

Міністерство освіти і науки України

Національний університет водного господарства
та природокористування

Я. Г. Іващук, С. П. Цецик, І. В. Самолюк

ВИЩА МАТЕМАТИКА ПРАКТИКУМ

*Навчальний посібник
Частина II*

Рівне 2025

Рецензенти:

Сяський А. О., доктор технічних наук, професор, професор кафедри інформаційних технологій та моделювання Рівненського державного гуманітарного університету, м. Рівне;

Бомба А. Я., доктор технічних наук, професор, професор кафедри комп'ютерних наук та прикладної математики Навчально-наукового інституту, кібернетики, інформаційних технологій та інженерії Національного університету водного господарства та природокористування, м. Рівне.

*Рекомендовано вченою радою Національного університету водного господарства та природокористування.
Протокол № 10 від 26 вересня 2025 р.*

Івашук Я. Г., Цецик С. П., Самолюк І. В.

I-24 Вища математика. Практикум : навч. посіб. Частина II. [Електронне видання]. – Рівне : НУВГП, 2025. – 178 с.

ISBN 978-966-327-672-4

Друга частина навчального посібника складається з чотирьох розділів курсу вищої математики: «Невизначений інтеграл», «Визначений інтеграл», «Диференціальні рівняння» та «Ряди». Виклад навчального матеріалу побудовано за схемою: наведено необхідні теоретичні відомості, подано приклади розв'язання типових задач та запропоновано завдання для самостійного розв'язування. Практикум містить також тестові завдання, що будуть корисні для підготовки до модульних контролів, екзаменів та заліків.

Посібник рекомендовано для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня усіх освітньо-професійних програм спеціальностей НУВГП усіх форм навчання, що вивчають вищу математику.

УДК 517(075)

ISBN 978-966-327-672-4

© Я. Г. Івашук, С. П. Цецик,
І. В. Самолюк, 2025

© Національний університет водного
господарства та природокористування, 2025

ЗМІСТ

	ПЕРЕДМОВА.....	5
Розділ 5.	НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ.....	6
5.1.	Первісна функція і невизначений інтеграл. Властивості невизначеного інтеграла. Табличне інтегрування та метод розкладу.....	6
5.2.	Метод введення функції під знак диференціала....	11
5.3.	Метод заміни змінної.....	14
5.4.	Метод інтегрування частинами.....	17
5.5.	Інтегрування виразів, що містять квадратний тричлен.....	22
5.6.	Прості раціональні дробу та їх інтегрування. Розклад правильного раціонального дробу на суму простих дробів. Інтегрування дробово-раціональних функцій.....	24
5.7.	Інтегрування тригонометричних виразів. Універсальна та спеціальні тригонометричні підстановки.....	32
5.8.	Інтегрування ірраціональних виразів. Тригонометричні підстановки.....	37
Розділ 6.	ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ.....	53
6.1.	Означення визначеного інтеграла і його властивості. Формула Ньютона-Лейбніца.....	53
6.2.	Метод заміни змінної та інтегрування частинами.....	57
6.3.	Невласні інтеграли.....	61
6.4.	Геометричні застосування визначеного інтеграла.....	67
Розділ 7.	ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ.....	82
7.1.	Диференціальні рівняння першого порядку.....	82
7.1.1.	Основні поняття про звичайні диференціальні рівняння першого порядку: означення, задача Коші, теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.....	82
7.1.2.	Однорідні диференціальні рівняння.....	88

7.1.3.	Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння Бернуллі.....	91
7.2.	Диференціальні рівняння другого порядку.....	106
7.2.1.	Диференціальні рівняння другого порядку, що допускають зниження порядку.....	106
7.2.2.	Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.....	112
7.2.3.	Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами.....	115
7.2.4.	Нормальні системи диференціальних рівнянь.....	120
Розділ 8.	РЯДИ.....	132
8.1.	Числові ряди.....	132
8.1.1.	Основні означення. Властивості числових рядів. Необхідна умова збіжності числового ряду.....	132
8.1.2.	Числові ряди з додатними членами.....	136
8.1.3.	Знакозмінні та знакопочережні числові ряди.....	142
8.2.	Функціональні ряди.....	154
8.2.1.	Основні означення.....	154
8.2.2.	Степеневі ряди.....	155
8.2.3.	Застосування степеневих рядів.....	161
	ЛІТЕРАТУРА.....	177

ПЕРЕДМОВА

Метою освітньої компоненти «Вища математика» є формування у здобувачів математичної компетентності, що передбачає: розвиток інтелекту, аналітичного та синтетичного мислення, відповідної математичної культури, інтуїції; оволодіння математичним апаратом, необхідним для вивчення спеціальних дисциплін; формування вмінь застосовувати теоретичні знання до аналізу, моделювання та розв'язання задач прикладного характеру у межах своєї спеціальності.

Друга частина навчального посібника включає чотири розділи курсу вищої математики: «Невизначений інтеграл», «Визначений інтеграл», «Диференціальні рівняння» та «Ряди».

У кожному розділі навчальний матеріал розбито на окремі теми, в яких у стислій формі викладено необхідні теоретичні відомості, наведено розв'язання типових задач та запропоновано завдання для самостійного розв'язування. Також у кінці кожної теми наведено тестові завдання, що допоможуть студентам підготуватися до поточних та підсумкових модульних контролів.

Практикум рекомендовано для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня усіх освітньо-професійних програм спеціальностей НУВГП усіх форм навчання, що вивчають вищу математику.

Розділ 5

НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

5.1. Первісна функція і невизначений інтеграл. Властивості невизначеного інтеграла. Табличне інтегрування та метод розкладу

Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на деякому проміжку, якщо $F'(x) = f(x)$ для всіх точок цього проміжку.

Якщо функція $f(x)$ має первісну $F(x)$, то вона має їх нескінченну множину і всі вони містяться у виразі $F(x) + C$, де C – довільна стала.

Множина усіх первісних функцій для функції $f(x)$ на деякому проміжку називається невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ на цьому проміжку і позначається символом

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \quad (5.1)$$

Властивості невизначеного інтеграла:

$$1) \left(\int f(x)dx \right)' = f(x);$$

$$2) d \int f(x)dx = f(x)dx;$$

$$3) \int dF(x) = F(x) + C;$$

$$4) \int k f(x)dx = k \int f(x)dx, \quad k \in \mathbb{R}, \quad k \neq 0;$$

$$5) \int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx;$$

$$6) \text{ (властивість інваріантності). Якщо } \int f(x)dx = F(x) + C \text{ і}$$

$$U = \phi(x) \text{ – диференційована функція, то } \int f(U)dU = F(U) + C.$$

Таблиця основних інтегралів

Нехай $U = \phi(x)$ – деяка диференційована функція. Тоді:

$$1) \int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$$

$$2) \int du = u + C;$$

$$3) \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C;$$

$$4) \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C;$$

$$5) \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C;$$

$$6) \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C;$$

$$7) \int e^u du = e^u + C;$$

$$8) \int \sin u du = -\cos u + C;$$

$$9) \int \cos u du = \sin u + C;$$

$$10) \int \operatorname{tgu} du = -\ln|\cos u| + C;$$

$$11) \int \operatorname{ctgu} du = \ln|\sin u| + C;$$

$$12) \int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tgu} + C;$$

$$13) \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctgu} + C;$$

$$14) \int \frac{du}{\sin u} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| + C;$$

$$15) \int \frac{du}{\cos u} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C;$$

$$16) \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{u}{a} + C;$$

$$17) \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C = -\arccos \frac{u}{a} + C;$$

$$18) \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C;$$

$$19) \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + C;$$

$$20) \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm k}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm k} \right| + C.$$

Найпростішим методом інтегрування є метод безпосереднього інтегрування, який включає в себе: інтегрування за допомогою формул табличних інтегралів; тотожне перетворення і розклад підінтегральної функції на суму простіших функцій; властивості інтегралів; операцію підведення під знак диференціала.

Приклад 1. Знайти інтеграли:

$$a) \int \frac{dx}{x^2 + 11}; \quad б) \int \frac{dx}{\sqrt{7 - x^2}}; \quad в) \int \frac{dx}{x^2 - 25};$$

$$г) \int 4^x dx; \quad д) \int x^4 dx; \quad е) \int (x^7 - 3x^2 + 2x - 4) dx;$$

$$є) \int (x + 2 \cos x - 5^x) dx; \quad ж) \int \left(7x^6 + 5 \operatorname{ctg} x - \frac{4}{x} \right) dx;$$

$$з) \int \left(x^4 + \frac{2}{x^3} + 3 \operatorname{tg} x + \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} + 5 \right) dx.$$

Розв'язання

$$a) \int \frac{dx}{x^2 + 11} = \frac{1}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{11}} + C;$$

$$б) \int \frac{dx}{\sqrt{7-x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{7}} + C;$$

$$в) \int \frac{dx}{x^2-25} = \frac{1}{10} \ln \left| \frac{x-5}{x+5} \right| + C;$$

$$г) \int 4^x dx = \frac{4^x}{\ln 4} + C;$$

$$д) \int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C;$$

$$е) \int (x^7 - 3x^2 + 2x - 4) dx = \int x^7 dx - 3 \int x^2 dx + 2 \int x dx - 4 \int dx = \\ = \frac{x^8}{8} - 3 \frac{x^3}{3} + 2 \frac{x^2}{2} - 4x + C = \frac{x^8}{8} - x^3 + x^2 - 4x + C;$$

$$є) \int (x + 2 \cos x - 5^x) dx = \int x dx + 2 \int \cos x dx - \int 5^x dx = \\ = \frac{x^2}{2} + 2 \sin x - \frac{5^x}{\ln 5} + C;$$

$$ж) \int \left(7x^6 + 5 \operatorname{ctg} x - \frac{4}{x} \right) dx = x^7 + 5 \ln |\sin x| - 4 \ln |x| + C;$$

$$з) \int \left(x^4 + \frac{2}{x^3} + 3 \operatorname{tg} x + \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} + 5 \right) dx = \\ = \int \left(x^4 + 2x^{-3} + 3 \operatorname{tg} x + \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} + 5 \right) dx = \frac{x^5}{5} + 2 \frac{x^{-2}}{-2} - \\ - 3 \ln |\cos x| + 2 \arcsin x + 5x + C = \frac{x^5}{5} - \frac{1}{x^2} - 3 \ln |\cos x| + \\ + 2 \arcsin x + 5x + C.$$

Приклад 2. Знайти інтеграли:

$$а) \int \frac{(x+2)^3}{x^2} dx; \quad б) \int \frac{x^2 + \sqrt[3]{x} + 5}{x} dx; \quad в) \int x \sqrt[5]{x} dx;$$

$$з) \int \frac{(\cos x + 3)^2}{\cos x} dx; \quad д) \int \frac{2 + \sin x}{\sin x} dx; \quad е) \int \frac{x^2 + 7x + 5}{x(x^2 + 5)} dx;$$

$$е) \int \operatorname{tg}^2 x dx; \quad ж) \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}; \quad з) \int \frac{(1 + \sqrt[3]{x})^3}{\sqrt{x}} dx.$$

Розв'язання

$$а) \int \frac{(x+2)^3}{x^2} dx = \int \frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}{x^2} dx =$$

$$= \int \left(x + 6 + \frac{12}{x} + \frac{8}{x^2} \right) dx = \frac{x^2}{2} + 6x + 12 \ln|x| - \frac{8}{x} + C;$$

$$б) \int \frac{x^2 + \sqrt[3]{x} + 5}{x} dx = \int \left(x + \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} + \frac{5}{x} \right) dx = \int \left(x + x^{-\frac{2}{3}} + \frac{5}{x} \right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + 5 \ln|x| + C = \frac{x^2}{2} + 3\sqrt[3]{x} + 5 \ln|x| + C;$$

$$в) \int x \sqrt[5]{x} dx = \int x \cdot x^{\frac{1}{5}} dx = \int x^{\frac{6}{5}} dx = \frac{x^{\frac{11}{5}}}{\frac{11}{5}} + C = \frac{5}{11} \sqrt[5]{x^{11}} + C;$$

$$з) \int \frac{(\cos x + 3)^2}{\cos x} dx = \int \frac{\cos^2 x + 6 \cos x + 9}{\cos x} dx =$$

$$= \int \left(\cos x + 6 + \frac{9}{\cos x} \right) dx = \sin x + 6x + 9 \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C;$$

$$д) \int \frac{2 + \sin x}{\sin x} dx = \int \left(\frac{2}{\sin x} + 1 \right) dx = 2 \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + x + C;$$

$$e) \int \frac{x^2 + 7x + 5}{x(x^2 + 5)} dx = \int \frac{(x^2 + 5) + 7x}{x(x^2 + 5)} dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{7}{x^2 + 5} \right) dx =$$

$$= \ln|x| + \frac{7}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}};$$

$$e) \int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx =$$

$$= \operatorname{tg} x - x + C;$$

$$ж) \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C;$$

$$з) \int \frac{(1 + \sqrt[3]{x})^3}{\sqrt{x}} dx = \left| (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \right| =$$

$$= \int \frac{1 + 3\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[3]{x^2} + x}{\sqrt{x}} dx = \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 3\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} + 3\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right) dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 3x^{-\frac{1}{6}} + 3x^{\frac{1}{6}} + x^{\frac{1}{2}} \right) dx = 2\sqrt{x} + 3\frac{x^{\frac{5}{6}}}{\frac{5}{6}} + 3\frac{x^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}} +$$

$$+ \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = 2\sqrt{x} + \frac{18}{5} \sqrt[6]{x^5} + \frac{18}{7} \sqrt[6]{x^7} + \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C.$$

5.2. Метод введення функції під знак диференціала

В деяких випадках інтеграл від заданої функції зводиться до простішого за допомогою операції введення

підінтегральної функції під знак диференціала, яка впливає з відомої рівності $U'(x)dx = dU(x)$.

При використанні цього методу є корисною наступна таблиця диференціалів деяких функцій:

$$1) x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} d(x^{\alpha+1} + k); \quad 2) dx = \frac{1}{a} d(ax + b), \quad k, a, b \in \mathbb{R};$$

$$3) \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d(\sqrt{x} + k); \quad 4) \frac{dx}{x^2} = -d\left(\frac{1}{x} + k\right);$$

$$5) \frac{dx}{x} = d(\ln x + k); \quad 6) a^x dx = \frac{1}{\ln a} d(a^x + k);$$

$$7) e^x dx = d(e^x + k); \quad 8) \sin x dx = -d(\cos x + k);$$

$$9) \cos x dx = d(\sin x + k); \quad 10) \frac{dx}{\cos^2 x} = d(\tan x + k);$$

$$11) \frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\cot x + k); \quad 12) \frac{dx}{1+x^2} = d(\arctan x + k);$$

$$13) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x + k).$$

Приклад 3. Знайти інтеграли:

$$a) \int \frac{dx}{3x+5}; \quad б) \int (2x+3)^5 dx; \quad в) \int \cos(5x+2) dx;$$

$$г) \int \frac{\cos x dx}{\sin x + 7}; \quad д) \int \frac{\arcsin^4 x dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad e) \int \frac{\ln^5 x}{x} dx;$$

$$е) \int \frac{(\ln x - 2)^3}{x} dx; \quad ж) \int x \sqrt[3]{x^2+1} dx; \quad з) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+4}};$$

$$д) \int \sin^2 x \cos x dx; \quad u) \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2+\cos x}}; \quad i) \int \sqrt{\cos^5 x} \sin x dx.$$

Розв'язання. Для знаходження інтегралів використаємо метод введення підінтегральної функції під знак диференціала:

$$a) \int \frac{dx}{3x+5} = \left| dx = \frac{1}{3} d(3x+5) \right| = \frac{1}{3} \int \frac{d(3x+5)}{3x+5} = \frac{1}{3} \ln|3x+5| + C;$$

$$\begin{aligned} \delta) \int (2x+3)^5 dx; & \left| dx = \frac{1}{2} d(2x+3) \right| = \frac{1}{2} \int (2x+3)^5 d(2x+3) = \\ & = \frac{(2x+3)^6}{12} + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon) \int \cos(5x+2) dx &= \left| dx = \frac{1}{5} d(5x+2) \right| = \\ &= \frac{1}{5} \int \cos(5x+2) d(5x+2) = \frac{1}{5} \sin(5x+2) + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta) \int \frac{\cos x dx}{\sin x + 7} &= \left| \cos x dx = d(\sin x + 7) \right| = \int \frac{d(\sin x + 7)}{\sin x + 7} = \\ &= \ln|\sin x + 7| + C; \end{aligned}$$

$$\eta) \int \frac{\arcsin^4 x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x) \right| = \frac{1}{5} \arcsin^5 x + C;$$

$$\theta) \int \frac{\ln^5 x}{x} dx = \left| \frac{dx}{x} = d(\ln x) \right| = \int \ln^5 x d(\ln x) = \frac{\ln^6 x}{6} + C.$$

$$\begin{aligned} \iota) \int \frac{(\ln x - 2)^3}{x} dx &= \left| \frac{dx}{x} = d(\ln x - 2) \right| = \int (\ln x - 2)^3 d(\ln x - 2) = \\ &= \int \arcsin^4 x d(\arcsin x) = \frac{1}{4} (\ln x - 2)^4 + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa) \int x \sqrt[3]{x^2+1} dx &= \left| x dx = \frac{1}{2} d(x^2+1) \right| = \\ &= \frac{1}{2} \int (x^2+1)^{\frac{1}{3}} d(x^2+1) = \frac{3}{8} \sqrt[3]{(x^2+1)^4} + C; \end{aligned}$$

$$\lambda) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+4}} = \left| x^2 dx = \frac{1}{3} d(x^3+4) \right| = \frac{1}{3} \int \frac{d(x^3+4)}{\sqrt{x^3+4}} =$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{x^3 + 4} + C;$$

$$\begin{aligned} \partial) \int \sin^2 x \cos x \, dx &= |\cos x \, dx = d(\sin x)| = \int \sin^2 x \, d(\sin x) = \\ &= \frac{\sin^3 x}{3} + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u) \int \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{2 + \cos x}} &= |\sin x \, dx = -d(\cos x + 2)| = -\int \frac{d(\cos x + 2)}{\sqrt{\cos x + 2}} = \\ &= -2\sqrt{\cos x + 2} + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i) \int \sqrt{\cos^5 x} \sin x \, dx &= |\sin x \, dx = -d(\cos x)| = \\ &= -\int \cos^{\frac{5}{2}} d(\cos x) = -\frac{\cos^{\frac{7}{2}} x}{\frac{7}{2}} + C = -2 \frac{\sqrt{\cos^7 x}}{7} + C. \end{aligned}$$

5.3. Метод заміни змінної

Метод заміни змінної (підстановки) полягає у введенні нової змінної інтегрування. Якщо функція $f(x)$ неперервна, то поклавши $x = \phi(t)$, де $\phi(t)$ диференційована, а $\phi'(t)$ неперервна функції, отримаємо

$$\int f(x) \, dx = \int f(\phi(t)) \phi'(t) \, dt. \quad (5.2)$$

Цей метод в багатьох випадках дозволяє заданий (нетабличний) інтеграл відносно змінної x привести до простішого інтегралу відносно змінної t , відповідно підбраною, підстановкою $x = \phi(t)$.

Після вибору підстановки $x = \phi(t)$ доцільно, при розв'язуванні, скористатись такою схемою:

$$\int f(x) \, dx = \left| \begin{array}{l} x = \phi(t) \\ dx = \phi'(t) \, dt \end{array} \right| = \int f(\phi(t)) \phi'(t) \, dt =$$

$$= \int \Phi(t) dt = F(t) + C = \left| \begin{matrix} x = \phi(t) \\ t = \phi^{-1}(x) \end{matrix} \right| = F(\phi^{-1}(x)) + C,$$

де $t = \phi^{-1}(x)$ нова змінна, яку знаходимо з рівняння $x = \phi(t)$.

В ряді випадків замість підстановки $x = \phi(t)$ зручно скористатись підстановкою $t = \psi(x)$, де $\psi(x)$ – деяка частина підінтегральної функції $f(x)$.

