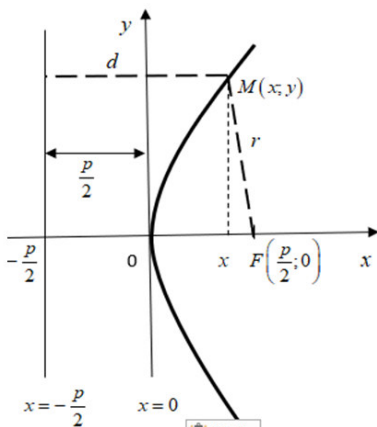


Рис. 1.16

Якщо директрисою параболі є пряма $x = \frac{p}{2}$, яка перпендикулярна до осі Ox , а фокус розміщено в точці $F\left(-\frac{p}{2}; 0\right)$ (рис. 1.17), де $p > 0$, то маємо *канонічне рівняння параболі*:

$$y^2 = -2px. \quad (1.67)$$

У випадку, якщо директрисою параболі є прямі $y = -\frac{p}{2}$ або $y = \frac{p}{2}$, де $p > 0$, (рис. 1.18, 1.19) то маємо ще два канонічних рівняння параболі відповідно:

$$x^2 = 2py \text{ та } x^2 = -2py. \quad (1.68)$$

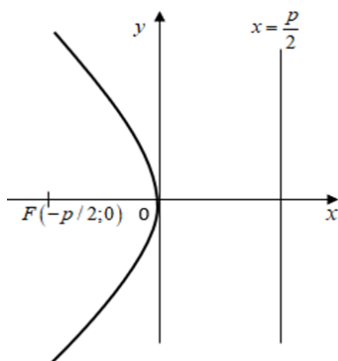


Рис. 1.17

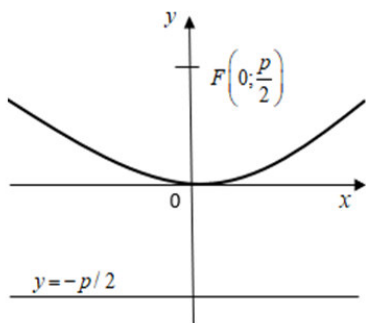


Рис. 1.18

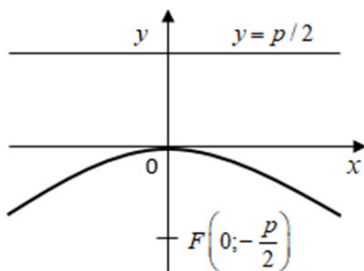


Рис. 1.19

Якщо вершина параболи розміщена в точці $M_0(x_0; y_0)$, а осі симетрії паралельні осі Ox (осі Oy), то рівняння парабол мають відповідно вигляд:

$$(y - y_0)^2 = \pm 2p(x - x_0), \quad (x - x_0)^2 = \pm 2p(y - y_0). \quad (1.69)$$

Приклад 9. Скласти рівняння кола, якщо точки $A(2; -1)$ і $B(4; 5)$ є кінцями одного з його діаметрів.

Розв'язання. Знаходимо центр і радіус кола. Центром кола є середина діаметра AB , тому маємо:

$$x_0 = \frac{2+4}{2} = 3; \quad y_0 = \frac{-1+5}{2} = 2; \quad O_1(3; 2).$$

$$\text{Радіус кола } R = AO_1, \quad AO_1 = \sqrt{(2-3)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{10}.$$

Використаємо рівняння $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$,
отримаємо: $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 10$ або
 $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$.

Приклад 10. Скласти рівняння кола, якщо воно проходить через точки $M_1(2; 3)$ і $M_2(4; 1)$, а центр лежить на прямій $x + y + 3 = 0$.

Розв'язання. Центр кола лежить на перетині серединного перпендикуляра до хорди M_1M_2 і даної прямої (рис. 1.20). Для знаходження рівняння серединного перпендикуляра використаємо точку $P(3; 2)$ – середину хорди M_1M_2 , вектор $\vec{N} = \overrightarrow{M_1M_2} = (2; -2)$ – нормальний вектор для цього перпендикуляра та рівняння прямої $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

Тому маємо:

$$2(x - 3) - 2(y - 2) = 0, \quad x - y - 1 = 0.$$

Центр кола O_1 знайдемо, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y + 3 = 0; \\ x - y - 1 = 0. \end{cases} \quad 2x + 2 = 0, \quad x = -1, \quad y = -2; \quad O_1(-1; -2).$$

$$\text{Радіус кола } R = O_1M_1 = \sqrt{(2+1)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{34}.$$

Використавши рівняння $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$,
одержимо рівняння кола: $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 34$, або
 $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 29 = 0$.

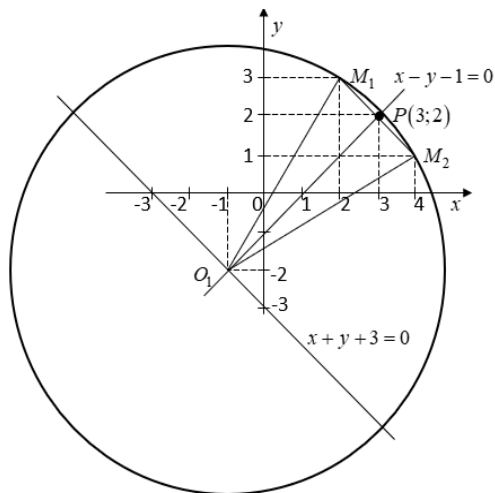


Рис. 1.20

Приклад 11. Знайти координати центра і радіус кола:
 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$.

Розв'язання. Групуємо доданки, що містять x та y і доповнюємо їх до повного квадрату, отримаємо:

$$(x^2 - 4x + 4) - 4 + (y^2 + 6y + 9) - 9 - 3 = 0, \text{ або}$$

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$, звідки $(2; -3)$ – центр кола, $R=4$ – радіус кола.

Приклад 12. Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі Ox , якщо велика вісь $2a = 20$, а відстань між фокусами $2c = 16$.

Розв'язання. Канонічне рівняння еліпса: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

За умовою задачі $2a = 20$, $a = 10$; $2c = 16$, $c = 8$. Оскільки $b^2 = a^2 - c^2$, то $b = \sqrt{100 - 64} = 6$.

Шукане рівняння еліпса має вигляд: $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$.

Приклад 13. Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі Ox , якщо відстань між фокусами $2c = 16$, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{2}{3}$.

Розв'язання. За умовою задачі маємо: $2c = 16$, $c = 8$.

Оскільки $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$, то $\frac{8}{a} = \frac{2}{3}$, звідси $a = 12$.

Тому $b^2 = a^2 - c^2 = 144 - 64 = 80$. Тоді $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{80} = 1$ буде шуканим рівнянням еліпса.

Приклад 14. Скласти канонічне рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі Ox , якщо рівняння асимптот гіперболи $y = \pm \frac{3}{4}x$, а відстань між фокусами $2c = 30$.

Розв'язання. Канонічне рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Рівняння асимптот гіперболи $y = \pm \frac{3}{4}x$.

Відповідно до умови задачі, маємо: $\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$, $b = \frac{3}{4}a$,

$2c = 30$, $c = 15$. Оскільки $b^2 = c^2 - a^2$, то $a^2 + b^2 = c^2$,

$a^2 + \frac{9}{16}a^2 = 225$, $\frac{25}{16}a^2 = 225$, $a^2 = 144$, $a = 12$,

$b = \frac{3}{4}a = \frac{3}{4} \cdot 12 = 9$.

Отже, шукане рівняння гіперболи має вигляд

$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{81} = 1$.

Приклад 15. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, якщо вона симетрична відносно осі Ox і проходить через точку $A(-2;4)$.

Розв’язання. Рівняння шуканої параболи – канонічне і має вигляд $y^2 = -2px$ (знак “–”, тому, що точка A знаходиться в другій чверті). Параметр p знаходиться з умови, що точка A лежить на параболі і її координати задовольняють рівняння параболи. Підставивши координати точки A у рівняння $y^2 = -2px$, маємо: $4^2 = -2p(-2)$, $16 = 4p$, $p = 4$.

Шукане рівняння параболи має вигляд $y^2 = -8x$.

Приклад 16. Спростити рівняння лінії другого порядку $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0$.

Розв’язання. Виділимо повні квадрати відносно змінних x та y , одержимо: $9(x^2 - 2x) - 4(y^2 + 4y) - 43 = 0$,

$$9(x^2 - 2x + 1 - 1) - 4(y^2 + 4y + 4 - 4) - 43 = 0,$$

$$9(x^2 - 1)^2 - 9 - 4(y^2 + 2)^2 + 16 - 43 = 0,$$

$$9(x^2 - 1)^2 - 4(y^2 + 2)^2 = 36, \quad \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1 \quad - \quad \text{це}$$

рівняння гіперболи з центром в точці $C(1;-2)$ та півосями: $a = 2$, $b = 3$.

Приклад 17. Скласти рівняння прямої, яка проходить через лівий фокус еліпса $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{11} = 1$ паралельно до прямої $5x + 4y - 2 = 0$.

Розв’язання. З рівняння еліпса, маємо: $a^2 = 20$, $b^2 = 11$. Лівий фокус еліпса – $F_1(-c;0)$, $c^2 = a^2 - b^2 = 20 - 11 = 9$, $c = 3$, тому $F_1(-3;0)$. Нормальний

вектор даної прямої $\vec{n} = (5; 4)$ є також нормальним вектором до шуканої прямої, тому її рівняння запишеться: $5(x+3) + 4(y-0)$, або $5x + 4y + 15 = 0$.

Приклад 18. Скласти рівняння кола з центром у фокусі параболи $x^2 = 20y$ і яке дотикається до прямої $3x - 4y = 0$.

Розв'язання. Для параболи, заданої канонічним рівнянням $x^2 = 2py$, її фокусом є точка $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$. Згідно даного рівняння параболи, маємо $2p = 20$, $p = 10$ і $F(0; 5)$ – фокус цієї параболи який, згідно умови, є центром кола. Оскільки дана пряма дотикається до кола, то його радіус R дорівнює віддалі від точки F до цієї прямої.

$$\text{Тому, маємо: } R = \left| \frac{3 \cdot 0 - 4 \cdot 5}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right| = \frac{|-20|}{5} = 4.$$

Шукане рівняння має вигляд:

$$x^2 + (y-5)^2 = 16 \text{ або } x^2 + y^2 - 10y + 9 = 0.$$

Приклад 19. Знайти координати вершини і значення параметра p параболи, заданої рівнянням $2y^2 - 12y - x + 14 = 0$.

Розв'язання. Згрупуємо доданки зі змінною y і виділимо повний квадрат.

$$\text{Маємо: } 2(y^2 - 6y) - x + 14 = 0, \quad 2((y-3)^2 - 9) - x + 14 = 0,$$

$$\text{або } 2(y-3)^2 = x + 4, \quad (y-3)^2 = \frac{1}{2}(x+4).$$

Координати вершини параболи знаходяться в точці $A(-4; 3)$. Параметр p знаходимо з умови: $2p = \frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{4}$. Вісь симетрії параболи паралельна до осі Ox .

Запитання для самоконтролю

1. Дайте означення кола. Яке його рівняння з центром в точці $M_0(x_0; y_0)$ і радіуса R ? Наведіть рівняння кола з центром у початку координат.

2. Дайте означення еліпса. Наведіть його канонічне рівняння. Що таке ексцентриситет еліпса? Побудуйте еліпс.

3. Дайте означення гіперболи. Наведіть її канонічне рівняння. Що таке ексцентриситет гіперболи? Що таке асимптоти гіперболи і які їх рівняння? Побудуйте гіперболу та її асимптоти.

4. Дайте означення параболи. Наведіть канонічні рівняння параболи та їх графіки.

Завдання для самостійного розв'язування

Приклад 1. Скласти рівняння кола якщо:

а) центр кола співпадає з точкою $C(1;-1)$, а пряма $5x - 12y + 9 = 0$ є дотичною до кола;

б) коло проходить через точки $A(3;1)$ і $B(-1;3)$, а центр лежить на прямій $3x - y - 2 = 0$.

Приклад 2. Скласти рівняння кола, яке проходить через три точки $M_1(-1;5)$, $M_2(-2;-2)$, $M_3(5;5)$.

Приклад 3. Знайти центр і радіус кола $x^2 + y^2 - 10x + 8y - 1 = 0$.

Приклад 4. Скласти рівняння прямої, яка проходить через центр кола $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 2 = 0$ перпендикулярно до прямої $2x + 3y - 1 = 0$.

Приклад 5. Скласти рівняння прямої, яка проходить через правий фокус еліпса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$ паралельно до

прямої $3x + 6y - 1 = 0$.

Приклад 6. Дано рівняння гіперболи $16x^2 - 9y^2 = 144$. Знайти: а) півосі a і b ; б) фокуси; в) ексцентриситет; г) рівняння асимптот.

Приклад 7. Спростити рівняння ліній другого порядку:

а) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$;

б) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$.

Відповіді

1. а) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$; б) $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 0$.

2. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$. 3. $C(5; -4)$, $R = \sqrt{42}$.

4. $3x - 2y - 19 = 0$. 5. $x + 2y - 2 = 0$. 6. а) $a = 3$, $b = 4$;

б) $F_1(-5; 0)$, $F_2(5; 0)$; в) $e = \frac{5}{3}$; г) $y = \pm \frac{4}{3}x$.

7. а) $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{5} = 1$; б) $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{16} = 1$.

1.4.3. Площина і пряма лінія у тривимірному просторі. Основні задачі

Поверхні та просторові лінії вивчаються в аналітичній геометрії у просторовій системі координат $Oxyz$ (R^3) за допомогою їх рівнянь.

Рівнянням поверхні називається таке рівняння $F(x; y; z) = 0$ із трьома змінними, яке задовольняють координати кожної точки цієї поверхні і не задовольняють координати жодної точки, яка не лежить на цій поверхні.

З іншого боку, *поверхня, яка визначена даним рівнянням (у вибраній системі координат), є геометричне*

місце точок, координати яких задовольняють це рівняння.

Лінія L у просторі визначається як лінія перетину двох поверхонь і задається системою рівнянь

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (1.70)$$

Найпростішими прикладами поверхні і лінії у просторі R^3 є площина загального положення і пряма.

1. Рівняння площини, яка проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно до деякого вектора $\vec{n} = (A; B; C)$ (рис. 1.21) (вектор $\vec{n} \neq \vec{0}$ називається нормальним вектором) задається у вигляді

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (1.71)$$

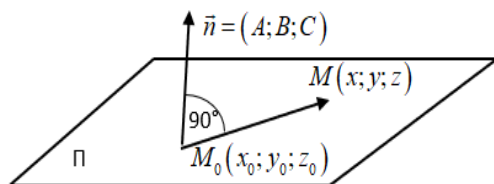


Рис. 1.21

2. Загальне рівняння площини має вигляд

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (1.72)$$

де A, B, C – координати ненульового вектора $\vec{n}$, який перпендикулярний до площини.

Зокрема, якщо:

1) $D = 0$, то площина Π проходить через початок координат перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (A; B; C)$;

2) $A = B = D = 0$, то площина $Cz = 0$, або $z = 0$ збігається з площиною Oxy ;

3) $C = 0$, то площина $Ax + By + D = 0$ паралельна до осі Oz , та перетинає площину Oxy по прямій, що задана таким самим рівнянням $Ax + By + D = 0$.

3. Рівняння площини, яка проходить через три дані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.73)$$

4. Рівняння площини у відрізках (рис. 1.22):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad (1.74)$$

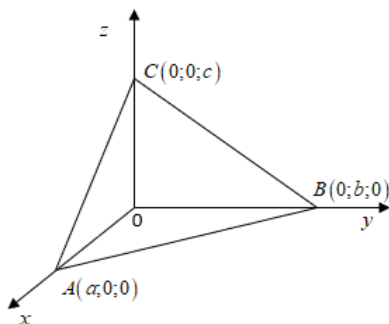


Рис. 1.22

де a, b, c – відповідно абсциса, ордината й апліката точок перетину площини з осями координат.

Кут між двома площинами. Умова паралельності і перпендикулярності двох площин.

Нехай задано дві площини загальними рівняннями:

$$(П_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1);$$

$$(П_2): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad \vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2).$$

Кутом φ між двома площинами є будь-який із двох суміжних двогранних кутів, утворених цими площинами. Двогранний кут між площинами вимірюється лінійним кутом між нормальними векторами $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ цих площин і обчислюється за формулою:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (1.75)$$

Площини Π_1 і Π_2 будуть перпендикулярними, якщо перпендикулярні їх нормальні вектори $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$. Тобто $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ і умова перпендикулярності двох площин матиме вигляд:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0. \quad (1.76)$$

Площини Π_1 і Π_2 будуть паралельними, тоді і тільки тоді, коли їх нормальні вектори будуть колінеарними: $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$. Звідси випливає умова паралельності двох площин:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (1.77)$$

Площини Π_1 і Π_2 збігаються, якщо виконується умова

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}. \quad (1.78)$$

Відстань від точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ знаходимо за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (1.79)$$

Основні рівняння прямої у просторі в прямокутній декартовій системі координат $Oxyz$.

1. Загальне рівняння прямої у просторі задається перетином двох площин (ці площини не паралельні, тобто

нормальні вектори $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ – неколінеарні):

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (1.80)$$

2. Рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ паралельно вектору $\vec{s} = (m, n, p)$ (вектор $\vec{s} \neq \vec{0}$ – напрямний вектор) задається у вигляді:

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}. \quad (1.81)$$

Це рівняння називається канонічним рівнянням прямої.

3. Параметричні рівняння прямої

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \quad t \in R. \\ z = z_0 + pt, \end{cases} \quad (1.82)$$

4. Рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ визначається рівнянням:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \quad (1.83)$$

Нехай прями у просторі задано рівняннями:

$$l_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}, \quad \vec{s}_1 = (m_1; n_1; p_1),$$

$$l_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}, \quad \vec{s}_2 = (m_2; n_2; p_2)$$

Кутом між прямими l_1 та l_2 у просторі називається кут φ між їхніми напрямними векторами. Тоді

$$\cos \varphi = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + l_1l_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + l_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + l_2^2}}. \quad (1.84)$$

Якщо *прямі* l_1 та l_2 *паралельні*, то їх напрямні вектори $\vec{s}_1$ та $\vec{s}_2$ *колінеарні*, тобто

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}. \quad (1.85)$$

Якщо *прямі* l_1 та l_2 *перпендикулярні*, то їх напрямні вектори $\vec{s}_1$ та $\vec{s}_2$ також *перпендикулярні*, тому

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0. \quad (1.86)$$

Кутом між прямою й площиною називається гострий кут між прямою і її проекцією на цю площину (рис. 1.23).

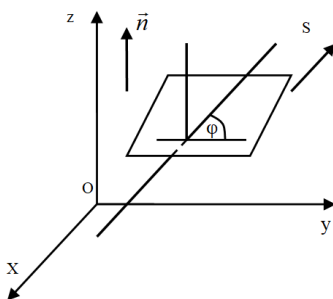


Рис. 1.23

Кут φ між прямою $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ і площиною $Ax + By + Cz + D = 0$ визначається за формулою:

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \quad (1.87)$$

Умова паралельності прямої й площини:

$$Am + Bn + Cp = 0. \quad (1.88)$$

Умова перпендикулярності прямої й площини:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \quad (1.89)$$

Приклад 19. Написати рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(1; -1; 2)$, $M_2(-2; 3; 0)$, $M_3(0; 2; 4)$.

Розв'язання. Використаємо рівняння площини, що проходить через три задані точки:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\text{Маємо } \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ -2-1 & 3+1 & 0-2 \\ 0-1 & 2+1 & 4-2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ -3 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - (y+1) \cdot \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (z-2) \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$14(x-1) + 8(y+1) - 5(z-2) = 0 \text{ або } 14x + 8y - 5z + 4 = 0.$$

Приклад 20. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(-1; 2; 0)$ паралельно до площини $2x - 3y + z - 1 = 0$.

Розв'язання. Використаємо рівняння площини, яка проходить через точку M_0 : $A(x+1) + B(y-2) + C(z-0) = 0$.

Оскільки площини паралельні, то нормальні вектори $\vec{n}_1 = (2; -3; 1)$ заданої площини та $\vec{n}_2 = (A; B; C)$ шуканої площини будуть колінеарні. З умови колінеарності

векторів маємо $\frac{A}{2} = \frac{B}{-3} = \frac{C}{1} = k = 1$, звідки $A = 2$,

$B = -3$, $C = 1$. Отримаємо $2(x+1) - 3(y-2) + z = 0$ або $2x - 3y + z + 8 = 0$.

Приклад 21. Знайти відстань від точки $M_0(1; 2; 4)$ до площини $2x + 2y - z - 11 = 0$.

Розв'язання. Скористаємося формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

$$\text{Маємо } d = \frac{|2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 4 - 11|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{9}{3} = 3 \text{ (лін. од.)}.$$

Приклад 22. Скласти канонічне рівняння прямої

$$\begin{cases} 2x - 3y - 2z + 6 = 0, \\ x - 3y + z + 3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Пряму задано загальним рівнянням.

Щоб записати її канонічне рівняння $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$

знайдемо на прямій точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ та напрямний вектор. Напрямний вектор $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ шуканої прямої знаходимо як векторний добуток нормальних векторів $\vec{n}_1$ та $\vec{n}_2$ площин, перетином яких є ця пряма. Оскільки $\vec{n}_1 = (2; -3; -2)$ і $\vec{n}_2 = (1; -3; 1)$, то

$$\begin{aligned} \vec{s} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = \\ &= -9\vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k} = (-9; -4; -3). \end{aligned}$$

Напрямний вектор не колінеарний до жодного із одиничних векторів $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$, $\vec{k} = (0; 0; 1)$, тому дана пряма перетинає усі три координатні площини Oxy , Oxz , Oyz . Припустимо, що дана пряма перетинає

площину Oxy ($z = 0$). Тоді система рівнянь матиме вигляд

$$\begin{cases} 2x - 3y + 6 = 0, \\ x - 3y + 3 = 0. \end{cases} \quad \text{Розв'яжемо систему методом Гаусса:}$$

віднімемо від першого рівняння друге рівняння та знайдемо невідому x : $x + 3 = 0$, $\Rightarrow x = -3$.

Підставляємо це значення у друге рівняння та знаходимо невідому змінну y : $-3 - 3y + 3 = 0$, $\Rightarrow$

$$-3y = 0, \Rightarrow y = 0.$$

Отже, точкою перетину заданої прямої з площиною Oxy , є точка $M_0(x_0; y_0; z_0) = M_0(-3; 0; 0)$. Зрозуміло, що ця точка належить прямій. Всі знайдені значення підставляємо у канонічне рівняння прямої.

$$\text{Отримаємо } \frac{x+3}{-9} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{-3}.$$

Приклад 23. Знайти кут між прямою $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z+4}{0}$ та площиною $4x - 2y + z + 3 = 0$.

Розв'язання. Використаємо формулу

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

$$\text{Маємо } \sin \varphi = \frac{|3 \cdot 4 + 5 \cdot (-2) + 0 \cdot 1|}{\sqrt{9 + 25 + 0} \cdot \sqrt{16 + 4 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{714}} \approx 0,075,$$

$$\varphi = \arcsin 0,075 \approx 4,3^\circ.$$

Запитання для самоконтролю

1. Наведіть загальне рівняння площини. Який геометричний зміст коефіцієнтів при змінних у цьому рівнянні?

2. Наведіть рівняння площини у відрізках на осях. Який геометричний зміст коефіцієнтів цього рівняння?

3. Наведіть рівняння площини, що проходить через три задані точки.

4. За якою формулою обчислюється відстань від точки до площини?

5. Наведіть формулу обчислення кута між двома площинами. Які умови паралельності та перпендикулярності двох площин?

6. Наведіть канонічні та параметричні рівняння прямої у просторі. Який геометричний зміст сталих, що входять у ці рівняння?

7. Наведіть загальне рівняння прямої. Як звести його до канонічного вигляду?

8. Наведіть рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки.

9. Наведіть параметричні рівняння прямої у просторі.