Приклад 4. Знайти інтеграли:

$$a) \int x\sqrt{x-1} dx; \quad б) \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}; \quad в) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}};$$

$$г) \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}; \quad д) \int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}; \quad е) \int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{1+e^x}} dx;$$

$$є) \int \frac{dx}{(x+10)\sqrt{x+1}}; \quad ж) \int \frac{\sqrt{4-\ln x}}{x \ln x} dx.$$

Розв'язання. Для знаходження інтегралів використаємо метод заміни змінної:

$$\begin{aligned} a) \int x\sqrt{x-1} dx &= \left| \begin{matrix} \sqrt{x-1} = t, \quad x = t^2 + 1 \\ dx = (t^2 + 1)' dt = 2t dt \end{matrix} \right| = \int (t^2 + 1) \cdot t \cdot 2t dt = \\ &= \frac{2}{5} t^5 + \frac{2}{3} t^3 + C = \frac{2}{5} \sqrt{(x-1)^5} + \frac{2}{3} \sqrt{(x-1)^3} + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} б) \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} &= \left| \begin{matrix} \sqrt{x} = t, \quad x = t^2 \\ dx = (t^2)' dt = 2t dt \end{matrix} \right| = \int \frac{2t dt}{(1+t^2) \cdot t} = 2 \int \frac{dt}{1+t^2} = \\ &= 2 \arctg t + C = \left| t = \sqrt{x} \right| = 2 \arctg \sqrt{x} + C; \end{aligned}$$

$$в) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}} = \left| \begin{matrix} x = t^3 \\ dx = 3t^2 dt \end{matrix} \right| = \int \frac{3t^2 dt}{t+1} = 3 \int \frac{t^2 - 1 + 1}{t+1} dt =$$

$$\begin{aligned}
&= 3 \int \left(t - 1 + \frac{1}{t+1} \right) dt = 3 \left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1| \right) + C = \left| \begin{matrix} x = t^3 \\ t = \sqrt[3]{x} \end{matrix} \right| = \\
&= 3 \left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2} - \sqrt[3]{x} + \ln|\sqrt[3]{x}+1| \right) + C;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{з) } \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} &= \left| \begin{matrix} x = \frac{1}{t} \\ dx = -\frac{1}{t^2} dt \end{matrix} \right| = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} = - \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \\
&= -\ln|t + \sqrt{t^2+1}| + C = \left| t = \frac{1}{x} \right| = -\ln \left| \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1} \right| + C = \\
&= \ln \frac{|x|}{1+\sqrt{1+x^2}} + C;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{д) } \int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}} &= \left| \begin{matrix} \sqrt{e^x-1} = t, & x = \ln(t^2+1); \\ e^x = t^2+1, & dx = \frac{2t dt}{t^2+1}; \end{matrix} \right| = \int \frac{2t dt}{t} = \\
&= 2 \int \frac{dt}{t^2+1} = 2 \operatorname{arctg} t + C = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{e^x-1} + C;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{е) } \int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{1+e^x}} dx &= \int \frac{e^x e^x dx}{\sqrt[4]{1+e^x}} = \left| \begin{matrix} \sqrt[4]{1+e^x} = t, & e^x = t^4-1; \\ 1+e^x = t^4, & e^x dx = 4t^3 dt; \end{matrix} \right| = \\
&= \int \frac{(t^4-1)4t^3 dt}{t} = 4 \int (t^6 - t^2) dt = 4 \left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^3}{3} \right) + C = \\
&= \frac{4}{21} t^3 (3t^4 - 7) + C = \frac{4}{21} (3e^x - 4) \sqrt[4]{(e^x+1)^3} + C;
\end{aligned}$$

$$\text{е) } \int \frac{dx}{(x+10)\sqrt{x+1}} = \left| \begin{matrix} \sqrt{x+1} = t, & x = t^2-1; \\ x+1 = t^2, & dx = 2t dt; \end{matrix} \right| = \int \frac{2t dt}{(t^2+9)t} =$$

$$= 2 \int \frac{dt}{t^2 + 9} = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x+1}}{3} + C;$$

$$\text{жс)} \int \frac{\sqrt{4 - \ln x}}{x \ln x} dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{4 - \ln x} = t, \quad \ln x = 4 - t^2; \\ 4 - \ln x = t^2, \quad \frac{dx}{x} = -2t dt; \end{array} \right| =$$

$$= -2 \int \frac{t^2}{4 - t^2} dt = 2 \int \frac{t^2}{t^2 - 4} dt = 2 \int \frac{t^2 - 4 + 4}{t^2 - 4} dt =$$

$$= 2 \int \left(1 + \frac{4}{t^2 - 4} \right) dt = 2 \left(t + \ln \left| \frac{t - 2}{t + 2} \right| \right) + C =$$

$$= 2 \left(\sqrt{4 - \ln x} + \ln \left| \frac{\sqrt{4 - \ln x} - 2}{\sqrt{4 - \ln x} + 2} \right| \right) + C.$$

5.4. Метод інтегрування частинами

Якщо $U = U(x)$ і $V = V(x)$ – диференційовані функції, то має місце формула інтегрування частинами:

$$\int U dV = UV - \int V dU. \quad (5.3)$$

Ця формула використовується в тих випадках, коли підінтегральний вираз $f(x)dx$ можна так подати, що інтеграл $\int U dV$, при відповідному виборі U і dV , виявиться простішим ніж заданий інтеграл. Зокрема, цим методом завжди знаходяться інтеграли виду:

$$1) \int \underbrace{P_n(x)}_U \underbrace{\begin{Bmatrix} a^{kx+b} \\ \sin(kx+b) \\ \cos(kx+b) \end{Bmatrix}}_{dV} dx; \quad 2) \int P_n(x) \underbrace{\begin{Bmatrix} \log_a(kx+b) \\ \arcsin(kx+b) \\ \arccos(kx+b) \\ \operatorname{arctg}(kx+b) \\ \operatorname{arctg}(kx+b) \end{Bmatrix}}_{dV} dx,$$

де $P_n(x)$ – многочлен n -го степеня (зокрема може бути степенева функція x^n). Зауважимо, що до інтегралів першого типу метод інтегрування частинами використовується n разів.

В деяких випадках при двократному використанні методу інтегрування частинами одержуються рівняння відносно шуканого інтеграла, з якого знаходять цей інтеграл. До таких інтегралів, зокрема, відносяться інтеграли:

$$3) \int a^{kx} \sin bx \, dx \text{ і } \int a^{kx} \cos bx \, dx.$$

При знаходженні таких інтегралів за U приймаємо обидва рази або показникову функцію, або тригонометричну функцію.

Приклад 5. Знайти інтеграли:

$$a) \int x \sin 3x \, dx; \quad б) \int (x+2) \sin 5x \, dx;$$

$$в) \int x e^{5x} \, dx; \quad г) \int x^2 \cos x \, dx; \quad д) \int (x^2 + 3x + 1) \sin x \, dx.$$

Розв'язання.

$$a) \int x \sin 3x \, dx = \left| \begin{array}{l} U = x; \quad dU = (x')dx = dx \\ dV = \sin 3x \, dx; \quad V = \int \sin 3x \, dx = -\frac{1}{3} \cos 3x \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{x}{3} \cos 3x + \frac{1}{3} \int \cos 3x \, dx = -\frac{x}{3} \cos 3x + \frac{1}{9} \sin 3x + C;$$

$$б) \int (x+2) \sin 5x \, dx = \left| \begin{array}{l} U = x+2; \quad dU = (x+2)'dx = dx \\ dV = \sin 5x \, dx; \quad V = \int \sin 5x \, dx = -\frac{1}{5} \cos 5x \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{5} (x+2) \cos 5x + \frac{1}{5} \int \cos 5x \, dx =$$

$$= -\frac{1}{5} (x+2) \cos 5x + \frac{1}{25} \sin 5x + C;$$

$$в) \int x e^{5x} \, dx = \left| \begin{array}{l} U = x; \quad dU = dx \\ dV = e^{5x} \, dx; \quad V = \frac{1}{5} e^{5x} \end{array} \right| = \frac{1}{5} x e^{5x} - \frac{1}{5} \int e^{5x} \, dx =$$

$$= \frac{1}{5} x e^{5x} - \frac{1}{25} e^{5x} + C = \frac{1}{5} \left(x - \frac{1}{5} \right) e^{5x} + C;$$

є) двічі застосовуємо формулу інтегрування частинами:

$$\int x^2 \cos x dx = \left| \begin{array}{l} U = x^2; \quad dU = 2x dx \\ dV = \cos x dx; \quad V = \sin x \end{array} \right| = x^2 \sin x -$$

$$- 2 \int x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} U = x; \quad dU = dx \\ dV = \sin x dx; \quad V = -\cos x \end{array} \right| = x^2 \sin x -$$

$$- 2 \left(-x \cos x + \int \cos x dx \right) = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C;$$

$$\text{д)} \int (x^2 + 3x + 1) \sin 5x dx = \left| \begin{array}{l} U = x^2 + 3x + 1; \quad dU = (2x + 3) dx \\ dV = \sin x dx; \quad V = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$= -(x^2 + 3x + 1) \cos x + \int (2x + 3) \cos x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} U = 2x + 3; \quad dU = 2 dx \\ dV = \cos x dx; \quad V = \sin x \end{array} \right| = -(x^2 + 3x + 1) \cos x +$$

$$+ (2x + 3) \sin x - 2 \int \sin x dx = -(x^2 + 3x + 1) \cos x +$$

$$+ (2x + 3) \sin x + 2 \cos x + C.$$

Приклад 6. Знайти інтеграли:

$$а) \int \ln 2x dx; \quad б) \int x^4 \ln 3x dx;$$

$$в) \int x^3 \arctg x dx; \quad г) \int \arcsin 2x dx.$$

Розв'язання

$$а) \int \ln 2x dx = \left| \begin{array}{l} U = \ln 2x; \quad dU = (\ln 2x)' dx = \frac{dx}{x} \\ dV = dx; \quad V = \int dx = x \end{array} \right| = x \ln 2x -$$

$$- \int \frac{xdx}{x} = x \ln 2x - \int dx = x \ln 2x - x + C.$$

$$\begin{aligned}
 б) \int x^4 \ln 3x \, dx &= \left| \begin{array}{l} U = \ln 3x; \quad dU = \frac{1}{3x} 3 \, dx = \frac{dx}{x} \\ dV = x^4 \, dx; \quad V = \frac{x^5}{5} \end{array} \right| = \\
 &= \frac{x^5}{5} \ln 3x - \frac{1}{5} \int x^4 \, dx = \frac{x^5}{5} \ln 3x - \frac{1}{25} x^5 + C = \frac{x^5}{5} \left(\ln 3x - \frac{1}{5} \right) + C;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 в) \int x^3 \operatorname{arctg} x \, dx &= \left| \begin{array}{l} U = \operatorname{arctg} x; \quad dU = \frac{dx}{x^2+1} \\ dV = x^3 \, dx; \quad V = \frac{x^4}{4} \end{array} \right| = \\
 &= \frac{x^4}{4} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{4} \int \frac{x^4}{x^2+1} \, dx = \frac{x^4}{4} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{4} \int \frac{x^4-1+1}{x^2+1} \, dx = \\
 &= \frac{x^4}{4} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{4} \int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1} \right) \, dx = \frac{x^4}{4} \operatorname{arctg} x - \\
 &- \frac{1}{4} \left(\frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x \right) + C = \\
 &= \frac{1}{4} \left(x^4 \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3} x^3 + x \right) + C;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 з) \int \arcsin 2x \, dx &= \left| \begin{array}{l} U = \arcsin 2x; \quad dU = \frac{2 \, dx}{\sqrt{1-4x^2}} \\ dV = dx; \quad V = x \end{array} \right| = \\
 &= x \arcsin 2x - \int \frac{2x \, dx}{\sqrt{1-4x^2}} = x \arcsin 2x + \frac{1}{4} \int \frac{d(1-4x^2)}{\sqrt{1-4x^2}} = \\
 &= x \arcsin 2x + \frac{1}{2} \sqrt{1-4x^2} + C.
 \end{aligned}$$

Приклад 7. Знайти інтеграл $\int e^{2x} \cos 3x dx$.

Розв'язання. Двічі використаємо формулу інтегрування частинами:

$$\begin{aligned} \int e^{2x} \cos 3x dx &= \left| \begin{array}{l} U = e^{2x}; \quad dU = 2e^{2x} dx \\ dV = \cos 3x dx; \quad V = \frac{1}{3} \sin 3x \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x - \frac{2}{3} \int e^{2x} \sin 3x dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} U = e^{2x}; \quad dU = 2e^{2x} dx \\ dV = \sin 3x dx; \quad V = -\frac{1}{3} \cos 3x \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x - \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3} e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{3} \int e^{2x} \cos 3x dx \right). \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } \int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{1}{3} e^{2x} \left(\sin 3x + \frac{2}{3} \cos 3x \right) - \frac{4}{9} \int e^{2x} \cos 3x dx.$$

$$\text{Звідки } \frac{13}{9} \int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{1}{3} e^{2x} \left(\sin 3x + \frac{2}{3} \cos 3x \right).$$

$$\text{Тому } \int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{3}{13} e^{2x} \left(\sin 3x + \frac{2}{3} \cos 3x \right) + C.$$

Зауважимо, що метод інтегрування частинами може використовуватись і для знаходження інших інтегралів, які не належать до розглянутих випадків 1) – 3).

Приклад 8. Знайти інтеграл $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx$.

Розв'язання. Використовуючи інтегрування частинами, одержимо рівняння відносно шуканого інтеграла:

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \left| \begin{array}{l} U = \sqrt{x^2 + a^2}; \quad dU = \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \\ dV = dx; \quad V = x \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \\
&= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \sqrt{x^2+a^2} dx + \int \frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}} dx.
\end{aligned}$$

Отже,

$$\int \sqrt{x^2+a^2} dx = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \sqrt{x^2+a^2} dx + a^2 \ln \left| x + \sqrt{x^2+a^2} \right|.$$

$$\text{Звідки } \int \sqrt{x^2+a^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2 \ln \left| x + \sqrt{x^2+a^2} \right| \right) + C.$$

5.5. Інтегрування виразів, що містять квадратний тричлен

$$\text{Інтеграли виду: } \int \frac{dx}{x^2+px+q} \text{ і } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}.$$

Для знаходження таких інтегралів у квадратному тричлені, що стоїть у знаменнику, потрібно виділити повний квадрат.

Приклад 9. Знайти інтеграли:

$$a) \int \frac{dx}{x^2-6x-7}; \quad б) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+1}}.$$

Розв'язання

$$\begin{aligned}
a) \int \frac{dx}{x^2-6x-7} &= \int \frac{dx}{x^2-6x+9-9-7} = \int \frac{dx}{(x-3)^2-16} = \\
&= \int \frac{d(x-3)}{(x-3)^2-16} = \frac{1}{2 \cdot 4} \ln \left| \frac{x-3-4}{x-3+4} \right| + C = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{x-7}{x+1} \right| + C;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
б) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+1}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{d\left(x - \frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}} = \ln \left| x - \frac{3}{2} + \sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}} \right| + C = \\
&= \ln \left| x - \frac{3}{2} + \sqrt{x^2 - 3x + 1} \right| + C.
\end{aligned}$$

Інтеграли виду: $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx$ і $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{x^2+px+q}} dx$.

Такі інтеграли можна знаходити, виділяючи в чисельнику похідну квадратного тричлена, що стоїть у знаменнику, потім розбиваємо підінтегральний дріб на алгебраїчну суму двох дробів та послідовно інтегруємо їх.

Приклад 10. Знайти інтеграли:

$$a) \int \frac{3x+2}{x^2+5x+4} dx; \quad б) \int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2-4x+5}} dx.$$

Розв'язання

$$\begin{aligned}
a) \int \frac{3x+2}{x^2+5x+4} dx &= \int \frac{\frac{3}{2}(2x+5) - \frac{11}{2}}{x^2+5x+4} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x+5}{x^2+5x+4} dx - \\
&- \frac{11}{2} \int \frac{dx}{x^2+5x+4} = \frac{3}{2} \int \frac{d(x^2+5x+4)}{x^2+5x+4} - \\
&- \frac{11}{2} \int \frac{dx}{x^2+5x+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}+4} = \frac{3}{2} \ln|x^2+5x+4| - \\
&- \frac{11}{2} \int \frac{d\left(x+\frac{5}{2}\right)}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} \ln|x^2+5x+4| -
\end{aligned}$$

$$-\frac{11}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{3}{2}} \ln \left| \frac{x + \frac{5}{2} - \frac{3}{2}}{x + \frac{5}{2} + \frac{3}{2}} \right| + C = \frac{3}{2} \ln |x^2 + 5x + 4| - \frac{11}{6} \ln \left| \frac{x+1}{x+4} \right| + C;$$

$$\begin{aligned} б) \int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2-4x+5}} dx &= \int \frac{\frac{5}{2}(2x-4)+13}{\sqrt{x^2-4x+5}} dx = \\ &= \frac{5}{2} \int \frac{2x-4}{\sqrt{x^2-4x+5}} dx + 13 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}} = \frac{5}{2} \int \frac{d(x^2-4x+5)}{\sqrt{x^2-4x+5}} + \\ &+ 13 \int \frac{d(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2+1}} = \frac{5}{2} \cdot 2\sqrt{x^2-4x+5} + \\ &+ 13 \ln |x-2+\sqrt{(x-2)^2+1}| + C = 5\sqrt{x^2-4x+5} + \\ &+ 13 \ln |x-2+\sqrt{x^2-4x+5}| + C. \end{aligned}$$

5.6. Прості раціональні дроби та їх інтегрування. Розклад правильного раціонального дробу на суму простих дробів. Інтегрування дробово-раціональних функцій

Розглянемо дробову раціональну функцію (раціональний дріб) $R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, де $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлени відповідно степенів n і m .

Якщо $m \geq n$, то раціональний дріб називається неправильним, якщо $m < n$, то – правильним. Неправильний дріб шляхом ділення чисельника на знаменник можна подати у вигляді суми його цілої частини (многочлена) і правильного раціонального дробу.

Правильний раціональний дріб розкладається на суму простих (елементарних) дробів виду:

$$1) \frac{A}{x-a}, \quad 2) \frac{A}{(x-a)^k}, \quad 3) \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \quad 4) \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k},$$

де $k=1, 2, 3, \dots$, A, B, a, p, q – константи; $p^2 - 4q < 0$.

Ці дробі називаються найпростішими (елементарними) відповідно 1, 2, 3, і 4 типів.

Будь-який правильний раціональний дріб єдиним способом зводиться до суми деяких найпростіших дробів. Тому інтегрування правильних раціональних дробів зводиться до інтегрування простих дробів. Проінтегрувати найпростіші раціональні дробі можна уже вивченими раніше методами.

Приклад 11. Знайти інтеграли:

$$a) \int \frac{dx}{x-5}; \quad б) \int \frac{dx}{x+4}; \quad в) \int \frac{dx}{(x-3)^5}; \quad г) \int \frac{5x-4}{x^2-6x+25} dx.$$

Розв'язання. Усі чотири інтеграли знаходимо методом безпосереднього інтегрування:

$$a) \int \frac{dx}{x-5} = \int \frac{d(x-5)}{x-5} = \ln|x-5| + C;$$

$$б) \int \frac{dx}{x+4} = \int \frac{d(x+4)}{x+4} = \ln|x+4| + C;$$

$$в) \int \frac{dx}{(x-3)^5} = \int (x-3)^{-5} d(x-3) = \frac{(x-3)^{-4}}{-4} + C =$$

$$= -\frac{1}{4(x-3)^4} + C;$$

г) підінтегральна функція містить квадратний тричлен, такі інтеграли розглядалися вище. Цей інтеграл знайдемо шляхом виділення в чисельнику похідної знаменника і подання даного інтегралу у вигляді алгебраїчної суми двох інтегралів. Перший з цих інтегралів за допомогою операції підведення під знак диференціала є логарифмом знаменника, а другий інтеграл, виділивши у квадратному тричлені, що стоїть у

знаменнику, повний квадрат, також зведемо його до табличного інтеграла:

$$\begin{aligned}\int \frac{5x-4}{x^2-6x+25} dx &= \int \frac{\frac{5}{2}(2x-6)+11}{x^2-6x+25} dx = \frac{5}{2} \int \frac{d(x^2-6x+25)}{x^2-6x+25} + \\ &= 11 \int \frac{d(x-3)}{(x-3)^2+16} = \frac{5}{2} \ln(x^2-6x+25) + \frac{11}{4} \operatorname{arctg} \frac{x-3}{4} + C.\end{aligned}$$

Приклад 12. Знайти інтеграл $\int \frac{3x+2}{x^2-2x+10} dx$.

Розв'язання. Інтеграли такого типу можна знаходити іншим методом, виділивши у квадратному тричлені, що стоїть у знаменнику, повний квадрат та ввівши заміну змінної:

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+2}{x^2-2x+10} dx &= \int \frac{3x+2}{(x-1)^2+9} dx = \left. \begin{array}{l} x-1=t; \\ x=t+1; \\ dx=dt \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{3(t+1)+2}{t^2+9} dt = 3 \int \frac{t dt}{t^2+9} + 5 \int \frac{dt}{t^2+9} = \frac{3}{2} \int \frac{d(t^2+9)}{t^2+9} + \\ &+ \frac{5}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C = \frac{3}{2} \ln(t^2+9) + \frac{5}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C = \\ &= \frac{3}{2} \ln(x^2-2x+10) + \frac{5}{3} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{3} + C.\end{aligned}$$

Інтегрування правильних раціональних дробів

При інтегруванні правильного раціонального дробу його попередньо потрібно розкласти на суму простих дробів.

Нехай $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ – правильний раціональний дріб і

$P_n(x) = (x-a)^k (x-b)^l (x^2+px+q)^s$, де k, l, s – цілі додатні числа і $p^2-4q < 0$. Розкладемо, користуючись методом

невизначених коефіцієнтів, цей раціональний дріб на прості дробі.

$$\begin{aligned} \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = & \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{B_1}{x-b} + \\ & + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_l}{(x-b)^l} + \dots + \frac{C_1x + D_1}{x^2 + px + d} + \\ & + \frac{C_2x + D_2}{(x^2 + px + d)^2} + \dots + \frac{C_sx + D_s}{(x^2 + px + d)^s}. \end{aligned}$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів праву частину розкладу зведемо до спільного знаменника і прирівняємо чисельники дробів, які є в обох частинах рівності. З умови рівності одержаних многочленів, знаходимо шукані коефіцієнти. Це можна зробити або прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x цих многочленів, або надаючи x довільні числові значення (по кількості невизначених коефіцієнтів). В обох випадках одержуються системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів. Можна також скористатись комбінованим методом з цих двох розглянутих методів.

Приклад 13. Знайти інтеграл $\int \frac{6x^2 - 13x - 5}{(x-3)(x^2 + x - 2)} dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція – правильний раціональний дріб. Оскільки квадратний тричлен $x^2 + x - 2$ має дійсні корені $x = -2$ і $x = 1$, то знаменник цього дробу розкладається на множники:

$$(x-3)(x^2 + x - 2) = (x-3)(x-1)(x+2), \text{ тому}$$

$$\begin{aligned} \frac{6x^2 - 13x - 5}{(x-3)(x^2 + x - 2)} &= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-3} = \\ &= \frac{A(x-1)(x-3) + B(x+2)(x-3) + C(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-1)(x-3)}. \end{aligned}$$

Прирівняємо чисельники останнього та початкового дробів:

$$A(x-1)(x-3) + B(x+2)(x-3) + C(x+2)(x-1) = 6x^2 - 13x - 5.$$

Підберемо (по кількості невизначених коефіцієнтів) певні значення змінної x (найкраще ті значення, які є коренями знаменника раціонального дробу) і підставимо їх в останнє рівняння:

$$\left. \begin{array}{l} x = -2 \quad | 15A = 45; \\ x = 1 \quad | -6B = -12; \\ x = 3 \quad | 10C = 10. \end{array} \right\}$$

З отриманої системи рівнянь, маємо $A = 3$; $B = 2$; $C = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Отже, } \int \frac{6x^2 - 13x - 5}{(x-3)(x^2 + x - 2)} dx &= \int \left(\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x-3} \right) dx = \\ &= 3\ln|x+2| + 2\ln|x-1| + \ln|x-3| + C. \end{aligned}$$

Приклад 14. Знайти інтеграл $\int \frac{5x^2 + 2x + 9}{(x-1)(x^2 + 2x + 5)} dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція – правильний раціональний дріб. Квадратний тричлен $x^2 + 2x + 5$ не має дійсних коренів, тому розклад знаменника дробу є остаточною, а розклад підінтегральної функції, матиме вигляд

$$\begin{aligned} \frac{5x^2 + 2x + 9}{(x-1)(x^2 + 2x + 5)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 5} = \\ &= \frac{A(x^2 + 2x + 5) + (Bx + C)(x-1)}{(x-1)(x^2 + 2x + 5)}. \end{aligned}$$

Прирівнюємо чисельники останнього та початкового дробів:

$$A(x^2 + 2x + 5) + (Bx + C)(x-1) = 5x^2 + 2x + 9.$$

Надамо змінній x значення $x=1$ і прирівняємо коефіцієнти лівої і правої частин рівняння при степенях x^2 і x :

$$\left. \begin{array}{l} x=1 \quad | \quad 8A=16; \\ x^2 \quad | \quad A+B=5; \\ x \quad | \quad 2A-B+C=2. \end{array} \right\}$$

З цієї системи рівнянь отримаємо: $A=2$; $B=3$; $C=1$.