10. Як знайти кут між двома прямими у просторі? Яка умова паралельності та перпендикулярності двох прямих?

11. Як знайти відстань між паралельними прямими?

Завдання для самостійного розв'язування

Приклад 1. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(1; 2; -3)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (1; -2; 3)$.

Приклад 2. Знайти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(3; -1; -5)$ перпендикулярно до площин $3x - 2y + 2z + 7 = 0$ і $5x - 4y + 3z + 1 = 0$.

Приклад 3. Визначити, при яких значеннях l та m прямі $2x + ly + 3z - 5 = 0$ і $mx - 6y - 6z + 2 = 0$ задають паралельні площини.

Приклад 4. Визначити, при якому значенні l прямі $3x - 5y + lz - 3 = 0$ і $x + 3y + 2z + 5 = 0$ задають перпендикулярні площини.

Приклад 5. Знайти двогранні кути, утворені перетином площин $x - \sqrt{2}y + z - 1 = 0$ і $x + \sqrt{2}y - z + 3 = 0$.

Приклад 6. Обчислити об'єм піраміди, що обмежена площиною $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ та координатними площинами.

Приклад 7. Скласти канонічне рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $A(2; 3; 1)$ і $B(4; 6; 9)$.

Приклад 8. Скласти параметричне рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(1; -1; 1)$ паралельно прямій

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{-1}.$$

Приклад 9. Знайти гострий кут між прямими $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}}$ і $\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{\sqrt{2}}$.

Приклад 10. Задано координати вершин піраміди $M_1M_2M_3M_4$: $M_1(1; -1; 1)$, $M_2(-2; 1; 3)$, $M_3(4; -5; -2)$, $M_4(-1; 1; -2)$. Знайти:

а) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) канонічне рівняння висоти OM_4 , проведеної з вершини M_4 до грані $M_1M_2M_3$;

в) координати точки $O(x_0; y_0; z_0)$, як точки перетину висоти OM_4 з площиною $M_1M_2M_3$;

г) довжину висоти OM_4 , як відстань від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$.

Відповіді

1. $x - 2y + 3z + 12 = 0$. 2. $2x + y - 2z - 15 = 0$.
3. $l = 3, m = -4$. 4. $l = 6$. 5. $\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}$.
6. 8 куб. од. 7. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{8}$.
8. $x = 1 + t, y = -1 + 2t, z = 1 - t$. 9. 60° .
10. а) $2x - 3y + 6z - 11 = 0$. б) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{6}$.
в) $O(x_0; y_0; z_0) = O\left(\frac{1}{7}; -\frac{5}{7}; \frac{10}{7}\right)$. г) 4 лін. од.

1.4.4. Поверхні другого порядку

Поверхня, утворена прямою, що рухається паралельно до вибраного напрямку вздовж заданої лінії L , називається *циліндричною поверхнею*.

Пряму лінію називають при цьому називають *твірною*.

У просторовій системі координат $Oxyz$ рівняння із двома змінними визначає *циліндричну поверхню* із твірною, паралельною тій координатній осі, що відповідає відсутній змінній у рівнянні.

Наведемо приклади.

Рівняння

$$y^2 = 2px \quad (1.90)$$

задає у системі $Oxyz$ *параболічний циліндр* (рис. 15) з твірними, паралельними до осі Oz та напрямною, яка є параболою

$$\begin{cases} y^2 = 2px, \\ z = 0. \end{cases}$$

Параболічний циліндр

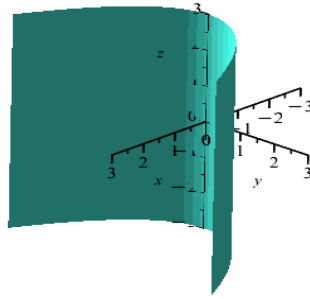


Рис. 1.24

На рис. 1.24 зображено частину параболічного циліндра $y^2 = 3x$, обмеженого площинами $x = 0$, $x = 3$, $y = -3$, $y = 3$, $z = -3$, $z = 3$. Для будь-якого параболічного циліндра $y^2 = 2px$ значення змінних лежать в межах: $0 \leq x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$, $-\infty < z < +\infty$.

Рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1.91)$$

задає у системі $Oxyz$ гіперболічний циліндр з твірними, паралельними до осі Oz . На рис. 1.25 зображено частину гіперболічного циліндра $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$ в межах $-4 \leq x \leq -2$, $2 \leq x \leq 4$, $-3 \leq y \leq 3$, $-3 \leq z \leq 3$.

Поверхнею обертання називається поверхня, що утворюється при обертанні плоскої кривої навколо прямої, яка лежить у площині кривої. Криву, яка обертається,

називають *твірною поверхні обертання*, а пряму, навколо якої іде обертання, – *віссю обертання*.

Гіперболічний циліндр

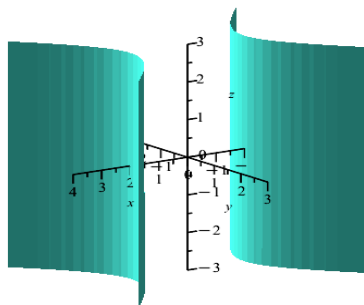


Рис. 1.25

Для того, щоб записати рівняння поверхні, утвореної обертанням заданої лінії навколо однієї з осей координат, потрібно змінну, яка визначає вісь обертання, залишити без зміни, а іншу змінну замінити на «плюс-мінус» корінь квадратний із суми квадратів заданої змінної та змінної, що відсутня в рівнянні лінії.

Еліпсоїдом обертання називається поверхня, що утворюється обертанням еліпса навколо однієї з його осей симетрії.

Нехай еліпс $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ обертається навколо осі Ox .

Залишивши в рівнянні еліпса змінну y , а змінну z

замінемо на $\pm\sqrt{x^2 + z^2}$, отримаємо $\frac{y^2}{b^2} + \frac{\left(\pm\sqrt{x^2 + z^2}\right)^2}{c^2} = 1$

або, після перетворень одержимо рівняння еліпсоїда обертання

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1.92)$$

задає еліпсоїд (еліпсоїд загального виду), який утворюється з еліпсоїда обертання шляхом рівномірного стиску чи рівномірного розтягу останнього в напрямку осі Ox .

На рис. 1.26 зображено еліпсоїд $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 1$ з півсями $a = 4$, $b = 2$, $c = 1$.

Якщо в рівнянні еліпсоїда покласти $a = b = c$, то рівняння

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad (1.93)$$

задає сферу з центром у початку координат, радіусом a .

Еліпсоїд

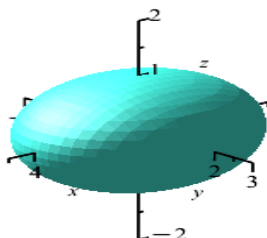


Рис. 1.26

Рівняння

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2 \quad (1.94)$$

задає сферу з центром у точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ радіусом R .

Рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1.95)$$

задає поверхню, яка називається *однопорожнинним гіперболоїдом обертання*, яка утворюється шляхом

обертання гіперболи $\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ навколо осі Oz .

Рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1.96)$$

визначає *однопорожнинний гіперболоїд*.

Однопорожнинний гіперболоїд

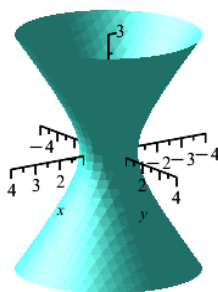


Рис. 1.27

Він утворюється з гіперboloїда обертання шляхом рівномірного стиску чи рівномірного розтягу останнього вздовж осі Oy .

На рис. 1.27 зображено частину *однопорожнинного гіперboloїда* $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, для якого $-4 \leq x \leq 4$, $-4 \leq y \leq 4$, $-3 \leq z \leq 3$.

Поверхня, що задається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (1.97)$$

називається *двопорожнинним гіперboloїдом*, яка складається з двох окремих порожнин, кожна з яких перетинає вісь Oz і має форму опуклої нескінченної чаші.

На рис. 1.28 зображено частину *двопорожнинного гіперboloїда* $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ значення змінних для якого, лежать в межах: $-3 \leq x \leq 3$, $-3 \leq y \leq 3$, $-3 \leq z \leq -1$, $1 \leq z \leq 3$.

Двопорожнинний гіперboloїд

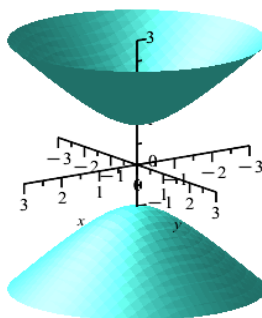


Рис. 1.28

Рівняння

$$x^2 + y^2 = 2pz \quad (1.98)$$

задає *параболоїд обертання*.

Поверхня, що задається рівнянням

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad (1.99)$$

називається *еліптичним параболоїдом*, де $p > 0$ і $q > 0$.

На рис. 1.29 зображено частину еліптичного параболоїда $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = z$ розміщеного між площинами $x = -4$, $x = 4$, $y = -3$, $y = 3$, $z = 0$, $z = 4$.

Еліптичний параболоїд

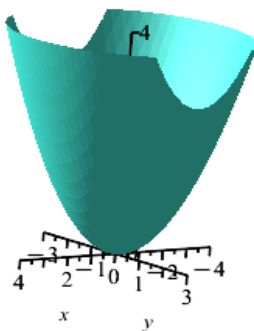


Рис. 1.29

Як ми бачимо на рис. 1.29, площина $y = 3$ перетинає еліптичний параболоїд по параболі $x^2 = 4(z - 3)$. Площина $y = -3$, так само, перетинає параболоїд по параболі

$x^2 = 4(z-3)$. Площина $y = -3$, так само, перетинає параболоїд по параболі $x^2 = 4(z-3)$.

Рівняння

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \quad (1.100)$$

визначає *гіперболічний параболоїд*, де $p > 0$ і $q > 0$. Ця поверхня має форму сідла.

На рис. 1.30 зображено частину гіперболічного параболоїда $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 3z$, розміщеного між площинами $x = -4$, $x = 4$, $y = -3$, $y = 3$, $z = -3$, $z = 3$.

Гіперболічний параболоїд/сідло

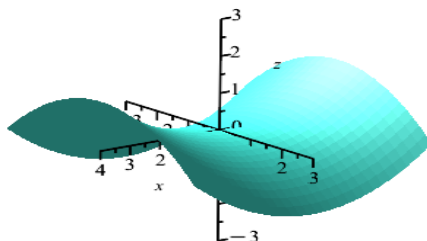


Рис. 1.30

Конічною поверхнею називається поверхня, утворена множиною прямих (твірних), що проходять через задану точку O , яка називається її вершиною та перетинають задану лінію L , що називають напрямною.

Рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (1.101)$$

задає канонічне рівняння конуса з вершиною в початку координат та віссю симетрії Oz . Напрямною конуса є

еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, що лежить у площині $z = c$. На рис. 1.31

зображено частину прямого кругового конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ розміщеного між площинами $z = -3$, $z = 3$, а напрямною L цього конуса є коло $x^2 + y^2 = 9$ в площині $z = 3$.

Круговий конус

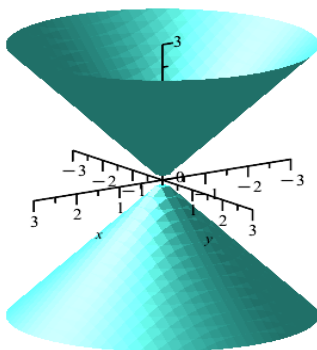


Рис. 1.31

Приклад 24. Скласти рівняння сфери з центром у точці $M_0(3; -2; 1)$, якщо вона дотикається до площини $2x - 2y - z + 9 = 0$.

Розв'язання. Знайдемо радіус сфери як відстань від точки M_0 до заданої площини. Тобто

$$R = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|2 \cdot 3 - 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 + 9|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{18}{3} = 6.$$

Тоді шукане рівняння сфери запишеться

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 36.$$

Приклад 25. Визначити, яку поверхню задають рівняння:

а) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y + 1 = 0$;

б) $2x^2 - y^2 + 2z^2 + 4x + 2y + 8z + 1 = 0$.

Розв'язання

а) Згрупуємо доданки з однаковими координатами та доповнимо вирази у дужках до повних квадратів:

$$(x^2 - 2x) + (y^2 + y) + z^2 + 1 = 0;$$

$$(x^2 - 2x + 1) - 1 + \left(y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} + z^2 + 1 = 0;$$

$$(x-1)^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 + z^2 = \frac{1}{4} \quad \text{— рівняння сфери з центром в}$$

точці $M_0\left(1; -\frac{1}{2}; 0\right)$ та радіуса $R = \frac{1}{2}$.

б) Виконаємо аналогічні перетворення до попереднього прикладу:

$$2(x^2 + 2x) - (y^2 - 2y) + 2(z^2 + 4z) + 1 = 0,$$

$$2\left(\left(x^2 + 2x + 1\right) - 1\right) - \left(\left(y^2 - 2y + 1\right) - 1\right) +$$

$$+ 2\left(\left(z^2 + 4z + 4\right) - 4\right) + 1 = 0,$$

$$2(x+1)^2 - (y-1)^2 + 2(z+2)^2 = 8.$$

Поділимо обидві частини останньої рівності на 8:

$$\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{8} + \frac{(z+2)^2}{4} = 1.$$

Отримане рівняння задає однопорожнинний гіперболоїд з центром в точці $M_0(-1; 1; -2)$ та півосями

$$a = c = 2, b = 2\sqrt{2}.$$

Запитання для самоконтролю

1. Які поверхні називаються циліндричними і які їх рівняння? Наведіть приклади циліндричних поверхонь і зробіть їх схематичні рисунки.

2. Що називається поверхнею обертання?

3. Яке рівняння еліпсоїда обертання? Як його знайти?

4. Наведіть приклади рівнянь поверхонь обертання та їх зображень.

5. Що називається конічною поверхнею? Наведіть канонічне рівняння конуса.

Завдання для самостійного розв'язування

Приклад. Визначити, яку поверхню задають рівняння:

а) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 6z + 9 = 0;$

б) $x^2 + z^2 - 4x - 4z + 4 = 0;$

в) $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 - 8x - 18y - 72z + 13 = 0.$

Відповіді

а) сфера $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 2$;

б) прямий круговий циліндр $(x-2)^2 + (z-2)^2 = 4$;

в) еліпсоїд $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} + (z-1)^2 = 1$.

Тести

1. Яка пряма проходить через точки $A(1; 3)$, $B(6; 5)$?

а) $\frac{x-1}{5} = \frac{y-3}{2}$;

б) $\frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{2}$;

в) $\frac{x-1}{5} = \frac{y+3}{2}$;

г) $\frac{x+1}{4} = \frac{y+3}{2}$;

д) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{5}$.

2. Яка з прямих паралельна прямій $y = 3x + 7$?

а) $\frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{3}$;

б) $\frac{x-3}{5} = \frac{y-2}{-3}$;

в) $\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{3}$;

г) $\frac{x-3}{6} = \frac{y-2}{-2}$;

$$\partial) \frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{2}.$$

3. Пряма $y = \sqrt{3}x + 1$ утворює з віссю Ox кут

а) 30° ; б) 60° ; в) 45° ; г) 135° ; д) 0° .

4. Пряма $y = 0$ утворює з віссю Ox кут:

а) 30° ; б) 60° ; в) 45° ; г) 135° ; д) 0° .

5. Яка з прямих проходить через точку $M_0(1; 2)$?

а) $2x + 4y - 8 = 0$;

б) $2x - 8y + 3 = 0$;

в) $2x - 3y - 8 = 0$;

г) $2x + 3y - 8 = 0$;

д) $3x + y - 12 = 0$.

6. Пряма $y = x + 3$ перпендикулярна до заданого вектора

а) $\vec{n} = (1; -1)$;

б) $\vec{n} = (\sqrt{3}; -1)$;

в) $\vec{n} = (1; 1)$;

г) $\vec{n} = (-1; \sqrt{3})$;

д) $\vec{n} = (0; 1)$.

7. Відстань від точки $M_0(-2; 1)$ до прямої $4x + 3y - 15 = 0$ дорівнює:

а) 6; б) 7; в) 4; г) 10; д) 5.

8. Яке з рівнянь є рівнянням кола?

а) $x^2 - y^2 + 7 = 0$;

б) $5x^2 + 3y^2 - 7 = 0$;

в) $x^2 - 2x + y^2 = 0$;

г) $2x^2 - 4x + 3y - 7 = 0$;

д) $9x^2 + 4y - 36 = 0$.

9. Яке з рівнянь є рівнянням еліпса?

а) $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$;

б) $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$;

в) $4x^2 - 9y^2 + 36 = 0$;

г) $4x^2 + 9y^2 + 36 = 0$;

д) жодне з наведених.

10. Пряма $y = 0$ проходить через точку

а) $(-2; 1)$; б) $(\sqrt{3}; 3)$; в) $(2; -1)$; г) $(0; -1)$; д) $(4; 0)$.

11. Довжина великої півосі еліпса $16x^2 + 25y^2 = 400$ дорівнює:

а) 3; б) 4; в) $\sqrt{7}$; г) 5; д) 2.

12. Довжина малої півосі еліпса $16x^2 + 25y^2 = 400$ дорівнює:

а) 3; б) 4; в) $\sqrt{7}$; г) 5; д) 2.

13. Вершина параболи $y^2 = 4x$ знаходиться в точці:

а) $(2; 1)$; б) $(0; 0)$; в) $(1; 1)$; г) $(0, 25; 1)$; д) $(0; 4)$.

14. Вершина параболи $(y + 2)^2 = 4(x - 3)$ знаходиться в точці :

а) $(-3; 2)$; б) $(3; -2)$; в) $(1; 1)$; г) $(2; -3)$; д) $(-2; 3)$.

15. Параметр параболи $y^2 = 4x$ дорівнює

а) 2; б) 4; в) 1; г) 0,5; д) 3.

16. Відстань від фокуса параболи $x^2 = -4y$ до її директриси дорівнює

а) 0,5; б) 4; в) 1; г) 2; д) 3.

17. Фокус параболи $x^2 = 4y$ розміщено в точці

а) $F(1; 1)$; б) $F(1; 0)$; в) $F(0; 1)$; г) $F(0, 5; 1)$; д) $F(0; 0, 5)$.

18. Довжина дійсної осі гіперболи $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

дорівнює

а) 6; б) 4; в) 8; г) 9; д) 3.

19. Довжина уявної осі гіперболи $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$

дорівнює

а) 12; б) 6; в) 2; г) 9; д) 3.

20. Асимптотами гіперболи $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ є прямі

а) $y = \pm 0,6x$;

б) $y = \pm \frac{2}{3}x$;

в) $y = \pm 2x$;

г) $y = \pm 1,5x$;

д) $y = \pm 0,5x$.

21. Площина $Ax + Cz + D = 0$

а) паралельна до осі Ох;

б) паралельна до осі Oz;

в) перпендикулярна до площини уOz;

г) паралельна до осі Оу;

д) перпендикулярна до площини xOy.

22. Площина $5x + 2z = 0$

а) перпендикулярна до вектора $\vec{n} = (5; 2; 0)$;

б) перпендикулярна до вектора $\vec{n} = (5; 0; 2)$;

в) перпендикулярна до вектора $\vec{n} = (1; 1; 1)$;

г) паралельна до осі Oz;

д) паралельна до осі Ох.

23. Яке з рівнянь є рівнянням параболи, вершина якої лежить в початку координат, вісь Oy є віссю симетрії і парабола проходить через точку $(4;-2)$

а) $x^2 = 2y$;

б) $y^2 = x$;

в) $y^2 = -x$;

г) $x^2 = 4y$;

д) $x^2 = -8y$.

24. Пряма проходить через початок координат під кутом 135° до осі Ox має рівняння

а) $y = 0$;

б) $x + y = 0$;

в) $x - y = 0$;

г) $x - y + 1 = 0$;

д) $x = 0$.

25. Визначити відстань між лівою і верхньою вершинами еліпса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$.

а) 3; б) 4; в) $\sqrt{7}$; г) 5; д) 1.

26. Яке з рівнянь є рівнянням площини, що проходить через три точки $M_1(4;0;0)$, $M_2(0;3;0)$, $M_3(0;0;2)$?

а) $4x + 3y + 2z = 1$;

б) $3x + 4y + 6z = 12$;

в) $x + y + z - 1 = 0$;

г) $x + y + z = 9$;

д) $3x + 4y + 2z = 0$.

27. Відстань від центра симетрії гіперболи

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \text{ до фокуса дорівнює}$$

- а) 3;
- б) 4;
- в) 10;
- г) 5;
- д) 1.

28. Фокальна відстань (відстань між фокусами)

гіперболи $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ дорівнює

- а) 10; б) 20; в) 16; г) 14; д) 18.

29. Правий фокус гіперболи $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ має

координати

- а) $F_2(5; 0)$; б) $F_2(10; 0)$; в) $F_2(7; 0)$; г) $F_2(9; 0)$;
д) $F_2(4; 0)$.

30. Правий фокус еліпса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ розміщений в точці

- а) $F_2(4; 0)$;
б) $F_2(3; 0)$;
в) $F_2(\sqrt{7}; 0)$;
г) $F_2(\sqrt{5}; 0)$;
д) $F_2(1; 0)$.

31. Відстань між фокусами (фокальна відстань)

гіперболи $7x^2 - 9y^2 = 63$ дорівнює

- а) 10; б) 4; в) 8; г) 13; д) 6.

32. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(3; -5)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (7; 4)$

а) $3x - 5y - 11 = 0$;

б) $3x - 5y - 11 = 0$;

в) $7x + 4y - 1 = 0$;

г) $4x + 7y + 1 = 0$;

д) $\frac{x-3}{7} = \frac{y+5}{4}$.

33. Ексцентриситет еліпса $16x^2 + 25y^2 = 400$ дорівнює

а) 0,6; б) 0,8; в) $\frac{\sqrt{7}}{4}$; г) $\frac{\sqrt{5}}{3}$; д) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

34. Скласти рівняння гіперболи, центр симетрії якої лежить у початку координат, правий фокус лежить у точці $F_2(10; 0)$, а рівняння асимптот $y = \pm \frac{3}{4}x$.

а) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$;

б) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1$;

в) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$;

г) $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{9} = 1$;

д) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$.

35. Відстань d між паралельними прямими $3x - 4y - 10 = 0$ і $6x - 8y + 5 = 0$ дорівнює

а) 15; б) 5; в) 4; г) 2,5; д) 2.

36. Знайти координати центра кола $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$.

а) $(1; -2)$; б) $(-2; 4)$; в) $(1; 2)$; г) $(-1; -2)$; д) $(1; 2)$.

37. Поверхня $z = x^2 + 4y^2$ у тривимірному просторі називається

- а) еліптичним циліндром;
- б) еліптичним параболоїдом;
- в) еліпсоїдом;
- г) параболічним циліндром;
- д) конусом.

38. Поверхня $z = x^2 - y^2$ у тривимірному просторі називається

- а) еліптичним циліндром;
- б) гіперболічним параболоїдом;
- в) еліпсоїдом;
- г) параболічним циліндром;
- д) конусом.

39. Поверхня $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ у тривимірному просторі називається

- а) еліптичним циліндром;
- б) гіперболічним параболоїдом;
- в) еліпсоїдом;
- г) параболічним циліндром;
- д) двопорожнинним гіперболоїдом.

Відповіді

1. а). 2. в). 3. б). 4. д). 5. г). 6. а). 7. в). 8. в). 9. а). 10. д).
11. г). 12. б). 13. б). 14. б). 15. а). 16. г). 17. в). 18. а). 19. а).
20. б). 21. г). 22. б). 23. д). 24. б). 25. г). 26. б). 27. г). 28. а).
29. а). 30. б). 31. в). 32. в). 33. а). 34. в). 35. г). 36. а). 37. б).
38. б). 39. д).

Розділ 2

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

2.1. Поняття функції однієї змінної. Область визначення

Нехай задано дві множини дійсних чисел X і Y .

Функцією називається правило, за яким кожному елементу $x \in X$ відповідає єдиний елемент $y \in Y$, при умові, що кожному елементу $y \in Y$ відповідає хоча б один елемент $x \in X$ і записують $y = f(x)$.