Підінтегральну функцію запишемо у вигляді:

$$\frac{5x^2 + 2x + 9}{(x-1)(x^2 + 2x + 5)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3x+1}{x^2 + 2x + 5} =$$

$$\text{Тому, } \int \frac{5x^2 + 2x + 9}{(x-1)(x^2 + 2x + 5)} dx = \int \frac{2}{x-1} dx + \int \frac{3x+1}{x^2 + 2x + 5} dx =$$

$$= 2 \ln|x-1| + \int \frac{\frac{3}{2}(2x+2) - 2}{x^2 + 2x + 5} dx = 2 \ln|x-1| + \frac{3}{2} \ln|x^2 + 2x + 5| -$$

$$- 3 \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 4} = 2 \ln|x-1| + \frac{3}{2} \ln|x^2 + 2x + 5| -$$

$$- \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C = \ln \left((x-1)^2 \sqrt{(x^2 + 2x + 5)^3} \right) -$$

$$- \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C.$$

Приклад 15. Знайти інтеграл $\int \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2(x^2 + 1)} dx$.

Розв'язання. Розкладаємо підінтегральну функцію на прості дробі та зведемо їх до спільного знаменника:

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2(x^2 + 1)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2 + 1} = \\ &= \frac{A(x+1)(x^2 + 1) + B(x^2 + 1) + (Cx+D)(x+1)^2}{(x+1)^2(x^2 + 1)}. \end{aligned}$$

Прирівняємо чисельники останнього та початкового дробів:

$$A(x+1)(x^2 + 1) + B(x^2 + 1) + (Cx+D)(x+1)^2 = 3x^2 + 2x + 1.$$

З рівності многочленів одержуємо систему рівнянь для знаходження невизначених коефіцієнтів:

$$\left. \begin{array}{l} x = -1 \mid 2B = 2; \\ x^3 \mid A + C = 0; \\ x^2 \mid A + B + D + 2C = 3; \\ x^0 \mid A + B + D = 1. \end{array} \right\}$$

З цієї системи рівнянь отримаємо: $A = -1$; $B = 1$; $C = 1$; $D = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Тому, } \int \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2(x^2+1)} dx &= \int \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{x+1}{x^2+1} \right) dx = \\ &= -\ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1} = -\ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + \\ &+ \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + C = \ln \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x+1|} - \frac{1}{x+1} + \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

Приклад 16. Знайти інтеграл $\int \frac{x^4 + 2}{x^3 - 1} dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція – неправильний дріб, оскільки степінь многочлена, який є в знаменнику менший, ніж степінь многочлена, який є у чисельнику. Поділимо ці два многочлена:

$$\begin{array}{r} x^4 + 2 \mid \underline{x^3 - 1} \\ \underline{x^4 - x} \quad x \\ x + 2 \end{array}$$

В наслідок ділення многочленів у частці отримуємо x , а в залишку $x + 2$. Звідси:

$$\frac{x^4 + 2}{x^3 - 1} = x + \frac{x + 2}{x^3 - 1}.$$

Оскільки $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$ і $x^2 + x + 1$ не має дійсних коренів, то запишемо розклад виділеного правильного раціонального дробу на прості дробі та зведемо їх до спільного знаменника:

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{(x-1)(x^2+x+1)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \\ &= \frac{A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}. \end{aligned}$$

Прирівнюємо відповідні чисельники та одержуємо систему рівнянь для знаходження коефіцієнтів:

$$A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1) = x + 2,$$

$$\left. \begin{array}{l|l} x=1 & 3A=3; \\ x^2 & A+B=0; \\ x^0 & A-C=2. \end{array} \right\}$$

З цієї системи рівнянь отримаємо $A=1$; $B=-1$; $C=-1$.

Підінтегральну функцію запишемо у вигляді:

$$\frac{x^4+2}{x^3-1} = x + \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тому, } \int \frac{x^4+2}{x^3-1} dx &= \int x dx + \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{(x+1)dx}{x^2+x+1} = \\ &= \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| - \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \\ &= \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

5.7. Інтегрування тригонометричних виразів. Універсальна та спеціальні тригонометричні підстановки

Розглянемо інтеграл $\int R(\sin x, \cos x) dx$, де підінтегральна функція раціональна відносно $\sin x$ і $\cos x$. Такі інтеграли за допомогою універсальної тригонометричної підстановки

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \quad (5.4)$$

завжди зводиться до інтегралів від раціональних дробів. Ця підстановка особливо є ефективною при знаходженні інтегралів виду:

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}, \quad a, b, c \in R \text{ і } a^2 + b^2 \neq 0;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^{2k+1} x}; \quad \int \frac{dx}{\cos^{2k+1} x} = \int \frac{dz}{\sin^{2k+1} z}, \quad z = x + \frac{\pi}{2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Приклад 17. Знайти інтеграли:

$$a) \int \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x + 5}; \quad б) \int \frac{dx}{\sin^5 x}.$$

Розв'язання. Для знаходження цих інтегралів використаємо універсальну тригонометричну підстановку:

$$\begin{aligned} a) \int \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x + 5} &= \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{6t}{1+t^2} + \frac{4-4t^2}{1+t^2} + 5} = 2 \int \frac{dt}{6t + 4 - 4t^2 + 5 + 5t^2} = \end{aligned}$$

$$= 2 \int \frac{dt}{t^2 + 6t + 9} = 2 \int \frac{dt}{(t+3)^2} = -\frac{2}{t+3} = -\frac{2}{tg \frac{x}{2} + 3} + C;$$

$$\begin{aligned} \delta) \int \frac{dx}{\sin^5 x} &= \left| \begin{array}{l} tg \frac{x}{2} = t; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right| = \frac{1}{16} \int \frac{(1+t^2)^4}{t^5} dt = \\ &= \frac{1}{16} \int \frac{1+4t^2+6t^4+4t^6+t^8}{t^5} dt = \\ &= \frac{1}{16} \int \left(t^{-5} + 4t^{-3} + \frac{6}{t} + 4t + t^3 \right) dt = \\ &= \frac{1}{16} \left(-\frac{1}{4t^4} - \frac{2}{t^2} + 6 \ln|t| + 2t^2 + \frac{t^4}{4} \right) + C = \\ &= \frac{1}{16} \left(-\frac{1}{4tg^4 \frac{x}{2}} - \frac{2}{tg^2 \frac{x}{2}} + 6 \ln \left| tg \frac{x}{2} \right| + 2tg^2 \frac{x}{2} + \frac{tg^4 \frac{x}{2}}{4} \right) + C. \end{aligned}$$

Зауважимо, що застосування універсальної тригонометричної підстановки не завжди приводить до мети найкоротшим шляхом. Тому доцільно використовувати також інші тригонометричні підстановки. Розглянемо деякі випадки.

1. Якщо $R(-\sin x; \cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, то застосовують підстановку $\cos x = t$.

2. Якщо $R(\sin x; -\cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, то застосовують підстановку $\sin x = t$.

3. Якщо $R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x)$, то застосовують підстановку $tg x = t$. В цьому випадку маємо:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}; \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}; \quad \sin x \cdot \cos x = \frac{t}{1+t^2}.$$

Приклад 18. Знайти інтеграли:

$$a) \int \frac{\sin^3 x}{(\cos x + 1)^4} dx; \quad б) \int \frac{dx}{4 + 5 \sin^2 x - 3 \cos^2 x}.$$

Розв'язання

а) підінтегральна функція непарна відносно $\sin x$, тому використовуємо підстановку $\cos x = t$.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^3 x}{(\cos x + 1)^4} dx &= \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right| = - \int \frac{1-t^2}{(t+1)^4} dt = \int \frac{t-1}{(t+1)^3} dt = \\ &= \int \frac{t+1-2}{(t+1)^3} dt = \int \frac{dt}{(t+1)^2} - 2 \int \frac{dt}{(t+1)^3} = -\frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2} + C = \\ &= -\frac{t}{(t+1)^2} + C = -\frac{\cos x}{(\cos x + 1)^2} + C. \end{aligned}$$

б) підінтегральна функція парна відносно $\sin x$ і $\cos x$, тому застосуємо підстановку $tg x = t$.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{4 + 5 \sin^2 x - 3 \cos^2 x} &= \left| \begin{array}{l} tg x = t; \quad \cos^2 t = \frac{1}{1+t^2} \\ \sin^2 t = \frac{t^2}{1+t^2}; \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{4 + \frac{5t^2}{1+t^2} - \frac{3}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{9t^2 + 1} = \frac{1}{3} \int \frac{d(3t)}{(3t)^2 + 1} = \\ &= \frac{1}{3} \arctg(3t) + C = \frac{1}{3} \arctg(3tg x) + C. \end{aligned}$$

Зупинимося окремо на інтегралах

$$\int \sin^m x \cos^n x dx,$$

де m і n – цілі додатні числа. Розглянемо два випадки:

а) хоча б одне з чисел m і n непарне. В цьому випадку використовується метод введення підінтегральної функції під знак диференціала;

б) числа m і n – парні. В цьому випадку використовуються формули зниження степеня тригонометричних функцій: $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$;

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x); \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$

Приклад 19. Знайти інтеграли:

а) $\int \sin^6 x \cos^5 x dx$; б) $\int \sin^3 4x dx$; в) $\int \cos^4 x dx$.

Розв'язання

а) в цьому випадку $n = 5$ – непарне.

Оскільки $\cos^5 x = (1 - \sin^2 x)^2 \cos x$, то використовуємо метод введення підінтегральної функції під знак диференціала $\cos x dx = d(\sin x)$.

$$\begin{aligned} \text{Тому } \int \sin^6 x \cos^5 x dx &= \int \sin^6 x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx = \\ &= \int \sin^6 x (1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x) = \int (\sin^6 x - 2\sin^8 x) d(\sin x) + \\ &+ \int \sin^{10} x d(\sin x) = \frac{1}{7} \sin^7 x - \frac{2}{9} \sin^9 x + \frac{1}{11} \sin^{11} x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \int \sin^3 4x dx &= \int \sin^2 4x \sin 4x dx = \\ &= -\frac{1}{4} \int (1 - \cos^2 4x) d(\cos 4x) = -\frac{1}{4} \left(\cos 4x - \frac{1}{3} \cos^3 4x \right) + C. \end{aligned}$$

в) двічі застосуємо формулу пониження степеня тригонометричної функції за рахунок подвоєння аргументу:

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x dx &= \int (\cos^2 x)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 + \cos 2x)^2 dx = \\ &= \frac{1}{4} \int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx = \frac{1}{4} (x + \sin 2x) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 + \frac{1}{8} \int (1 + \cos 4x) dx &= \frac{1}{4} (x + \sin 2x) + \frac{1}{8} \left(x + \frac{1}{4} \sin 4x \right) + C = \\
 &= \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C.
 \end{aligned}$$

Інтеграли

$$\int \sin mx \cos nx dx; \quad \int \cos mx \cos nx dx; \quad \int \sin mx \sin nx dx$$

знаходяться за допомогою формул перетворення добутку тригонометричних функцій в суму:

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} (\sin (m+n)x + \sin (m-n)x);$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} (\cos (m+n)x + \cos (m-n)x);$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} (\cos (m-n)x - \cos (m+n)x).$$

Приклад 20. Знайти інтеграли:

$$a) \int \sin 8x \cos 3x dx; \quad б) \int \cos 6x \cos 2x dx; \quad в) \int \sin 3x \sin 7x dx.$$

Розв'язання. Застосуємо формулу перетворення добутку тригонометричних функцій в суму:

$$\begin{aligned}
 a) \int \sin 8x \cos 3x dx &= \frac{1}{2} \int (\sin 11x + \sin 5x) dx = \\
 &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{11} \cos 11x - \frac{1}{5} \cos 5x \right) + C = -\frac{1}{22} \cos 11x - \frac{1}{10} \cos 5x + C;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 б) \int \cos 6x \cos 2x dx &= \frac{1}{2} \int (\cos 8x + \cos 4x) dx = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} \sin 8x + \frac{1}{4} \sin 4x \right) + C = \frac{1}{16} \sin 8x + \frac{1}{8} \sin 4x + C;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 в) \int \sin 3x \sin 7x dx &= \frac{1}{2} \int (\cos 4x - \cos 10x) dx = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{10} \sin 10x \right) + C = \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{20} \sin 10x + C.
 \end{aligned}$$

5.8. Інтегрування ірраціональних виразів. Тригонометричні підстановки

Інтегрування найпростіших ірраціональних виразів

1. Інтеграли типу $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$, де n – натуральне число, функція R – раціональна і $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$. Такі інтеграли підстановкою $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$, зводиться до інтегралів від раціональної функції відносно змінної t .

Частинний випадок $\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right) dx$ – раціоналізується підстановкою $ax+b = t^n$.

2. В загальному випадку інтеграли типу

$$\int R\left(x, \sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$$

раціоналізується підстановкою $\frac{ax+b}{cx+d} = t^S$, де S – найменше спільне кратне чисел $n_1, n_2, \dots, n_k$.

Приклад 21. Знайти інтеграли:

$$a) \int \frac{x}{\sqrt[5]{x-4}} dx; \quad б) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x}}.$$

Розв'язання

$$a) \int \frac{x}{\sqrt[5]{x-4}} dx = \left. \begin{array}{l} x-4 = t^5 \\ x = t^5 + 4 \\ dx = 5t^4 dt \end{array} \right| = \int \frac{t^5 + 4}{t} 5t^4 dt = 5 \int (t^8 + 4t^3) dt =$$

$$= 5 \left(\frac{t^9}{9} + t^4 \right) + C = \frac{5}{9} t^4 (t^5 + 9) + C = \frac{5}{9} (x+5) \sqrt[5]{(x-4)^4} + C.$$

б) найменше спільне кратне чисел $n_1 = 2$ і $n_2 = 3$ дорівнює 6, тому застосуємо підстановку $x = t^6$. Тоді

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x}} &= \int \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + \sqrt{x}} = \left| \begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right| = 6 \int \frac{t^5 dt}{t^4 + t^3} = \\ &= 6 \int \frac{t^2}{t+1} dt = 6 \int \frac{t^2 - 1 + 1}{t+1} dt = 6 \int \left(t - 1 + \frac{1}{t+1} \right) dt = \\ &= 6 \left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|t-1| \right) + C = 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6 \ln(\sqrt[6]{x} + 1) + C. \end{aligned}$$

Тригонометричні підстановки

Інтеграли типу

$$a) \int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx;$$

$$б) \int R\left(x, \sqrt{x^2 + a^2}\right) dx;$$

$$в) \int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx$$

підстановками

$$a) x = a \sin t; \quad б) x = a \operatorname{tg} t; \quad в) x = \frac{a}{\cos t}$$

зводиться до інтегралів від тригонометричних функцій.

Приклад 22. Знайти інтеграли:

$$a) \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4} dx; \quad б) \int \frac{dx}{\left(\sqrt{4+x^2}\right)^3}.$$

Розв'язання

$$\begin{aligned}
 a) \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4} dx &= \left| \begin{array}{l} x = 2 \sin t \\ \sqrt{4-x^2} = 2 \cos t \\ dx = 2 \cos t \, dt \end{array} \right| = \frac{1}{4} \int \frac{\cos^2 t}{\sin^4 t} dt = \\
 &= \frac{1}{4} \int \operatorname{ctg}^2 t \frac{dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{4} \int \operatorname{ctg}^2 t \, d(\operatorname{ctg} t) = -\frac{1}{12} \operatorname{ctg}^3 t + C = \\
 &= -\frac{1}{12} \left(\frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t} \right)^3 + C = -\frac{1}{12} \left(\frac{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}{\frac{x}{2}} \right)^3 + C = \\
 &= -\frac{\left(\sqrt{4-x^2} \right)^3}{12x^3} + C;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 б) \int \frac{dx}{\left(\sqrt{4+x^2} \right)^3} &= \left| \begin{array}{l} x = 2 \operatorname{tg} t \\ \sqrt{4+x^2} = \frac{2}{\cos t} \\ dx = \frac{2 \, dt}{\cos^2 t} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2 \, dt}{8}}{\frac{2}{\cos^3 t}} = \frac{1}{4} \int \cos t \, dt = \\
 &= \frac{1}{4} \sin t + C = \frac{1}{4} \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} + C = \frac{x}{4\sqrt{4+x^2}} + C.
 \end{aligned}$$

Зауважимо, що відповідь можна записати в іншій формі:

$$\int \frac{dx}{\left(\sqrt{4+x^2} \right)^3} = \frac{1}{4} \sin \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C.$$

Запитання для самоконтролю

1. Дайте означення первісної функції $F(x)$ для функції $f(x)$ на деякому проміжку.

2. Що називається невизначеним інтегралом для функції $f(x)$ на деякому проміжку?

3. Сформулюйте найпростіші властивості невизначеного інтеграла.

4. Напишіть таблицю основних невизначених інтегралів.

5. Сформулюйте в чому полягає найпростіший метод безпосереднього інтегрування.

6. Сформулюйте метод заміни змінної для невизначеного інтеграла.

7. Сформулюйте метод інтегрування частинами для невизначеного інтеграла.

8. Сформулюйте означення дробово-раціональної функції та розклад раціонального дробу на суму простих дробів.

9. Як інтегруються прості дроби?

10. Яка тригонометрична підстановка при інтегруванні тригонометричних виразів називається універсальною і як вона використовується?

11. Наведіть приклади інших тригонометричних підстановок, які використовуються при інтегруванні тригонометричних виразів і коли вони використовуються.

12. Як знаходяться інтеграли виду:

$$\int \sin mx \cos nx \, dx; \quad \int \cos mx \cos nx \, dx; \quad \int \sin mx \sin nx \, dx ?$$

13. Як знаходяться інтеграли виду:

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx, \text{ де } m \text{ і } n - \text{цілі додатні числа?}$$

14. Які з підстановок $ax + b = t^n$, $x = a \sin t$, $x = a \operatorname{tg} t$,

$x = \frac{a}{\cos t}$ використовуються для знаходження інтегралів:

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right) dx, \int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right) dx, \\ \int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right) dx, \int R\left(x, \sqrt{x^2+a^2}\right) dx?$$

Завдання для самостійного розв'язування

Приклад 1. Використовуючи тотожні перетворення, знайти інтеграли:

$$a) \int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) dx; \quad б) \int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}} dx; \quad в) \int \operatorname{ctg}^2 x dx; \\ з) \int \frac{3-2\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x} dx; \quad д) \int \frac{x^4}{1+x^2} dx; \quad е) \int e^x \left(1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right) dx; \\ є) \int \frac{x^2}{x^2+4} dx; \quad ж) \int \frac{dx}{1-\cos 2x}.$$

Приклад 2. За допомогою введення підінтегральної функції під знак диференціала, знайти інтеграли:

$$a) \int \sqrt{4x-1} dx; \quad б) \int \frac{1}{\sqrt{3-2x}} dx; \quad в) \int \frac{4}{\cos^2 6x} dx; \\ з) \int e^{-7x} dx; \quad д) \int \frac{1}{2-9x} dx; \quad е) \int \frac{\cos x}{\sin^4 x} dx; \quad є) \int \frac{1}{x(1+\ln x)} dx; \\ ж) \int e^{x^3} x^2 dx; \quad з) \int e^{\cos x} \sin x dx; \quad у) \int \sqrt[3]{x^3-8} x^2 dx; \\ і) \int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx; \quad ї) \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^8-1}}; \quad ї) \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx; \\ к) \int \sin^5 x \cos x dx; \quad л) \int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx; \quad м) \int \frac{e^x dx}{e^{2x}+25}.$$

Приклад 3. Знайти інтеграли:

$$a) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2+1}}; \quad б) \int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx; \quad в) \int \frac{e^{2x}}{e^x-1} dx;$$

$$з) \int \frac{\sqrt{x+3}}{x} dx; \quad \partial) \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^x}} dx.$$

Приклад 4. Знайти інтеграли:

$$а) \int x^3 \ln x dx; \quad б) \int x \cos x dx; \quad в) \int x^2 e^x dx;$$

$$з) \int x \operatorname{arctg} x dx; \quad \partial) \int x^2 \sin x dx; \quad е) \int e^{ax} \cos bx dx.$$

Приклад 5. Знайти інтеграли:

$$а) \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 8}; \quad б) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 8}};$$

$$в) \int \frac{5x + 2}{x^2 + 2x + 10} dx; \quad з) \int \frac{3x + 5}{x^2 - 8x + 17} dx.$$

Приклад 6. Знайти інтеграли:

$$а) \int \frac{2x^2 - 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx; \quad б) \int \frac{x^3 + 2}{x^3 - 4x} dx; \quad в) \int \frac{dx}{(x+1)(x^2 + 2)};$$

$$з) \int \frac{dx}{x^3 + 8}; \quad \partial) \int \frac{3x^2 + 2x - 1}{(x-1)^2(x+2)} dx.$$

Приклад 7. Знайти інтеграли:

$$а) \int \frac{dx}{5 + 4 \sin x}; \quad б) \int \frac{dx}{3 + \cos x + 2 \sin x}; \quad в) \int \frac{dx}{4 \sin^2 x - 7 \cos^2 x};$$

$$з) \int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}; \quad \partial) \int \sin^2 x \cos^3 x dx; \quad е) \int \sin^5 x dx;$$

$$є) \int \sin^2 x \cos^2 x dx; \quad ж) \int \cos 5x \cos 4x dx; \quad з) \int \sin 3x \cos 5x dx.$$

Приклад 8. Знайти інтеграли:

$$а) \int \frac{x}{\sqrt{2x+1}+1} dx; \quad б) \int \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx; \quad в) \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3}};$$

$$з) \int \sqrt{4-x^2} dx.$$

Відповіді

1. а) $3\sqrt[3]{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + C$; б) $\frac{3}{4}(x-4)\sqrt[3]{x} + C$; в) $-\operatorname{ctg} x - x + C$;

г) $3\operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} x + C$; д) $\frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x + C$;

е) $e^x + \operatorname{tg} x + C$; є) $x - 2\operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$; ж) $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg} x + C$.

2. а) $\frac{1}{6}(4x-1)^{\frac{3}{2}} + C$; б) $-\sqrt{3-2x} + C$; в) $\frac{2}{3}\operatorname{tg} 6x + C$;

г) $-\frac{1}{7}e^{-7x} + C$; д) $-\frac{1}{9}\ln|2-9x| + C$; е) $-\frac{1}{3\sin^3 x} + C$;

є) $\ln|1+\ln x| + C$; ж) $\frac{1}{3}e^{x^3} + C$; з) $-e^{\cos x} + C$;

и) $\frac{1}{4}\sqrt[3]{(x^3-8)^4} + C$; і) $\frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3} + C$;

ї) $\frac{1}{4}\ln(x^4 + \sqrt{x^8-1}) + C$; й) $\arcsin(e^x) + C$;

к) $\frac{1}{6}\sin^6 x + C$; л) $\sin(\ln x) + C$; м) $\frac{1}{5}\operatorname{arctg} \frac{e^x}{5} + C$.

3. а) $-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$; б) $2(\sqrt{x} - \operatorname{arctg} \sqrt{x}) + C$;

в) $e^x + \ln|e^x - 1| + C$; г) $2\sqrt{x+3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}\right| + C$;

д) $\frac{2}{3}(e^x - 2)\sqrt{1+e^x} + C$.

4. а) $\frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + C$; б) $x\sin x + \cos x + C$;

в) $(x^2 - 2x + 2)e^x + C$; г) $\frac{1}{2}(x^2 + 1)\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C$;

$$д) -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C;$$

$$е) \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + C.$$

$$5. а) \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{2} + C; \quad б) \ln \left| x + \sqrt{x^2 + 4x + 8} \right| + C;$$

$$в) \frac{5}{2} \ln(x^2 + 2x + 10) - \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3};$$

$$г) \frac{3}{2} \ln(x^2 - 8x + 17) + 17 \operatorname{arctg}(x - 4).$$

$$6. а) -\frac{1}{6} \ln|x| - \frac{7}{2} \ln|x-2| + \frac{17}{3} \ln|x-3| + C;$$

$$б) x - \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{3}{4} \ln|x+2| + \frac{5}{4} \ln|x-2| + C;$$

$$в) \frac{1}{3} \ln \frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C;$$

$$г) \frac{1}{24} \ln \frac{(x+2)^2}{x^2 - 2x + 4} + \frac{1}{4\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C;$$

$$д) -\frac{4}{3(x-1)} + \frac{20}{9} \ln|x-1| + \frac{7}{9} \ln|x+2| + C.$$

$$7. а) \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{5tg \frac{x}{2} + 4}{3} + C; \quad б) \operatorname{arctg} \left(tg \frac{x}{2} + 1 \right) + C;$$

$$в) \frac{1}{4\sqrt{7}} \ln \left| \frac{2tg x - \sqrt{7}}{2tg x + \sqrt{7}} \right| + C; \quad г) \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} (\sqrt{2} tg x) + C;$$

$$д) \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C; \quad е) -\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + C;$$

$$е) \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C; \quad ж) \frac{1}{18} \sin 9x + \frac{1}{2} \sin x + C;$$

$$з) \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 8x + C.$$

$$8. а) \frac{2x+1}{12} (2\sqrt{2x+1}-3) + C; \quad б) 2\sqrt{x+1} + \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right| + C;$$

$$в) 4(\sqrt[4]{x} - \ln(\sqrt[4]{x}+1)) + C; \quad з) 2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{4} + C.$$

Тести

1. Невизначеним інтегралом $\int f(x) dx$ називається:

а) похідна від підінтегральної функції $f(x)$:

$$\int f(x) dx = f'(x);$$

б) сукупність усіх первісних для підінтегральної функції $f(x)$:

$\int f(x) dx = F(x) + C$, де $F(x)$ – одна з первісних, C – довільна стала;

в) сукупність усіх функцій, що визначаються виразом

$$\int f(x) dx = f(x) + C, \text{ де } C - \text{довільна стала};$$

г) диференціал первісної $F(x)$: $\int f(x) dx = dF(x)$;

д) інша відповідь.

2. Невизначений інтеграл $\int f(ax+b) dx$ дорівнює:

а) $F(ax+b) + C$, де $F(x)$ – одна з первісних для функції

$f(x)$, C – довільна стала;

б) $\frac{1}{b} F(ax+b) + C$, де $F(x)$ – одна з первісних для функції

$f(x)$, C – довільна стала;

в) $aF(ax+b) + C$, де $F(x)$ – одна з первісних для функції

$f(x)$, C – довільна стала;

з) $\frac{1}{a}F(ax+b)+C$, де $F(x)$ – одна з первісних для функції $f(x)$, C – довільна стала;

д) інша відповідь.

3. Що називається універсальною тригонометричною підстановкою і для знаходження яких інтегралів вона застосовується?

а) $z = tg \frac{x}{2}$ застосовується при інтегруванні тригонометричних функцій $\int R(\sin x, \cos x)dx$, де R – раціональна функція відносно $\sin x$ і $\cos x$;

б) $z = tg \frac{x}{2}$ застосовується при інтегруванні тригонометричних функцій $\int f(\sin x, \cos x)dx$, де f – довільна функція відносно $\sin x$ і $\cos x$;

в) $z = tg x$ застосовується при інтегруванні тригонометричних функцій $\int f(\sin x, \cos x)dx$, де f – довільна функція відносно $\sin x$ і $\cos x$;

г) $z = \cos 2x$ застосовується при інтегруванні тригонометричних функцій $\int R(\sin x, \cos x)dx$, де R – раціональна функція відносно $\sin x$ і $\cos x$;

д) інша відповідь.

4. Невизначений інтеграл $\int \cos(2x+3)dx$ дорівнює:

а) $\frac{1}{3}\sin(2x+3)+C$;

б) $\frac{1}{2}\sin(2x+3)+C$;

в) $\sin(2x+3)+C$;

г) $-2\sin(2x+3)+C$;

$$\partial) \frac{1}{3} \sin(3x+2) + C.$$

5. Невизначений інтеграл $\int \frac{1}{9+4x^2} dx$ дорівнює:

$$a) \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{3x}{2} + C;$$

$$б) \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{2x}{3} + C;$$

$$в) \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{2x}{3} + C;$$

$$г) \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x}{3} + C;$$

$$\partial) \frac{1}{9} \operatorname{arctg} \frac{2x}{3} + C.$$

6. Вказати правильну рівність:

$$a) \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha-1}}{\alpha-1} + C, \alpha \neq 1;$$

$$б) \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1;$$

$$в) \int x^\alpha dx = \alpha \cdot x^{\alpha-1} + C;$$

$$г) \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \alpha \neq -1;$$

д) інша відповідь.

7. Вказати правильну рівність:

$$a) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$б) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{ctg} x + C;$$

$$в) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -\operatorname{tg} x + C;$$

$$з) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x;$$

д) інша відповідь.

8. Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на деякому проміжку, якщо для всіх x з цього проміжку виконується умова:

$$а) f'(x) = F(x);$$

$$б) F'(x) = f(x);$$

$$в) F'(x) = f(x) + C;$$

$$з) F(x) = f(x) + C;$$

д) немає правильної відповіді.

9. Вказати правильну рівність:

$$а) \int \cos x dx = -\sin x + C;$$

$$б) \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$в) \int -\sin x dx = -\cos x + C;$$

$$з) \int \sin x dx = \cos x + C;$$

д) немає правильної.

10. Метод інтегрування, у якому для знаходження інтеграла використовують табличні формули інтегрування, називається:

а) методом інтегрування частинами;

б) методом підстановки;

в) методом заміни змінної;

з) методом безпосереднього інтегрування;

д) інший метод.

11. Нехай $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – деякі диференційовні функції. Із формули диференціала добутку $d(uv) = u dv + v du$ інтегруванням обох частин рівності одержується формула:

$$\int u dv = uv - \int v du, \text{ що називається:}$$

а) метод інтегрування частинами;

- б) метод підстановки;
- в) метод заміни змінної;
- г) метод безпосереднього інтегрування;
- д) інший метод.

12. Операція інтегрування є оберненою до операції:

- а) логарифмування;
- б) піднесення до степеня;
- в) додавання;
- г) віднімання;
- д) диференціювання.

13. Для того, щоб знайти інтеграл від суми двох функцій, потрібно інтегрувати від цих функцій:

- а) поділити;
- б) відняти;
- в) помножити;
- г) додати;
- д) немає правильної відповіді.

14. Знайти невизначений інтеграл $\int \cos(10x - 3) dx$:

- а) $-\frac{1}{10} \sin(10x - 3)x + c$;
- б) $\frac{1}{10} \sin(10x - 3)x + c$;
- в) $10 \sin(10x - 3)x + c$;
- г) $\frac{1}{3} \sin(10x - 3)x + c$;
- д) інша відповідь.

15. Результат інтегрування перевіряється за допомогою операції:

- а) повторного інтегрування;
- б) піднесення до степеня;
- в) диференціювання;
- г) множення на підінтегральну функцію;
- д) немає правильної відповіді.

16. Невизначений інтеграл $\int \frac{x^3}{4x^4 + 1} dx$ дорівнює:

a) $\frac{1}{16} \ln|4x^4 + 1| + C$;

б) $\frac{1}{4} \lg|4x^4 + 1| + C$;

в) $4 \ln|4x^4 + 1| + C$;

г) $\ln|4x^4 + 1| + C$;

д) інша відповідь.

17. Невизначений інтеграл $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$ дорівнює:

a) $\frac{1}{3} \sqrt{\ln^3 x} + C$;

б) $\frac{1}{2\sqrt{\ln x}} + C$;

в) $\frac{2}{3} \sqrt{\ln^3 x} + C$;

г) $2\sqrt{\ln x} + C$;

д) інша відповідь.

18. Невизначений інтеграл $\int \frac{x^2}{\sqrt{16 - x^6}} dx$ дорівнює:

a) $\arcsin \frac{x^3}{4} + C$;

б) $\arcsin \frac{x^3}{4} + C$;

в) $4 \arcsin x^3 + C$;

г) $\frac{1}{4} \arcsin \frac{x^3}{4} + C$;

д) $\frac{1}{3} \arcsin \frac{x^3}{4} + C$.

19. Невизначений інтеграл $\int \operatorname{tg}^2 x \, dx$ дорівнює:

а) $\operatorname{tg} x - x + C$;

б) $\operatorname{tg} x + x + C$;

в) $\operatorname{ctgx} - x + C$;

г) $\operatorname{ctgx} + x + C$;

д) інша відповідь.

20. Невизначений інтеграл $\int \sin^3 x \cdot \cos x \, dx$ дорівнює:

а) $4\sin^4 x + C$;

б) $\frac{\sin^4 x}{4} + C$;

в) $2\sin 2x + C$;

г) $\frac{\sin^4 x}{3} + C$;

д) $3\sin^2 x + C$.

21. Заміна змінної у невизначеному інтегралі може відбуватися за схемою:

а) $x = \phi(t)$, $dx = \phi'(t)dt$;

б) $x = \phi(t)$, $dx = \phi(t)dt$;

в) $x = \phi(t)$, $dx = \phi'(t)$;

г) $x = \phi(t)$, $dx = dt$;

д) $x = \phi(t)$, $dx = -dt$.

22. Невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{x^2 + 8x + 25}$ дорівнює:

а) $\ln|x^2 + 8x + 25| + C$;

б) $\operatorname{arctg} \frac{x+4}{3} + C$;

$$е) \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-4}{x+4} \right| + C;$$

$$з) \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+4}{3} + C;$$

$$д) \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x+4}{3} + C.$$

23. Невизначений інтеграл $\int x e^x dx$ дорівнює:

$$а) x e^x + e^x + C;$$

$$б) x^2 e^x + e^x + C;$$

$$в) x^2 e^x + C;$$

$$з) e^x - x e^x + C;$$

$$д) x e^x - e^x + C.$$

24. Невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$ дорівнює:

$$а) 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C;$$

$$б) \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C;$$

$$в) \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C;$$

$$з) \operatorname{arctg} \sqrt{x} + \sqrt{x} + C;$$

$$д) \operatorname{arctg} \sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C.$$

Відповіді

1. б). 2. з). 3. а). 4. б). 5. в). 6. б). 7. д). 8. б). 9. б). 10. з). 11. а).
12. д). 13. з). 14. б). 15. в). 16. а). 17. в). 18. д). 19. а). 20. б).
21. а). 22. з). 23. д). 24. а).

Розділ 6

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

6.1. Означення визначеного інтеграла і його властивості. Формула Ньютона-Лейбніца

Нехай функція $f(x)$ визначена на відрізку $[a, b]$ і $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ — довільне розбиття цього відрізка на n частинних відрізків $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$. На кожному з них виберемо довільну точку η_i і складемо суму $I_n = \sum_{i=1}^n f(\eta_i) \Delta x_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Число I_n називається інтегральною сумою функції $f(x)$, що відповідає даному розбиттю відрізка $[a, b]$ і вибору точки η_i . Позначимо $\lambda = \max \Delta x_i$, $1 \leq i \leq n$.

Означення. Якщо існує границя інтегральної суми I_n при $\lambda \rightarrow 0$, що не залежить від способу розбиття відрізка $[a, b]$, ні від вибору точок η_i , то ця границя називається визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ і

позначається $\int_a^b f(x) dx$, тобто

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\eta_i) \Delta x_i. \quad (6.1)$$

Основні властивості визначеного інтеграла:

$$1) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx;$$

$$2) \int_a^a f(x) dx = 0.$$

$$3) \int_a^b (C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)) dx = C_1 \int_a^b f_1(x) dx + C_2 \int_a^b f_2(x) dx ;$$

$$4) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx ,$$

де c – довільне число з інтервалу $(a; b)$, а функція $f(x)$ інтегрована у найбільшому з відрізків $[a, b]$, $[a, c]$, $[c, b]$.

5) Якщо m – найменше, а M – найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $a \leq x \leq b$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) .$$

6) Якщо $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то на цьому відрізку існує точка c , що $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$.

Число $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ називається середнім значенням функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$.

Якщо $F(x)$ – первісна для неперервної функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (6.2)$$

– формула Ньютона-Лейбніца.

Приклад 1. Обчислити інтеграли:

$$a) \int_2^6 dx; \quad б) \int_0^1 x dx; \quad в) \int_1^2 x^2 dx;$$

$$г) \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}; \quad д) \int_1^2 (3x^2 + 2x - 1) dx.$$

Розв'язання

$$a) \int_2^6 dx = x \Big|_2^6 = 6 - 2 = 4;$$

$$б) \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2};$$

$$в) \int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3};$$

г) Первісною для функції $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ є функція

$F(x) = \text{arctg } x$, тому

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg } x \Big|_0^1 = \text{arctg } 1 - \text{arctg } 0 = \text{arctg } 1 = \frac{\pi}{4};$$

д) Інтегруючи алгебраїчну суму функцій для яких відомі первісні функції, маємо:

$$\begin{aligned} \int_1^2 (3x^2 + 2x - 1) dx &= (x^3 + x^2 - x) \Big|_1^2 = (8 + 4 - 2) - (1 + 1 - 1) = \\ &= 10 - 1 = 9. \end{aligned}$$

Приклад 2. Обчислити $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$.

Розв'язання. Оскільки $dx = \frac{1}{3} d(3x+1)$, то

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}} = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{d(3x+1)}{\sqrt{3x+1}} = \frac{2}{3} \sqrt{3x+1} \Big|_0^1 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Приклад 3. Обчислити $\int_1^2 \frac{x^2}{x+1} dx$.

Розв'язання. Використаємо відповідні тотожні перетворення:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{x^2}{x+1} dx &= \int_1^2 \frac{x^2 - 1 + 1}{x+1} dx = \int_1^2 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx = \\ &= \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| \right) \Big|_1^2 = (2 - 2 + \ln 3) - \left(\frac{1}{2} - 1 + \ln 2 \right) = \\ &= \ln 3 + \frac{1}{2} - \ln 2 = \frac{1}{2} + \ln \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Приклад 4. Обчислити інтеграли:

$$a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^3 x dx; \quad б) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x dx.$$

Розв'язання. При знаходженні заданих інтегралів скористаємось методами знаходження первісних для відповідних невизначених інтегралів:

$$\begin{aligned} a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^3 x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x (1 - \sin^2 x) d(\sin x) = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 x - \sin^6 x) d(\sin x) = \left(\frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{2}{35}; \\ б) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 4x}{2} dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{4} \sin 4x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

6.2. Метод заміни змінної та інтегрування частинами

Заміна змінної у визначеному інтегралі:

$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t)) \phi'(t) dt$, де $\phi(t)$ – функція, неперервна разом зі своєю похідною $\phi'(t)$ на відрізку $\alpha \leq x \leq \beta$; $\phi(\alpha) = a$; $\phi(\beta) = b$, $f(\phi(t))$ – функція неперервна на $[\alpha, \beta]$.

Важливо те, що замінюючи змінну у визначеному інтегралі, знаходять також нові межі інтегрування, і надалі вже не повертаються до початкової змінної.

Схема інтегрування методом заміни змінної у визначеному інтегралі:

$$\int_a^b f(x) dx = \left. \begin{array}{l} x = \phi(t) \\ dx = \phi'(t) dt \\ \phi(\alpha) = a \Rightarrow t_a = \alpha \\ \phi(\beta) = b \Rightarrow t_b = \beta \end{array} \right| = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t)) \phi'(t) dt. \quad (6.3)$$

Якщо $U(x)$ і $V(x)$ – неперервно диференційовані функції на $[a, b]$, то справедлива формула інтегрування частинами:

$$\int_a^b U dV = UV \Big|_a^b - \int_a^b V dU. \quad (6.4)$$

Приклад 5. Обчислити інтеграли:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \int_0^3 x \sqrt{x+1} dx; & \text{б)} \int_1^5 \frac{x}{\sqrt{5+4x}} dx; & \text{в)} \int_0^9 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx; \\ \text{г)} \int_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}; & \text{д)} \int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx; & \text{е)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+5 \cos x}. \end{array}$$

Розв'язання. Використаємо метод заміни змінної для визначеного інтеграла:

$$\begin{aligned}
 a) \int_0^3 x \sqrt{x+1} dx &= \left. \begin{array}{l} \sqrt{x+1} = t, \quad x+1 = t^2 \\ dx = 2t dt \\ \text{якщо } x = 0, \text{ то } t = 1 \\ \text{якщо } x = 3, \text{ то } t = 2 \end{array} \right| = \int_1^2 (t^2 - 1) 2t^2 dt = \\
 &= 2 \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_1^2 = 2 \int_1^2 (t^4 - t^2) dt = 2 \left(\frac{32}{5} - \frac{8}{3} \right) - 2 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right) = \\
 &= 2 \left(\frac{96 - 40 - 3 + 5}{15} \right) = \frac{116}{15} = 7 \frac{11}{15}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 б) \int_1^5 \frac{x}{\sqrt{5+4x}} dx &= \left. \begin{array}{l} \sqrt{5+4x} = t, \quad 4x+5 = t^2 \\ x = \frac{1}{4}(t^2 - 5), \quad dx = \frac{1}{2} t dt \\ \text{якщо } x = 1, \text{ то } t = 3 \\ \text{якщо } x = 5, \text{ то } t = 5 \end{array} \right| = \\
 &= \frac{1}{8} \int_3^5 \frac{(t^2 - 5)t dt}{t} = \frac{1}{8} \int_3^5 (t^2 - 5) dt = \frac{1}{8} \left(\frac{t^3}{3} - 5t \right) \Big|_3^5 = \\
 &= \frac{1}{8} \left(\frac{125}{3} - 25 - 9 + 15 \right) = \frac{17}{6};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 в) \int_0^9 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx &= \left. \begin{array}{l} \sqrt{x} = t, \quad x = t^2, \\ dx = 2t dt, \\ \text{якщо } x = 0, \text{ то } t = 0 \\ \text{якщо } x = 9, \text{ то } t = 3 \end{array} \right| = \int_0^3 \frac{2t^2 dt}{1+t} = \\
 &= 2 \int_0^3 \frac{t^2 - 1 + 1}{t+1} dt = 2 \int_0^3 \frac{(t-1)(t+1)}{t+1} dt + 2 \int_0^3 \frac{dt}{t+1} = 2 \int_0^3 (t-1) dt + \\
 &+ 2 \int_0^3 \frac{d(t+1)}{(t+1)} = 2 \left(\frac{t^2}{2} - t \right) \Big|_0^3 + 2 \ln|t+1| \Big|_0^3 = 2 \left(\frac{9}{2} - 3 \right) +
 \end{aligned}$$

$$+2(\ln|4| - \ln|1|) = 3 + 2\ln 4 = 3 + 4\ln 2.$$

$$\begin{aligned} \text{з) } \int_{-1}^0 \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}} &= \left| \begin{array}{l} \sqrt[3]{x+1} = t; \quad dx = 3t^2 dt \\ x+1 = t^3, \quad \text{якщо } x = -1, \text{ мо } t = 0 \\ x = t^3 - 1, \quad \text{якщо } x = 0, \text{ мо } t = 1 \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{3t^2 dt}{1+t} = \\ &= 3 \int_0^1 \frac{t^2 - 1 + 1}{1+t} dt = 3 \int_0^1 \left(t - 1 + \frac{1}{t+1} \right) dt = 3 \left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1| \right) \Big|_0^1 = \\ &= 3 \left(\frac{1}{2} - 1 + \ln 2 \right) = 3 \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{д) } \int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} x = 2 \sin t, \quad dx = 2 \cos t dt \\ \text{якщо } x = 0, \text{ мо } t = 0 \\ \text{якщо } x = 2, \text{ мо } t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \sin^2 t \sqrt{4-4\sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt = 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt = \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) dt = 2 \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{е) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+5\cos x} &= \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \\ \text{якщо } x = 0, \text{ мо } t = 0, \\ \text{якщо } x = \frac{\pi}{2}, \text{ мо } t = 1 \end{array} \right| = \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \frac{2dt}{3 + \frac{1+t^2}{5-5t^2}} = \int_0^1 \frac{dt}{4-t^2} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2+t}{2-t} \right| \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \ln 3.$$

Приклад 6. Обчислити інтеграли:

$$a) \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x dx; \quad б) \int_{-1}^1 x e^{-x} dx; \quad в) \int_0^{\pi} x \sin \frac{x}{2} dx;$$

$$г) \int_1^e \ln x dx; \quad д) \int_0^1 x^2 e^x dx; \quad е) \int_0^1 x \arctg x dx.$$

Розв'язання. Використаємо формулу інтегрування частинами визначеного інтеграла:

$$a) \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x dx = \left| \begin{array}{l} u = x; \quad du = dx; \\ dv = \sin 2x dx; \quad v = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x; \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{2} x \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = -\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{2} - 0 \right) +$$

$$+ \frac{1}{4} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) = \frac{1}{4};$$

$$б) \int_{-1}^1 x e^{-x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x; \quad du = dx \\ dv = e^{-x} dx; \quad v = -e^{-x} \end{array} \right| = -x e^{-x} \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 e^{-x} dx =$$

$$= -x e^{-x} \Big|_{-1}^1 - e^{-x} \Big|_{-1}^1 = -e^{-1} - e - e^{-1} + e = -\frac{2}{e};$$

$$в) \int_0^{\pi} x \sin \frac{x}{2} dx = \left| \begin{array}{l} u = x; \quad du = dx \\ dv = \sin \frac{x}{2} dx; \quad v = -2 \cos \frac{x}{2} \end{array} \right| =$$

$$= -2x \cos \frac{x}{2} \Big|_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2} dx = 4 \sin \frac{x}{2} \Big|_0^{\pi} = 4;$$

$$2) \int_1^e \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x; \quad du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx; \quad v = x \end{array} \right| = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \frac{dx}{x} = e - x \Big|_1^e = 1;$$

$$3) \int_0^1 x^2 e^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2; \quad du = 2x dx \\ dv = e^x dx; \quad v = e^x \end{array} \right| = x^2 e^x \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 x e^x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = x; \quad du = dx \\ dv = e^x dx; \quad v = e^x \end{array} \right| = x^2 e^x \Big|_0^1 - 2(x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx) =$$

$$= e - 2(1 - e^x \Big|_0^1) = e - 2;$$

$$4) \int_0^1 x \arctg x dx = \left| \begin{array}{l} u = \arctg x; \quad du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = x dx; \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x^2}{2} \arctg x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} \arctg x \Big|_0^1 -$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} (x - \arctg x) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

6.3. Невласні інтеграли

Якщо у визначеному інтегралі відрізок інтегрування нескінченний або скінченний, але підінтегральна функція в деякій точці цього відрізка необмежена (перетворюється в нескінченність), то такий інтеграл називається невластим.