Елемент $x \in X$ називається *аргументом функції* f , елемент $y \in Y$ – *значенням функції*.

Множина X називається *областю визначення функції* (позначають $D(f)$), а множина Y – *множиною значень функції* (позначають $E(f)$).

Якщо функція набуває рівних між собою значень, то вона називається *сталю* і позначається $y = C$.

Задати функцію – означає вказати спосіб, за яким кожному значенню аргумента x ставиться у відповідність значення функції y . Функція може бути задана *аналітично (формулою), графічно, таблично та за допомогою програми*.

До *основних елементарних функцій* належать наступні функції:

- 1) $y = C$, C – стала;
- 2) степенева $y = x^\alpha$, ($\alpha \in R$);
- 3) показникова $y = a^x$, ($a > 0$, $a \neq 1$);
- 4) логарифмічна $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$);
- 5) тригонометричні: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$;

б) обернені тригонометричні: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$,
 $y = \arctg x$, $y = \operatorname{arcc}tg x$.

Нехай функцію $y = f(u)$ визначено на множині U , а функцію $u = \varphi(x)$ – на множині X , причому множина значень функції $u = \varphi(x) \in U$. Тоді кажуть, що на множині X визначено *складену функцію* $y = f(u(x))$. Її ще називають *суперпозицією функцій* f і φ .

Елементарними називають функції, що одержуються з основних елементарних функцій за допомогою операцій додавання, віднімання, множення, ділення та операції утворення складеної функції, які застосовуються скінченну кількість разів.

Якщо функція $y = f(x)$ задана аналітично (у вигляді формули), то областю визначення є множина значень аргумента при яких вона існує, тобто приймає певне дійсне значення.

При знаходженні області визначення функції потрібно пам'ятати, що:

- 1) корінь парного степеня існує лише для невід'ємних чисел;
- 2) знаменник дробу має бути відмінним від нуля;
- 3) логарифм існує тільки для додатних чисел;
- 4) вирази, що стоять під знаком функцій $\arcsin u$ та $\arccos u$, за модулем не перевищують одиниці.

Приклад 1. Знайти область визначення функції
 $y = \sqrt[4]{x^2 - 5x + 6}$.

Розв'язання. Область визначення являє собою розв'язок нерівності $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ або $(x - 2)(x - 3) \geq 0$, методом інтервалів, знаходимо $x \in (-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$.

Приклад 2. Знайти область визначення функції

$$y = \sqrt{\frac{x+3}{1-x}}.$$

Розв'язання. Область визначення знаходимо з системи нерівностей:

$$\begin{cases} \frac{x+3}{1-x} \geq 0, \\ 1-x \neq 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \frac{x+3}{x-1} \leq 0, \\ x \neq 1, \end{cases} \quad x \in [-3; 1).$$

Приклад 3. Знайти область визначення функції

$$y = \sqrt[6]{x+3} + \frac{1}{x^2-4}.$$

Розв'язання. Область визначення являє собою розв'язок системи нерівностей:

$$\begin{cases} x+3 \geq 0, \\ x^2-4 \neq 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x \geq -3, \\ x \neq -2, \\ x \neq 2; \end{cases} \quad x \in [-3; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty).$$

Приклад 4. Знайти область визначення функції

$$y = \arccos \frac{2x-3}{5}.$$

Розв'язання. Область визначення знаходимо з умови:

$$\left| \frac{2x-3}{5} \right| \leq 1 \quad \text{або} \quad -1 \leq \frac{2x-3}{5} \leq 1; \quad -5 \leq 2x-3 \leq 5;$$

$$-2 \leq 2x \leq 8; \quad -1 \leq x \leq 4; \quad x \in [-1; 4].$$

Приклад 5. Знайти область визначення функції

$$y = \ln(4-x) + \arcsin \frac{x-3}{2}$$

Розв'язання. З того, що логарифм існує для строго додатних чисел, а вираз, який міститься під знаком функції $\arcsin$, за модулем не перевищує одиниці, маємо систему:

$$\begin{cases} 4-x > 0, \\ \left| \frac{x-3}{2} \right| \leq 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 4, \\ -2 \leq x-3 \leq 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 4, \\ 1 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

Отже $D(y) = \{x : x \in [1; 4)\}$.

Зобразимо область визначення даної функції на рисунку (рис. 2.1).

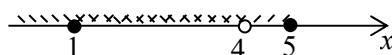


Рис. 2.1

2.2. Числова послідовність і її границя

Поставимо у відповідність, за деяким законом, кожному натуральному числу n дійсне число x_n . Множина чисел

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

називається *числовою послідовністю* і позначається $\{x_n\}$, або $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Отже, *числова послідовність* – це числова функція, визначена на множині натуральних чисел. Числа $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ називаються *елементами послідовності*, а число x_n – *загальним елементом послідовності*.

Число a називають *границею числової послідовності* $\{x_n\}$, якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер N , такий, що для всіх $n > N$ виконується нерівність:

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

і записують $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Послідовність, яка має границю, називають *збіжною*.

Послідовність $\{x_n\}$ називається *нескінченно малою*, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Послідовність $\{x_n\}$ називається *нескінченно великою*, якщо для будь-якого додатного числа A існує такий номер N , що для всіх $n > N$ виконується нерівність $|x_n| > A$ і записують $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

Якщо для всіх $n > n_0$ елементи нескінченно великої послідовності $\{x_n\}$ додатні, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, якщо від'ємні, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.

Застосування означення для обчислення границі числової послідовності зумовлює у багатьох випадках труднощі. Тому, на практиці для обчислення границі числової послідовності використовують теореми про арифметичні властивості границь.

Якщо послідовності $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ збіжні, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n ;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n .$$

Якщо, окрім того $y_n \neq 0$ для будь-якого n і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0, \text{ то } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} .$$

Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ або $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty, \text{ то вираз } \frac{x_n}{y_n} \text{ є невизначеністю виду } \frac{0}{0} \text{ або } \frac{\infty}{\infty} .$$

Їх дослідження називають розкриттям невизначеностей.

Приклад 6. Довести, користуючись означенням границі числової послідовності, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{2n+1} = \frac{1}{2}$.

Розв’язання. Нехай $\varepsilon > 0$ – довільне як завгодно мале число. Потрібно показати, що знайдеться таке натуральне число N , що для всіх $n > N$ буде виконуватись нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$, тобто:

$$\left| \frac{n+3}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon; \quad \left| \frac{2n+6-2n-1}{2(2n+1)} \right| < \varepsilon; \quad \left| \frac{5}{2(2n+1)} \right| < \varepsilon.$$

Оскільки n – натуральне число, то останню нерівність можна знайти так: $\frac{5}{2(2n+1)} < \varepsilon$.

Розв’язавши одержану нерівність, маємо: $n > \frac{5}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}$.

Отже, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує шуканий номер

$N = \left\lceil \frac{5}{4\varepsilon} - \frac{1}{2} \right\rceil$ – ціла частина числа $\frac{5}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}$. Це означає, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

Приклад 7. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4 - 2n^2 + 4n - 1}{5n^4 + 3n^2 - 2n + 3}$.

Розв’язання. У цьому випадку маємо невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$, тому не можна відразу застосувати теорему про границю частки двох послідовностей. Поділимо чисельник та знаменник на найвищий степінь дробу (у нашому випадку на n^4) та застосуємо теорему про границю частки і суми послідовностей:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4 - 2n^2 + 4n - 1}{5n^4 + 3n^2 - 2n + 3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{n^2} + \frac{4}{n^3} - \frac{1}{n^4}}{5 + \frac{3}{n^2} - \frac{2}{n^3} + \frac{3}{n^4}} = \\
&= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{2}{n^2} + \frac{4}{n^3} - \frac{1}{n^4} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{3}{n^2} - \frac{2}{n^3} + \frac{3}{n^4} \right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^3} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 5 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^3} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^4}} = \\
&= \frac{3 - 0 + 0 - 0}{5 + 0 - 0 + 0} = \frac{3}{5}.
\end{aligned}$$

2.3. Знаходження границі функції. Невизначені вирази. Розкриття невизначеностей

Розглянемо функцію $y = f(x)$, визначену у деякому околі точки $x = a$, крім можливо самої точки. З цього околу виберемо довільну послідовність значень аргументу x :

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots, \quad x_n \neq a,$$

яка збігається до a , тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Нехай вибраній послідовності відповідає послідовність значень функції $y = f(x)$:

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n), \dots,$$

яка збігається до числа A , тоді число A називають *границею функції* $y = f(x)$ в точці a і записують $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

Якщо $A = 0$, то функція $y = f(x)$ називається *нескінченно малою* при $x \rightarrow a$. Якщо A – один із символів $\infty, +\infty, -\infty$, то функція $y = f(x)$ називається *нескінченно великою* при $x \rightarrow a$.

Нескінченно малі і нескінченно великі функції пов'язані між собою:

- якщо $f(x)$ – нескінченно мала функція в точці a і в

деякому околі цієї точки $f(x) \neq 0$, то функція $\frac{1}{f(x)}$

нескінченно велика в точці a ;

- якщо $f(x)$ – нескінченно велика в точці a , то функція

$\frac{1}{f(x)}$ нескінченно мала в цій точці.

У випадку коли при $x \rightarrow a$ функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ мають скінченні границі, то:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) \pm f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} f_2(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_2(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)},$$

за умови, що $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \neq 0$.

Якщо функція $f(x)$ елементарна і визначена в точці a , то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ при $x \rightarrow a$ одночасно або нескінченно малі або нескінченно великі, то при знаходженні $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ маємо невизначеності виду $\frac{0}{0}$ та

$$\frac{\infty}{\infty}.$$

Розглянемо приклади на розкриття цих невизначеностей.

Приклад 8. Обчислити границі:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 + 4x + 1}; \quad б) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 7}{4x^3 + x^2 - 3}; \quad в) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 + 3x - 4}{5x^4 - 2x^2 + 5}.$$

Розв'язання. У всіх трьох випадках маємо невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$, задану відношенням двох

многочленів. Для її розкриття поділимо чисельник і знаменник на найвищий степінь x цих многочленів.

a) Поділимо почленно чисельник і знаменник дробу на x^2 . Маємо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 + 4x + 1} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{4x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} = \\ &= \frac{3 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} - 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}}{1 + 4 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}} = 3. \end{aligned}$$

Зауважимо, що при $x \rightarrow \infty$ величини $\frac{1}{x}$ та $\frac{1}{x^2}$ –

нескінченно малі, а тому $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

б)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 7}{4x^3 + x^2 - 3} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^3} - \frac{5x}{x^3} + \frac{7}{x^3}}{\frac{4x^3}{x^3} + \frac{x^2}{x^3} - \frac{3}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{7}{x^3}}{4 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^3}} =$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{7}{x^3} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^3} \right)} = \frac{0}{4} = 0;$$

в)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 + 3x - 4}{5x^4 - 2x^2 + 5} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^5}{x^5} + \frac{3x}{x^5} - \frac{4}{x^5}}{\frac{5x^4}{x^5} - \frac{2x^2}{x^5} + \frac{5}{x^5}} = \frac{2}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{x} - \frac{2}{x^3} + \frac{5}{x^5} \right)} = \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Приклад 9. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{3x^2 + 2x - 16}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\frac{0}{0}$. Розкладемо

поліноми, які є в чисельнику і знаменнику, на множники. Відомо, що $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, де x_1, x_2 – корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, а також $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Отримуємо: для чисельника $x_1 = 2, 2x_2 = 6, x_2 = 3$, тому $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$; для знаменника

$$x_1 = 2, 2x_2 = -\frac{16}{3}, x_2 = -\frac{8}{3}, \text{ тому}$$

$$3x^2 + 2x - 16 = 3\left(x - 2\right)\left(x + \frac{8}{3}\right) = (x - 2)(3x + 8).$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді, } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{3x^2 + 2x - 16} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 3)}{(x - 2)(3x + 8)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 3}{3x + 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - 3}{6 + 8} = -\frac{1}{14}. \end{aligned}$$

Зауважимо, що скорочення на $x-2$ можливе, оскільки $x \rightarrow 2$, але $x \neq 2$.

Границі такого типу можна знаходити іншим способом, використавши теорему Безу. Досить поділити поліноми чисельника і знаменника на $x-a$, не розкладаючи їх на множники. Цей метод особливо зручний для поліномів вищих степенів.

Приклад 10. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + x - 6}{x^2 + 3x + 2}$.

Розв'язання. Підстановка граничного значення $x = -2$ дає невизначеність виду $\frac{0}{0}$. Щоб її розкрити,

виділимо в чисельнику і знаменнику дробу множник $x+2$ і скоротимо на нього. (Множник $x+2$ обов'язково увійде в розклад на множники многочленів в чисельнику і знаменнику дробу, оскільки $x = -2$ – корінь обох многочленів. Зауважимо, що скорочення можливе, бо $x+2 \neq 0$, хоча й $(x+2) \rightarrow 0$).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + x - 6}{x^2 + 3x + 2} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(2x-3)}{(x+2)(x+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x-3}{x+1} = \frac{-7}{-1} = 7. \end{aligned}$$

Для виділення множника $x+2$ в чисельнику і знаменнику дробу виконаємо ділення квадратних тричленів на двочлен:

$$\begin{array}{r} \frac{2x^2 + x - 6}{2x^2 + 4x} \Bigg| \frac{x+2}{2x-3} \\ \underline{-3x-6} \\ -3x-6 \\ \underline{} \\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 2x} \Bigg| \frac{x+2}{x+1} \\ \underline{-x+2} \\ -x+2 \\ \underline{} \\ 0 \end{array}$$

Приклад 11. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$.

Поділимо чисельник і знаменник дробу на $x-1$.
Отримаємо:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + 2x - 3)}{(x-1)(x+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x+1} = \frac{0}{2} = 0. \end{aligned}$$

Приклад 12. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x-6}{\sqrt{x-4} - \sqrt{8-x}}$.

Розв'язання. Безпосередня підстановка граничного значення $x=6$ дає невизначеність виду $\frac{0}{0}$. Щоб її розкрити, слід позбутися ірраціональності у знаменнику дробу. Для цього помножимо чисельник і знаменник дробу на вираз, спряжений до знаменника, тобто, на вираз $\sqrt{x-4} + \sqrt{8-x}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x-6}{\sqrt{x-4} - \sqrt{8-x}} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(x-6)(\sqrt{x-4} + \sqrt{8-x})}{(\sqrt{x-4} - \sqrt{8-x})(\sqrt{x-4} + \sqrt{8-x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(x-6)(\sqrt{x-4} + \sqrt{8-x})}{x-4 - (8-x)} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(x-6)(\sqrt{x-4} + \sqrt{8-x})}{2(x-6)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x-4} + \sqrt{8-x}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Приклад 13. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\frac{0}{0}$. Помножимо і поділимо дріб, який є під знаком границі, на вираз $\sqrt{2x+1}+3$, спряжений до чисельника. Одержимо:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{2x+1}+3)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x+1-9}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x-4)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2}{\sqrt{2x+1}+3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Приклад 14. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x+1}-3}{\sqrt{x-7}-1}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\frac{0}{0}$. Помножимо чисельник і знаменник на вирази $\sqrt{x+1}+3$ та $\sqrt{x-7}+1$, спряжені відповідно до чисельника і знаменника дробу. Одержимо:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x+1}-3}{\sqrt{x-7}-1} &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt{x+1}-3)(\sqrt{x+1}+3)(\sqrt{x-7}+1)}{(\sqrt{x-7}-1)(\sqrt{x-7}+1)(\sqrt{x+1}+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(x+1-9)(\sqrt{x-7}+1)}{(x-7-1)(\sqrt{x+1}+3)} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(x-8)(\sqrt{x-7}+1)}{(x-8)(\sqrt{x+1}+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x-7}+1}{\sqrt{x+1}+3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Запитання для самоконтролю

1. Що називають функцією однієї змінної, її областю визначення, множиною значень?

2. Назвіть основні елементарні функції, їх властивості та графіки.

3. Наведіть визначення границі послідовності та границі функції.

4. Сформулюйте основні властивості границь послідовностей та функцій.

Завдання для самостійного розв'язування

Приклад 1. Знайти область визначення функцій:

$$a) y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}; \quad б) y = \sqrt{1 - x^2}; \quad в) y = \frac{x}{x^2 - 3x - 4};$$

$$г) y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{\frac{1}{x-2}} - \lg(2x-3); \quad д) y = \arccos \frac{2x}{3}.$$

Приклад 2. Обчислити границі:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + x^3 - x + 1}{5x^4 - x^3 - x^2 - 1}; \quad б) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - x + 2}{x^7 - x^5 - x - 1};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 - x^3 + 2}{x^4 - x + 1}; \quad г) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x - 3}{5x^2 - x - 6};$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4x - 12}{x^2 - 3x + 2}; \quad е) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 3x - 9}{5x^2 - x - 42};$$

$$е) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2}; \quad ж) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^3 - x^2 + 3x - 3};$$

$$з) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}; \quad и) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{3x+10}-4};$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{2x+3}}{x^2 - 9}; \quad ii) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{1+2x} - 3}.$$

Відповіді

1. а) $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$; б) $[-1; 1]$;
 в) $(-\infty; -1) \cup (-1; 4) \cup (4; +\infty)$; г) $\left(\frac{3}{2}; 2\right) \cup (2; +\infty)$;
 д) $[-1; 2]$.
 2. а) $\frac{3}{5}$; б) 0; в) ∞ ; г) $\frac{5}{11}$; д) 8; е) $\frac{9}{29}$; є) 1; ж) $\frac{3}{4}$;
 з) 4; и) $\frac{2}{3}$; і) $-\frac{1}{36}$; ii) $\frac{3}{4}$.

2.4. Порівняння нескінченно малих функцій

Нехай $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ нескінченно малі функції при $x \rightarrow x_0$, тобто $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0$.

1) Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$, C - стала, то функції

$\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються нескінченно малими функціями одного порядку в околі точки x_0 ;

2) якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C = 1$, то функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$

називаються еквівалентними і записують це як $\alpha(x) \sim \beta(x)$;

3) якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то в околі точки x_0 функція

$\alpha(x)$ є нескінченно малою функцією вищого порядку малості, ніж $\beta(x)$ і записують це як $\alpha(x) = o(\beta(x))$,

читається: $\alpha(x)$ є o маленьким від $\beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$;

$$4) \text{ якщо } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta^n(x)} = C, \quad 0 < |C| < +\infty, \text{ то } \alpha(x)$$

називається нескінченно малою функцією n -го порядку відносно $\beta(x)$;

5) якщо $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ нескінченно малі функції при $x \rightarrow x_0$ і якщо $\alpha(x) \sim \gamma(x)$, а $\beta(x) \sim \delta(x)$, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\gamma(x)}{\delta(x)}.$$

Ця рівність визначає принцип заміни еквівалентних нескінченно малих.

Наведемо таблицю еквівалентних нескінченно малих функцій ($\alpha(x)$ нескінченно мала функція при $x \rightarrow x_0$):

$$1) \sin \alpha(x) \sim \alpha(x); \quad 2) \operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x);$$

$$3) 1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{[\alpha(x)]^2}{2}; \quad 4) \arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x);$$

$$5) \operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x); \quad 6) \ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x);$$

$$7) a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \ln a; \quad 8) e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x);$$

$$9) [1 + \alpha(x)]^p - 1 \sim p \cdot \alpha(x); \quad 10) \sqrt[n]{1 + \alpha(x)} - 1 \sim \frac{\alpha(x)}{n}.$$

Приклад 25. За допомогою принципу заміни еквівалентних нескінченно малих функцій обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\ln(1+4x)}$.

Розв'язання. При $x \rightarrow 0$ $\sin 5x \sim 5x$, $\ln(1+4x) \sim 4x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\ln(1+4x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{4x} = \frac{5}{4}.$$

2.5. Перша та друга важливі границі

При знаходженні границь часто доводиться використовувати дві важливі границі. Зокрема, при розкритті невизначеностей $\frac{0}{0}$, що містять тригонометричні функції використовують границю

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad (2.1)$$

яка називається *першою важливою границею*.

У багатьох випадках знаходження таких границь спрощується при використанні еквівалентних нескінченно малих функцій, порівняння яких, розкрито у наступному пункті.

Для розкриття невизначеності виду 1^∞ використовується *друга важлива границя*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \text{ або } \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x\right)^{\frac{1}{x}} = e \quad (2.2)$$

та наслідки з неї:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k \text{ і } \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + kx\right)^{\frac{1}{x}} = e^k, \quad (2.3)$$

де e – число Ейлера, k – будь-яке дійсне число, або

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k_1}{x}\right)^{k_2 x} = e^{k_1 k_2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + k_1 x)^{\frac{k_2}{x}} = e^{k_1 k_2}. \quad (2.4)$$

Приклад 15. Довести, що:

$$\begin{aligned} a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} &= 1; & б) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} &= 1; \\ в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} &= 1; & г) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} &= 1. \end{aligned}$$

Розв'язання. Маємо невизначеність $\frac{0}{0}$. Виконаємо

такі перетворення:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = 1;$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1;$$

в) Замінімо $z = \arcsin x$, $x = \sin z$, тоді

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\sin z} = 1;$$

г) Замінімо $z = \operatorname{arctg} x$, $x = \operatorname{tg} z$, тоді

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\operatorname{tg} z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\sin z} \cdot \cos z = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z}{\frac{\sin z}{z}} = 1.$$

Приклад 16. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\operatorname{tg} 6x}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$.

Виконаємо перетворення:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\operatorname{tg} 6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cdot 6x \cos 6x}{6 \sin 6x} = \frac{5}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{\sin 6x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos 6x = \frac{5}{6}.$$

Приклад 17. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{x^2}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$.

Оскільки $1 - \cos 8x = 2 \sin^2 4x$, то:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 4x}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 4x}{x} \right)^2 = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4 \sin 4x}{4x} \right)^2 = 32 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 4x}{4x} \right)^2 = 32. \end{aligned}$$

Приклад 18. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^4 x}{x \sin 3x}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$.

$$\begin{aligned} \text{Виконаємо такі перетворення: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^4 x}{x \sin 3x} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos^2 x)(1 + \cos^2 x)}{x \sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \cos^2 x) \sin^2 x}{x \sin 3x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \frac{\sin x}{x} \frac{3x}{3 \sin 3x} (1 + \cos^2 x) = \left| \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos^2 x) = 2 \right| = \\ &= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \frac{3x}{\sin 3x} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Приклад 19. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{\operatorname{tg} 3x \cdot \sin x}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{\operatorname{tg} 3x \cdot \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 4x}{\operatorname{tg} 3x \cdot \sin x} = \left| \frac{\sin x \sim x}{\sin 4x \sim 4x} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(4x)^2}{3x \cdot x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{32x^2}{3x^2} = \frac{32}{3}.\end{aligned}$$

Приклад 20. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}^2 3x}{\cos 3x - \cos x}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\frac{0}{0}$.

Оскільки $\cos 3x - \cos x = -2 \sin 2x \sin x$, то

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}^2 3x}{\cos 3x - \cos x} &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}^2 3x}{\sin 2x \cdot \sin x} = \left| \frac{\operatorname{arctg} 3x \sim 3x}{\sin 2x \sim 2x} \right| = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3x)^2}{2x \cdot x} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x^2}{2x^2} = -\frac{9}{4}.\end{aligned}$$

Приклад 21. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$.

Виконаємо такі перетворення:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right)}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\cos x \cdot \sin^3 x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos x \cdot \sin^3 x} = \left| \frac{\sin \frac{x}{2} \sim \frac{x}{2}}{\sin x \sim x} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left(\frac{x}{2} \right)^2}{x^2 \cdot \cos x} =\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2}.$$

Приклад 22. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+2}{5x-8} \right)^x$.