Невласні інтеграли першого типу (з нескінченними межами інтегрування)

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $[a; +\infty)$ та інтегрована на будь-якому відрізку $[a, b]$. У цьому випадку

для будь-якого $b > a$ існує визначений інтеграл $\int_a^b f(x) dx$.

Границю цього інтеграла, якщо $b \rightarrow +\infty$ називають невластним інтегралом першого типу від функції $f(x)$ на проміжку $[a; +\infty)$ і позначають

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (6.5)$$

Якщо дана границя скінченна, то інтеграл збіжний. Якщо ця границя нескінченна або не існує, то невластний інтеграл розбіжний.

Аналогічно вводиться поняття невластного інтеграла для функції $f(x)$ на проміжку $(-\infty; b]$:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx, \quad (6.6)$$

та інтеграла для функції $f(x)$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx, \quad (6.7)$$

де c – довільне дійсне число.

Приклад 7. Обчислити інтеграли або довести, що вони розбіжні:

$$a) \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^3} dx; \quad б) \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 4}}; \quad в) \int_4^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 16};$$

$$з) \int_0^{+\infty} \sin x \, dx; \quad д) \int_{-\infty}^0 \frac{x^3 \, dx}{x^4 + 1}; \quad е) \int_{-\infty}^{+\infty} e^x \, dx.$$

Розв'язання. Використаємо означення невласного інтеграла першого типу:

$$\begin{aligned} а) \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^3} \, dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x^2 e^{-x^3} \, dx = -\frac{1}{3} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x^3} d(-x^3) = \\ &= -\frac{1}{3} \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-x^3} \Big|_0^b = -\frac{1}{3} \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-b^3} + \frac{1}{3} = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Оскільки існує скінченна границя, то заданий невласний інтеграл збіжний і дорівнює $\frac{1}{3}$;

$$\begin{aligned} б) \int_0^{+\infty} \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 + 4}} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{d(x^2 + 4)}{\sqrt{x^2 + 4}} \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} 2\sqrt{x^2 + 4} \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \sqrt{b^2 + 4} - 2 = \infty. \end{aligned}$$

Інтеграл розбіжний;

$$\begin{aligned} в) \int_4^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 16} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_4^b \frac{dx}{x^2 + 16} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \arctg \frac{x}{4} \Big|_4^b = \\ &= \frac{1}{4} \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg \frac{b}{4} - \frac{\pi}{16} = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{16} = \frac{\pi}{16}, \Rightarrow \text{інтеграл збіжний}; \end{aligned}$$

$$з) \int_0^{+\infty} \sin x \, dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \sin x \, dx = - \lim_{b \rightarrow +\infty} \cos x \Big|_0^b = - \lim_{b \rightarrow +\infty} \cos b + 1.$$

Оскільки $\lim_{b \rightarrow +\infty} \cos b$ не існує, то $\int_0^{+\infty} \sin x \, dx$ розбіжний;

$$д) \int_{-\infty}^0 \frac{x^3 \, dx}{x^4 + 1} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{x^3 \, dx}{x^4 + 1} = \frac{1}{4} \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{d(x^4 + 1)}{x^4 + 1} =$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{a \rightarrow -\infty} \ln(x^4 + 1) \Big|_a^0 = \frac{1}{4} \lim_{a \rightarrow -\infty} \ln 1 - \ln(a^4 + 1) =$$

$$= -\frac{1}{4} \lim_{a \rightarrow -\infty} \ln(a^4 + 1) = -\infty.$$

Інтеграл розбіжний;

$$e) \int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx = \int_{-\infty}^0 e^x dx + \int_0^{+\infty} e^x dx:$$

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} e^x \Big|_a^0 = \lim_{a \rightarrow -\infty} (1 - e^a) = 1 - \text{збіжний},$$

$$\int_0^{+\infty} e^x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} e^x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (e^b - 1) = \infty -$$

розбіжний. Тому даний інтеграл розбіжний.

Невласні інтеграли другого типу (від необмежених функцій)

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на проміжку $[a; b)$ і $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \infty$. У цьому випадку точку $x = b$ називають особливою.

Границя інтеграла $\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ називають невластним інтегралом другого типу від функції $f(x)$ на відріжку $[a; b]$ і позначають:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx. \quad (6.8)$$

Якщо існує скінченна границя, то інтеграл $\int_a^b f(x) dx$ називають збіжним. В іншому випадку невластний інтеграл називають розбіжним.

Якщо особливою є точка $x=a$, то невластний інтеграл від функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ визначений рівністю:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx. \quad (6.9)$$

У випадку, коли особливою є точка $x=c$, $a < c < b$, невластний інтеграл визначений рівністю:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (6.10)$$

Приклад 8. Обчислити інтеграли або довести, що вони розбіжні:

$$a) \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}; \quad б) \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^2}; \quad в) \int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}};$$

$$г) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}; \quad д) \int_1^4 \frac{dx}{x^2-4}; \quad е) \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Розв'язання.

а) Точка $x=2$ особлива, тому, що підінтегральна функція в цій точці необмежена. Запишемо цей інтеграл у вигляді:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_1^{2-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_1^{2-\varepsilon} \frac{d(2-x)}{\sqrt{2-x}} = \\ &= -2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{2-x} \Big|_1^{2-\varepsilon} = -2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\sqrt{\varepsilon} - 1) = 2; \end{aligned}$$

б) Оскільки при $x=1$ функція $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ необмежена, то ця точка є особливою. У цьому випадку маємо:

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{1+\varepsilon}^3 \frac{dx}{(x-1)^2} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x-1} \Big|_{1+\varepsilon}^3 =$$

$$= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\varepsilon} \right) = +\infty.$$

Заданий невласний інтеграл розбіжний;

в) Підінтегральна функція при $x \rightarrow 2$ необмежена (в точці $x = 2$ функція не існує), тому маємо:

$$\int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}} = -\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{d(4-x^2)}{\sqrt{4-x^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\sqrt{4-x^2} \Big|_0^{2-\varepsilon} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sqrt{4-(2-\varepsilon)^2} - 2 \right) =$$

$$= -(0-2) = 2.$$

Невласний інтеграл збіжний;

$$г) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{0+\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| \Big|_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\ln \left| \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \right| - \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} \right| \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\ln 1 - \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} \right| \right) = -\infty.$$

Інтеграл розбіжний;

д) На проміжку $[1; 4]$ лежить точка $x = 2$, при $x \rightarrow 2$

$$\frac{1}{x^2-4} \rightarrow \infty, \text{ тому:}$$

$$\int_1^4 \frac{dx}{x^2-4} = \int_1^2 \frac{dx}{x^2-4} + \int_2^4 \frac{dx}{x^2-4}:$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2-4} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_1^{2-\varepsilon} \frac{dx}{x^2-4} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| \Big|_1^{2-\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \left| \frac{2-\varepsilon-2}{2-\varepsilon+2} \right| = \frac{1}{4} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \frac{\varepsilon}{4-\varepsilon} = -\infty - \text{інтеграл розбіжний.}$$

Отже даний інтеграл розбіжний (уже немає потреби досліджувати другий інтеграл);

$$e) \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} :$$

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{0-\varepsilon} x^{-\frac{2}{3}} dx = 3 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} \Big|_{-1}^{0-\varepsilon} = 3 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-\sqrt[3]{\varepsilon} + 1) = 3,$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{0+\varepsilon}^1 x^{-\frac{2}{3}} dx = 3 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} \Big|_{0+\varepsilon}^1 = 3 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 - \sqrt[3]{\varepsilon}) = 3.$$

Отже $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3 + 3 = 6$. Невласний інтеграл збіжний.

6.4. Геометричні застосування визначеного інтеграла

Обчислення площі плоскої фігури

Найпростішою плоскою фігурою є криволінійна трапеція, обмежена графіком неперервної додатної функції $y = f(x)$ на відрізку $[a, b]$, прямими $x = a$, $x = b$ і відрізком осі Ox . Площа такої криволінійної трапеції обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (6.11)$$

Якщо фігура обмежена зверху і знизу графіками неперервних на відрізку $[a, b]$ функцій $f(x)$ і $g(x)$, ($f(x) > g(x)$), а з боків, вертикальними прямими $x = a$ і $x = b$, то її площа обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx. \quad (6.12)$$

Приклад 9. Обчислити площу фігури, обмежену лініями:

а) $y = 4x - x^2$, $y = 0$; б) $y = x^2$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$;

в) $y = x^2 - 2x$, $y = x$; г) $y = 3x - x^2$, $y = -x$;

д) $y = -x^2 + 6x - 7$, $y = x - 3$.

Розв'язання

а) Маємо криволінійну трапецію, обмежену параболою і відрізком $[0, 4]$ осі Ox (рис.6.1).

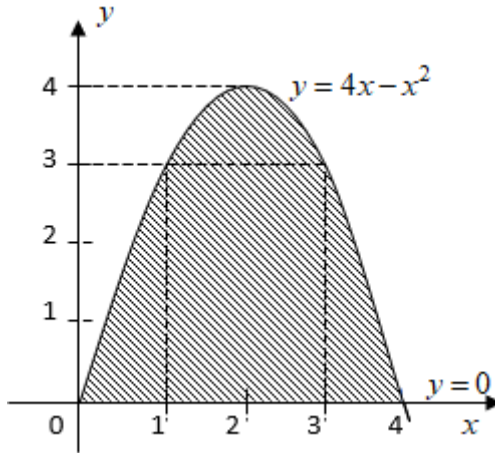


Рис. 6.1

$$S = \int_0^4 (4x - x^2) dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3} \text{ (кв. од.)}.$$

б) Зобразимо плоску фігуру, обмежену заданими лініями (рис. 6.2).

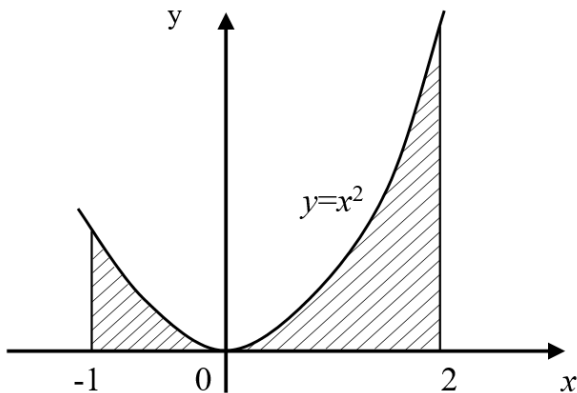


Рис. 6.2

Використаємо формулу $S = \int_a^b f(x) dx$.

$$S = \int_{-1}^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^2 = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = 3 \text{ (кв. од.)}.$$

в) Побудуємо графіки параболи і прямої (рис. 6.3). Визначимо абсциси точок перетину параболи і прямої. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x; \\ y = x. \end{cases}$$

Звідси $x_1 = 0$, $x_2 = 3$.

$$S = \int_0^3 (x - (x^2 - 2x)) dx = \int_0^3 (3x - x^2) dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 = 13,5 - 9 = 4,5 \text{ (кв. од.)}.$$

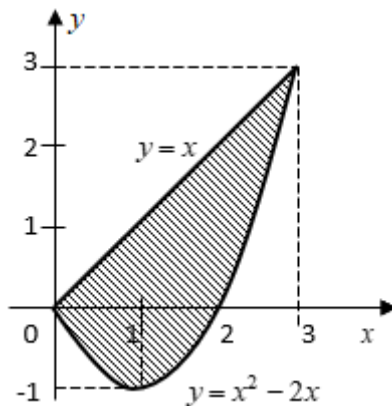


Рис. 6.3

з) Знайдемо точки перетину прямої $y = f_1(x) = -x$ і параболи $y = f_2(x) = 3x - x^2$ (рис. 6.4):

$$\begin{cases} y = 3x - x^2, \\ y = -x; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x, \\ -x = 3x - x^2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x, \\ x^2 - 4x = 0; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -x, \\ x(x - 4) = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0; \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x_2 = 4, \\ y_2 = -4. \end{cases}$$

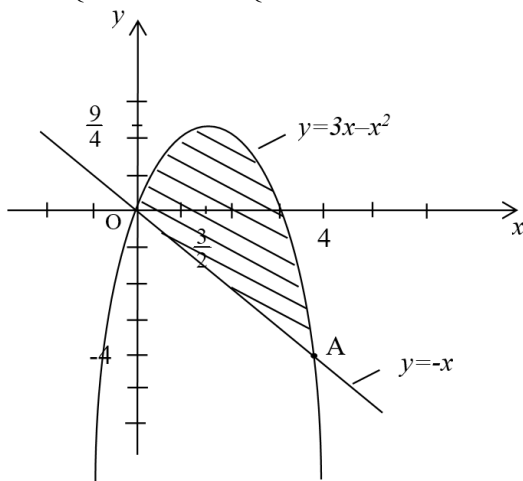


Рис. 4

Точки перетину ліній $O(0;0)$ і $A(4;-4)$.

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx = \int_0^4 (3x - x^2 - (-x)) dx = \int_0^4 (4x - x^2) dx =$$

$$= \left(2x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3} \text{ (кв.од.)}.$$

д) Побудуємо графіки параболи і прямої (рис. 6.5). Визначимо абсиси точок перетину параболи і прямої. Розв'язавши систему рівнянь: $\begin{cases} y = -x^2 + 6x - 7; \\ y = x - 3. \end{cases}$ Одержуємо $x_1 = 1, x_2 = 4$.

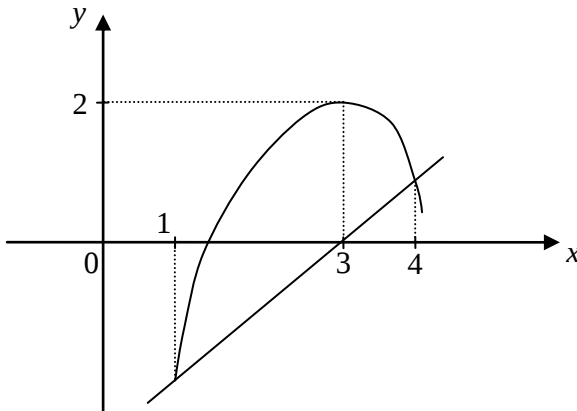


Рис. 6.5

$$S = \int_1^4 ((-x^2 + 6x - 7) - (x - 3)) dx = \int_1^4 (5x - x^2 - 4) dx =$$

$$= \left(\frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - 4x \right) \Big|_1^4 = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ (кв. од.)}.$$

Обчислення об'єму тіла обертання

Розглянемо на площині Oxy криволінійну трапецію, обмежену графіком неперервної додатної на відрізку $[a, b]$ функції $f(x)$, прямими $x=a$, $x=b$ і відрізком $[a, b]$ осі Ox . Внаслідок обертання такої криволінійної трапеції навколо осі Ox отримаємо тіло обертання. Об'єм такого тіла обчислюється за формулою:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (6.13)$$

Приклад 10. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $xy=4$, $x=1$, $x=4$, $y=0$.

Розв'язання. Побудуємо у прямокутній системі координат Oxy гіперболу $y=\frac{4}{x}$, прямі $x=1$, $x=4$, $y=0$ (рис. 6.6). При перетині цих ліній отримаємо криволінійну трапецію.

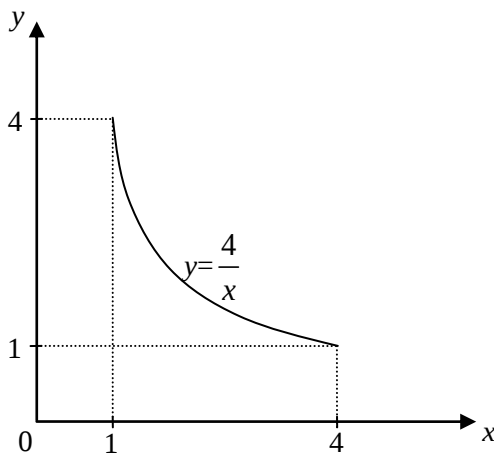


Рис. 6.6

У наслідок обертання цієї криволінійної трапеції навколо осі Ox одержимо тіло, об'єм якого обчислюємо за формулою:

$$V = \pi \int_1^4 \left(\frac{4}{x} \right)^2 dx = 16\pi \int_1^4 \frac{dx}{x^2} = -\frac{16\pi}{x} \Big|_1^4 = -4\pi + 16\pi = 12\pi \text{ (куб. од.)}.$$

Обчислення довжини дуги плоскої кривої

Нехай незамкнута крива на площині Oxy задана рівнянням $y = f(x)$, де $f(x)$ неперервна і має неперервну похідну на відрізку $[a; b]$. Довжина дуги такої лінії знаходиться за формулою:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (6.14)$$

Приклад 11. а) Обчислити довжину дуги кривої $y = x\sqrt{x}$ для $0 \leq x \leq 1$; б) Обчислити довжину дуги кривої $y = \ln \cos x$ для $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$.

Розв'язання

а) Для обчислення довжини дуги кривої $y = x\sqrt{x}$ використаємо формулу $l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$.

Враховуючи, що $y = x^{\frac{3}{2}}$, $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$, маємо:

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{9}{4}x \right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{8}{27} \left(\frac{13}{4} \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27} =$$

$$= \frac{8}{27} \left(\frac{13}{8} \sqrt{13} - 1 \right) (\text{лін. од.});$$

б) Обчислимо похідну $y' = (\ln \cos x)' = -\operatorname{tg} x$ і підставимо її у формулу для довжини дуги:

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} - \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \\ &= \ln \sqrt{3} = \frac{1}{2} \ln 3. \end{aligned}$$

Запитання для самоконтролю

1. Сформулюйте означення визначеного інтеграла.
2. Сформулюйте основні властивості визначеного інтеграла.
3. Що називається середнім значенням функції $f(x)$ на відрізьку $[a; b]$?
4. Запишіть формулу Ньютона-Лейбніца.
5. Запишіть формули заміни змінної та інтегрування частинами визначеного інтеграла.
6. Дайте означення невласного інтеграла з нескінченними межами інтегрування.
7. Сформулюйте означення невласного інтеграла від необмежених функцій.
8. Як знаходиться площа плоскої фігури?
9. Як обчислити довжину дуги плоскої кривої?

Завдання для самостійного розв'язування

Приклад 1. Обчислити інтеграли:

$$a) \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1} dx; \quad б) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\tan x + 1}}; \quad в) \int_0^4 x \sqrt{x^2+9} dx.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграли:

$$a) \int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx; \quad б) \int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{1+3x}}; \quad в) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграли:

$$a) \int_0^1 x e^{3x} dx; \quad б) \int_1^{\sqrt{3}} \arctg x dx; \quad в) \int_e^{e^2} x^2 \ln x dx.$$

Приклад 4. Обчислити інтеграли або довести, що вони розбіжні:

$$\begin{aligned} a) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}; \quad б) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^4}; \quad в) \int_0^{+\infty} \frac{\arctg x}{1+x^2}; \quad г) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{5x+2}}; \\ д) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}; \quad е) \int_0^2 \frac{dx}{(x-2)^2}; \quad є) \int_{-1}^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{7-x}}; \quad ж) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^4 x}; \\ з) \int_1^5 \frac{dx}{x \ln x}; \quad д) \int_1^2 \frac{x^2}{x-1} dx. \end{aligned}$$

Приклад 5. Обчислити площу фігури, обмежену лініями:

$$\begin{aligned} a) y = x^2 + 1, y = 0, x = 1, x = 2; \quad б) y = x, y = \frac{1}{x}, x = 4; \\ в) y = 2x - x^2, y = -x; \quad г) 3y = x^2, 3y = 12 - 2x^2. \end{aligned}$$

Приклад 6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями

$$y = \frac{1}{2}(x^2 - x), \quad y = 0.$$

Приклад 7. Обчислити довжину дуги лінії $y = \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$,

$$0 \leq x \leq 1.$$

Відповіді

1. а) $1 - \frac{\pi}{4}$; б) $2(\sqrt{2} - 1)$; в) $32\frac{2}{3}$.

2. а) $2(\sqrt{3} - 1) - \frac{\pi}{6}$; б) 4; в) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

3. а) $\frac{2e^3 + 1}{9}$; б) $\frac{\pi}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \ln 2$; в) $\frac{e^3}{9} (5e^3 - 2)$.

4. а) $\frac{1}{\ln^2 2}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{\pi^2}{8}$; г) розбіжний; д) π ;

е) розбіжний; є) 6; ж) розбіжний; з) розбіжний;
д) розбіжний.

5. а) $3\frac{1}{3}$; б) $7,5 - \ln 4$; в) 4,5; г) $\frac{32}{3}$.

6. $\frac{\pi}{120}$.

7. $\frac{61}{54}$.

Тести

1. Геометричний зміст визначеного інтеграла:

а) площа фігури, обмеженої знизу віссю OX , зліва та справа відповідними прямими $x=a$ та $x=b$, а зверху – невід’ємною та неперервною функцією $f(x)$;

б) площа фігури, обмеженої знизу віссю OX , зліва та справа – прямими $x=a$ та $x=b$, а зверху – неперервною функцією $f(x)$;

в) площа фігури, обмеженої віссю OX , зліва та справа – прямими $x=a$ та $x=b$, а знизу – неперервною функцією $f(x)$;

г) площа фігури, обмеженої віссю OX , зліва і справа – прямими $x=a$ і $x=b$ та невід’ємною функцією $f(x)$;

д) немає правильної відповіді.

2. Якщо у визначеному інтегралі поміняти місцями верхню та нижню межі інтегрування, то

а) інтеграл змінить знак на протилежний;

б) інтеграл набуде від’ємного значення;

в) інтеграл не зміниться;

г) інтеграл буде рівним нулю;

д) інтеграл набуде додатнього значення.

3. Формула Ньютона-Лейбніца має вигляд:

$$а) \int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b);$$

$$б) \int_a^b f(x)dx = F(b) + F(a);$$

$$в) \int_a^b f(x)dx = F(x) + c;$$

$$г) \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a);$$

д) інша відповідь.

4. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^5 dx$:

а) 5; б) - 5; в) 1; г) 0; д) 2 .

5. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^9 dx$:

а) 3; б) - 3; в) 6; г) 5; д) 8.

6. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^1 x dx$:

а) 2; б) - 1; в) 1; г) $\frac{1}{2}$; д) $-\frac{1}{2}$.

7. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^2 x^3 dx$:

а) 2; б) - 2; в) 4; г) - 4; д) 6.

8. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^1 x^4 dx$:

а) 1; б) $\frac{1}{5}$; в) $\frac{1}{4}$; г) - 1; д) $-\frac{1}{5}$.

9. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^2 3x^2 dx$:

а) 4; б) - 8; в) 6; г) - 6; д) 8.

10. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^1 10x^4 dx$:

а) 5; б) - 5; в) 10; г) - 2; д) 2.

11. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^1 16x^7 dx$:

а) 8; б) 2; в) 16; г) - 8; д) - 2.

12. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^1 10x^4 dx$:

а) 20; б) - 10; в) 10; г) 2; д) - 2.

13. Знайти площу плоскої фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$.

а) $\frac{2}{3}$ (кв.од.);

б) $\frac{1}{3}$ (кв.од.);

в) $\frac{1}{2}$ (кв.од.);

г) $\frac{4}{3}$ (кв.од.);

д) 1 (кв.од.).

14. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$:

а) $\ln 2$; б) 2; в) $\ln 3$; г) $1 - \ln 2$; д) 1.

15. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{6x+1}$:

а) $\frac{1}{6} \ln 7$; б) $\frac{1}{2} \ln 3$; в) 4; г) 6; д) $\ln 2$.

16. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$:

а) - 1; б) $-\frac{1}{2}$; в) 1; г) 2; д) $\frac{1}{2}$.

17. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{8x+1}}$.:

а) $\frac{1}{3}$; б) 3; в) $\frac{1}{2}$; г) 1; д) $-\frac{1}{2}$.

18. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^1 e^{2x} dx$:

- а) $\frac{1}{2}(e^2 - 1)$; б) $\frac{1}{3}e + 1$; в) $\frac{1}{3}e^2$; г) 1; д) e .

19. Знайти площу плоскої фігури, обмеженої лініями $y = 2x - x^2$, $y = -x$.

- а) 8 (кв.од.);
б) 4,5 (кв.од.);
в) $2\frac{1}{3}$ (кв.од.);
г) 2,5 (кв.од.);
д) $\frac{1}{3}$ (кв.од.).

20. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^e \ln x dx$:

- а) $e - 1$; б) e ; в) $\frac{1}{2}$; г) 1; д) $-\frac{1}{2}$.

21. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$

- а) $4 - 2\ln 3$;
б) 4;
в) $4 - \ln 3$;
г) $1 - 2\ln 3$;
д) 2.

22. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^9 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

- а) $2\arctg 3 - \pi$;
б) $\arctg 3 - \frac{\pi}{2}$;

в) $2\operatorname{arctg}2 - \frac{\pi}{2}$;

г) 9;

д) $2\operatorname{arctg}3 - \frac{\pi}{2}$.

Відповіді

1. а). 2. а). 3. г). 4. а). 5. д). 6. г). 7. в). 8. б). 9. д). 10. д). 11. б).
12. г). 13. б). 14. а). 15. а). 16. д). 17. в). 18. а). 19. б). 20. г).
21. а). 22. д).

Розділ 7

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

7.1. Диференціальні рівняння першого порядку

7.1.1. Основні поняття про звичайні диференціальні рівняння першого порядку: означення, задача Коші, теорема існування та єдиність розв'язку задачі Коші. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Звичайне диференціальне рівняння першого порядку, в загальному випадку, можна записати у вигляді $F(x, y, y') = 0$, або $y' = f(x, y)$ – у випадку рівняння, розв'язаного відносно похідної.

Розв'язком диференціального рівняння називається функція $y = \phi(x)$, яка при підстановці її в рівняння перетворює його в тотожність. Значення шуканого розв'язку при заданому значенні аргументу $x = x_0$, тобто $y_0 = \phi(x_0)$ називаються початковою умовою. Знаходження розв'язку рівняння, який задовольняє заданій початковій умові, називається задачею Коші.

Теорема. Нехай задано диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ і початкова умова $y_0 = \phi(x_0)$. Якщо функція $f(x, y)$ і її частинна похідна $f'_y(x, y)$ визначені і неперервні в деякій відкритій області D площини Oxy , яка містить точку (x_0, y_0) , то в достатньо малому інтервалі точки x_0 це рівняння має єдиний розв'язок $y = \phi(x)$, який задовольняє задану початкову умову.

Нехай в кожній точці області D рівняння $y' = f(x, y)$ має єдиний розв'язок. Загальним розв'язком диференціального рівняння в області D називається функція $y = \phi(x, C)$, яка є розв'язком даного рівняння при довільних

значеннях сталої C і для будь-якої початкової умови $y_0 = \varphi(x_0)$ (точка $(x_0; y_0) \in D$) існує єдине значення $C = C_0$ таке, що функція $y = \varphi(x, C_0)$ задовольняє задану початкову умову, тобто $y_0 = \varphi(x_0, C_0)$.

Рівняння $y' = f(x, y)$ є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними, якщо

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y). \quad (7.1)$$

Таке рівняння можна записати у вигляді:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y).$$

Поділимо обидві частини на $f_2(y)$ ($f_2(y) \neq 0$) і помножимо на dx . Після інтегрування отримаємо загальний розв'язок у вигляді: $\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) dx + C$. Зауважимо, що рівняння $y' = f(x)$ є найпростіше рівняння з відокремлюваними змінними. Його загальний розв'язок – $y = \int f(x) dx + C$.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' = 2x + 1$.

Розв'язання. $y = \int (2x + 1) dx = x^2 + x + C$ – загальний розв'язок даного рівняння.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' = -\frac{y}{x^2}$.

Розв'язання. Це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Запишемо його у вигляді $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x^2}$. Функція $f(x, y) = -\frac{y}{x^2}$ і її частинна похідна $f'_y(x, y) = -\frac{1}{x^2}$ визначена і неперервна в області, у якій

$x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, а $y \in (-\infty; +\infty)$. Тому в цій області виконуються умови теореми існування і єдиності розв'язку.

Відокремлюючи змінні та інтегруючи, одержимо:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x^2}; \quad \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x^2} + C; \quad \ln|y| = \frac{1}{x} + C;$$

$$|y| = e^{\frac{1}{x} + C}; \quad y = \pm C e^{\frac{1}{x}}, \text{ або } y = C e^{\frac{1}{x}}.$$

Отримана функція $y = C e^{\frac{1}{x}}$ – є шуканим загальним розв'язком заданого рівняння $y' = -\frac{y}{x^2}$.

Зауважимо, що при відокремлюванні змінних можлива втрата розв'язку $y = 0$, але цей розв'язок входить в загальний розв'язок при $C = 0$.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' = \frac{y-2}{x+5}$.

Розв'язання. Відокремлюємо змінні:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-2}{x+5}; \quad \frac{dy}{y-2} = \frac{dx}{x+5}, \text{ вважаючи, що } y-2 \neq 0, \quad y \neq 2.$$

Інтегруючи рівняння $\frac{dy}{y-2} = \frac{dx}{x+5}$, отримаємо рівність

$$\int \frac{dy}{y-2} = \int \frac{dx}{x+5} + C, \text{ або } \int \frac{dy}{y-2} = \int \frac{dx}{x+5} + \ln C, \text{ тобто}$$

$$\ln|y-2| = \ln|x+5| + \ln|C|, \text{ або } \ln|y-2| = \ln|C(x+5)|.$$

Звідки, одержуємо загальний розв'язок $y = 2 + C(x+5)$.

При $C = 0$ одержується розв'язок $y = 2$.

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок рівняння $(1 + \sin x) y' = y \cos x$, який задовольняє початкову умову $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$.

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді $\frac{dy}{dx} = \frac{y \cos x}{1 + \sin x}$; та знайдемо його загальний розв'язок. Відокремивши змінні і проінтегрувавши, отримаємо:

$$\frac{dy}{y} = \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx; \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx + C,$$

$\ln|y| = \ln|1 + \sin x| + \ln|C|$, звідки $y = C(1 + \sin x)$ – загальний розв'язок рівняння. (При $C = 0$ отримаємо розв'язок $y = 0$, втрачений при відокремлюванні змінних).

Використовуючи початкову умову $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$, знайдемо значення сталої C : $4 = C(1 + \sin \frac{\pi}{2})$, $\Rightarrow C = 2$.

Отже, $y = 2(1 + \sin x)$ – шуканий частинний розв'язок.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $y' = -2x e^{x^2} \sqrt{1 + y^2}$.

Розв'язання. Маємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремлюємо змінні

$$\frac{dy}{dx} = -2x e^{x^2} \sqrt{1 + y^2}, \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{\sqrt{1 + y^2}} = -2x e^{x^2} dx,$$

та інтегруємо останнє рівняння: $\int \frac{dy}{\sqrt{1 + y^2}} = -\int 2x e^{x^2} dx + C$;

$\ln|y + \sqrt{1 + y^2}| = -e^{x^2} + C$, або $e^{x^2} + \ln|y + \sqrt{1 + y^2}| = C$ – загальний інтеграл рівняння.

Приклад 6. Розв'язати рівняння

$$x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0, \quad y(0) = 0.$$

Розв'язання. Маємо диференціальне рівняння, записане в диференціальній формі. Оскільки функції $x\sqrt{1+y^2}$ і $y\sqrt{1+x^2}$ є добутками двох функцій, одна з яких залежить від змінної x , а друга від змінної y , то це диференціальне рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними.

Поділивши обидві його частини на добуток $\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+y^2} \neq 0$, дістанемо рівняння з відокремленими змінними: $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy = 0$. Інтегруючи його отримаємо $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} + \int \frac{y dy}{\sqrt{1+y^2}} = C$.

Звідки $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C$ – загальний інтеграл рівняння. Враховуючи початкову умову: при $x=0$, $y=0$, маємо $C=2$.

Отже, $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = 2$ – шуканий частинний розв'язок.

Приклад 7. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' = \frac{\cos^2 y}{(x+1)^3}$.

Розв'язання. Маємо рівняння зі змінними, що відокремлюються.

Відокремимо змінні: $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2 y}{(x+1)^3}, \quad \frac{dy}{\cos^2 y} = \frac{dx}{(x+1)^3}$.

Інтегруємо ліву і праву частини рівняння:

$$\int \frac{dy}{\cos^2 y} = \int \frac{dx}{(x+1)^3} + C, \quad \int \frac{dy}{\cos^2 y} = \int (x+1)^{-3} d(x+1) + C, \Rightarrow$$

$$tg y = \frac{(x+1)^{-3+1}}{-3+1} + C, \quad tg y = \frac{(x+1)^{-2}}{-2} + C, \quad tg y = -\frac{1}{2(x+1)^2} + C -$$

загальний інтеграл даного диференціального рівняння.

Приклад 8. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' = (2y+1)tgx$.

Розв'язання. Маємо рівняння зі змінними, що відокремлюються: $\frac{dy}{2y+1} = (2y+1)tgx$, $\frac{dy}{2y+1} = tgx dx$,

$$\int \frac{dy}{2y+1} = \int tgx dx + C, \quad \frac{1}{2} \int \frac{d(2y+1)}{2y+1} = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx + C, \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \ln|2y+1| = -\ln|\cos x| + C, \quad (2y+1)^{\frac{1}{2}} = C(\cos x)^{-1},$$

$$\sqrt{2y+1} = \frac{C}{\cos x}, \quad 2y+1 = \frac{C^2}{\cos^2 x}, \quad 2y = \frac{C^2}{\cos^2 x} - 1, \Rightarrow$$

$$y = \frac{C^2}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2} - \text{загальний розв'язок даного рівняння.}$$

Приклад 9. Знайти загальний розв'язок рівняння $(x^2 + 4)y' - 2xy = 0$

Розв'язання. Дане рівняння є рівнянням із змінними, що відокремлюються: $(x^2 + 4)y' - 2xy = 0$, $(x^2 + 4)\frac{dy}{dx} = 2xy$,

$$\frac{dy}{y} = \frac{2xdx}{x^2 + 4}, \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2xdx}{x^2 + 4}. \text{ Зауважимо, що } 2xdx = d(x^2 + 4).$$

$$\text{Тоді } \int \frac{dy}{y} = \int \frac{d(x^2 + 4)}{x^2 + 4}, \Rightarrow$$

$$\ln|y| = \ln|x^2 + 4| + \ln|C| \quad (C \neq 0).$$

$$\ln|y| = \ln\left|C(x^2 + 4)\right|, \quad |y| = \left|C(x^2 + 4)\right|,$$

$y = C(x^2 + 4)$ – загальний розв’язок рівняння.

7.1.2. Однорідні диференціальні рівняння

Рівняння $y' = f(x, y)$, де функція $f(x, y)$ задовольняє умову $f(tx, ty) = f(x, y)$ для довільного числа $t \neq 0$, є однорідним диференціальним рівнянням першого порядку. А сама функція називається однорідною 0-го виміру. Таке рівняння розв’язується підстановкою $y = x \cdot u$, де $u = u(x)$ – деяка невідома функція від x . Після підстановки функції $y = xu$ в дане рівняння, воно зводиться до диференціального рівняння з відокремлюваними змінними відносно невідомої функції u .

Приклад 10. Розв’язати диференціальне рівняння $2xyu' = y^2 - 4x^2$.

Розв’язання. Запишемо рівняння у вигляді $y' = \frac{y^2 - 4x^2}{2xy}$. Оскільки $f(x, y) = \frac{y^2 - 4x^2}{2xy}$ є однорідною функцією, бо

$$f(tx, ty) = \frac{(ty)^2 - 4(tx)^2}{2(tx)(ty)} = \frac{t^2(y^2 - 4x^2)}{2t^2xy} = \frac{y^2 - 4x^2}{2xy},$$

тобто виконується умова $f(tx, ty) = f(x, y)$, то дане рівняння є однорідним диференціальним рівнянням і зводиться до рівняння зі змінними, що відокремлюються, заміною $y = xu$, де $u = u(x)$ – деяка диференційована функція і $y' = u + xu'$.

Тоді $u + xu' = \frac{u^2x^2 - 4x^2}{2xux}$. Перетворимо дане рівняння:

$$u + xu' = \frac{x^2(u^2 - 4)}{2x^2u}; \quad u + xu' = \frac{u^2 - 4}{2u}; \quad u'x = \frac{u^2 - 4}{2u} - u;$$

$$u'x = \frac{u^2 - 4 - 2u^2}{2u};$$

$$u'x = \frac{-u^2 - 4}{2u}; \quad \frac{du}{dx} \cdot x = -\frac{u^2 + 4}{2u}.$$

Отримали рівняння зі змінними, що відокремлюються.

$$\text{Відокремимо змінні: } \frac{2u du}{u^2 + 4} = -\frac{dx}{x}.$$

$$\text{Інтегруємо ліву і праву частини: } \int \frac{2u du}{u^2 + 4} = -\int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|u^2 + 4| = -\ln|x| + \ln|C|, \quad C \neq 0, \quad \ln|u^2 + 4| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|, \quad u^2 + 4 = \frac{C}{x}.$$

$$\text{Враховуючи що } u = \frac{y}{x}, \text{ одержимо: } \frac{y^2}{x^2} + 4 = \frac{C}{x}; \quad \frac{y^2 + 4x^2}{x^2} = \frac{Cx}{x^2},$$

$$y^2 + 4x^2 - Cx = 0 - \text{загальний інтеграл даного рівняння.}$$

Приклад 11. Знайти загальний розв'язок рівняння $xy' = y \ln \frac{y}{2}$.

Розв'язання. Розв'яжемо рівняння відносно похідної: $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{2}$. Оскільки $f(x, y) = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{2}$, і $f(tx, ty) = f(x, y)$, то рівняння – однорідне.

Покладемо $y = xu$, $y' = u + xu'$. Підставивши значення y та y' в рівняння, одержимо: $u + xu' = u \ln u$, $\frac{du}{dx} = \frac{u(\ln u - 1)}{x}$.

Відокремлюючи змінні та інтегруючи, маємо: $\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}$, $\int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \int \frac{dx}{x} + C$, $\ln|\ln u - 1| = \ln|Cx|$, або

$\ln u - 1 = Cx$, $u = e^{Cx+1}$. Тому $y = xe^{Cx+1}$ – шуканий загальний розв'язок.

Приклад 12. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y' = \frac{y + \sqrt{xy}}{x}.$$

Розв'язання.

Оскільки $f(x, y) = \frac{y + \sqrt{xy}}{x}$;

$f(tx; ty) = \frac{ty + t\sqrt{xy}}{tx} = f(x, y)$, то маємо однорідне

диференціальне рівняння. Підставимо у рівняння $y = xu$,

$y' = u + xu'$, отримаємо:

$u + xu' = \frac{xu + x\sqrt{u}}{x}$, звідки $u' = \frac{\sqrt{u}}{x}$ або $\frac{du}{dx} = \frac{\sqrt{u}}{x}$ – рівняння

з відокремлюваними змінними.

Розв'яжемо це рівняння: $\frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{dx}{x}$; $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int \frac{dx}{x} + C$,

звідки маємо $2\sqrt{u} = \ln|x| + C$ або $u = \frac{(\ln|x| + C)^2}{4}$.

Отже, $y = \frac{1}{4}x(\ln|x| + C)^2$ – шуканий розв'язок.

Зауважимо, що при відокремленні змінних був втрачений розв'язок $u = 0$, тобто $y = 0$, який не міститься в знайденому розв'язку при жодному значенні C . Такий розв'язок називається особливим. Тому вся множина розв'язків даного рівняння складається із загального розв'язку

$y = \frac{1}{4}x(\ln|x| + C)^2$ та особливого розв'язку $y = 0$.

Приклад 13. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y' = \frac{y}{x} + tg \frac{y}{x}.$$

Розв'язання. Маємо однорідне диференціальне рівняння. Використовуючи підстановку $y = xu$, $y' = u + xu'$, отримаємо: $u + xu' = u + tg u$; $x \frac{du}{dx} = tg u$;

$$\int ctg u du = \int \frac{dx}{x} + C; \ln|\sin u| = \ln|x| + \ln|C| \text{ або } \sin u = Cx.$$

Оскільки, $u = \frac{y}{x}$, то $\sin \frac{y}{x} = Cx$ – загальний інтеграл.

Зауважимо, що при відокремлюванні змінних втрачені розв'язки рівняння $tg u = 0$, тобто $u = k\pi$, або $y = k\pi x$, $k = 0; \pm 1; \pm 2, \dots$, які належать знайденому загальному інтегралу при $C = 0$.

Приклад 14. Знайти розв'язок диференціального рівняння $y' = \frac{3x+y}{x}$, який задовольняє умову $y(1) = 3$.

Розв'язання. Використовуючи підстановку $y = xu$, $y' = u + xu'$, отримаємо: $xu' = 3$, $u' = \frac{3}{x}$. Інтегруючи, маємо $u = 3\ln|x| + C$. Тому, $y = x(3\ln|x| + C)$ – загальний розв'язок.

Використовуючи початкову умову, знаходимо $C = 3$ і шуканий частинний розв'язок матиме вигляд: $y = 3x(\ln|x| + 1)$.

7.1.3. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння Бернуллі

Диференціальне рівняння першого порядку називається лінійним, якщо воно є лінійним відносно шуканої функції y та її похідної y' . Це означає, що шукана функція та її похідна містяться в рівнянні в першому степені і не перемножуються. Його канонічна форма записується у вигляді:

$$y' + P(x)y = Q(x), \quad (7.2)$$

де функції $P(x)$ і $Q(x)$ – неперервні на деякому проміжку.

Рівняння

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n, \quad (7.3)$$

де $n \neq 0$, $n \neq 1$ називається рівнянням Бернуллі.

Загальний розв'язок як лінійного рівняння, так і рівняння Бернуллі будемо шукати у вигляді $y = u \cdot v$, де $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – деякі, відмінні від нуля, функції, які можна знайти з двох диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними, що одержуються з даного рівняння після підстановки в нього $y = u \cdot v$. Зауважимо, що рівняння Бернуллі при $n > 0$ завжди має розв'язок $y = 0$.