Розв'язання. Оскільки $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+2}{5x-8} = 1$, то маємо невизначеність виду 1^∞ . Для цього поділимо чисельник і знаменник дробу $\frac{5x+2}{5x-8}$ на $5x$. Маємо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+2}{5x-8} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \frac{2}{5x}}{1 - \frac{8}{5x}} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \frac{\frac{2}{5}}{x}}{1 - \frac{\frac{8}{5}}{x}} \right)^x = \frac{e^{\frac{2}{5}}}{e^{-\frac{8}{5}}} = e^2.$$

Приклад 23. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x-11}{6x+7} \right)^{2x+4}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду 1^∞ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x-11}{6x+7} \right)^{2x+4} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x-11}{6x+7} \right)^{2x} \cdot \left(\frac{6x-11}{6x+7} \right)^4 = \\ &= \left| \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x-11}{6x+7} \right)^4 \right| = 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{6x-11}{6x+7} \right)^x \right)^2 = \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \frac{11}{6x}}{1 + \frac{7}{6x}} \right)^x \right)^2 = \left(\frac{e^{-\frac{11}{6}}}{e^{\frac{7}{6}}} \right)^2 = (e^{-3})^2 = e^{-6}. \end{aligned}$$

Приклад 24. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow -1} (3x + 4)^{\frac{2}{x+1}}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність 1^∞ . Замінімо $x + 1 = t$. Звідси $x = t - 1$, $t \rightarrow 0$ якщо $x \rightarrow -1$.

Тоді,

$$\lim_{x \rightarrow -1} (3x + 4)^{\frac{2}{x+1}} = \lim_{t \rightarrow 0} (3t - 3 + 4)^{\frac{2}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} (1 + 3t)^{\frac{2}{t}} = (e^3)^2 = e^6.$$

2.6. Неперервність і точки розриву функції

Функція $y = f(x)$ називається *неперервною в точці* x_0 , якщо вона визначена в околі цієї точки і в самій точці, і якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Елементарна функція неперервна в точках, у яких вона визначена.

Якщо функція не є неперервною в точці x_0 , то ця точка називається *точкою розриву*.

Якщо x_0 — точка розриву, але існують скінченні границі $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ і $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$, то вона називається *точкою розриву першого роду*. Зокрема, якщо ці границі рівні між собою, то точка x_0 називається *точкою усувного розриву*.

Якщо ж хоча б одна з границь $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ і $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ нескінченна, або не існує, то x_0 називається *точкою розриву другого роду*.

Приклад 26. Дослідити на неперервність функцію

$$y = \frac{x+4}{x^2+2}.$$

Розв'язання. Задана функція елементарна і визначена на всій числовій осі. Тому функція неперервна на множині всіх дійсних чисел R .

Приклад 27. Дослідити на неперервність функцію

$$y = \frac{x^2+5}{x-2}.$$

Розв'язання. Область визначення функції $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$. В усіх точках області визначення функція є неперервною. В точці $x=2$ функція невизначена, тому точка $x=2$ є точкою розриву. Знаходимо односторонні границі:

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^2+5}{x-2} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^2+5}{x-2} = +\infty.$$

Отже, $x=2$ – точка розриву другого роду.

Приклад 28. Дослідити на неперервність функцію

$$y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-3}.$$

Розв'язання. Область визначення функції $x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$. Функція є неперервною для $x \neq 3$, як елементарна функція. Точка $x=3$ є точкою розриву. Знаходимо односторонні границі:

оскільки $\lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{1}{x-3} = -\infty$ і $\lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{1}{x-3} = +\infty$, то маємо

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x-3} = -\frac{\pi}{2}; \quad \lim_{x \rightarrow 3+0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x-3} = \frac{\pi}{2}.$$

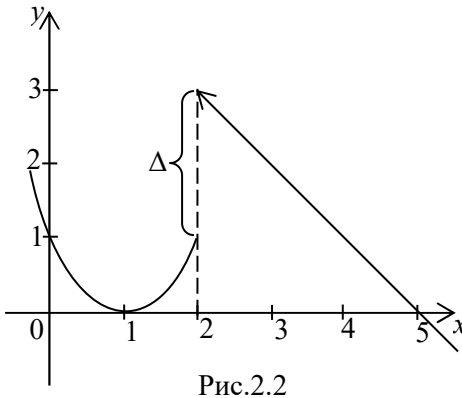
Отже, $\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3+0} f(x)$, тому точка $x=3$ є точкою розриву першого роду. При цьому величину

$$\delta = \left| \lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) - \lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) \right| = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

називають *стрибком функції*.

Приклад 29. Дослідити на неперервність функцію $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & \text{якщо } x \leq 2, \\ 5-x, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$ і побудувати її графік.

Розв'язання. Функція визначена для всіх $x \in \mathbb{R}$. Розрив можливий лише в точці $x = 2$, при переході через яку функція змінює свій аналітичний вираз.



Знаходимо односторонні границі:

$$f(2-0) = \lim_{x \rightarrow 2-0} (x-1)^2 = 1,$$

$$f(2+0) = \lim_{x \rightarrow 2+0} (5-x) = 3.$$

В точці $x = 2$ функція має скінченний розрив (розрив першого роду) (рис. 2.2). «Стрибок» функції:

$$\Delta = f(2+0) - f(2-0) = 3 - 1 = 2.$$

Приклад 30. Дослідити на неперервність функцію $y = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$.

Розв'язання. Область визначення $x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$. Точка $x = 3$ – точка розриву. Для визначення характеру розриву знаходимо односторонні границі:

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3-0} (x + 3) = 6; \quad \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3+0} (x + 3) = 6.$$

Отже, $\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+0} f(x)$, тому точка $x = 3$ є точкою усувного розриву. Щоб усунути розрив потрібно покласти,

що $y(3)=6$, тобто означити дану функцію по іншому.
Розглянемо нову функцію:

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}; & x \neq 3; \\ 6; & x = 3. \end{cases}$$

Функція $f_1(x)$ неперервна на множині всіх дійсних чисел R .

Запитання для самоконтролю

1. Наведіть першу та другу визначні границі й наслідки з них.

2. Які границі називаються односторонніми?

3. Сформулюйте означення неперервної функції в точці і на інтервалі.

4. Що таке точки розриву функції? Як вони класифікуються?

Завдання для самостійного розв'язування

Приклад 1. Обчислити границі:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \cdot \sin 2x};$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{x^2};$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{1 - \cos 2x};$

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x \cdot \arcsin 3x}{x \cdot \sin 5x};$

д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^4 x}{\operatorname{tg}^2 3x};$

е) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+8}{3x-1} \right)^{2x+3};$

є) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+1}{5x-4} \right)^{3x-2};$

ж) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+5}{4x-3} \right)^{4x+2};$

з) $\lim_{x \rightarrow 3} (7-2x)^{\frac{2}{x-3}};$

и) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(2x-1) - \ln(2x+3));$

Приклад 2. Дослідити на неперервність функції:

а) $y = \frac{\sin x}{x^4 + 1}$; б) $y = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$; в) $y = \frac{2}{x - 5}$;

г) $y = 5^{\frac{1}{x-3}}$; д) $y = \frac{2}{x^2 - 4}$.

Відповіді

1. а) $\frac{1}{2}$; б) -8 ; в) 4 ; г) $\frac{6}{5}$; д) $\frac{2}{9}$; е) e^6 ; є) e^3 ; ж) e^8 ;

з) e^{-4} ; и) -2 .

2. а) $x \in R$; б) $x = 4$ – точка усувного розриву;

в) $x = 5$ – точка розриву другого роду;

г) $x = 3$ – точка розриву другого роду;

д) $x = -2$, $x = 2$ – точки розриву другого роду.

Тести

1. Знайти область визначення функції $f(x) = \sqrt{x - 5}$

а) $x \in [5; +\infty)$;

б) $x \in (-\infty; 5]$;

в) $x \in (-5; 5)$;

г) $x \in [0; +\infty)$;

д) $x \in (5; +\infty)$.

2. Знайти область визначення функції

$f(x) = \ln(x - 2)$.

а) $x \in [2; +\infty)$;

б) $x \in (-\infty; 2]$;

в) $x \in (-2; 2)$;

з) $x \in [0; +\infty)$;

д) $x \in (2; +\infty)$.

3. Знайти область визначення функції $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

а) $x \in [1; +\infty)$;

б) $x \in (-\infty; 1]$;

в) $x \in (-1; 1)$;

з) $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$;

д) $x \in (1; +\infty)$.

4. Знайти область визначення функції $f(x) = \ln x$.

а) $x \in (-\infty, +\infty)$;

б) $x \in (-\infty, 0)$;

в) $x \in (-1; 1)$;

з) $x \in (1, +\infty)$;

д) $x \in (0; +\infty)$.

5. Знайти область визначення функції $f(x) = e^x$.

а) $x \in (-\infty, +\infty)$;

б) $x \in (-\infty, 0)$;

в) $x \in (-1; 1)$;

з) $x \in (1, +\infty)$;

д) $x \in (0; +\infty)$.

6. Значення функції $y = \ln x$ в точці $x = 1$ дорівнює

а) 1; б) 0; в) $\frac{1}{2}$; з) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) -1.

7. Значення функції $y = \ln x$ в точці $x = e^2$ дорівнює

а) 1; б) 0; в) $\frac{1}{2}$; г) 2; д) -1.

8. Функція $y = \sin \frac{1}{x-1}$ визначена на

а) $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$;

б) $(-\infty, +\infty)$;

в) $(0, +\infty)$;

г) $(-\infty, 0)$;

д) $(-1, 0)$.

9. Множиною значень функції $y = \ln x$ є

а) $x \in (-\infty, +\infty)$;

б) $x \in (-\infty, 0)$;

в) $x \in (-1; 1)$;

г) $x \in (1, +\infty)$;

д) $x \in (0; +\infty)$.

10. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} (f_1(x) + f_2(x))$, якщо $\lim_{x \rightarrow 1} f_1(x) = 2$ і

$\lim_{x \rightarrow 1} f_2(x) = 4$.

а) 1; б) 0; в) 6; г) 2; д) -1.

11. Границя $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \cos x$ дорівнює

а) 0; б) 1; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) -1.

12. Границя $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x$ дорівнює

а) 0; б) $\frac{1}{2}$; в) 1; г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) -1.

13. Границя $\lim_{x \rightarrow 1} \arctg x$ дорівнює

а) 0; б) $\frac{1}{2}$; в) 1; г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $\frac{\pi}{4}$.

14. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x + 2}$.

а) 0; б) $\frac{2}{3}$; в) 1; г) $\frac{3}{2}$; д) -1.

15. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sin^2 x$

а) 0; б) $\frac{2}{3}$; в) 1; г) $\frac{1}{4}$; д) -1.

16. Границя $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + x + x^2}{1 - x - x^2}$ дорівнює

а) 2; б) 3; в) 1; г) 5; д) -1.

17. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + x^3 - 11}{x^4 - x + 2}$

а) 2; б) 3; в) 1; г) 5; д) 0.

18. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3}{4 - x^3}$

а) -1; б) 3; в) 1; г) 5; д) 0.

19. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{2x^3 - x + 2}$.

а) -1; б) 3; в) 1; г) 5; д) 0.

20. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{3x + 2}$.

а) ∞ ; б) 3; в) 1; г) 5; д) 0.

21. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$.

а) ∞ ; б) 3; в) 1; г) 6; д) 0.

22. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}$.

а) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$; б) $\sqrt{2}$; в) 1; г) 2; д) 0.

23. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x}$.

а) ∞ ; б) 3; в) 1; г) $\frac{1}{3\sqrt{2}}$; д) 0.

24. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 6x + 5}$.

а) ∞ ; б) $-\frac{3}{2}$; в) 1; г) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; д) 0.

25. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 6x}$.

а) $\frac{5}{6}$; б) $\frac{1}{2}$; в) 1; г) -5; д) 0.

26. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+2} \right)^x$.

а) ∞ ; б) e ; в) 1; г) 3; д) 0.

27. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x+2} \right)^x$.

а) 5; б) e ; в) 2; г) 3; д) e^3 .

28. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \sqrt{x}}{x}$.

а) 5; б) 1; в) 2; г) 3; д) 0.

29. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x - x^2}$.

- а) 3;
- б) 1;
- в) 2;
- г) -1;
- д) 0.

30. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$.

- а) 0;
- б) 1;
- в) $\frac{2}{3}$;
- г) -1;
- д) 3.

31. З'ясувати характер точки розриву функції

$$f(x) = \frac{1}{x - 5}.$$

- а) $x_0 = 5$ – точка розриву першого роду;
- б) $x_0 = 5$ – точка розриву другого роду;
- в) $x_0 = 5$ – точка неперервності;
- г) $f(x)$ – неперервна на всій числовій осі;
- д) жодне із попередніх тверджень невірне.

32. З'ясувати характер точки розриву функції

$$f(x) = \frac{1}{x + 2}.$$

- а) $x_0 = -2$ – точка розриву першого роду;
- б) $x_0 = -2$ – точка розриву другого роду;
- в) $x_0 = -2$ – точка неперервності;

з) $f(x)$ – неперервна на всій числовій осі;

д) жодне із попередніх тверджень невірне.

33. Який з виразів є першою визначною границею:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$;

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$;

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x} = 1$;

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$;

д) інша відповідь.

34. Який з виразів є другою визначною границею:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$;

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{x}\right)^x = e$;

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$;

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$;

д) інша відповідь.

Відповіді

1. а). 2. д). 3. г). 4. д). 5. а). 6. б). 7. г). 8. а). 9. а) 10. в).
11. г). 12. в). 13. а). 14. б). 15. г). 16. а). 17. б). 18. а). 19. д).
20. а). 21. г). 22. а). 23. г). 24. б). 25. а). 26. б). 27. д). 28. б).
29. б). 30. в). 31. б). 32. б). 33. а). 34. в).

Розділ 3

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

3.1. Похідна функції в точці. Геометричний та фізичний зміст похідної. Правила диференціювання. Похідна складеної функції

Нехай функція $y = f(x)$ визначена у деякій точці x_0 , а x – будь-яка точка з деякого її околу.

Різницю $x - x_0 = \Delta x$ називають *приростом аргументу* x , а різницю

$\Delta y = y - y_0 = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – *приростом функції* $y = f(x)$, який відповідає приросту Δx аргументу x .

Границя відношення приросту Δy функції $y = f(x)$, до приросту Δx аргумента x , за умови, що Δx довільно прямує до нуля, називається *похідною функції в точці* $x = x_0$ і позначається одним із символів $f'(x_0)$, $y'|_{x=x_0}$,

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}.$$

Отже за означенням:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (3.1)$$

Похідна функції у довільній точці x з області її визначення позначається одним із аналогічних символів

$$f'(x), y', y'_x, \frac{dy}{dx}.$$

Якщо в деякій точці границя не існує, то у цій точці не існує і похідна функції.

Якщо ж $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \pm\infty$, то кажуть, що у цій точці

функція має нескінченну похідну.

Для знаходження похідної функції $y = f(x)$ за означенням, потрібно знайти:

1) значення функції $f(x + \Delta x)$ в точці ;

2) приріст функції $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$;

3) знайти відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$;

4) знайти границю цього відношення: $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Геометричний зміст похідної: похідна функції $f(x)$ в точці x_0 чисельно рівна кутовому коефіцієнту дотичної, праведної до графіка функції в точці $(x_0; f(x_0))$, тобто

$$f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \alpha, \quad (3.2)$$

де α – кут, утворений дотичною з додатнім напрямом осі Ox .

Дотична і нормаль до графіка функції $y = f(x)$ в точці $(x_0; f(x_0))$ задаються відповідно рівняннями:

$$y - f(x_0) = y'(x_0)(x - x_0) \text{ і } y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \quad (3.3)$$

Фізичний зміст похідної: якщо деякий процес описується функцією $f(x)$, то похідна $f'(x)$ характеризує швидкість зміни цього процесу.

Основні правила диференціювання

Нехай $u(x)$ та $v(x)$ – деякі диференційовні функції, c – стала, тоді:

$$1. c' = 0; \quad 2. (x)' = 1; \quad 3. (cu)' = cu';$$

$$4. (u \pm v)' = u' \pm v'; \quad 5. (uv)' = u'v + uv';$$

$$6. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad v \neq 0;$$

$$7. \left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c}; \quad 8. \left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}, \quad v \neq 0;$$

Правило диференціювання складеної функції. Якщо $y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$, то за означенням $y = f[\varphi(x)]$ є складною функцією, u – проміжна змінна.

Теорема. Якщо функція $u = \varphi(x)$ має похідну в точці $x = x_0$, а функція $y = f(u)$ – в точці $u_0 = \varphi(x_0)$, то складена функція $f[\varphi(x)]$ має похідну в точці $x = x_0$, причому

$$y'(x_0) = y'(u_0) \cdot u'(x_0). \quad (3.4)$$

Для довільних значень аргумента x і проміжної змінної u з області визначення відповідних функцій, дану формулу можна записати у вигляді

$$\boxed{y'_x = y'_u \cdot u'_x}. \quad (3.5)$$

Таблиця 3.1

Таблиця похідних	
<i>елементарних функцій</i>	<i>складених функцій</i>
1	2
1. $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1};$	$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u';$
2. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$	$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u';$

1	2
3. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u';$
4. $(a^x)' = a^x \ln a;$	$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u';$
5. $(e^x)' = e^x;$	$(e^u)' = e^u \cdot u';$
6. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$	$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u';$
7. $(\ln x)' = \frac{1}{x};$	$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u';$
8. $(\sin x)' = \cos x;$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u';$
9. $(\cos x)' = -\sin x;$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u';$
10. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$	$(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u';$
11. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$	$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u';$
12. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$
13. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$
14. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$	$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u';$
15. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$	$(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'.$

Функція виду $y = u^v$, де $u = u(x)$ і $v = v(x)$, називається *степенево-показниковою функцією*.

Для знаходження похідної такої функції спочатку логарифмують її обидві частини, а тоді диференціюють:

$$\ln y = \ln u^v, \Rightarrow \ln y = v \ln u,$$

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v \frac{1}{u} u', \Rightarrow y' = u^v v' \ln u + v u^{v-1} \cdot u'.$$

Зауважимо, що вираз $(\ln y)' = \frac{y'}{y}$ називається *логарифмічною похідною функції* $y = f(x)$, а такий метод знаходження похідної функції називається *логарифмічним диференціюванням*.

Приклад 1. Знайти похідну функції $y = tg 4x$ за означенням.

Розв'язання. Надаємо аргументу x деякого приросту Δx і знаходимо:

$$1) f(x + \Delta x) = tg(4x + 4\Delta x);$$

$$2) \Delta y = tg(4x + 4\Delta x) - tg 4x = \frac{\sin 4\Delta x}{\cos(4x + 4\Delta x) \cdot \cos 4x};$$

$$\text{Тут використано формулу } tg\alpha - tg\beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cos\beta};$$

$$3) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin 4\Delta x}{\Delta x \cdot \cos(4x + 4\Delta x) \cdot \cos 4x};$$

$$4) y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin 4\Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\cos(4x + 4\Delta x) \cdot \cos 4x} = \frac{4}{\cos^2 4x}.$$

Приклад 2. Знайти похідні функцій:

$$a) y = 3x^3 - 4x^2 + 5x - 3; \quad б) y = \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{5}{x^4};$$

$$в) y = 6\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x}; \quad г) y = 3^{\sin^3 4x}; \quad д) y = \sin^4 3x;$$

$$е) y = \ln \cos x; \quad є) y = (x^3 + 4x^2 - 7)^5; \quad ж) y = \cos^3 tg x;$$

$$з) y = x^3 \cos x; \quad и) y = \frac{\cos x}{1 - \sin x}; \quad i) y = \ln \sqrt[3]{\left(\frac{3x-1}{x^3+2}\right)^5};$$

$$i) y = 3^{\operatorname{ctg} 2x} + x^2 \arcsin 5x; \quad ii) y = x^{\cos x}.$$

Розв'язання

$$a) y' = (3x^3 - 4x^2 + 5x - 3)' = 9x^2 - 8x + 5.$$

б) Перетворимо дану функцію: $y = 2x^{-1} + 3x^{-2} - 5x^{-4}$, тоді

$$y' = -2x^{-2} - 6x^{-3} + 20x^{-5} = -\frac{2}{x^2} - \frac{6}{x^3} + \frac{20}{x^5}.$$

в) Увівши дробові показники, одержимо $y = 6x^{\frac{1}{3}} - 4x^{\frac{1}{4}}$,
тоді $y' = 2x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}.$

г) Використавши формулу для обчислення похідної складеної функції маємо:

$$\begin{aligned} y' &= 3^{\sin^3 4x} \ln 3 \cdot 3 \sin^2 4x \cdot \cos 4x \cdot 4 = \\ &= 12 \cdot 3^{\sin^3 4x} \ln 3 \cdot \sin^2 4x \cdot \cos 4x. \end{aligned}$$

$$д) y' = 4 \sin^3 3x \cdot \cos 3x \cdot 3 = 12 \sin^3 3x \cdot \cos 3x.$$

е) Функція $y = \ln \cos x$ – складена. Її можна записати:

$$y = \ln u, \text{ де } u = \cos x. \text{ Тоді за формулою } y'_x = \frac{1}{u} \cdot u' \text{ маємо}$$

$$y'_x = \frac{1}{\cos x} (\cos x)' = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\operatorname{tg} x.$$

є) Функція $y = (x^3 + 4x^2 - 7)^5$ є складеною функцією.

Позначимо $x^3 + 4x^2 - 7 = u$, тоді $y = u^5$. Застосувавши правило диференціювання складеної функції $y = f'_u \cdot u'_x$, маємо:

$$y' = (u^5)'_u \cdot (x^3 + 4x^2 - 7)'_x = 5u^4 \cdot (3x^2 + 8x) =$$

$$= 5(x^3 + 4x^2 - 7)^4 \cdot (3x^2 + 8x).$$

жс) Функція $y = \cos^3 \operatorname{tg} x = (\cos \operatorname{tg} x)^3$ теж є складеною функцією. Її можна записати у вигляді $y = u^3$, де $u = \cos v$, $v = \operatorname{tg} x$. Тоді за формулою $y = f'_u \cdot u'_x$ маємо

$$y = 3u^2 \cdot (-\sin v) \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = -3 \cos^2 \operatorname{tg} x \cdot \sin \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}.$$

з) Для знаходження похідної функції $y = x^3 \cos x$, використаємо формулу похідної добутку:

$$y' = 3x^2 \cos x + x^3 (-\sin x) = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x.$$

и) Користуючись правилом диференціювання частки, маємо:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{-\sin x (1 - \sin x) + \cos^2 x}{(1 - \sin x)^2} = \frac{-\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{(1 - \sin x)^2} = \\ &= \frac{1 - \sin x}{(1 - \sin x)^2} = \frac{1}{1 - \sin x}. \end{aligned}$$

і) Використавши властивості логарифмів, перепишемо

функцію $y = \ln \sqrt[3]{\left(\frac{3x-1}{x^3+2}\right)^5}$ у вигляді:

$$\begin{aligned} y &= \ln \sqrt[3]{\left(\frac{3x-1}{x^3+2}\right)^5} = \ln \left(\frac{3x-1}{x^3+2}\right)^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3} \ln \frac{3x-1}{x^3+2} = \\ &= \frac{5}{3} (\ln(3x-1) - \ln(x^3+2)). \end{aligned}$$

Тоді $y' = \frac{5}{3} (\ln(3x-1) - \ln(x^3+2))' =$

$$= \frac{5}{3} \left(\frac{1}{3x-1} (3x-1)' - \frac{1}{x^3+2} (x^3+2)' \right) =$$

$$= \frac{5}{3} \left(\frac{3}{3x-1} - \frac{3x^2}{x^3+2} \right) = \frac{5}{3x-1} - \frac{5x^2}{x^3+2}.$$

і) Функція $y = 3^{\operatorname{ctg} 2x} + x^2 \arcsin 5x$ представлена у вигляді суми двох функцій, причому перший доданок – складена функція, а другий – добуток двох функцій. Використовуючи відповідні правила диференціювання,

$$\text{маємо: } y' = (3^{\operatorname{ctg} 2x})' + (x^2 \arcsin 5x)' = 3^{\operatorname{ctg} 2x} \ln 3 (\operatorname{ctg} 2x)' +$$

$$+ (x^2)' \arcsin 5x + x^2 (\arcsin 5x)' = 3^{\operatorname{ctg} 2x} \ln 3 \left(-\frac{2}{\sin^2 2x} \right) +$$

$$+ 2x \arcsin 5x + x^2 \frac{5}{\sqrt{1-(5x)^2}} =$$

$$= -\frac{2 \ln 3 \cdot 3^{\operatorname{ctg} 2x}}{\sin^2 2x} + 2x \arcsin 5x + \frac{5x^2}{\sqrt{1-25x^2}}.$$

й) Функція $y = x^{\cos x}$ – степенєво-показникова. Для знаходження її похідної використаємо метод логарифмічного диференціювання. Логарифмуючи цю рівність, маємо:

$$\ln y = \cos x \cdot \ln x. \text{ Знайдемо похідну від обох частин цієї рівності: } (\ln y)' = \frac{y'}{y} = (\cos x \cdot \ln x)' = -\sin x \cdot \ln x + \frac{\cos x}{x}.$$

$$\text{Отже, } y' = x^{\cos x} \left(\frac{\cos x}{x} - \sin x \cdot \ln x \right).$$

Приклад 3. Написати рівняння дотичної і нормалі до графіка функції $y = e^{1-x^2}$ в точці з абсцисою $x_0 = -1$.

$$\textbf{Розв'язання.} \text{ Знаходимо } f(x_0) = f(-1) = e^{1-1} = e^0 = 1.$$

Точка $M_0(-1;1)$ є точкою дотику. Далі $y' = -2xe^{1-x^2}$; $f'(x_0) = f'(-1) = 2e^0 = 2$. Складаємо рівняння дотичної

$$y-1=2(x+1), \text{ звідки } y=2x+3, \text{ і рівняння нормалі}$$

$$y-1=-\frac{1}{2}(x+1), \text{ звідки } y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}.$$

Запитання для самоконтролю

1. Що називається приростом функції?
2. Наведіть означення похідної функції в точці.
3. Як знайти похідну функції за означенням?
4. Який геометричний та фізичний зміст похідної?
5. Наведіть основні правила диференціювання.
6. Наведіть таблицю похідних основних елементарних функцій.
7. Яка функція називається складеною?
8. Наведіть правило диференціювання складеної функції.
9. У чому полягає метод логарифмічного диференціювання?
10. Наведіть рівняння дотичної та нормалі до графіка функції.