Приклад 15. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' - u \operatorname{ctg} x = \sin^2 x$.

Розв'язання. Це лінійне диференціальне рівняння першого порядку.

Підставляємо у рівняння $y = uv$, $y' = u'v + uv'$, отримаємо: $u'v + uv' - uv \operatorname{ctg} x = \sin^2 x$. Після очевидних перетворень маємо: $uv' + v(u' - u \operatorname{ctg} x) = \sin^2 x$. Оскільки u або v можна вибрати довільно, то за u виберемо будь-який, відмінний від нуля, розв'язок рівняння $u' - u \operatorname{ctg} x = 0$.

Інтегруючи одержане рівняння будемо мати:

$$\frac{du}{dx} = u \operatorname{ctg} x, \quad \frac{du}{u} = \operatorname{ctg} x dx, \quad \int \frac{du}{u} = \int \operatorname{ctg} x dx,$$

$$\ln|u| = \ln|\sin x|, \quad u = \pm \sin x, \quad \text{виберемо } u = \sin x.$$

Функцію v знайдемо з рівняння $uv' = \sin^2 x$ при знайдений функції $u = \sin x$, тобто $v' \sin x = \sin^2 x$, $v' = \sin x$, $v = \int \sin x dx + C = -\cos x + C$. Шуканий загальний розв'язок даного рівняння $y = \sin x(C - \cos x)$.

Приклад 16. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' = 3x^2 e^{-x^2} - 2xy$.

Розв'язання. За означенням це рівняння лінійне. Запишемо його у вигляді $y' + 2xy = 3x^2 e^{-x^2}$.

Покладемо $y = uv$, $y' = u'v + uv'$.

Тоді рівняння набуде вигляду: $u'v + uv' + 2xuv = 3x^2 e^{-x^2}$, або $uv' + v(u' + 2xu) = 3x^2 e^{-x^2}$. За невідому функцію $u \neq 0$ виберемо частинний розв'язок рівняння $u' + 2xu = 0$.

Розв'яжемо це рівняння: $\frac{du}{dx} = -2xu$, $\frac{du}{u} = -2x dx$,

$$\int \frac{du}{u} = -\int 2x dx, \ln|u| = -x^2, u = \pm e^{-x^2}, \text{ звідки один з розв'язків}$$

$u = e^{-x^2}$. Підставимо знайдений розв'язок в рівняння $uv' = 3x^2 e^{-x^2}$, будемо мати $v' = 3x^2$, $v = x^3 + C$.

Шуканий загальний розв'язок даного рівняння $y = e^{-x^2} (x^3 + C)$.

Приклад 17. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = x^2$.

Розв'язання. Дане рівняння лінійне. Підставивши в рівняння $y = uv$, $y' = u'v + uv'$, отримаємо:

$$u'v + uv' - \frac{2xuv}{1+x^2} = x^2, \quad u'v + v\left(u' - \frac{2xu}{1+x^2}\right) = x^2.$$

Знаходимо частинний розв'язок рівняння $u' - \frac{2xu}{1+x^2} = 0$,

$$\frac{du}{u} = \frac{2x}{1+x^2}, \quad \int \frac{du}{u} = \int \frac{2x dx}{1+x^2}, \quad \ln|u| = \ln(1+x^2), \quad u = 1+x^2, \quad \text{звідки}$$

$$\text{маємо: } v' = \frac{x^2}{x^2+1}, \quad v = \int \frac{x^2 dx}{x^2+1} + C = x - \arctg x + C.$$

Отже, $y = (x^2+1)(x - \arctg x + C)$ – шуканий загальний розв'язок даного рівняння.

Приклад 18. Знайти розв'язок рівняння $y' - \frac{2y}{x} = x^4$,

який задовольняє початкову умову $y(1) = \frac{4}{3}$.

Розв'язання. Знайдемо загальний розв'язок цього рівняння. Оскільки рівняння лінійне, то підставивши в це рівняння $y = uv$, $y' = u'v + uv'$, після перетворення, маємо:

$$uv' + v\left(u' - \frac{2u}{x}\right) = x^4. \quad \text{Знаходимо функції } u \text{ і } v: u' - \frac{2u}{x} = 0,$$

$$\frac{du}{u} - \frac{2dx}{x} = 0, \quad \ln|u| = 2\ln|x|, \quad u = x^2, \quad uv' = x^4, \quad x^2 v' = x^4,$$

$$v' = x^2, \quad v = \frac{x^3}{3} + C.$$

Шуканий загальний розв'язок даного рівняння матиме вигляд: $y = x^2 \left(\frac{x^3}{3} + C \right)$.

Використовуючи початкову умову, маємо: $\frac{4}{3} = \frac{1}{3} + C$,

$C=1$ і шуканий частинний розв'язок матиме вигляд $y = x^2 \left(\frac{x^3}{3} + 1 \right)$.

Приклад 19. Розв'язати диференціальне рівняння $y' - 2xy = xy^2$.

Розв'язання. Дане рівняння є диференціальним рівнянням Бернуллі. Це рівняння має очевидний розв'язок $y = 0$. Аналогічно як і у випадку лінійного рівняння, будемо розв'язувати це рівняння з допомогою підстановки $y = uv$, $y' = u'v + uv'$. В результаті розв'язання, отримаємо: $u'v + uv' - 2xuv = xu^2v^2$, або $uv' + v(u' - 2xu) = xu^2v^2$.

Виберемо функцію u з умови $u' - 2xu = 0$. Інтегруємо отримане рівняння: $\frac{du}{dx} = 2xu$, $\frac{du}{u} = 2x dx$, $\ln|u| = x^2$, $u = e^{x^2}$ – один із розв'язків.

Підставляючи $u = e^{x^2}$ в рівняння $uv' = xu^2v^2$, отримаємо: $v' = xe^{x^2}v^2$, $\int \frac{dv}{v^2} = \int xe^{x^2} dx + C$, $-\frac{1}{v} = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$,

звідки $v = -\frac{2}{e^{x^2} + 2C}$. Тоді $y = uv = -\frac{2e^{x^2}}{e^{x^2} + 2C}$.

Отже, множина всіх розв'язків даного рівняння:

$$y = -\frac{2e^{x^2}}{e^{x^2} + 2C}, \quad y = 0.$$

Приклад 20. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' - \frac{y}{x} = \frac{x^5}{y^2}$.

Розв'язання. Це диференціальне рівняння Бернуллі. Покладемо $y = uv$, $y' = u'v + uv'$. Тоді отримаємо:

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = \frac{x^5}{u^2v^2}, \text{ або } uv' + v\left(u' - \frac{u}{x}\right) = \frac{x^5}{u^2v^2}.$$

Функцію $u \neq 0$ знаходимо з рівняння $u' - \frac{u}{x} = 0$.

Розв'язуємо його: $\frac{du}{dx} = \frac{u}{x}$, $\frac{du}{u} = \frac{dx}{x}$, $\ln|u| = \ln|x|$, $u = x$.

Функція $v = v(x)$ є загальним розв'язком рівняння $u v' = \frac{x^5}{u^2 v^2}$ при $u = x$. Інтегруючи його, маємо: $\frac{dv}{dx} = \frac{x^2}{v^2}$,

$$v^2 dv = x^2 dx, \quad \int v^2 dv = \int x^2 dx + \frac{C}{3}, \quad \frac{v^3}{3} = \frac{x^3}{3} + \frac{C}{3}, \quad v^3 = x^3 + C,$$

$$v = v(x) = \sqrt[3]{x^3 + C}.$$

Тому $y = uv = x \sqrt[3]{x^3 + C}$ – шуканий загальний розв'язок заданого диференціального рівняння.

Приклад 21. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y' - \frac{xy}{x^2 + 1} = x$.

Розв'язання. Дане рівняння є лінійним диференціальним рівнянням першого порядку. Підставляємо у рівняння $y = uv$, $y' = u'v + uv'$, отримаємо:

$$u'v + uv' - \frac{x}{x^2 + 1} uv = x, \quad u'v + u \left(v' - \frac{x}{x^2 + 1} v \right) = x.$$

За $v = v(x)$ виберемо будь-який, відмінний від нуля, розв'язок рівняння $v' - \frac{xv}{x^2 + 1} = 0$. Розв'яжемо це диференціальне

рівняння зі змінними, що відокремлюються: $\frac{dv}{dx} = \frac{xv}{x^2 + 1}$,
 $\frac{dv}{v} = \frac{x dx}{x^2 + 1}$, $\int \frac{dv}{v} = \int \frac{x dx}{x^2 + 1}$, $\ln|v| = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1|$, $v = \sqrt{x^2 + 1}$.

Функцію $u = u(x)$ знайдемо з рівняння $u'v = x$ при

знайденій функції $v = \sqrt{x^2 + 1}$, тобто $u' \sqrt{x^2 + 1} = x$. Отримали рівняння з відокремленими змінними: $\frac{du}{dx} \sqrt{x^2 + 1} = x$,

$$du = \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 1}}, \int du = \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 1}}, u = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{x^2 + 1} + C = \sqrt{x^2 + 1} + C.$$

Отже, $u = u(x) = \sqrt{x^2 + 1} + C$.

Загальний розв'язок даного диференціального рівняння:

$$y = \left(\sqrt{x^2 + 1} + C \right) \sqrt{x^2 + 1}, \text{ або}$$

$$y = x^2 + 1 + C\sqrt{x^2 + 1}.$$

Приклад 22. Знайти розв'язок рівняння $y' + y = \frac{e^{-x}}{1-x}$,

який задовольняє початкову умову $y(0) = \ln 5$.

Розв'язання. Це лінійне диференціальне рівняння першого порядку з початковою умовою. Використаємо підстановку: $y = u v$, $y' = u' v + u v'$. Отримаємо рівняння

$$u' v + u v' + u v = \frac{e^{-x}}{1-x}, \text{ або } u' v + u(v' + v) = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

Знаходимо функції v і u :

$$\frac{dv}{dx} = -v, \quad \frac{dv}{v} = -dx, \quad \int \frac{dv}{v} = -\int dx, \quad \ln|v| = -x, \quad v = e^{-x}.$$

$$\frac{du}{dx} e^{-x} = \frac{e^{-x}}{1-x}, \quad du = \frac{dx}{1-x}, \quad \int du = -\int \frac{d(1-x)}{(1-x)},$$

$$u = -\ln|1-x| + \ln|C|, \quad u = \ln \left| \frac{C}{1-x} \right|.$$

Загальний розв'язок вихідного рівняння запишеться:

$$y = uv = e^{-x} \ln \left| \frac{C}{1-x} \right|.$$

Знайдемо C , використавши початкову умову $y(0) = \ln 5$:

$$\ln 5 = \frac{1}{e^0} \cdot \ln \left| \frac{C}{1-0} \right|, \quad C = 5.$$

Тоді шуканий частинний розв'язок диференціального рівняння матиме вигляд $y = e^{-x} \cdot \ln \frac{5}{|1-x|}$.

Запитання для самоконтролю

1. Сформулюйте задачу Коші для диференціального рівняння першого порядку.

2. Яке рівняння $y' = f(x, y)$ називається рівнянням з відокремлюваними змінними?

3. Дайте означення однорідного диференціального рівняння першого порядку.

4. При яких умовах диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ буде лінійним?

5. Сформулюйте теорему існування і єдиності розв'язку диференціального рівняння першого порядку.

6. Що називається диференціальним рівнянням першого порядку?

7. Що називається розв'язком диференціального рівняння?

8. Дайте означення рівняння Бернуллі. З допомогою якої підстановки його можна розв'язати?

9. Який геометричний зміст задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку?

Завдання для самостійного розв'язування

Приклад 1. Знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь:

$$a) (1+x^2)y' = 2xy; \quad б) xy' + y \ln y = 0;$$

$$в) y' = \frac{y+1}{x \ln x}; \quad г) y' = \frac{e^x y}{1+e^x}.$$

Приклад 2. Знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь, які задовольняють початковим умовам:

$$a) y = (2y+1) \operatorname{ctg} x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}; \quad б) (1+x^2)y' = -xy, \quad y(0) = 1.$$

Приклад 3. Знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь:

$$a) y' = \frac{xy - y^2}{x^2}; \quad б) y' = 1 + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}; \quad в) y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}.$$

Приклад 4. Розв'язати рівняння:

$$a) y' - 2xy = 2xe^{x^2}; \quad б) y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$в) y' + \frac{y}{x} = \frac{e^{-x}}{x}; \quad г) y' - \frac{y}{x} = x \cos x;$$

$$д) y' - \frac{2y}{x} = 3x^4; \quad е) y' + \frac{y}{x} = -x y^2;$$

$$є) y' - \frac{y}{x-1} = \frac{y^2}{x-1}; \quad ж) y' + \frac{y}{x} = y^2 \frac{\ln x}{x}.$$

Відповіді

$$1. a) y = C(1+x^2); \quad б) y = e^{\frac{C}{x}};$$

$$в) y = C \ln x - 1; \quad г) y = C(1+e^x).$$

$$2. a) y = \sin^2 x - \frac{1}{2}; \quad б) y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$3. a) y = \frac{x}{\ln|Cx|}; \quad б) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \ln|x| = C; \quad в) \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = Cx - 1.$$

$$4. a) y = e^{x^2} (x^2 + C); \quad б) y = \frac{1}{\cos x} (\operatorname{tg} x + C);$$

$$в) y = \frac{1}{x} (C - e^{-x}); \quad г) y = x(\sin x + C);$$

$$д) y = x^2 (x^3 + C); \quad е) y = \frac{1}{x^2 + Cx}, \quad y = 0;$$

$$є) y = \frac{1-x}{x+C}, \quad y = 0; \quad ж) y = \frac{1}{Cx + \ln x + 1}, \quad y = 0.$$

Тести

1. Диференціальним рівнянням першого порядку (розв'язаним відносно похідної) називається:

а) рівняння $y' = f(x, y)$;

б) вираз $y' = f(x, y, dy)$;

в) вираз $F(x, y, y') = 0$;

г) вираз $F(x, y, dy, dx) = 0$;

д) вираз $f(x, y) dx = 0$.

2. Диференціальним рівнянням першого порядку (не розв'язаним відносно похідної) називається рівняння:

а) $y' = f(x, y)$;

б) $F(x, y, y', y'') = 0$;

в) $F(x, y, y') = 0$;

г) $F(y, y', y'') = 0$;

д) $F(x, y^2, y'') = 0$.

3. Розв'язати рівняння $y' = f(x, y)$ означає знайти

- а) хоча б один розв'язок цього рівняння;
- б) один розв'язок цього рівняння;
- в) розв'язок із додатними значеннями;
- г) розв'язок із від'ємними значеннями;
- д) всі його розв'язки.

4. Яка з функцій є загальним розв'язком рівняння $y' = 1$?

- а) $y = x + C$;
- б) $y = C$;
- в) $y = Cx$;
- г) $y = C|x|$;
- д) $y = C \sin x$.

5. Яка з функцій є загальним розв'язком рівняння $y' = y$?

- а) $y = e^x + C$;
- б) $y = C e^x$;
- в) $y = C x^2$;
- г) $y = \sqrt[3]{x} + C$;
- д) $y = C \cos x$.

6. Яка з функцій є частинним розв'язком рівняння $y' = y$?

- а) $y = e^x + 1$;
- б) $y = 2x^2$;
- в) $y = \sqrt[3]{x} + 2017$;
- г) $y = e^x$;
- д) $y = \sin 7x$.

7. Розв'язком рівняння $y' = 2x$, що задовольняє початкову умову $y(0) = 0$, є функція:

- а) $y = 2x^2$;
- б) $y = 3x^2$;

в) $y = 2e^x$;

г) $y = x^2$;

д) $y = \sin x + 2$.

8. Які з рівнянь $xy dx = (x+1)(y-1)dy$, $y' = xy$,

$y' = (x+2y)^3$ є рівняннями з відокремлюваними змінними?

а) перше та друге рівняння;

б) усі рівняння;

в) тільки перше рівняння;

г) друге та третє рівняння;

д) перше та третє рівняння.

9. Розв'язки однорідного рівняння першого порядку знаходять у вигляді:

а) $y = u(x) + x$;

б) $y = u(x) - x$;

в) $y = u(x) + |x|$;

г) $y = \frac{u(x)}{x}$;

д) $y = xu(x)$.

10. Нехай $P(x)$ і $Q(x)$ – неперервні функції. Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння вигляду:

а) $y' + P(x)y = Q(x)$;

б) $y' + P(x)y^2 = Q(x)$;

в) $y' + P(x)\sqrt{y} = Q(x)$;

г) $y' + P(x)\sqrt[3]{y} = Q(x)$;

д) $(y')^2 + P(x)y = Q(x)$.

11. Розв'язки лінійного рівняння $y' + P(x)y = Q(x)$ знаходять у вигляді:

а) $y = u(x) \cdot v(x)$;

б) $y = u(x) + v(x)$;

$$в) y = u(x) - v(x);$$

$$г) y = u(x) + |v(x)|;$$

$$д) y = \frac{u(x)}{v(x)}.$$

12. Нехай $P(x)$ і $Q(x)$ – неперервні функції, $n \notin \{0; 1\}$. Рівнянням Бернуллі називається рівняння вигляду:

$$а) y' + P(x) \sin y = Q(x) y^n;$$

$$б) y' + P(x) y = Q(x) y^n;$$

$$в) y' + P(x) \cos y = Q(x) y^n;$$

$$г) y' + P(x) \ln y = Q(x) y^n;$$

$$д) (y')^2 + P(x) y = Q(x) y^n.$$

13. Розв'язки рівняння Бернуллі $y' + P(x) y = Q(x) y^n$ знаходять у вигляді:

$$а) y = u(x) \cdot v(x);$$

$$б) y = u(x) + v(x);$$

$$в) y = u(x) - v(x);$$

$$г) y = u(x) + |v(x)|;$$

$$д) y = \frac{u(x)}{v(x)}.$$

14. Рівняння $x(y+1)^2 dx = (x-2)^3 y^2 dy$ є

а) рівнянням із відокремленими змінними;

б) однорідним рівнянням;

в) лінійним рівнянням;

г) рівнянням із відокремлюваними змінними;

д) рівнянням Бернуллі.

15. Розв'язки однорідного рівняння першого порядку знаходять у вигляді:

$$а) y = u(x) + x;$$

$$б) y = u(x) - x;$$

в) $y = xu(x)$;

г) $y = u(x) + |x|$;

д) $y = \frac{u(x)}{x}$.

16. Рівняння $y' = 2y + x$ є

- а) рівнянням із відокремленими змінними;
- б) рівнянням із відокремлюваними змінними;
- в) однорідним рівнянням;
- г) лінійним рівнянням;
- д) рівнянням Бернуллі.

17. Рівняння $y' = 2y + xy^3$ є

- а) рівнянням із відокремленими змінними;
- б) рівнянням Бернуллі;
- в) рівнянням із відокремлюваними змінними;
- г) однорідним рівнянням;
- д) лінійним рівнянням.

18. Яке з рівнянь $y' = \frac{y}{x}$, $y' = y + 1$, $y' = y - y^2$ є

однорідним рівнянням?

- а) друге;
- б) третє;
- в) перше;
- г) друге і третє;
- д) усі рівняння.

19. Яке з рівнянь $y' = \frac{y}{x}$, $y' = y + 1$, $y' = y + xy^2$ є

рівнянням Бернуллі?

- а) перше;
- б) друге;
- в) перше і друге;
- г) третє;
- д) усі рівняння.

20. Загальним інтегралом рівняння $x dx + y dy = 0$ є

а) $x^2 + y^2 = c$;

б) $x^2 + y^2 = 1$;

в) $x^2 + y^2 = 0$;

г) $x = c$;

д) $y = c$.

21. Розв'язком рівняння $y' = y + 1$, що задовольняє початкову умову $y(0) = 1$, є функція

а) $y = 2e^x - 1$;

б) $y = 2 \cos x - 1$;

в) $y = 3e^x - 2$;

г) $y = e^x - 1$;

д) $y = \sin x + 1$.

22. Рівняння $(x + y)dx = (y - x)dy$ є

а) рівнянням із відокремленими змінними;

б) рівнянням із відокремлюваними змінними;

в) лінійним рівнянням;

г) рівнянням Бернуллі;

д) однорідним рівнянням.

23. Загальний розв'язок рівняння $y' = y + 2$ має вигляд:

а) $y = Ce^x - 2$;

б) $y = Ce^x$;

в) $y = x^2$;

г) $y = e^x + x^2$;

д) $y = -e^x + x^2$.

24. Розв'язком рівняння $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, що задовольняє умову

$y(1) = 1$, є функція:

а) $y = 2x$;

б) $y = x$;

в) $y = \sin x$;

г) $y = 3x$;

д) $y = \cos x$.

25. Рівняння $y' = f(x, y)$ для кожної точки (x_0, y_0) області G має хоча б один розв'язок $y = y(x)$, що задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$, якщо

а) функція $f(x, y)$ є розривною в кожній точці області G ;

б) $f(x, y) > 0$ для всіх $(x, y) \in G$;

в) функція $f(x, y)$ неперервна на G ;

г) $f(x, y) < 0$ для всіх $(x, y) \in G$;

д) $f(x, y) > \sqrt[3]{f(x, y)}$ для всіх $(x, y) \in G$.

Відповіді

1. а). 2. в). 3. д). 4. а). 5. б). 6. г). 7. г). 8. а). 9. д). 10. а). 11. а).
12. б). 13. а). 14. г). 15. в). 16. г). 17. б). 18. в). 19. г). 20. а).
21. а). 22. д). 23. а). 24. б). 25. в).

7.2. Диференціальні рівняння другого порядку

7.2.1. Диференціальні рівняння другого порядку, що допускають зниження порядку

Рівняння виду

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (7.4)$$

називають *диференціальним рівнянням другого порядку*.

Якщо його можна розв'язати відносно старшої похідної, то воно запишеться

$$y'' = f(x, y, y'). \quad (7.5)$$

Задача Коші для диференціального рівняння другого порядку полягає в тому, щоб знайти розв'язок даного рівняння, який при заданому значенні аргумента $x = x_0$

набуває задані значення y_0 та y'_0 , тобто задовольняє початковим умовам

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0. \quad (7.6)$$

Задача знаходження розв'язку рівняння (7.5), який задовольняє початкові умови (7.6), *називається задачею Коші*.

З геометричної точки зору такий розв'язок визначає єдину інтегральну криву, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ та має кутовий коефіцієнт y'_0 дотичної до кривої у цій точці.