Завдання для самостійного розв'язування

Приклад 1. Знайти похідні функцій за означенням:

а) $y = x^2 - 6x$; б) $y = \cos 5x$.

Приклад 2. Знайти похідні функцій:

а) $y = \frac{8}{\sqrt[4]{x}} - \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$; б) $y = \sqrt[4]{1 + \cos^2 x}$; в) $y = \ln(1 + \cos x)$;

г) $y = x^3 \cdot 3^{-x}$; д) $y = \ln \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; е) $y = (\ln x)^{x^2}$.

Приклад 3. Написати рівняння дотичної і нормалі до графіка функції $y = \sqrt{x}$ в точці з абсцисою $x_0 = 4$.

Відповіді

1. а) $y' = 2x - 6$; б) $y' = -5 \sin 5x$;

2. а) $y' = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$; б) $y' = -\frac{\sin 2x}{4\sqrt[4]{(1 + \cos^2 x)^3}}$;

в) $y' = -tg \frac{x}{2}$; г) $y' = 3^{-x}(3x^2 - x^3 \ln 3)$; д) $y' = \frac{1}{x(1 - x^2)}$;

е) $y' = (\ln x)^{x^2} \left(2x \ln \ln x + \frac{x}{\ln x} \right)$.

3. Рівняння дотичної: $x - 4y + 4 = 0$, а рівняння нормалі $4x + y - 18 = 0$.

3.2. Диференціал функції. Похідні вищих порядків. Похідна неявної та параметрично заданої функції. Правило Лопітала

З означення похідної $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ випливає, що

$\Delta y = y' \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, де $\alpha = \alpha(\Delta x)$ – нескінченно мала функція при $\Delta x \rightarrow 0$. Доданок $y' \cdot \Delta x$ називається диференціалом функції $y = f(x)$ і позначається dy . Таким чином $dy = y' \Delta x$ або $dy = y'(x) \Delta x$. Якщо $y = x$, то $dx = \Delta x$ і вираз для диференціала можна записати у вигляді:

$$dy = y'(x) dx. \quad (3.6)$$

При досить малих Δx справедливою є формула наближеного обчислення значення функції:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x. \quad (3.7)$$

Ця формула дозволяє замінити будь-яку функцію, диференційовну в точці x_0 , лінійною функцією, значення якої в деякому околі цієї точки близькі до значень заданої функції.

Нехай $y = f(x)$ – деяка диференційовна функція. Похідна від похідної першого порядку називається *похідною другого порядку* і позначається y'' або $f''(x)$:

$$y'' = (y')'. \quad (3.8)$$

Похідна від похідної другого порядку називається *похідною третього порядку* і позначається y''' або $f'''(x)$:

$$y''' = (y'')'. \quad (3.9)$$

Похідна n -го порядку від функції $f(x)$ називається перша похідна від похідної $(n-1)$ -го порядку:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'. \quad (3.10)$$

Зауважимо, що похідні четвертого і вище порядків позначають за допомогою римських цифр $y^{IV}, y^V, \dots$ або у вигляді $y^{(4)}, y^{(5)}, \dots, y^{(n)}$.

Нехай функція $y = f(x)$ задана неявно, тобто співвідношенням

$$F(x, y) = 0.$$

Щоб знайти похідну такої функції, її потрібно почленно продиференціювати по x , як складну функцію, та розв'язати одержане рівняння відносно y'_x .

Нехай функція $y = f(x)$ задана параметрично

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

де t – деякий параметр і в деякій області зміни параметра t функції $\varphi(t)$ та $\psi(t)$ диференційовані, причому $\varphi'(t) \neq 0$. Для похідних цієї функції по змінній x справедливі формули:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}; \quad y''_{xx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}; \quad y'''_{xxx} = \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}, \text{ і т.д.}$$

При розкритті невизначеностей виду $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$ часто

використовується *правило Лопітала*:

якщо дві функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ нескінченно малі або нескінченно великі при $x \rightarrow a$, диференційовані в околі точки $x = a$, крім, можливо самої точки a та існує скінченна або нескінченна границя $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'_1(x)}{f'_2(x)}$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'_1(x)}{f'_2(x)}.$$

Це правило справедливе також на випадок, коли $x \rightarrow \infty$.

Приклад 4. Знайти диференціал функції $y = x^2 e^{4x}$.

Розв'язання. Знаходимо похідну даної функції і помножимо її на диференціал незалежної змінної, одержимо диференціал даної функції:

$$dy = y' dx = (x^2 e^{4x})' dx = (2x e^{4x} + 4x^2 e^{4x}) dx = 2x e^{4x} (1 + 2x) dx.$$

Приклад 5. Обчислити наближено $\arctg 0,98$.

Розв'язання. Для знаходження наближеного значення функції, використаємо формулу $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x$. У нашому випадку $\arctg 0,98$ – значення функції $f(x) = \arctg x$ при $x = x_0 + \Delta x = 0,98$. Покладемо $x_0 = 1$ (значення, близьке до 0,98, при якому $\arctg x$ легко обчислюється без таблиці:

$$\arctg x_0 = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}). \text{ Тоді } \Delta x = 0,98 - 1 = -0,02.$$

Оскільки $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, то $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{2}$.

Отже, $\arctg 0,98 = \arctg(1 + (-0,02)) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(-0,02) \approx 0,7754$.

Приклад 6. Знайти похідну неявної функції $x^3 + y^3 + 3axy = 0$.

Розв'язання. Диференціюємо почленно неявно задану функцію, одержимо $3x^2 + 3y^2 y' + 3a(y + xy') = 0$, або $x^2 + y^2 y' + ay + axy' = 0$, звідки похідна $y' = -\frac{ay + x^2}{ax + y^2}$.

Приклад 7. Знайти похідні другого порядку функцій:

$$a) y = \arctg x^2; \quad б) y = \begin{cases} x = t^2; \\ y = t + t^3. \end{cases}$$

Розв'язання

a) Знаходимо послідовно похідну першого порядку

$$y' = \frac{2x}{1+x^4}; \text{ а потім похідну } y'' = \frac{2(1+x^4) - 8x^4}{(1+x^4)^2} = \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}.$$

б) Маємо параметрично задану функцію. Знайдемо спочатку похідну першого порядку. Для цього знаходимо

$$x'_t = 2t, \quad y'_t = 3t^2 + 1. \quad \text{Тоді } y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3t^2 + 1}{2t} = \frac{3}{2}t + \frac{1}{2t}. \quad \text{Для}$$

знаходження похідної другого порядку шукаємо:

$$(y'_x)'_t = \frac{3}{2} - \frac{1}{2t^2} = \frac{3t^2 - 1}{2t^2}. \quad \text{Тоді } y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{3t^2 - 1}{4t^3}.$$

Приклад 8. Користуючись правилом Лопітала, обчислити границі:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{e^{3x} - 1}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}; \quad в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3};$$

$$з) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}; \quad \partial) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}.$$

Розв'язання

а) Маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$. Для знаходження цієї границі знайдемо границю відношення похідних чисельника і знаменника:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{e^{3x} - 1} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x \cos x)'}{(e^{3x} - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x}{3e^{3x}} = \frac{1}{3}.$$

б) Маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$. Для розкриття цієї невизначеності застосуємо правило Лопітала три рази:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x} - 2x)'}{(x - \sin x)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2. \end{aligned}$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}.$$

$$з) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(1+x))'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1.$$

Запитання для самоконтролю

1. Наведіть означення похідної 2-го порядку та похідної n -го порядку функції.

2. Що називається диференціалом функції? Який його геометричний зміст?

3. Наведіть формулу застосування диференціала до наближених обчислень.

4. Як диференціюються функції неявно задані та параметрично задані?

5. Сформулюйте правило Лопітала.

Завдання для самостійного розв'язування

Приклад 1. Знайти диференціал функції $y = \arctg \frac{1}{x}$.

Приклад 2. Знайти похідні другого порядку:

$$a) y = e^{-x^2}; \quad б) y = \begin{cases} x = \arctg t; \\ y = \ln(1+t^2). \end{cases}$$

Приклад 3. За правилом Лопітала обчислити такі границі:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}.$$

Відповіді

$$1. dy = -\frac{dx}{x^2 + 1}.$$

$$2. a) y'' = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1); \quad б) y'' = 2(1+t^2).$$

$$3. a) \frac{1}{2}; \quad б) -\frac{1}{3}.$$

3.3. Монотонність і екстремуми функції. Опуклість і вгнутість графіка функції. Асимптоти

Нехай $y = f(x)$ диференційована функція на інтервалі $(a; b)$.

Зростання і спадання функції $y = f(x)$ характеризується значенням її похідної y' :

- якщо на деякому інтервалі $(a; b)$ $y' > 0$, то *функція зростає* на цьому інтервалі;
- якщо $y' < 0$ на деякому інтервалі $(a; b)$, то *функція спадає* на цьому інтервалі.

Функція може мати екстремум лише в точках, які лежать в області визначення функції і у яких похідна рівна нулю або не існує. Такі точки називаються *критичними*. Екстремум буде лише в тих критичних точках, при переході через які похідна змінює свій знак.

Тому при знаходженні інтервалів монотонності і точок екстремуму функції $y = f(x)$, потрібно:

- 1) знайти область визначення функції;
- 2) знайти похідну y' і критичні точки;
- 3) область визначення розбити критичними точками на інтервали;
- 4) визначити знаки похідної y' на кожному інтервалі;
- 5) на інтервалах, де $y' > 0$ – функція зростає, а на інтервалах де $y' < 0$ – функція спадає;
- 6) якщо при переході зліва на право через критичну точку x_0 похідна змінює знак з “+” на “–”, то x_0 – *точка максимуму*, якщо з “–” на “+”, то x_0 є *точкою мінімуму*.

Зауважимо, що якщо потрібно знайти екстремуми функції, яка має лише критичні в яких $y' = 0$ (такі точки називаються *стаціонарними*), то варто скористатись

другим правилом дослідження функції на екстремум. Для цього потрібно:

- 1) знайти стаціонарні точки функції;
- 2) знайти похідну другого порядку функції.

Якщо в стаціонарній точці $y''(x_0) > 0$, то x_0 є *точкою мінімуму*, якщо $y''(x_0) < 0$, то x_0 – *точка максимуму функції* $y = f(x)$.

Опуклість і вгнутість графіка функції $y = f(x)$ характеризується знаком її похідної другого порядку: якщо функція $y = f(x)$ має на інтервалі $(a; b)$ похідну другого порядку і $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$), то крива $y = f(x)$ *вгнута (опукла)* на цьому інтервалі.

Точка $M_0(x_0; f(x_0))$ графіка функції $y = f(x)$, яка відокремлює його опуклу частину від вгнутої або навпаки, називається *точкою перегину*.

Для знаходження інтервалів опуклості, вгнутості і абсцис точок перегину графіка функції $y = f(x)$ потрібно:

- 1) знайти точки області визначення функції $y = f(x)$ в яких друга похідна $f''(x)$ рівна нулю або не існує (*критичні точки другого роду*);

- 2) область визначення функції $y = f(x)$ розділити знайденими критичними точками на інтервали;

- 3) визначити знаки похідної $f''(x)$ на кожному інтервалі;

- 4) на інтервалах, де $f''(x) > 0$ – графік функції вгнутий, а у яких $f''(x) < 0$ – графік функції опуклий;

- 5) критичні точки другого роду при переході через які друга похідна $f''(x)$ змінює знак є абсцисами точок перегину.

Якщо при $x = a$ функція $y = f(x)$ має нескінченний розрив, тобто виконується хоча б одне зі співвідношень:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = +\infty \text{ або } -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty \text{ або } -\infty,$$

то пряма $x = a$ є *вертикальною асимптотою графіка функції* $y = f(x)$.

Якщо існують скінченні границі $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ і

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = b$ (в обох формулах одночасно $x \rightarrow +\infty$ або $x \rightarrow -\infty$), то пряма $y = kx + b$ є *похилою асимптотою графіка функції* $y = f(x)$.

Приклад 9. Знайти інтервали монотонності та екстремуми функції $y = (x + 2)\sqrt[3]{x^2}$.

Розв'язання. Функція визначена на всій числовій осі. Знаходимо похідну та критичні точки функції:

$$y = x^{\frac{5}{3}} + 2x^{\frac{2}{3}}; \quad y' = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} + \frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{5x + 4}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Похідна дорівнює нулю, якщо $x = -\frac{4}{5}$ і не існує, якщо

$x = 0$. Отже, $x = -\frac{4}{5}$, $x = 0$ – критичні точки функції. Ці

точки розбивають область визначення на три інтервали $\left(-\infty; -\frac{4}{5}\right) \cup \left(-\frac{4}{5}; 0\right) \cup (0; +\infty)$. Знаходимо знаки похідної y' в цих інтервалах і відзначимо їх на числовій прямій (рис. 3.1):

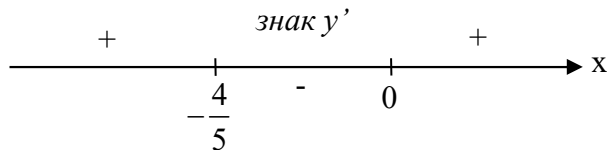


Рис. 3.1

Функція зростає для $x \in \left(-\infty; -\frac{4}{5}\right) \cup (0; +\infty)$ і спадає для $x \in \left(-\frac{4}{5}; 0\right)$. Точка $x = -\frac{4}{5}$ є точкою максимуму, а точка $x = 0$ є точкою мінімуму функції.

$$y_{\max} = y\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{6}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}; \quad y_{\min} = y(0) = 0.$$

Приклад 10. Знайти інтервали монотонності та екстремуми функції $y = \frac{(x+1)^2}{x-2}$.

Розв'язання. Функція визначена для $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$. Обчислюємо похідну цієї функції:

$$y' = \frac{2(x+1)(x-2) - (x+1)^2}{(x-2)^2} = \frac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2}.$$

З умови $y' = 0$, $(x+1)(x-5) = 0$ отримаємо критичні точки $x = -1$ і $x = 5$. Похідна y' не існує в точці $x = 2$, але вона не належить області визначення функції, тому не є критичною. Область визначення розбі'ється критичними точками на інтервали: $(-\infty; -1) \cup (-1; 2) \cup (2; 5) \cup (5; +\infty)$. Відзначимо на числовій прямій знаки похідної y' на цих інтервалах (рис. 3.2):

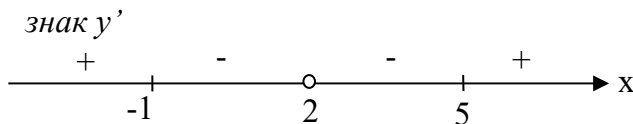


Рис. 3.2

Враховуючи знаки похідної y' на зазначених інтервалах, маємо: функція зростає для $x \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$ і спадає для $x \in (-1; 2) \cup (2; 5)$. Точка $x = -1$ є точкою максимуму, а точка $x = 5$ є точкою мінімуму функції. Обчисливши значення функції в точках $x = -1$ і $x = 5$, одержимо екстремуми функції: $y_{\max} = y(-1) = 0$ і $y_{\min} = y(5) = 12$.

Приклад 11. Дослідити на екстремум функцію $y = x^2 e^{-2x}$.

Розв'язання. Функція визначена на всій числовій прямій. Знайдемо першу похідну цієї функції:

$$y' = 2x e^{-2x} - 2x^2 e^{-2x} = 2x e^{-2x} (1 - x).$$

3 умови $y' = 0$, $x(1 - x) = 0$, $x = 0$, $x = 1$. Отже, маємо дві стаціонарні точки. Знаходимо похідну другого порядку:

$$y'' = 2e^{-2x} - 4xe^{-2x} - 4xe^{-2x} + 4x^2 e^{-2x} = 2e^{-2x} (1 - 4x + 2x^2).$$

Визначаємо знаки похідної y'' в стаціонарних точках

$$y''(0) = 2 > 0, \quad y''(1) = -\frac{2}{e^2} < 0. \quad \text{Отже в точці } x = 0 \text{ функція}$$

має мінімум, а в точці $x = 1$ – максимум, при чому

$$y_{\min} = f(0) = 0; \quad y_{\max} = f(1) = e^{-2} = \frac{1}{e^2}.$$

Приклад 12. Знайти інтервали опуклості та вгнутості і точки перегину графіка функції $y = 2 - \sqrt[3]{x-3}$.

Розв'язання. Функція визначена на всій числовій прямій. Знаходимо похідну другого порядку та критичні точки

другого

роду:

$$y' = -\frac{1}{3}(x-3)^{-\frac{2}{3}}; \quad y'' = \frac{2}{9}(x-3)^{-\frac{5}{3}} = \frac{2}{9\sqrt[3]{(x-3)^5}}.$$

Друга похідна $y'' \neq 0$, а при $x = 3$ вона не існує. Оскільки $x = 3$ належить області визначення функції, то $x = 3$ є критичною точкою другого роду. Область визначення заданої функції поділяється критичною точкою $x = 3$ на два інтервали $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

Для $x \in (-\infty; 3)$ виконується нерівність $f''(x) < 0$, тому на цьому інтервалі графік функції опуклий. Для $x \in (3; +\infty)$ виконується нерівність $f''(x) > 0$, тому на цьому інтервалі графік функції вгнутий. При переході через точку $x = 3$ похідна $f''(x)$ змінює знак, тому $x = 3$ – абсциса точки перегину, а точка $(3; 2)$ є точкою перегину графіка функції.

Приклад 13. Знайти інтервали опуклості та вгнутості і точки перегину графіка функції $y = \frac{x+4}{x-2}$.

Розв'язання. Область визначення функції $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$. Знаходимо похідну y' :

$$y' = -\frac{6}{(x-2)^2}; \quad y'' = \frac{12}{(x-2)^3}.$$

Похідна другого порядку в жодній точці області визначення не дорівнює нулю і не існує в точці $x = 2$, яка не входить в область визначення функції. Тому задана функція не має точок перегину.

Для $x \in (-\infty; 2)$ виконується нерівність: $f''(x) < 0$, тому на цьому інтервалі графік функції опуклий. Для $x \in (2; +\infty)$ виконується нерівність: $f''(x) > 0$, тому на цьому інтервалі графік функції вгнутий.

Приклад 14. Знайти інтервали опуклості та вгнутості і точки перегину графіка функції $y = x^3 - 3x^2$.

Розв'язання. Область визначення $x \in R$. Знаходимо $y'' = 6x - 6$. Похідна $y'' = 0$ при $x = 1$. Оскільки $y'' < 0$ при $x < 1$, то на інтервалі $(-\infty; 1)$ графік функції – опуклий, а при $x > 1$ – похідна $y'' > 0$, то на інтервалі $(1; +\infty)$ графік функції – вгнутий. Точка $(1; -2)$ є точкою перегину.

Приклад 15. Знайти асимптоти графіка функції $y = \frac{3x^2 - x}{x - 2}$.

Розв'язання. Функція визначена для $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$. Знаходимо односторонні границі функції в околі точки $x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{3x^2 - x}{x - 2} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{3x^2 - x}{x - 2} = +\infty.$$

Отже, точка $x = 2$ є точкою розриву другого роду функції, пряма $x = 2$ – вертикальна асимптота графіка функції.

Знайдемо похилу асимптоту. Оскільки

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 1}{x - 2} = 3,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x}{x - 2} - 3x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x}{x - 2} = 5,$$

то пряма $y = 3x + 5$ є похилою асимптотою.

Зауважимо, що знайдені границі співпадають для $x \rightarrow +\infty$ і $x \rightarrow -\infty$. В таких випадках записують $x \rightarrow \infty$. Отже, графік заданої функції має похилу асимптоту $y = 3x + 5$ на всій області визначення.

Приклад 16. Знайти асимптоти кривої $y = xe^{-2x}$.

Розв'язання. Оскільки, функція неперервна для всіх $x \in R$, то її графік немає вертикальних асимптот. Знайдемо

похилі асимптоти: $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty$, отже

при $x \rightarrow -\infty$ лівосторонньої похилої асимптоти не існує. При $x \rightarrow +\infty$ маємо:

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{2x}} = 0;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2e^{2x}} = 0.$$

(використано правило Лопітала).

Отже, при $x \rightarrow +\infty$ графік функції має правосторонню горизонтальну асимптоту $y = 0$.

Запитання для самоконтролю

1. Наведіть означення зростаючої і спадної на інтервалі функції.

2. Сформулюйте умови зростання і спадання функції.

3. Сформулюйте необхідну умову екстремуму функції.

4. Наведіть достатні умови знаходження екстремуму функції.

5. Наведіть означення опуклості, угнутості та точки перегину графіка функції.

6. Як знаходяться інтервали опуклості та угнутості і точки перегину графіка функції?

7. Що називають асимптотою графіка функції?

8. Які існують види асимптот? Як знайти їх рівняння?

Завдання для самостійного розв'язування

Приклад 1. Знайти інтервали монотонності та екстремуми функції:

$$a) y = 3 - 2x^2 - x^4; \quad б) y = x + 3\sqrt[3]{x^2}; \quad в) y = x^2 e^{-x^2}.$$

Приклад 2. Знайти інтервали опуклості та вгнутості і точки перегину графіка функції:

$$a) y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5;$$

$$б) y = x^4 - 2x^3 + 48x^2 - 50;$$

$$в) y = \ln(1 + x^2)$$

Приклад 3. Знайти асимптоти графіка функції:

$$a) y = \frac{2x}{x+2}; \quad б) y = x + \frac{1}{x}; \quad в) y = \frac{x^3}{1-x^2}.$$

Відповіді

$$1. a) y_{\max} = y(\pm 1) = 4; \quad y_{\min} = y(0) = 3;$$

$$б) y_{\max} = y(-3) = 4; \quad y_{\min} = y(0) = 0;$$

$$в) y_{\min} = y(0) = 0; \quad y_{\max} = y(2) = 4e^{-2}.$$

$$2. a) \text{ опуклий } x \in \left(-\infty; \frac{5}{3}\right), \text{ вгнутий } x \in \left(\frac{5}{3}; +\infty\right),$$

$$M_0\left(\frac{5}{3}; \frac{250}{27}\right);$$

$$б) \text{ опуклий } x \in (2; 4), \text{ вгнутий } x \in (-\infty; 2) \cup (4; +\infty),$$

$$M_1(2; 62), \quad M_2(4; 206);$$

$$в) \text{ опуклий } x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty),$$

$$\text{вгнутий } x \in (-1; 1), \quad M_1(1; \ln 2), \quad M_2(-1; \ln 2).$$

$$3. a) x = -2, \quad y = 2; \quad б) x = 0, \quad y = x; \quad в) x = -1, \quad x = 1, \\ y = -x.$$

3.4. Загальна схема дослідження функції і побудова її графіка. Найбільше та найменше значення функції на відрізку. Еластичність функції

Для повного дослідження функції та побудови графіка потрібно:

- 1) знайти область визначення функції;
- 2) знайти (якщо це можливо) точки перетину графіка з координатними осями;
- 3) дослідити функцію на періодичність, парність та непарність;
- 4) дослідити функцію на неперервність, знайти точки розриву та дослідити їх;
- 5) знайти асимптоти графіка функції;
- 6) знайти інтервали монотонності, точки екстремуму (якщо вони є) та значення функції в цих точках;
- 7) знайти інтервали опуклості, вгнутості, точки перегину (якщо вони є) графіка функції;
- 8) побудувати графік функції, враховуючи проведені дослідження.

У багатьох задачах прикладного характеру виникає потреба у знаходженні найбільшого або найменшого значення деякої величини, пов'язаною функціональною залежністю з іншою величиною: функцію $y = f(x)$, що задана на відрізку $[a; b]$. Якщо ця функція неперервна на відрізку, то вона досягає на цьому відрізку найбільшого і найменшого значення. Для знаходження цих значень потрібно:

- 1) Перевірити, чи заданий відрізок належить області визначення функції $y = f(x)$.
- 2) Знайти похідну функції.
- 3) Знайти критичні точки функції.

4) Вибрати критичні точки, що належать даному відрізку.

5) Обчислити значення функції у вибраних критичних точках і на кінцях відрізка.

6) Із знайдених значень вибрати найбільше і найменше значення функції.

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку (або інтервалі) та має на ньому *єдиний екстремум*, то у випадку *максимуму* це буде її *найбільше значення* на заданому проміжку, а у випадку *мінімуму* – *найменше*.

Еластичністю функції $y = f(x)$ називається границя відношення відносного приросту функції до відносного приросту аргументу, якщо приріст аргументу прямує до нуля:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} \right) = \frac{x}{y} \cdot f'(x).$$

Еластичність функції відображає, приблизно, на скільки відсотків зміниться значення функції $y = f(x)$, якщо незалежна змінна x зміниться на 1%.

Приклад 17. Дослідити функцію і побудувати її графік $y = \frac{x^3 - 4}{x^2}$.

Розв'язання

1. Область визначення функції $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
2. Графік перетинає вісь абсцис в точці $x = \sqrt[3]{4} \approx 1,6$.
3. Функція неперіодична, ні парна ні непарна.
4. Функція неперервна в області визначення, а в точці $x = 0$ має розрив. Обчислимо односторонні границі функції в точці $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{x^3 - 4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \left(x - \frac{4}{x^2} \right) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \left(x - \frac{4}{x^2} \right) = -\infty.$$

Отже, $x = 0$ є точкою розриву другого роду.

5. Знайдемо асимптоти графіка функції. Оскільки $\lim_{x \rightarrow 0 \pm 0} f(x) = -\infty$, то пряма $x = 0$ (вісь ординат) є вертикальною асимптотою. Знайдемо похилу асимптоту.

$$\text{Оскільки } k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4}{x^3} = 1, \text{ а}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - 4}{x^2} - x \right) = - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{2x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x^2} = 0, \text{ причому при } x \rightarrow -\infty \text{ отримаємо ті ж самі}$$

значення коефіцієнтів k і b , то пряма $y = x$ є похилою асимптотою.

6. Знайдемо похідну першого порядку функції:

$$y' = \left(\frac{x^3 - 4}{x^2} \right)' = \left(x - \frac{4}{x^2} \right)' = 1 + \frac{8}{x^3}.$$

Похідна не існує для $x = 0$, та оскільки ця точка не входить в область визначення функції, то вона не є критичною. З рівняння $y' = 0$ отримаємо критичну точку $x = -2$. Вона розбиває область визначення функції на проміжки $(-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; +\infty)$. Визначимо знаки похідної на кожному проміжку. Результати досліджень зручно записувати у вигляді таблиці 3.2.

Таблиця 3.2

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; +\infty)$
y'	+	0	-	не існує	+
y	зростає	$y_{\max} = -3$	спадає	не існує	зростає

7. Друга похідна $y'' = -\frac{24}{x^4} < 0$ всюди, крім точки $x=0$, де вона і функція не існує. Отже, графік функції опуклий на всій області визначення і точок перегину не існує.

8. Будуємо графік (рис. 3.3):

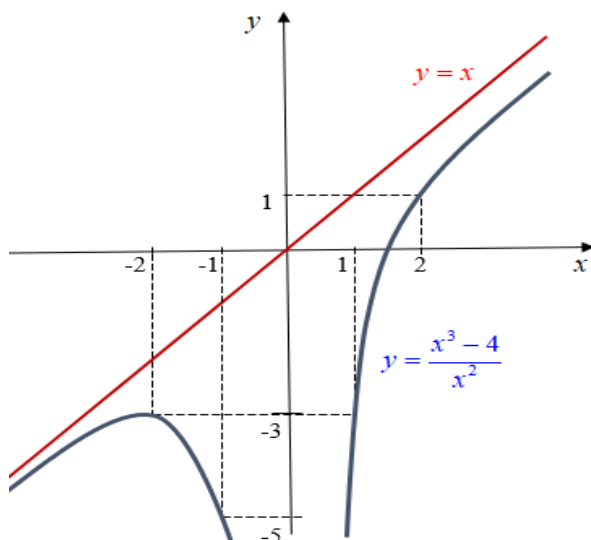


Рис. 3.3

Приклад 18. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = 2x^3 - 15x^2 + 24x - 10$ на відрізку $[0; 3]$.

Розв'язання. Знаходимо критичні точки функції:

$y' = 6x^2 - 30x + 24 = 6(x^2 - 5x + 4)$, $y' = 0$, якщо $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. Беремо критичну точку $x_1 = 1$, яка належить інтервалу $(0; 3)$. Обчислюємо $f(1) = 1$, $f(0) = -10$,

$f(3) = -19$. Порівнюючи числа $1, -10, -19$, знаходимо $y_{\text{найм.}} = f(3) = -19$, $y_{\text{найб.}} = f(1) = 1$.

Приклад 19. Знайти найбільший об'єм циліндра, вписаного в заданий конус.

Розв'язання

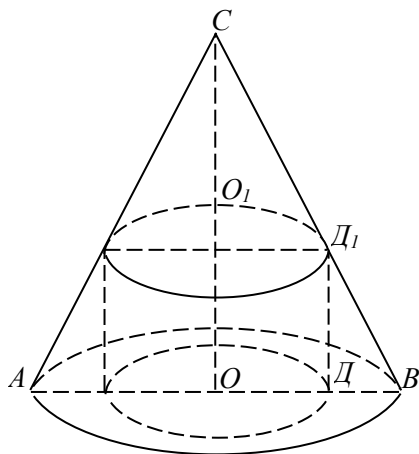


Рис. 3.4

1) Визначаємо, які величини фіксовані (відомі з умови задачі), а які змінні.

Оскільки задано конус, то $AO=R$ і $OC=H$ – фіксовані величини (рис. 3.4).

В конус можна вписати багато циліндрів, змінюючи його висоту OO_1 і радіус O_1D_1 . Тому $OO_1 = x$ і $O_1D_1 = y$ – змінні

величини (невідомі).

2) Вибираємо незалежну змінну.

Нехай висота циліндра $OO_1 = x$ – незалежна змінна – аргумент, причому $x \in [0; H]$.

3) За умовою задачі визначаємо функцію двох змінних $z = f(x; y)$.

У нашому випадку об'єм циліндра $V = V(x; y) = \pi xy^2$ – шукана функція.

4) Виражаємо одну змінну через іншу.

Для нашого випадку виразимо змінну y через змінну x .

З подібності трикутників BOC і D_1O_1C випливає, що $\frac{R}{y} = \frac{H}{H-x}$, $y = \frac{R(H-x)}{H}$.

Тоді $V = \pi x \left(\frac{R(H-x)}{H} \right)^2 = \frac{\pi R^2}{H^2} x(H-x)^2$ – досліджувана функція.

5) Знаходимо критичні точки знайденної функції.

$$V'(x) = \frac{\pi R^2}{H^2} \left((H-x)^2 - 2x(H-x) \right) = \frac{\pi R^2}{H^2} (H-x)(H-3x).$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = H \text{ і } x_2 = \frac{H}{3}.$$

Оскільки при $x < \frac{H}{3}$ $V'(x) > 0$, а при $x > \frac{H}{3}$

$V'(x) < 0$ то в точці $x = \frac{H}{3}$ – функція має максимум.

Отже, максимальний об'єм циліндра

$$V = V\left(\frac{H}{3}\right) = \frac{\pi R^2}{H^2} \cdot \frac{H}{3} \left(H - \frac{H}{3}\right)^2 = \frac{4}{27} \pi R^2 H.$$

Приклад 20. Визначити розміри консервної банки циліндричної форми із заданим об'ємом V , за яких затрати матеріалу на її виготовлення будуть найменші.

Розв'язання. Якщо r – радіус основи, h – висота циліндра, то затрати матеріалу, тобто повну поверхню циліндра, можна визначити за формулою $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$.

Банка має заданий об'єм $V = \pi r^2 h$, звідки $h = \frac{V}{\pi r^2}$. Тому,

отримаємо $S(r) = 2\left(\frac{V}{r} + \pi r^2\right)$, $0 < r < +\infty$. Знаходимо похідну та критичні точки функції $S(r)$:

$S'(r) = 2\left(-\frac{V}{r^2} + 2\pi r\right)$, з умови $S'(r) = 0$, маємо $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ – критична точка. Оскільки $S''(r) = 2\left(\frac{2V}{r^3} + 2\pi\right)$ в критичній точці додатна, то в точці $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ функція $S(r)$ має мінімум, а тому і найменше значення. Підставимо знайдене значення r у формулу для h , будемо мати $h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$. Отже, якщо $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, $h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$, то при заданому об'ємі V на виготовлення банки потрібно найменше матеріалу. (В цьому випадку $h = 2r$).

Приклад 21. Подати число 66 у вигляді суми двох доданків так, щоб добуток цих чисел був найбільшим.

Розв'язання. Нехай одне із задуманих чисел x , а друге – y . За умовою задачі $x + y = 66$, звідки $y = 66 - x$. Добуток чисел $P = xy = x(66 - x) = 66x - x^2$ – досліджувана функція.

Знаходимо $P'(x) = 66 - 2x$. $P'(x) = 0$ при $x = 33$. Ця точка буде критичною. Оскільки $P''(x) = -2 < 0$, то в точці $x = 33$ досліджувана функція має максимум. При цьому $y = 66 - x = 66 - 33 = 33$.

Отже, добуток чисел буде найбільшим, якщо $x = y = 33$.

Приклад 22. Знайти еластичність функції $y = xe^{-x^2}$ та обчислити її значення в точках $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

Розв'язання. Знаходимо похідну функції:

$$y' = e^{-2x} - 2x^2 e^{-x^2} = e^{-x^2} (1 - 2x^2).$$

Тоді $E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot f'(x) = \frac{x}{x \cdot e^{-x^2}} \cdot e^{-x^2} (1 - 2x^2) = 1 - 2x^2$.

Для заданих значень аргументу, маємо: $E_1(y) = -1$;
 $E_2(y) = -7$.

Запитання для самоконтролю

1. Наведіть схему загального дослідження функції і побудови графіків.
2. Як знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку?
3. Що називається еластичністю функції?

Завдання для самостійного розв'язування

Приклад 1. Знайти найбільше і найменше значення функції на заданих проміжках:

а) $y = x^4 - 2x^2 + 5$, $[-2; 2]$; б) $y = x + 2\sqrt{x}$, $[0; 4]$.

Приклад 2. Дослідити функцію $y = \frac{2+x^3}{x^2}$ і побудувати її графік.

Приклад 3. Знайти еластичність функції $y = x^3 + 1$ та обчислити її значення в точках $x_1 = 1$, $x_2 = 5$.

Відповіді

1. а) 13 і 4; б) 8 і 0.
2. Функція зростає для $x \in (-\infty; 0) \cup (\sqrt[3]{4}; +\infty)$, спадає для $x \in (0; \sqrt[3]{4})$; $y_{\min} = f(\sqrt[3]{4}) \approx 2,3$; графік вгнутий

$x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; точок перегину немає; асимптоти:
 $x = 0, y = x$.

3. $E_x(y) = \frac{3x^3}{x^3 + 1}, E_1(y) = 1,5, E_5(y) \approx 2,97$.

Тести

1. Похідною функції в точці x_0 називається:

- а) границя відношення приросту функції в точці x_0 до приросту аргументу в цій же точці, якщо останній прямує до нескінченності;
- б) границя відношення приросту функції в точці x_0 до приросту аргументу в цій же точці, якщо останній прямує до нуля;
- в) граничне відношення x_0 до приросту аргументу в цій же точці, якщо останній прямує до нуля;
- г) відношення приросту функції в точці x_0 до приросту аргументу в цій же точці, якщо останній прямує до нуля;
- д) немає правильної відповіді.

2. Механічний зміст похідної:

- а) величина миттєвої швидкості в момент часу t_0 дорівнює значенню похідної від шляху у точці t_0 , тобто $v(t_0) = s'(t_0)$;
- б) величина миттєвого прискорення в момент часу t_0 дорівнює значенню похідної від шляху у точці t_0 , тобто $a(t_0) = s'(t_0)$;

в) похідна функції $f(x)$ у точці x_0 ($f'(x_0)$) є значенням кутового коефіцієнта січної до кривої $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 ;

з) похідна дає можливість розв'язувати задачі на знаходження площі криволінійної трапеції;

д) немає правильної відповіді.

3. Геометричний зміст похідної:

а) величина миттєвої швидкості в момент часу t_0 дорівнює значенню похідної від шляху у точці t_0 , тобто $v(t_0) = s'(t_0)$;

б) величина миттєвого прискорення в момент часу t_0 дорівнює значенню похідної від шляху у точці t_0 , тобто $a(t_0) = s'(t_0)$;

в) похідна функції $f(x)$ у точці x_0 ($f'(x_0)$) є значенням кутового коефіцієнта k дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 ;

з) похідна дає можливість розв'язувати задачі на знаходження площі криволінійної трапеції;

д) немає правильної відповіді.

4. Для функції $y = f(x)$ вибрати рівняння дотичної в точці x_0 :

а) $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$;

б) $y - f(x_0) = f(x_0)(x - x_0)$;

в) $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$;

з) $x - x_0 = f'(x_0)$;

$$\partial) y - f(x_0) = -f'(x_0)(x - x_0).$$

5. Для функції $y = f(x)$ вибрати рівняння нормалі в точці x_0 :

$$a) y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0);$$

$$б) y - f(x_0) = f(x_0)(x - x_0);$$

$$в) y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0);$$

$$г) x - x_0 = f'(x_0);$$

$$\partial) y - f(x_0) = -f'(x_0)(x - x_0).$$

6. Диференціал dy функції $y(x)$ дорівнює:

$$a) y \cdot dx; \quad б) y' \cdot dx; \quad в) y' \cdot dy; \quad г) \frac{dy}{dx}; \quad \partial) \frac{dx}{dy}.$$

7. Вибрати правильну відповідь для похідної від функції $y = x^\alpha$:

$$a) \alpha x^{\alpha+1}; \quad б) x^{\alpha+1}; \quad в) \frac{dx}{dy}; \quad г) \frac{dy}{dx}; \quad \partial) \alpha x^{\alpha-1}.$$

8. Вибрати правильну відповідь для похідної від функції $y = 2x + 1$:

$$a) x^2; \quad б) x; \quad в) x + 1; \quad г) 2; \quad \partial) 1.$$

9. Вибрати правильну відповідь для похідної від функції $y = 7x^3 + 3\cos x - 1$:

$$a) 21x^2 - 3\sin x;$$

$$б) 21x^2 + 3\sin x;$$

$$в) 7x^2 - 3\sin x;$$

$$г) x^2 - 3\sin x;$$

$$\partial) x^2 + 3\sin x.$$

10. Похідна функції $y = 1 + 2x^2 + 3x^4$ в точці $x = 0$ дорівнює:

а) -1; б) 3; в) 1; г) 2; д) 0.

11. Похідна функції $y = x - 2x^2 - 3x^3 + 2\cos x$ в точці $x = 0$ дорівнює:

а) -1; б) 3; в) 1; г) 2; д) 0.

12. Похідна функції $y = 10 + x + x^2 + x^3 + x^4$ в точці $x = 1$ дорівнює:

а) 10; б) 5; в) 1; г) 2; д) 0.

13. Похідна функції $y = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$ в точці $x = 1$ дорівнює:

а) 15; б) 5; в) 4; г) 2; д) 0.

14. Знайти похідну функції $y = (5x - 1)^4$.

а) $(5x - 1)^4$;

б) $(5x - 1)^3$;

в) $5(5x - 1)^4$;

г) $20(5x - 1)^3$;

д) $4(5x - 1)$.

15. Знайти похідну функції $y = 10^{\sin x}$.

а) $10^{\sin x}$;

б) $10^{\sin x} \ln 10 \cos x$;

в) $10^{\cos x}$;

г) $10^{\sin x} \ln 10$;

д) $\ln 10$.

16. Знайти похідну функції $y = x \ln x$.

а) $\ln x + 1$;

б) $\ln x - 1$;

в) $\ln x$;

г) $x \ln x$;

д) 10.

17. Знайти похідну функції $y = x 2^x$.

а) $2^x - x 2^x \ln 2$;

б) $x 2^x \ln 2$;

в) $2^x + x 2^x \ln 3$;

г) 2^x ;

д) $2^x + x 2^x \ln 2$.

18. Похідна функції $y = \sin(\sqrt{x} + 1)$ дорівнює:

а) $\sin(\sqrt{x} + 1)$;

б) $\frac{\cos(\sqrt{x} + 1)}{2\sqrt{x}}$;

в) $\sin \sqrt{x}$;

г) $\cos(\sqrt{x} + 1)$;

д) $-\cos \sqrt{x}$.

19. Похідна функції $y = \cos e^x$ дорівнює:

а) $-e^x \sin e^x$;

б) $-\sin e^x$;

в) $-e^x \cos e^x$;

г) e^x ;

д) $e^x \sin e^x$.

20. Знайти y' , якщо $y = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$:

а) $\frac{2x + 3}{\sqrt{x^2 + 3x + 2}}$;

б) $\frac{1}{2\sqrt{x^2 + 3x + 2}}$;

- в) $\frac{1}{2\sqrt{2x+3}}$;
 з) $\frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+2}}$;
 д) $\frac{x}{2\sqrt{x^2+3x+2}}$.

21. Похідна функції $y = 2^{\operatorname{tg} x}$ дорівнює:

- а) $\frac{\operatorname{tg} x \cdot 2^{\operatorname{tg} x-1}}{\cos^2 x}$;
 б) $-\frac{2^{\operatorname{tg} x} \sin x}{\cos^2 x}$;
 в) $\frac{2^{\operatorname{tg} x} \ln 2}{\cos^2 x}$;
 з) $\frac{2^{\operatorname{tg} x} \ln 2}{\sin^2 x}$;
 д) $\frac{2^{\operatorname{tg} x}}{\sin^2 x}$.

22. Похідна функції $y = \sin^3 2x$ дорівнює:

- а) $\sin^4 2x$;
 б) $6 \sin^2 2x \cos 2x$;
 в) $\cos^3 2x$;
 з) $-\cos^3 2x$;
 д) $\cos 2x$.

23. Знайти похідну функції $y = \sin^2 x$ в точці $x = 2\pi$.

- а) 0; б) π ; в) 2π ; з) $-\pi$; д) -2π .

24. Знайти похідну функції $y = \cos^2 x$ в точці $x = 2\pi$.

- а) -2π ; б) π ; в) 2π ; з) $-\pi$; д) 0.

25. Знайти значення похідної функції $y = \frac{\cos x}{x^2 + 1}$ в

точці $x = 0$.

а) -2π ; б) π ; в) 2π ; г) 0 ; д) $-\pi$.

26. Знайти значення похідної функції $y = (5 + 2 \ln x)^3$ в точці $x = 1$.

а) 125; б) 175; в) 150; г) 100; д) 250.

27. Похідна функції $y = \frac{\sin^2 x}{\cos x}$ дорівнює:

а) $\frac{2 \sin x \cos^2 x + \sin^3 x}{\cos^2 x}$;

б) $\frac{2 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x}{\cos^2 x}$;

в) $\frac{\cos^3 x - \sin^3 x}{\cos^2 x}$;

г) $\frac{2 \sin x \cos x - \sin^2 x}{\cos x}$;

д) $\frac{2 \sin x \cos^2 x + \sin^3 x}{\cos x}$.

28. Знайти значення похідної функції $y = \frac{\cos x + 1}{x^2 + 1}$ в

точці $x = 0$

а) 0; б) 1; в) 2; г) 3; д) 4.

Відповіді

1. б). 2. а). 3. в). 4. а). 5. в). 6. б). 7. д). 8. г). 9. а). 10. д).
11. в). 12. а). 13. а). 14. г). 15. б). 16. а). 17. д). 18. б). 19. а).
20. г). 21. в). 22. б). 23. а). 24. д). 25. г). 26. в). 27. а). 28. а).

Розділ 4

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

4.1. Функція двох змінних та її область визначення. Частинні і повний прирости функції двох змінних. Частинні похідні

Нехай дано три змінні величини $x, y, z \in R$.

Якщо кожній парі (x, y) значень двох змінних x і y з множини $D \subset R^2$ (Oxy) за певним правилом відповідає одне цілком визначене значення змінної z з множини Z , то між змінними x, y і z існує функціональна залежність, яку записують:

$$z = f(x, y).$$

Змінну z називають функцією, а змінні x і y – незалежними змінними або аргументами.

Аналогічно визначається функція трьох змінних. Оскільки кожній парі чисел $(x; y)$ відповідає єдина точка $M(x, y)$ площини Oxy , то функцію $z = f(x, y)$ можна розглядати як функцію координат точки й писати $z = f(M)$.

Множина D називається областю визначення функції. Тобто областю визначення функції $z = f(x, y)$ є множина пар чисел $(x; y)$, яким відповідають дійсні значення цієї функції. Геометрично, область визначення функції двох змінних є нескінченною або скінченною частиною координатної площини Oxy , обмеженої однією або декількома кривими.

Функція двох змінних $z = f(x, y)$ задає в просторі деяку поверхню. Також функцію $z = f(x, y)$ можна задати

лініями рівня, рівняння яких визначаються:

$$f(x, y) = C,$$

де C – константа (C взято з множини значень функції).

Якщо константи $C_1, C_2, \dots, C_m, \dots$ утворюють арифметичну прогресію, то отримаємо набір ліній рівня.

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $M(x, y)$. Надамо змінній x приріст Δx , а змінній y приріст Δy так, щоб точки $M_1(x + \Delta x, y)$ і $M_2(x, y + \Delta y)$ належали даному околу.

Різницю $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ називають *частинним приростом функції по змінній x* , а

різницю $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$ – *частинним приростом функції по змінній y* .

Величину $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ називають *повним приростом функції*.

Частинні похідні по змінних x та y для функції $z = f(x, y)$ визначаються відповідно формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y) = z'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}, \quad (y = \text{const}); \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y) = z'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}, \quad (x = \text{const}). \quad (4.2)$$

При обчисленні частинних похідних функції двох змінних використовуються вже відомі формули та правила диференціювання функції однієї змінної.

Приклад 1. Знайти область визначення функції $z = \ln(9 - x^2 - y^2)$.

Розв'язання. Функція має дійсні значення, якщо $9 - x^2 - y^2 > 0$ або $x^2 + y^2 < 9$. Областю визначення даної функції є внутрішня частина круга радіуса $R = 3$ з центром

в початку координат. Ця область є відкритою (не містить точок межі області визначення) і обмеженою.

Приклад 2. Знайти область визначення функції $z = \sqrt{4-x^2} + \sqrt{1-y^2}$.

Розв'язання. Перший доданок функції визначений при $4-x^2 \geq 0$ або $-2 \leq x \leq 2$. Другий доданок має дійсні значення, якщо $1-y^2 \geq 0$ або $-1 \leq y \leq 1$. Областю визначення функції є прямокутник $-2 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 1$, який включає в себе і межу області. Область замкнута і обмежена.

Приклад 3. Знайти лінії рівня функції $z = x^2 + y^2$.

Розв'язання. Лінії рівня цієї функції визначає рівняння $x^2 + y^2 = C$, $0 \leq C < +\infty$. Надамо C різних значень, отримаємо множину ліній рівня, які є концентричними колами з центром в початку координат і радіусами $R = \sqrt{C}$. Якщо $C = 0$, то коло вироджується в точку $O(0; 0)$.

Приклад 4. Знайти частинні та повний прирости функції $z = x^2 + y^2$ в точці $M_0(2; 1)$ при $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = 0,2$.

Розв'язання. Повний приріст функції:

$$\begin{aligned}\Delta_x z(M_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = \left((2+0,1)^2 + 1^2\right) - \\ &- (2^2 + 1^2) = (2,1^2 + 1) - (4 + 1) = 4,41 + 1 - 4 - 1 = 0,41.\end{aligned}$$

Частинні прирости:

$$\begin{aligned}\Delta_x z(M_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = \\ &= \left((2+0,1)^2 + 1^2\right) - (2^2 + 1^2) = \\ &= (2,1^2 + 1) - (4 + 1) = 4,41 + 1 - 4 - 1 = 0,41;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_y z(M_0) &= f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ &= \left(2^2 + (1+0, 2)^2\right) - (2^2 + 1^2) = \\ &= (4+1, 44) - (4+1) = 4+1, 44 - 4 - 1 = 0, 44.\end{aligned}$$

Приклад 5. Знайти частинні похідні першого порядку функцій:

а) $z = 3x^2y + 5x\sqrt{y} + 2$; б) $z = \arcsin(x^2y)$;

в) $z = x^y + \sqrt{2x+3y}$; г) $z = \arctg \frac{x}{y}$.

Розв'язання.

а) $z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = (3x^2y + 5x\sqrt{y} + 2)'_x = |y = \text{const}| =$
 $= 3y \cdot 2x + 5\sqrt{y} \cdot 1 + 0 = 6xy + 5\sqrt{y};$

$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = (3x^2y + 5x\sqrt{y} + 2)'_y = |x = \text{const}| =$
 $= 3x^2 \cdot 1 + 5x \frac{1}{2\sqrt{y}} + 0 = 3x^2 + \frac{5}{2\sqrt{y}}.$

б) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2y)^2}} (x^2y)'_x = \frac{2xy}{\sqrt{1-x^4y^2}};$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2y)^2}} (x^2y)'_y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4y^2}}.$

в) $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1} + \frac{x}{\sqrt{2x+3y}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x + \frac{3}{2\sqrt{2x+3y}}.$

г) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2+y^2};$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Приклад 6. Знайти частинні похідні: $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$

функції $u = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}$.

Розв'язання

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2 \sin x \cos x}{2\sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}} = \frac{\sin 2x}{2\sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\sin 2y}{2\sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\sin 2z}{2\sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}}.$$

Запитання для самоконтролю

1. Наведіть означення функції двох змінних.
2. Що називається областю визначення функції двох змінних?
3. Що називається повним приростом функції двох змінних?
4. Як визначаються частинні прирости функції двох змінних по змінних x та y ?
5. Наведіть означення частинних похідних функції двох змінних.

Завдання для самостійного розв'язування

Приклад 1. Знайти область визначення функцій:

а) $z = 1 + \sqrt{-(x-y)^2}$; б) $z = \ln(x+y)$; в) $z = \ln(x^2 + y)$.

Приклад 2. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$:

а) $z = \frac{1}{2}x^3y^2 + 3x^2y - 2xy + 3x + y^2 - 4$;

б) $z = \arctg \frac{y}{x}$;

в) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$.

Відповіді

1. а) бісектриса $y = x$;

б) півплощина, розміщена над прямою $x + y = 1$ ($x + y > 0$);

в) частина площини, розміщеної вище параболи $y = -x^2$ ($x^2 + y > 0$).

2. а) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3}{2}x^2y^2 + 6xy - 2y + 3$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^3y + 3x^2 - 2x + 2y$;

б) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$;

в) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} \left(x + \sqrt{x^2 + y^2} \right)}$.

4.2. Частинні похідні вищих порядків. Повний диференціал функції двох змінних. Похідна за напрямом і градієнт функції трьох змінних

Частинними похідними другого порядку від функції $z = f(x, y)$ називають частинні похідні від її перших похідних:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = f''_{xx}(x; y) = z''_{xx}; \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = f''_{yy}(x; y) = z''_{yy}; \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = f''_{xy}(x; y) = z''_{xy}; \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = f''_{yx}(x; y) = z''_{yx}. \quad (4.6)$$

Частинні похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ називаються

мішаними частинними похідними другого порядку.

Якщо функція $z = f(x, y)$ і її частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$,

$\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ визначені й неперервні в точці $M(x, y)$ і

в деякому її околі, то в цій точці *мішані частинні похідні рівні:*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}. \quad (4.7)$$

Нехай функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M(x; y)$, тобто $\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y$, де $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y)$ і $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y)$ нескінченно малі при $\Delta x \rightarrow 0$ і $\Delta y \rightarrow 0$.

Головна лінійна відносно приростів Δx і Δy частина повного приросту Δz функції $z = f(x, y)$ в точці $M(x, y)$ називається повним диференціалом функції й позначається dz .

Тобто за означенням: $dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$.

Оскільки $\Delta x = dx$, а $\Delta y = dy$, то повний диференціал функції запишеться:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \quad (4.8)$$

Для досить малих Δx та Δy диференційовної в точці $M_0(x_0; y_0)$ функції $z = f(x, y)$ має місце *формула для наближених обчислень функцій*:

$$f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) \approx f(x_0; y_0) + \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial y} \cdot \Delta y. \quad (4.9)$$

Нехай функція $z = F(u, v)$, де $u = u(x, y)$, а $v = v(x, y)$. Тоді функція $z = F[u(x, y), v(x, y)]$ є складеною функцією змінних x і y , де u та v – проміжні змінні. Частинні похідні по змінних x та y відповідно визначаються:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}. \end{cases} \quad (4.10)$$

Якщо $z = F(u, v)$, а $u = u(x)$, $v = v(x)$, то складена функція $z = F[u(x), v(x)]$ є функцією від однієї змінної x . Повна похідна такої функції визначається за формулою:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}. \quad (4.11)$$

Зокрема, якщо $z = F(x, y)$, а $y = f(x)$, то складена функція $z = F[x, f(x)]$ є теж функцією однієї змінної x . Її повна похідна визначається:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}. \quad (4.12)$$

Якщо змінні x та y пов'язані рівнянням $F(x, y) = 0$, що не розв'язане відносно y , тобто функція $y = f(x)$ задана неявно, то її похідна визначається за формулою

$$y' = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}. \quad (4.13)$$

Нехай функція $u = f(x, y, z)$ визначена в точці $M(x; y; z)$ і в деякому її околі. Проведемо з точки $M(x; y; z)$ вектор $\vec{l}$, напрямні косинуси якого: $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$. На векторі $\vec{l}$ на відстані Δl від його початку візьмемо точку $M_1(x + \Delta x; y + \Delta y; z + \Delta z)$. Обчислимо приріст $\Delta_{\vec{l}} u$ функції $f(x, y, z)$ при переході від точки M до M_1 в напрямку вектора $\vec{l}$: $\Delta_{\vec{l}} u = f(M_1) - f(M)$.

Якщо існує границя $\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta_{\vec{l}} u}{\Delta l}$, то її називають похідною функції $u = f(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$ за напрямом вектора $\vec{l}$ і позначають $\frac{\partial u}{\partial l}$.

Похідну за напрямком обчислюють за формулою:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma. \quad (4.14)$$

Зауважимо, що частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$

обчислені в заданій точці $M(x; y; z)$.

Градiєнтом функції $u = f(x, y, z)$ в точці $M(x; y; z)$ називається вектор, координатами якого є значення частинних похідних цієї функції в точці $M(x; y; z)$ і позначають $\overrightarrow{\text{grad } u}$. Отже,

$$\overrightarrow{\text{grad } u} = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}. \quad (4.15)$$

Градiєнт вказує напрям максимального зростання функції:

$$\max \frac{\partial u}{\partial l} \Big|_M = |\overrightarrow{\text{grad } u}|_M. \quad (4.16)$$

Приклад 1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

функції $z = x^2 y + \ln(2x + y)$.

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + \frac{2}{2x + y}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + \frac{1}{2x + y}.$$

Частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y - \frac{4}{(2x + y)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{(2x + y)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x - \frac{2}{(2x + y)^2}.$$

Приклад 2. Для функції $z = 3xy + 5x^3 - 3y^2 + 7$ знайти значення частинних похідних другого порядку в точці $M_0(2;1)$.

Розв'язання

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = \left| y = \text{const} \right| = 3y \cdot 1 + 15x^2 - 0 = 3y + 15x^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = \left(z'_x \right)'_x = \left| y = \text{const} \right| = \left(3y + 15x^2 \right)'_x = 30x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0) = 30 \cdot 2 = 60;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = \left| x = \text{const} \right| = 3x \cdot 1 + 0 - 3 \cdot 2y + 0 = 3x - 6y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = \left(z'_y \right)'_y = \left| x = \text{const} \right| = \left(3x - 6y \right)'_y = 0 - 6 \cdot 1 = -6;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = \left(z'_x \right)'_y = \left(3y + 15x^2 \right)'_y = 3 \cdot 1 + 0 = 3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx} = \left(z'_y \right)'_x = \left(3x - 6y \right)'_x = 3 \cdot 1 - 0 = 3.$$

Приклад 3. Знайти $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, якщо $z = \sin(xy)$.

Розв'язання. Знаходимо послідовно $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cos(xy); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos(xy) - xy \sin(xy);$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} &= -x \sin(xy) - x \sin(xy) - x^2 y \cos(xy) = \\ &= -2x \sin(xy) - x^2 y \cos(xy)\end{aligned}$$

Приклад 4. Показати, що функція $u = e^{\frac{x}{y}}$ задовольняє рівняння: $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ і

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, та підставимо їх значення у ліву частину заданого рівняння:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{x}{y^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = e^{\frac{x}{y}} \left(-\frac{x}{y^3} \right) - \frac{1}{y^2} e^{\frac{x}{y}}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = e^{\frac{x}{y}} \left(\frac{1}{y} + \frac{x}{y^2} - \frac{x}{y^2} - \frac{1}{y} \right) = 0.$$

Рівність виконується.

Приклад 5. Знайти повний диференціал dz функції $z = x^y$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$$

Тоді за формулою $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ маємо:

$$dz = yx^{y-1} dx + x^y \ln x dy.$$

Приклад 6. Обчислити наближено $1,02^{3,04}$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x, y) = x^y$ в околі точки $(1; 3)$. Введемо позначення: $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, де $x_0 = 1$, $y_0 = 3$, $\Delta x = 0,02$ і $\Delta y = 0,04$.

Для обчислення $f(1,02; 3,04)$ використаємо формулу

$$(2). \text{ Оскільки } f(1; 3) = 1^3 = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}; \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1; 3) = 3 \cdot 1^{3-1} = 3,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1; 3) = 1^3 \ln 1 = 0, \text{ то}$$

$$1,02^{3,04} \approx 1 + 3 \cdot 0,02 + 0 \cdot 0,04 \approx 1,06.$$

Приклад 7. Знайти частинні похідні складеної функції $z = \sin(2u + 3v)$, де $u = x^y$, $v = y^x$.

Розв'язання. Знайдемо всі частинні похідні від заданих функцій:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \cos(2u + 3v) \cdot (2 \cdot 1 + 0) = 2 \cos(2u + 3v),$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \cos(2u + 3v) \cdot (0 + 3 \cdot 1) = 3 \cos(2u + 3v),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = y^x \ln y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x \cdot y^{x-1}.$$

За формулою (3) маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 \cos(2u + 3v) y \cdot x^{y-1} + 3 \cos(2u + 3v) y^x \ln y =$$

$$= \cos(2u + 3v) (2y \cdot x^{y-1} + 3y^x \ln y) =$$

$$= \cos(2x^y + 3y^x) (2y \cdot x^{y-1} + 3y^x \ln y),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2 \cos(2u + 3v) x^y \ln x + 3 \cos(2u + 3v) x \cdot y^{x-1} =$$

$$\begin{aligned}
&= \cos(2u + 3v) \left(2x^y \ln x + 3x \cdot y^{x-1} \right) = \\
&= \cos(2x^y + 3y^x) \left(2x^y \ln x + 3x \cdot y^{x-1} \right).
\end{aligned}$$

Приклад 8. Знайти $\frac{dz}{dx}$, якщо $z = tg \frac{u}{v}$, де $u = 7x^2 + 2$, $v = \sqrt{5x-3}$.

Розв'язання.
$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{\cos^2 \frac{u}{v}} \cdot \frac{1}{v} = \frac{1}{v \cos^2 \frac{u}{v}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{\cos^2 \frac{u}{v}} \cdot u \cdot \left(-\frac{1}{v^2} \right) = -\frac{u}{v^2 \cos^2 \frac{u}{v}},$$

$$\frac{du}{dx} = 7 \cdot 2x + 0 = 14x, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{5x-3}} \cdot (5 \cdot 1 - 0) = \frac{5}{2\sqrt{5x-3}}.$$

За формулою (4) маємо:

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dx} &= \frac{1}{v \cos^2 \frac{u}{v}} \cdot 14x + \left(-\frac{u}{v^2 \cos^2 \frac{u}{v}} \right) \cdot \frac{5}{2\sqrt{5x-3}} = \\
&= \frac{1}{v^2 \cos^2 \frac{u}{v}} \left(14xv - 5u \cdot \frac{1}{2\sqrt{5x-3}} \right) = \\
&= \frac{1}{(5x-3) \cos^2 \frac{7x^2+2}{\sqrt{5x-3}}} \left(14x\sqrt{5x-3} - \frac{5(7x^2+2)}{2\sqrt{5x-3}} \right) = \\
&= \frac{28x(5x-3) - 5(7x^2+2)}{2\sqrt{(5x-3)^3} \cos^2 \frac{7x^2+2}{\sqrt{5x-3}}} = \frac{140x^2 - 84x - 35x^2 - 10}{2\sqrt{(5x-3)^3} \cos^2 \frac{7x^2+2}{\sqrt{5x-3}}} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{105x^2 - 84x - 10}{2\sqrt{(5x-3)^3} \cos^2 \frac{7x^2+2}{\sqrt{5x-3}}}.$$

Приклад 9. Знайти $\frac{dz}{dx}$, якщо $z = x^y$, а $y = x^2$.

Розв'язання

Оскільки $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$, $\frac{dy}{dx} = 2x$, то за

формулою (5) маємо:

$$\frac{dz}{dx} = yx^{y-1} + x^y \ln x \cdot 2x = \left| y = x^2 \right| = x^{x^2+1} (1 + 2 \ln x).$$

Приклад 10. Знайти похідну неявної функції $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

Розв'язання. Оскільки $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0$, а

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 3ay, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 3ax, \quad \text{то за формулою (6)}$$

$$\text{одержимо: } y' = -\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}.$$

Приклад 11. Задано функцію $u = xy + yz + xz$ і точку $M(2; 1; 3)$. Знайти:

1) похідну в точці M в напрямку до точки $M_1(5; 5; 15)$;

2) градієнт функції в точці M ;

3) найбільше значення похідної за напрямом в точці M .

Розв'язання

1) Знаходимо частинні похідні функції в точці M :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + z; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M = 1 + 3 = 4; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x + z; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M = 2 + 3 = 5;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = y + x; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_M = 1 + 2 = 3.$$

Знаходимо вектор $\vec{l} = \overrightarrow{MM_1}$, та його напрямні косинуси:

$$\vec{l} = \overrightarrow{MM_1} = (3, 4, 12); \quad |\vec{l}| = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13;$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{13}, \quad \cos \beta = \frac{4}{13}, \quad \cos \gamma = \frac{12}{13}.$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_M &= \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M \cdot \cos \alpha + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M \cdot \cos \beta + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_M \cdot \cos \gamma = \\ &= 4 \cdot \frac{3}{13} + 5 \cdot \frac{4}{13} + 3 \cdot \frac{12}{13} = \frac{68}{13}. \end{aligned}$$

$$2) \operatorname{grad} u|_M = 4\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}.$$

$$3) \max \left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_M = |\operatorname{grad} u|_M = \sqrt{16 + 25 + 9} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

Приклад 12. Задано функцію $z = x^3 y + y^2 x$, точку $M(2; 1)$ і вектор $\vec{l} = (3; 4)$. Знайти градієнт функції в точці M і похідну в цій точці за напрямом вектора $\vec{l}$.

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні функції в точці M :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y + y^2; \quad \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M = 12 + 1 = 13; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + 2xy;$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M = 8 + 4 = 12, \quad \operatorname{grad} z|_M = (13; 12).$$

Знаходимо напрямні косинуси вектора $\vec{l}$:

$$|\vec{l}| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5; \quad \cos \alpha = \frac{3}{5}, \quad \cos \beta = \frac{4}{5}.$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial l} \right|_M = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M \cos \alpha + \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M \cos \beta = 13 \cdot \frac{3}{5} + 12 \cdot \frac{4}{5} = \frac{87}{5}.$$

Запитання для самоконтролю

1. Наведіть означення частинних похідних другого порядку функції двох змінних. Як вони позначаються?
2. Яка властивість мішаних частинних похідних функції двох змінних?
3. Дайте означення повного диференціала функції двох змінних. Наведіть формулу для його знаходження.
4. Наведіть формулу для застосування повного диференціала до наближеного обчислення значень функції.
5. Наведіть формули для визначення похідних складених та неявно заданих функцій.
6. Наведіть означення похідної скалярного поля за напрямком вектора. Як вона визначається?
7. Наведіть означення градієнта скалярного поля. Що він характеризує? Як градієнт пов'язаний з похідною за напрямком?

Завдання для самостійного розв'язування

Приклад 1. Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, якщо

а) $z = x^3 y^2 - x^2 + y^3$; б) $z = \ln(x^2 + y)$.

Приклад 2. Обчислити наближено $\arctg\left(\frac{1,97}{1,02} - 1\right)$.

Приклад 3. Знайти частинні похідні складеної функції $z = u^2 v^3 + u + 2v$, де $u = x - y$, $v = \frac{x}{y}$.

Приклад 4. Знайти похідну функції $z = x^2 + xy + 2y^2$ в точці $M(1; 2)$ в напрямку до точки $M_1(4, 6)$.

Відповіді

$$1. a) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy^2 - 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x^2 y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^3 + 6y.$$

$$б) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2(y - x^2)}{(x^2 + y)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{2x}{(x^2 + y)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{(x^2 + y)^2}.$$

$$2. 0,75.$$

$$3. \frac{\partial z}{\partial x} = (2(x - y) \frac{x^3}{y^3} + 1) + (3(x - y)^2 \frac{x^2}{y^2} + 2) \cdot \frac{1}{y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -(2(x - y) \frac{x^3}{y^3} + 1) - (3(x - y)^2 \frac{x^2}{y^2} + 2) \cdot \frac{x}{y^2}.$$

$$4. \frac{\partial z}{\partial l} = \frac{48}{5}.$$

4.3. Екстремуми функції двох змінних. Необхідні та достатні умови існування екстремуму функції двох змінних. Найбільше та найменше значення функції в замкнутій обмеженій області

Функція $z = f(x, y)$ має в точці $M_0(x_0; y_0)$ *максимум* (*мінімум*), якщо існує окіл точки M_0 для всіх точок якого, крім самої точки M_0 , виконується нерівність $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ ($f(x_0, y_0) < f(x, y)$).

Теорема (необхідні умови існування екстремуму). Якщо функція $f(x, y)$ в точці (x_0, y_0) має екстремум та існують частинні похідні $f'_x(x_0, y_0)$ і $f'_y(x_0, y_0)$, то вони в

цій точці дорівнюють нулю, тобто $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Точки, в яких частинні похідні функції дорівнюють нулю називаються *стаціонарними точками*. Але не кожна стаціонарна точка може бути точкою екстремуму. Тому для встановлення існування екстремуму в стаціонарній точці (x_0, y_0) потрібно використати достатні умови існування екстремуму. Для цього знаходимо:

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f''_{yy}(x_0, y_0).$$

Складаємо дискримінант $\Delta = AC - B^2$. Тоді:

- 1) якщо $\Delta > 0$ і $A < 0$ ($C < 0$), то в точці (x_0, y_0) маємо максимум;
- 2) якщо $\Delta > 0$ і $A > 0$ ($C > 0$), то в точці (x_0, y_0) маємо мінімум;
- 3) якщо $\Delta = 0$, то для розв'язання питання про існування екстремуму потрібно провести додаткові дослідження, наприклад за знаком приросту $\Delta f(x_0, y_0)$ поблизу точки (x_0, y_0) ;
- 4) якщо $\Delta < 0$, то в точці M_0 функція $f(x, y)$ екстремуму не має.

Якщо функція $z = f(x, y)$ неперервна в обмеженій замкнутій області D , то вона в цій області має найбільше та найменше значення. Ці значення функція досягає в точках екстремуму, які лежать всередині області D , або в точках контуру області. Тому, практично, потрібно знайти всі такі точки, знайти значення функції в цих точках, порівняти знайдені значення між собою та вибрати найбільше і найменше.

Приклад 1. Дослідити на екстремум функцію $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y + 4$.

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 12.$$

Прирівнюючи задані похідні до нуля, одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0; \\ xy - 2 = 0, \end{cases}$$

з якої знайдемо стаціонарні точки заданої функції. Для цього з другого рівняння визначаємо $y = \frac{2}{x}$ і підставивши

його в перше рівняння, одержимо $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Розв'язавши одержане бікватратне рівняння, отримаємо:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -2, \quad x_4 = 2, \text{ а тоді}$$

$$y_1 = -2, \quad y_2 = 2, \quad y_3 = -1, \quad y_4 = 1.$$

Отже, маємо чотири стаціонарні точки:

$$M_1(-1; -2), \quad M_2(1; 2), \quad M_3(-2; -1), \quad M_4(2; 1).$$

Перевіримо ці точки на екстремум з допомогою достатніх умов. Для цього знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x.$$

Знайдемо значення цих похідних та відповідні їм дискримінанти для кожної з чотирьох стаціонарних точок:

$$1) \quad M_1(-1; -2),$$

$$A_1 = f''_{xx}(-1; -2) = -6, \quad B_1 = f''_{xy}(-1; -2) = -12,$$

$$C_1 = f''_{yy}(-1; -2) = -6. \quad \Delta_1 = A_1 C_1 - B_1^2 = 36 - 144 = -108 < 0.$$

Тому в цій точці функція не має екстремуму.

$$2) \quad M_2(1; 2), \quad A_2 = f''_{xx}(1; 2) = 6, \quad B_2 = f''_{xy}(1; 2) = 12,$$

$$C_2 = f''_{yy}(1; 2) = 6. \quad \Delta_2 = A_2 C_2 - B_2^2 = 36 - 144 = -108 < 0.$$

Тому в точці M_2 функція не має екстремуму.

$$3) M_3(-2; -1), \quad A_3 = f''_{xx}(-2; -1) = -12 < 0,$$

$$B_3 = f''_{xy}(-2; -1) = -6, \quad C_3 = f''_{yy}(-2; -1) = -12.$$

$$\Delta_3 = A_3 C_3 - B_3^2 = 144 - 36 = 108 > 0.$$

Тому в цій точці функція має максимум:

$$z_{\max} = f(-2; -1) = (-2)^3 + 3(-2)(-1)^2 - 15(-2) - 12(-1) + 4 = 32.$$

$$4) M_4(2; 1), \quad A_4 = f''_{xx}(2; 1) = 12 > 0, \quad B_4 = f''_{xy}(2; 1) = 6,$$

$$C_4 = f''_{yy}(2; 1) = 12. \quad \Delta_4 = A_4 C_4 - B_4^2 = 144 - 36 = 108 > 0.$$

Тому в цій точці функція має мінімум:

$$z_{\min} = f(2; 1) = 2^3 + 3 \cdot 2 \cdot 1^2 - 15 \cdot 2 - 12 \cdot 1 + 4 = -24.$$

Приклад 2. Дослідити на екстремум функцію

$$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1.$$

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 24y^2 - 6x.$$

Прирівнюючи задані похідні до нуля, одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 - 2y = 0; \\ 4y^2 - x = 0. \end{cases}$$

З якої цієї системи одержимо рівняння $x^4 - x = 0$ або $x(x^3 - 1) = 0$. Корені рівняння $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, а тоді

$$y_1 = 0, \quad y_2 = \frac{1}{2}.$$

Отже, маємо дві стаціонарні точки:

$$M_1(0; 0), \quad M_2\left(1; \frac{1}{2}\right).$$

Знаходимо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -6, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 48y.$$

Перевіримо виконання достатніх умов існування екстремумів для обох стаціонарних точок.

Для точки $M_1(0; 0)$ маємо:

$$A_1 = f''_{xx}(0; 0) = 0, \quad B_1 = f''_{xy}(0; 0) = -6, \quad C_1 = f''_{yy}(0; 0) = 0.$$

$$\Delta_1 = A_1 C_1 - B_1^2 = 0 - 36 = -36 < 0.$$

Тому в точці $M_1(0; 0)$ функція не має екстремуму.

Для точки $M_2\left(1; \frac{1}{2}\right)$ маємо:

$$A_2 = f''_{xx}\left(1; \frac{1}{2}\right) = 6 > 0, \quad B_2 = f''_{xy}\left(1; \frac{1}{2}\right) = -6,$$

$$C_2 = f''_{yy}\left(1; \frac{1}{2}\right) = 24. \quad \Delta_2 = A_2 C_2 - B_2^2 = 144 - 36 = 108 > 0.$$

Тому в точці $M_2\left(1; \frac{1}{2}\right)$ функція має мінімум:

$$z_{\min} = f\left(1; \frac{1}{2}\right) = 1 + 1 - 3 + 1 = 0.$$

Приклад 3. Дослідити на екстремум функцію

$$z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y + 3.$$

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 1.$$

Складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0; \\ x + 2y - 1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, одержимо одну стаціонарну точку $M(1; 0)$.

Знаходимо частинні похідні другого порядку та їх значення в стаціонарній точці:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2;$$

$$A = f''_{xx}(1; 0) = 2, \quad B = f''_{xy}(1; 0) = 1, \quad C = f''_{yy}(1; 0) = 2.$$

Перевіримо виконання достатніх умов існування екстремумів.

Оскільки, $\Delta = AC - B^2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0$ і $A = 2 > 0$, то в точці $M(1; 0)$ функція має мінімум. При цьому $z_{\min} = f(1; 0) = 1 - 2 + 3 = 2$.

Приклад 4. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ в області обмеженій лініями:

$$y = \frac{1}{2}x^2 \text{ при } x \geq 0, \quad x = 0, \quad y = 2.$$

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 - 6y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -6x + 6y.$$

Знаходимо стаціонарні точки:

$$\begin{cases} x^2 - y = 0; \\ -x + y = 0, \end{cases} \text{ звідки маємо дві точки: } O(0; 0), \quad M(1; 1).$$

Функція може досягати найбільшого та найменшого значення на контурі області, зокрема в крайніх точках області $A(0; 2)$, $B(2; 2)$ (рис. 4.1). На відріжку AB маємо, що $y = 2$, тому функція $z = 2x^3 - 12x + 12$ має похідну $z'_x = 6x^2 - 12$, $z' = 0$, якщо $x = \sqrt{2}$, ($x \geq 0$) – критична точка.

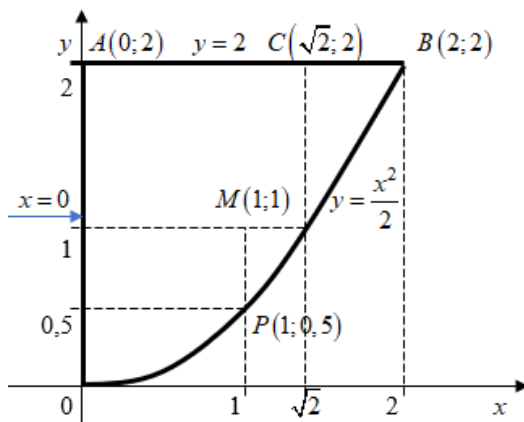


Рис. 4.1

Отже, на контурі AB маємо ще одну точку $C(\sqrt{2}; 2)$. На відрізку OA , $x=0$, тому функція $z=3x^2$ і $z'=6x$, $z'=0$, $x=0$. Це означає, що критична точка знаходиться в початку координат. На параболі $y=\frac{1}{2}x^2$ задана функція має вигляд: $z=2x^3-3x^3+\frac{3}{4}x^4$ або $z=\frac{3}{4}x^4-x^3$ і $z'=3x^3-3x^2=3x^2(x-1)$. $z'=0$, якщо $x=0$ і $x=1$. Тому $y=0$ і $y=\frac{1}{2}$. Це означає, що на контурі є ще одна критична точка $P(1; \frac{1}{2})$.

Знайдемо значення заданої функції в усіх знайдених точках:

$$z(O) = z(0; 0) = 0; \quad z(A) = z(0; 2) = 12; \quad z(B) = z(2; 2) = 4;$$

$$z(P) = z(1; \frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}; \quad z(C) = z(\sqrt{2}; 2) = 12 - 8\sqrt{2} \approx 0,67;$$

$$z(M) = z(1; 1) = -1.$$

Співставляючи всі одержані значення z , маємо, що $z_{\text{найб.}} = z(0; 2) = 12$; $z_{\text{найм.}} = z(1; 1) = -1$.

Приклад 5. Знайти розміри відкритого резервуара у формі прямокутного паралелепіпеда заданого об'єму V і з найменшою площею поверхні.

Розв'язання. Позначимо сторони: основи паралелепіпеда x та y , а висоту z (рис. 4.2). Площа поверхні відкритого зверху паралелепіпеда $S = xy + 2(x + y)z$.

Об'єм паралелепіпеда $V = xyz$. $z = \frac{V}{xy}$, то площа поверхні виразиться формулою: $S = xy + 2V\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$, $x > 0$, $y > 0$.

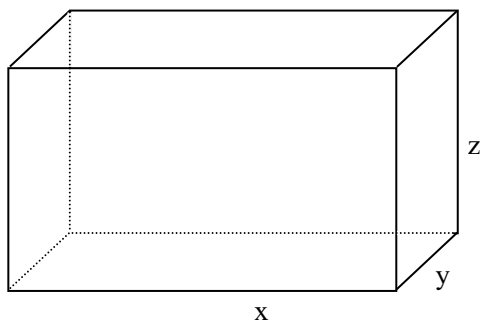


Рис. 4.2

Знайдемо частинні похідні і стаціонарні точки.

$$\frac{\partial S}{\partial x} = y - \frac{2V}{x^2}; \quad \frac{\partial S}{\partial y} = x - \frac{2V}{y^2}.$$

Розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} y - \frac{2V}{x^2} = 0; \\ x - \frac{2V}{y^2} = 0, \end{cases} \quad x = \sqrt[3]{2V}, \quad y = \sqrt[3]{2V}. \quad M(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}) \quad -$$

стаціонарна точка.

Покажемо, що в точці M функція S має мінімум.

$$S''_{xx} = \frac{4V}{x^3}, \quad S''_{xy} = 1, \quad S''_{yy} = \frac{2V}{y^3}.$$

Знайдемо їх значення в точці M .

$$A = S''_{xx}(M) = 2, \quad B = S''_{xy}(M) = 1, \quad C = S''_{yy}(M) = 2.$$

$\Delta = AC - B^2 = 4 - 1 = 3$ і $A > 0$, отже функція S – площа поверхні має в точці $M(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V})$ мінімум. Можна показати, що цей мінімум і буде найменшим значенням. В цьому випадку висота паралелепіпеда

$$z = \frac{V}{xy} = \frac{V}{(\sqrt[3]{2V})^2} = \frac{1}{2} \frac{2V}{(\sqrt[3]{2V})^2} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{2V}.$$

Отже, в основі резервуара лежить квадрат зі стороною $\sqrt[3]{2V}$, а висота резервуара рівна половині ребра основи.

Запитання для самоконтролю

1. Наведіть означення точок максимуму та мінімуму функції двох змінних.
2. Яка необхідна умова існування екстремуму функції двох змінних?
3. Сформулюйте достатню умову існування екстремуму функції двох змінних.
4. Як визначити найбільше та найменше значення функції $z = f(x, y)$ в обмеженій замкнутій області D ?

Завдання для самостійного розв'язування

Приклад 1. Дослідити на екстремум функції:

а) $z = x^2 + xy + y^2 - 6x + 9y$;

б) $z = x^3 + xy^2 + 6xy$;

в) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

Приклад 2. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в області $0 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 2$.

Відповіді

1. а) $z_{\min} = z(7; -8) = -57$;

б) $z_{\min} = z(\sqrt{3}; -3) = -6\sqrt{3}$, $z_{\max} = z(-\sqrt{3}; -3) = 6\sqrt{3}$;

в) $z_{\min} = z(1; 0) = -1$.

2. $z_{\text{найб}} = z(2; -1)$, $z_{\text{найм}} = z(1; 1) = z(0; -1)$.

Тести

1. Знайти область визначення функції $z = \sqrt{y - x^2}$.

а) $D = \{(x, y) \in R^2 : y < x^2\}$;

б) $D = \{(x, y) \in R^2 : y \geq x^2\}$;

в) $D = \{(x, y) \in R^2 : y \leq x^2\}$;

г) $D = \{(x, y) \in R^2 : y > x^2\}$;

д) $D = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

2. Знайти область визначення функції $z = \sqrt{xy}$.

а) $D = \left\{ (x, y) \in R^2 : \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \right\}$;

$$\delta) D = \{(x, y) \in R^2 : xy > 0\};$$

$$\epsilon) D = \{(x, y) \in R^2 : xy \geq 0\};$$

$$\zeta) D = \{(x, y) \in R^2 : xy \leq 0\};$$

$$\eta) D = \{(x, y) \in R^2 : xy < 0\}.$$

3. Знайти область визначення функції $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

$$a) D = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1\};$$

$$б) D = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 < 1\};$$

$$в) D = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 = 1\};$$

$$\zeta) D = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \geq 1\};$$

$$\eta) D = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 > 1\}.$$

4. Знайти область значень E функції $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

$$a) 0 \leq z \leq 1;$$

$$б) -1 \leq z \leq 1;$$

$$в) 0 \leq z < \infty;$$

$$\zeta) -\infty < z < \infty;$$

$$\eta) 0 < z < 1.$$

5. Знайти область значень E функції $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

$$a) -1 \leq z < \infty;$$

$$б) -1 \leq z \leq 1;$$

$$в) -\infty < z < \infty;$$

$$\zeta) -1 \leq z \leq 0;$$

$$\eta) 0 < z < 1.$$

6. Знайти область значень E функції $z = \sqrt{xy}$.

$$a) -\infty < z < \infty;$$

$$б) 0 \leq z < \infty;$$

$$в) 0 < z < 1;$$

$$г) 0 < z < \infty;$$

$$д) 0 \leq z \leq 1.$$

7. Яке із рівнянь є рівнянням лінії рівня функції

$$z = \sqrt{xy}.$$

$$а) y = cx;$$

$$б) y = \frac{c^2}{x}, \quad 0 \leq c < \infty;$$

$$в) y = c^2x, \quad -\infty < c < \infty;$$

$$г) x + y = c, \quad 0 \leq c < \infty;$$

$$д) y = \frac{c}{x^2}, \quad 0 \leq c < \infty.$$

8. Лінія рівня функції $z = \sqrt{xy}$, що проходить через точку $(2; 2)$ має рівняння:

$$а) y = \frac{2}{x};$$

$$б) y = \frac{4}{\sqrt{x}};$$

$$в) y = \frac{4}{x^2};$$

$$г) y = \frac{1}{x};$$

$$д) y = \frac{4}{x}.$$

9. Лінією рівня поверхні $z = x^2 + 4y^2$, що проходить через точку $(2; 0)$ є:

$$а) \text{ еліпс } x^2 + 4y^2 = 2;$$

$$б) \text{ коло } x^2 + y^2 = 4;$$

в) пряма $x + 4y = 2$;

г) еліпс $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$;

д) площина $z = 4$.

10. У якій точці функція $z = 1 + (x+1)^2 + y^2$ досягає мінімуму:

а) $(-1;0)$; б) $(1;0)$; в) $(-1;1)$; г) $(0;1)$; д) $(-1;1)$.

11. У якій точці функція $z = 3 - (x-1)^2 - y^2$ досягає максимуму:

а) $(-1;0)$; б) $(1;0)$; в) $(-1;1)$; г) $(3;1)$; д) $(-1;3)$.

12. Частинна похідна z'_x функції $z = 3x^2 - 4y^3 + 2xy$ в точці $M_0(2;1)$ дорівнює:

а) 6; б) -14; в) 14; г) -8; д) 0.

13. Частинна похідна z'_y функції $z = 3x^2 - 4y^3 + 2xy$ в точці $M_0(2;1)$ дорівнює:

а) 6; б) -14; в) 14; г) -8; д) 0.

14. Функція $z = 3x^2 - 4y^3 + 2xy$ в точці $M_0(2;1)$ у напрямку осі Ox :

а) спадає;

б) зростає;

в) не зростає;

г) не спадає;

д) є сталою.

15. Функція $z = 3x^2 - 4y^3 + 2xy$ в точці $M_0(2;1)$ у напрямку осі Oy :

а) спадає;

б) зростає;

в) не зростає;

з) не спадає;

д) є сталою.

16. Функція $z + x^2 + y^2 - 4 = 0$ в точці $M_0(2;0)$ в напрямку осі Ox :

а) є сталою;

б) зростає;

в) не зростає;

з) не спадає;

д) спадає.

17. Функція $z + x^2 + y^2 - 4 = 0$ в точці $M_0(2;0)$ в напрямку осі Oy :

а) є сталою;

б) зростає;

в) не зростає;

з) не спадає;

д) спадає.

18. Дотичною площиною до поверхні $z + x^2 + y^2 - 4 = 0$ в точці $(0;0)$ є площина:

а) $z = 0$;

б) $x + y + z = 4$;

в) $x = 2$;

з) $z = 4$;

д) $y = 2$.

19. Дотичною площиною до поверхні $x^2 + y^2 = 4$ в точці $(2;0)$ є площина:

а) $z = 0$;

б) $x + y + z = 4$;

в) $x = 2$;

з) $z = 4$;

д) $y = 2$.

20. Стаціонарні точки та точки, в яких частинні похідні $f'_x(x; y)$ і $f'_y(x; y)$ не існують, називаються:

- а) особливими точками;
- б) критичними точками;
- в) нульовими точками;
- г) локальними точками;
- д) невласними точками.

21. Точку $(x_0; y_0)$ в якій частинні похідні першого порядку функції $f(x; y)$ дорівнюють нулю, тобто $f'_x(x; y) = f'_y(x; y) = 0$, називають _____ точкою функції $f(x; y)$. Вставте потрібне слово:

- а) особливою;
- б) невласною;
- в) нульовою;
- г) стаціонарною;
- д) нормальною.

22. Якщо функція $z = f(M) = f(x; y)$ диференційована в точці M , то вона в цій точці

- а) неперервна;
- б) розривна;
- в) необмежена;
- г) особлива;
- д) нормальна.

23. Для функції $z = x^2 + y^2$ стаціонарною точкою є точка:

- а) $(0; 1)$;
- б) $(1; 0)$;
- в) $(1; 1)$;
- г) $(1; 2)$;

д) $(0;0)$.

24. Для функції $z = x^2 - y^2$ стаціонарною точкою є точка:

а) $(0;1)$;

б) $(0;0)$;

в) $(1;1)$;

г) $(1;2)$;

д) $(1;0)$.

25. Знайти частинні похідні першого порядку функції $z = x y$.

а) $z'_x = y, z'_y = x$;

б) $z'_x = y + x, z'_y = x + y$;

в) $z'_x = 1, z'_y = x$;

г) $z'_x = \frac{x^2}{2}, z'_y = \frac{y^2}{2}$;

д) $z'_x = x, z'_y = y$.

26. Знайти частинні похідні першого порядку функції $z = 2x + 2y$.

а) $z'_x = 2 + y, z'_y = x + 2$;

б) $z'_x = x^2, z'_y = y^2$;

в) $z'_x = 2, z'_y = 2$;

г) $z'_x = x + y, z'_y = y + x$;

д) $z'_x = 2, z'_y = -2$.

27. Знайти частинні похідні першого порядку функції $z = x^2 + y^2$.

$$a) z'_x = 2x, z'_y = 2y;$$

$$б) z'_x = x, z'_y = y;$$

$$в) z'_x = 2x + y^2, z'_y = x^2 + 2y;$$

$$г) z'_x = x - y, z'_y = y - x;$$

$$д) z'_x = \frac{x^3}{3} + y^2, z'_y = x^2 + \frac{y^3}{3}.$$

28. Знайти частинні похідні першого порядку функції $z = x^3 y$.

$$a) z'_x = 0, z'_y = 2x^2 + y;$$

$$б) z'_x = 3x^2 y, z'_y = x^3;$$

$$в) z'_x = 3x^2, z'_y = x^3;$$

$$г) z'_x = \frac{x^4}{4}, z'_y = \frac{y^2}{2};$$

$$д) z'_x = 3x^2 + x^3, z'_y = y.$$

29. Дотичною площиною до сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ в точці $(2; 0; 0)$ є площина.

$$a) x = 4;$$

$$б) x = -2;$$

$$в) z = 4;$$

$$г) x = 2;$$

$$д) y = 2.$$

30. Задано поверхню $z = x^2 - y^2 + 1$, вектор $\vec{l} = (2; 0)$ і точку $M_0(1; 1)$. Похідна за напрямом $\frac{\partial z}{\partial l}(M_0)$ дорівнює:

$$a) -2;$$

$$б) 2;$$

$$в) 1;$$

з) -1;

д) 0.

31. Задано поверхню $z = x^2 - y^2 + 1$, вектор $\vec{l} = \vec{j} = (0; 1)$ і точку $M_0(1; 1)$. Похідна за напрямом

$\frac{\partial z}{\partial l}(M_0)$ дорівнює:

а) -2;

б) 2;

в) 1;

з) -1;

д) 0.

32. Дано поверхню $z = 3x^2 + 2y^2 + 1$ і точка $M_0(1; 1)$.

Знайти $\overrightarrow{\text{grad}} z(M_0)$:

а) (4; 6); б) (2; 4); в) (1; 1); з) (6; 2); д) (6; 4).

33. Обчислити наближено $\sqrt{1,02^3 + 1,97^3}$.

а) 2,8; б) 2,95; в) 2,75; з) 2,54; д) 2,4.

34. Знайти частинні похідні першого порядку функції

$$z = \text{arctg} \frac{y}{x}.$$

а) $z'_x = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $z'_y = \frac{y}{x^2 + y^2}$;

б) $z'_x = \frac{y}{x^2 + y^2}$, $z'_y = \frac{x}{x^2 + y^2}$;

в) $z'_x = \frac{1}{x^2 + y^2}$, $z'_y = \frac{1}{x^2 + y^2}$;

з) $z'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2}$, $z'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2}$;

$$\partial) z'_x = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad z'_y = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

35. Знайти екстремум функції

$$z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y.$$

$$a) z_{\min} = z(0; 3) = -9;$$

$$б) z_{\min} = z(0; 3) = 9;$$

$$в) z_{\min} = z(-1; 2) = 6;$$

$$г) z_{\min} = z(1; 0) = 4;$$

д) не існує.

36. Знайти екстремум функції

$$z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y + 3.$$

$$a) z_{\min} = z(7; -8) = -3;$$

$$б) z_{\min} = z(7; -8) = -57;$$

$$в) z_{\min} = z(1; -8) = -12;$$

$$г) z_{\min} = z(1; 4) = -24;$$

$$д) z_{\min} = z(1; -8) = 0.$$

Відповіді

1. б). 2. в). 3. а). 4. а). 5. г). 6. б). 7. б). 8. д). 9. г) 10. а).
 11. б). 12. в). 13. г). 14. б). 15. а). 16. д). 17. а). 18. г). 19. в).
 20. б). 21. г). 22. а). 23. д). 24. б). 25. а). 26. в). 27. а).
 28. б). 29. г). 30. б). 31. а). 32. д). 33. б). 34. д). 35. а). 36. б).

ЛІТЕРАТУРА

1. Дудкін М. Є., Дюженкова О. Ю., Степахно І. В. Вища математика : підручник для здобувачів ступеня бакалавра за інженерними спеціальностями. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 449 с.
2. Дюженкова Л. І., Колесник Т. В., Лященко М. Я., Михалін Г. О., Шкіль М. І. Математичний аналіз у задачах і прикладах : у 2-х ч. Київ : Вища школа, 2002. Ч. 1. 462 с.
3. Дюженкова Л. І., Колесник Т. В., Лященко М. Я., Михалін Г. О., Шкіль М. І. Математичний аналіз у задачах і прикладах : у 2-х ч. Київ : Вища школа, 2002. Ч. 2. 470 с.
4. Панченко Н. Г., Резуненко М. Є. Вища математика : навч. посіб. Харків : УкрДУЗТ, 2022. Ч. 1. 231 с. URL: <http://lib.kart.edu.ua/bitstream/123456789/10149/.pdf> (дата звернення: 16.01.2025).
5. Murray R. Spiegel, Ph.D. Advanced Mathematics for Engineers and Scientists. URL: [file:///C:/Users/Win10/Downloads/Schaums-Advanced-Mathematics-for-Engineers-and-Scientists-by-Murray-R-Spiegel%20\(1\).pdf](file:///C:/Users/Win10/Downloads/Schaums-Advanced-Mathematics-for-Engineers-and-Scientists-by-Murray-R-Spiegel%20(1).pdf) (дата звернення: 18.01.2025).
6. Рудавський Ю. К., Костробій П. П., Лібацький Л. Л. Збірник задач з математичного аналізу : у 2 ч. Львів : Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2008. Ч. 1. 352 с.
7. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк О. М. Диференціальні рівняння в задачах : навч. посіб. К. : «Либідь», 2003. 504 с.
8. Шкіль М. І. Математичний аналіз: підручник : у 2-х ч. Київ : Вища школа, 2005. Ч. 1. 447 с.
9. Шкіль М. І. Математичний аналіз: підручник : у 2-х ч. Київ : Вища школа, 2005. Ч.2. 510 с.
10. Ярмуш Я. І., Самолук І. В. Вища математика. Практикум : навч. посіб. Рівне : НУВГП, 2015. 148 с.

Навчальне видання

*Іващук Яків Григорович
Цецик Світлана Петрівна
Самолюк Ірина Василівна*

ВИЩА МАТЕМАТИКА ПРАКТИКУМ

*Навчальний посібник
Частина I*

Друкується в авторській редакції

Технічний редактор Галина Сімчук

*Видавець і виготовлювач
Національний університет
водного господарства та природокористування
вул. Соборна, 11, м. Рівне, 33028.*

*Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до
державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів
видавничої продукції РВ № 31 від 26.04.2005 р.*