Функція

$$y = \varphi(x, C_1, C_2) \quad (7.7)$$

називається *загальним розв'язком рівняння (7.5)* в деякій області $(D) \subset Oxy$, якщо :

1) вона є розв'язком цього рівняння при довільних значеннях сталих C_1 і C_2 ;

2) які б не були початкові умови (7.6), можна підібрати такі значення сталих $C_1 = C_{10}$ і $C_2 = C_{20}$, що функція $y = \varphi(x, C_{10}, C_{20})$ задовольняє ці початкові умови.

Розв'язок, отриманий із загального розв'язку (7.7) при певних значеннях сталих C_1 і C_2 , *називається частинним розв'язком рівняння (7.5)*.

Розглянемо окремі випадки диференціального рівняння (7.5), розв'язання яких відбувається за допомогою введення деякої проміжної функції. Це зводить розв'язання рівняння другого порядку до розв'язання двох диференціальних рівнянь першого порядку. Такі перетворення рівняння (7.5) називаються *зниженням його порядку*.

Порядок диференціального рівняння (7.5) можна знизити, якщо рівняння $y'' = f(x, y, y')$:

- 1) не містить явно шуканої функції y та її похідної y' ;
- 2) не містить явно шуканої функції y ;

3) не містить явно незалежної змінної x .
У цих випадках маємо такі диференціальні рівняння:

$$y'' = f(x); \quad y'' = f(x, y'); \quad y'' = f(y, y').$$

I. Рівняння виду

$$y'' = f(x). \quad (7.8)$$

Введемо $y' = z$, де $z = z(x)$, матимемо: $y'' = z'$,
 $z' = f(x), \quad z = \int f(x)dx + C_1, \quad y' = \int f(x)dx + C_1,$
 $y = \int \left(\int f(x)dx + C_1 \right) dx + C_2.$

Отже, загальний розв'язок рівняння $y'' = f(x)$ знаходиться послідовним інтегруванням функції $f(x)$ два рази.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' = x^3 + 6x + 2$.

Розв'язання

$$\begin{aligned} y' &= \int (x^3 + 6x + 2) dx = \int x^3 dx + 6 \int x dx + 2 \int dx = \\ &= \frac{x^4}{4} + 6 \frac{x^2}{2} + 2x + C_1 = \frac{x^4}{4} + 3x^2 + 2x + C_1, \\ y &= \int \left(\frac{x^4}{4} + 3x^2 + 2x + C_1 \right) dx = \frac{1}{4} \int x^4 dx + 3 \int x^2 dx + 2 \int x dx + \\ &+ C_1 \int dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^5}{5} + 3 \frac{x^3}{3} + 2 \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 = \\ &= \frac{x^5}{20} + x^3 + x^2 + C_1 x + C_2. \end{aligned}$$

Отже, шуканий загальний розв'язок:

$$y = \frac{x^5}{20} + x^3 + x^2 + C_1 x + C_2.$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' = 6x + 4 \sin 2x$.

Розв'язання

$$y' = \int (6x + 4 \sin 2x) dx + C_1 = 3x^2 - 2 \cos 2x + C_1,$$

$$y = \int (3x^2 - 2 \cos 2x + C_1) dx + C_2 = x^3 - \sin 2x + C_1 x + C_2.$$

Отже, шуканий загальний розв'язок:

$$y = x^3 - \sin 2x + C_1 x + C_2.$$

Приклад 3. Знайти розв'язок диференціального рівняння $y'' = -\frac{1}{x^2}$, який задовольняє початковим умовам $y(1) = 2$, $y'(1) = 3$.

Розв'язання. Знаходимо загальний розв'язок рівняння:

$$y' = -\int \frac{dx}{x^2} + C_1 = \frac{1}{x} + C_1, \quad y = \int \left(\frac{1}{x} + C_1 \right) dx + C_2 = \ln|x| + C_1 x + C_2.$$

$y = \ln|x| + C_1 x + C_2$ – шуканий загальний розв'язок.

Підставимо у вирази для y та y' початкові умови $x=1$, $y=2$, $y'=3$, отримаємо:

$$\begin{cases} 2 = \ln 1 + C_1 + C_2, \\ 3 = 1 + C_1. \end{cases}$$

Отже, $C_1 = 2$, $C_2 = 0$.

Шуканий частинний розв'язок рівняння:

$$y = \ln|x| + 2x.$$

II. Рівняння виду

$$y'' = f(x, y'), \tag{7.9}$$

що не містить явно шуканої функції y .

Введемо підстановку:

$$y' = z, \text{ де } z = z(x), \text{ тоді } y'' = z'.$$

Маємо диференціальне рівняння першого порядку

$$z' = f(x, z)$$

відносно невідомої функції z від x .

Нехай $z = f(x, C_1)$ – загальний розв'язок рівняння.

Тоді $y = \int f(x, C_1) dx + C_2$ – загальний розв’язок рівняння $y'' = f(x, y')$.

Приклад 4. Знайти загальний розв’язок рівняння $y'' = \frac{y' + 2}{x}$.

Розв’язання. Рівняння не містить явно шуканої функції y .

Введемо заміну $y' = z$, $y'' = z' = \frac{dz}{dx}$. Тоді рівняння набуде вигляду: $\frac{dz}{dx} = \frac{z + 2}{x}$.

Відокремимо у ньому змінні та інтегруємо його: $\frac{dz}{z + 2} = \frac{dx}{x}$, $\int \frac{dz}{z + 2} = \int \frac{dx}{x} + C_1$, тоді $z = C_1 x - 2$. Тоді

$$y' = C_1 x - 2 \text{ і } y = \int (C_1 x - 2) dx + C_2 = C_1 \frac{x^2}{2} - 2x + C_2.$$

Отже, $y = C_1 \frac{x^2}{2} - 2x + C_2$ – шуканий загальний розв’язок.

Приклад 5. Знайти розв’язок рівняння $y'' = \frac{1}{x^3} - \frac{y'}{x}$, який задовольняє початковим умовам: $y(1) = 2$, $y'(1) = 4$.

Розв’язання. Знаходимо загальний розв’язок. Покладемо $y' = z$, $y'' = z' = \frac{dz}{dx}$. Тоді рівняння запишеться: $z' = \frac{1}{x^3} - \frac{z}{x}$, або $z' + \frac{z}{x} = \frac{1}{x^3}$ – лінійне диференціальне рівняння.

Розв’яжемо його за допомогою підстановки: $z = u v$, $z' = u' v + u v'$, $u v' + v \left(u' + \frac{u}{x} \right) = \frac{1}{x^3}$, $u' + \frac{u}{x} = 0$, $\frac{du}{u} = -\frac{dx}{x}$,

$$\int \frac{du}{u} = -\int \frac{dx}{x}, \quad \ln|u| = -\ln|x|, \quad u = \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x} v' = \frac{1}{x^3}, \quad v' = \frac{1}{x^2},$$

$$v = -\frac{1}{x} + C_1, \text{ звідки маємо: } z = \left(-\frac{1}{x} + C_1\right) \frac{1}{x} \text{ і } y' = -\frac{1}{x^2} + \frac{C_1}{x}.$$

Тому $y = \frac{1}{x} + C_1 \ln|x| + C_2$ – загальний розв’язок даного рівняння.

Використовуючи початкові умови, отримаємо:

$$\begin{cases} 2 = 1 + C_2, \\ 4 = -1 + C_1, \end{cases} \text{ і } C_1 = 5, \quad C_2 = 1.$$

Шуканий частинний розв’язок: $y = \frac{1}{x} + 5\ln|x| + 1$.

III. Рівняння виду

$$y'' = f(y, y'), \quad (7.10)$$

що не містить явно незалежної змінної x .

Введемо підстановку:

$$y' = z, \quad y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z \frac{dz}{dy}.$$

Тоді рівняння $y'' = f(y, y')$ набуде вигляду

$$z \frac{dz}{dy} = f(y, z).$$

Розв’язавши його, отримаємо $z = F(y, C_1)$. Оскільки $z = y'$,

маємо: $\frac{dy}{dx} = F(y, C_1)$. Після інтегрування цього рівняння,

отримаємо: $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$ – загальний інтеграл рівняння $y'' = f(y, y')$.

Приклад 6. Знайти загальний розв’язок

диференціального рівняння $y'' = \frac{(y')^2}{y+1}$.

Розв'язання. Рівняння не містить явно незалежної змінної x . Поклавши $y' = z$, $y'' = z \frac{dz}{dy}$, отримаємо:

$$z \frac{dz}{dy} = \frac{z^2}{y+1} \quad \text{або} \quad \frac{dz}{z} = \frac{dy}{y+1}.$$

Після інтегрування, маємо: $z = C_1(y+1)$. Оскільки $z = y'$, то отримаємо диференціальне рівняння першого порядку відносно шуканої функції: $\frac{dy}{dx} = C_1(y+1)$.

Відокремимо у рівнянні змінні та інтегруємо його:

$$\frac{dy}{y+1} = C_1 dx, \quad \int \frac{dy}{y+1} = C_1 \int dx + C, \quad \ln|y+1| = C_1 x + C,$$

$$|y+1| = e^{C_1 x + C}, \quad y+1 = \pm e^C e^{C_1 x}, \quad y = C_2 e^{C_1 x} - 1, \quad \text{де } C_2 = \pm e^C.$$

Отже, $y = C_2 e^{C_1 x} - 1$ – шуканий загальний розв'язок рівняння.

7.2.2. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Лінійним диференціальним рівнянням другого порядку називається рівняння виду

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad (7.11)$$

де $p(x)$, $q(x)$ та $f(x)$ – деякі неперервні функції.

Якщо у рівнянні (7.11) $f(x) \equiv 0$, то воно називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням (ЛОДР) другого порядку, тобто:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \quad (7.12)$$

Рівняння виду

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (7.13)$$

де p , q – дійсні числа, називається *лінійним однорідним*

диференціальним рівняння (ЛОДР) другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Рівнянню (7.13) відповідає характеристичне рівняння

$$k^2 + pk + q = 0, \quad (7.14)$$

$$\text{де } k_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}; \quad k_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \text{ – корені}$$

характеристичного рівняння.

Загальний розв'язок ЛОДР (7.13) має вигляд:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad (7.15)$$

де $\frac{y_1}{y_2} \neq \text{const}$ і C_1, C_2 – довільні числа.

Зауважимо, якщо $\frac{y_1}{y_2} \neq \text{const}$, то y_1 і y_2 – лінійно

незалежні розв'язки.

Можливі випадки:

1) корені характеристичного рівняння (7.14) – дійсні та різні: $k_1 \neq k_2$, тоді $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$ лінійно незалежні функції і

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \quad (7.16)$$

– загальний розв'язок рівняння (7.13);

2) корені характеристичного рівняння (7.14) – дійсні і рівні: $k_1 = k_2 = k$, тоді $y_1 = e^{kx}$, $y_2 = x e^{kx}$ лінійно незалежні і

$$y = e^{kx} (C_1 + C_2 x) \quad (7.17)$$

– загальний розв'язок рівняння (7.13);

3) корені характеристичного рівняння (7.14) – комплексно-спряжені: $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$ (дискримінант

$$D = p^2 - 4q < 0, \quad \text{де } i = \sqrt{-1}, \quad \text{тоді } y_1 = e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

$y_2 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ – частинні розв'язки рівняння $y'' + p y' + q y = 0$. Тоді

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) \quad (7.18)$$

– загальний розв’язок даного рівняння (7.13).

Приклад 7. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння $y'' + 4y' + 13y = 0$.

Розв’язання. Маємо лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Його розв’язок шукаємо у вигляді (7.15).

Запишемо характеристичне рівняння: $k^2 + 4k + 13 = 0$.

Знайдемо його корені:

$$k_{1,2} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\frac{4^2}{4} - 13} = -2 \pm \sqrt{-9} = -2 \pm 3i, \text{ де } i = \sqrt{-1}.$$

Отже, $\alpha = -2$, $\beta = 3$ і $y_1 = e^{-2x} \cos 3x$, $y_2 = e^{-2x} \sin 3x$ – частинні розв’язки рівняння.

Тоді $y = C_1 e^{-2x} \cos 3x + C_2 e^{-2x} \sin 3x$ або

$y = e^{-2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$ – загальний розв’язок рівняння.

Приклад 8. Знайти загальний розв’язок рівняння $y'' + 2y' + y = 0$.

Розв’язання. Маємо лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами (ЛОДР).

$k^2 + 2k + 1 = 0$ або $(k+1)^2 = 0$ – його характеристичне рівняння.

$k_1 = k_2 = -1$ – корені характеристичного рівняння. Тоді

$y_1 = e^{-x}$, $y_2 = x e^{-x}$ – частинні розв’язки, а

$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} = e^{-x} (C_1 + C_2 x)$ – його загальний розв’язок.

Приклад 9. Знайти загальний розв’язок рівняння $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Розв’язання. Це однорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами (ЛОДР), $k^2 - 3k + 2 = 0$ – його характеристичним рівнянням, а $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ – дійсні та різні

корені цього рівняння. Тоді $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ є загальним розв'язком даного рівняння.

Приклад 10. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 8y' + 16y = 0$.

Розв'язання. Запишемо характеристичне рівняння: $k^2 - 8k + 16 = 0$. Тоді $k_1 = k_2 = 4$ – корені цього рівняння, а $y = e^{4x}(C_1 + C_2 x)$ – його загальний розв'язок.

Приклад 11. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + 3y' = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння: $k^2 + 3k = 0$. $k_1 = 0$, $k_2 = -3$ – його корені. Тоді $y = C_1 + C_2 e^{-3x}$ – загальний розв'язок даного рівняння.

Приклад 12. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + 4y' + 5y = 0$.

Розв'язання. Запишемо характеристичне рівняння: $k^2 + 4k + 5 = 0$. Корені характеристичного рівняння: $k_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = -2 \pm i$ – комплексно-спряжені корені цього рівняння. Тоді $y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ – загальний розв'язок даного рівняння.

7.2.3. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння (ЛНДР) другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$y'' + p y' + q y = f(x), \quad (7.19)$$

де $p, q \in \mathbb{R}$, а $f(x)$ – неперервна функція.

Загальний розв'язок рівняння (1) шукаємо у вигляді:

$$y = \bar{y} + y^*, \quad (7.20)$$

де $\bar{y}$ – загальний розв'язок відповідного ЛОДР $y'' + py' + qy = 0$, y^* – частинний розв'язок рівняння $y'' + py' + qy = f(x)$, який знаходимо (у найпростіших випадках) *методом невизначених коефіцієнтів*, що не потребує інтегрування функцій.

Розглянемо окремі випадки.

I. Якщо права частина рівняння $y'' + py' + qy = f(x)$

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x), \quad (7.21)$$

де $\alpha \in R$, а $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ – заданий многочлен степеня n , то частинний розв'язок y^* шукають у вигляді:

$$y^* = x^r e^{\alpha x} Q_n(x), \quad (7.22)$$

де r – число коренів характеристичного рівняння

$$k^2 + pk + q = 0,$$

рівних α , $Q_n(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_{n-1}x + A_n$ – многочлен, як і $P_n(x)$, степеня n , але з невідомими коефіцієнтами.

Невідомі коефіцієнти $A_0, A_1, \dots, A_n$ знаходять методом невизначених коефіцієнтів. Для цього розв'язок y^* та його похідні $(y^*)'$, $(y^*)''$ підставляють у задане рівняння (7.19) і, скоротивши на $e^{\alpha x}$, прирівнюють коефіцієнти при однакових степенях x записаної тотожності. Розв'язавши систему $(n+1)$ лінійних алгебраїчних рівнянь, отримують значення коефіцієнтів $A_0, A_1, \dots, A_n$ многочлена $Q_n(x)$.

Зауваження. Якщо права частина рівняння (7.19) не містить множника $e^{\alpha x}$ ($\alpha = 0$), тобто:

$$f(x) = P_n(x),$$

то частинний розв'язок рівняння запишеться:

$$y^* = x^r Q_n(x),$$

де r – число коренів характеристичного рівняння $k^2 + pk + q = 0$, що рівні нулю.

Приклад 13. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + 4y' + 4y = (x + 2)e^{-2x}$.

Розв'язання. Це лінійне неоднорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами. Його загальним розв'язком є функція $y = \bar{y} + y^*$. Знайдемо спочатку загальний розв'язок $\bar{y}$ відповідного однорідного рівняння $y'' + 4y' + 4y = 0$. Характеристичне рівняння $k^2 + 4k + 4 = 0$ має корені $k_1 = k_2 = -2$, тому $\bar{y} = e^{-2x}(C_1 + xC_2)$.

Права частина $f(x) = (x + 2) \cdot e^{-2x}$ даного рівняння є функція виду $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$ і $\alpha = -2$ є коренем кратності 2 характеристичного рівняння. За формулою (7.22) частинний розв'язок даного рівняння набуде вигляду: $y^* = x^2 e^{-2x}(A_0 + A_1 x)$. Невідомі коефіцієнти A_0 і A_1 знайдемо методом невизначених коефіцієнтів.

Оскільки

$$(y^*)' = -2(A_1 x^3 + A_0 x^2) e^{-2x} + (3A_1 x^2 + 2A_0 x) e^{-2x},$$

$$(y^*)'' = 4(A_1 x^3 + A_0 x^2) e^{-2x} - 4(3A_1 x^2 + 2A_0 x) e^{-2x} +$$

$+(6A_1 x + 2A_0) e^{-2x}$, то підставивши y^* , $(y^*)'$, $(y^*)''$ в задане диференціальне рівняння і скоротивши на e^{-2x} , після елементарних перетворень, отримаємо: $6A_1 x + 2A_0 = x + 2$.

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x :

$$\begin{matrix} x \\ x^0 \end{matrix} \parallel \begin{matrix} 6A_1 = 1, \\ 2A_0 = 2, \end{matrix} \text{ звідки } A_1 = \frac{1}{6}, \text{ а } A_0 = 1.$$

Таким чином, $y^* = x^2 e^{-2x} \left(\frac{1}{6} x + 1 \right)$ є частинним розв'язком даного рівняння, а функція $y = y^{-2x} (C_1 + x C_2) + x^2 e^{-2x} \left(1 + \frac{1}{6} x \right)$ – його загальний розв'язок.

Приклад 14. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - y' = 2x - 1$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 - k = 0$ має корені $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, тому загальний розв'язок однорідного рівняння $y'' - y' = 0$ запишеться: $\bar{y} = C_1 + C_2 e^x$.

Оскільки правою частиною $f(x) = 2x - 1 = e^{0x} (2x - 1)$ даного рівняння є функція виду (7.21): $f(x) = P_n(x) = e^{0x} P_n(x)$ і $\alpha = 0$ є простим коренем характеристичного рівняння, то за формулою $y^* = x^r Q_n(x)$ частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y^* = x e^{0x} (A_0 + A_1 x) = x (A_0 + A_1 x)$. Для знаходження невідомих коефіцієнтів A_0 і A_1 підставимо функцію y^* та її похідні в задане рівняння. Аналогічно до попереднього, після простих перетворень, знайдемо $A_0 = A_1 = -1$, тому $y^* = -x(1 + x)$ – частинний розв'язок рівняння, а функція $y = C_1 + C_2 e^x - x(x + 1)$ – його загальний розв'язок.

II. Якщо права частина рівняння $y'' + p y' + q y = f(x)$

$$f(x) = e^{\alpha x} [P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x], \quad (7.23)$$

де $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлени відповідно степенів n і m , а α і $\beta \in R$, то частинний розв'язок y^* шукають у вигляді:

$$y^* = x^r e^{\alpha x} [M_k(x) \cos \beta x + N_k(x) \sin \beta x], \quad (7.24)$$

де r – число коренів характеристичного рівняння $k^2 + pk + q = 0$, рівних $\alpha + \beta i$, $M_k(x)$, $N_k(x)$ – шукані многочлени степеня k , $k = \max\{n; m\}$.

Підставляючи розв'язок

$$y^* = x^r e^{\alpha x} [M_k(x) \cos \beta x + N_k(x) \sin \beta x] \quad \text{та його похідні}$$

$(y^*)'$, $(y^*)''$ в рівняння (7.21) і прирівнюючи коефіцієнти при добутках функцій $x^l \cos \beta x$ і $x^l \sin \beta x$, отримують систему $2k+2$ лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів многочленів $M_k(x)$ і $N_k(x)$.

Зауваження. Якщо у правій частині формули (7.23) відсутній множник $e^{\alpha x}$ ($\alpha = 0$), тобто

$$f(x) = a \cos \beta x + b \sin \beta x,$$

де a і b – відомі дійсні числа, то його частинний розв'язок, виходячи з формули (7.24), шукають у вигляді:

$$y^* = x^r (A \cos \beta x + B \sin \beta x), \quad (7.25)$$

де A і B – невідомі коефіцієнти, а r – число коренів характеристичного рівняння рівних $0 \pm \beta i$.

Приклад 15. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + 4y = 4x \cdot \cos 2x$.

Розв'язування. Характеристичне рівняння $k^2 + 4 = 0$, має корені $k = \pm 2i$, тому загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд $\bar{y} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.

Оскільки права частина

$$f(x) = 4x \cdot \cos 2x = 4xe^{-0x} \cos 2x \quad \text{даного рівняння є функція}$$

виду $f(x) = e^{\alpha x} [P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x]$, а $k = 0 \pm 2i$ є коренем характеристичного рівняння, то за формулою

$$y^* = x^r e^{\alpha x} [M_k(x) \cos \beta x + N_k(x) \sin \beta x]$$

частинний розв'язок запишеться так:
 $y^* = x[(Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x]$.

Знайшовши y^{**} і підставивши її та функцію y^* в дане рівняння, після спрощень отримаємо
 $8[x\cos 2x + (2A + 4D)\cos 2x - 8A\sin 2x + (2C - 4B)\sin 2x] = 4x\cos 2x$.

Прирівнявши коефіцієнти при x^0 , $\cos 2x$, $\sin 2x$ матимемо систему

$$\begin{cases} x^0 & \left\{ \begin{array}{l} 5A = 0,5, \\ \cos 2x & -8B + 10C = 0,5, \\ \sin 2x & -10B - 8C = 0, \end{array} \right. \end{cases}$$

звідки $A = \frac{1}{10}$, $B = -\frac{1}{41}$, $C = \frac{5}{164}$.

Отже, $y^* = \frac{1}{10}x - \frac{1}{41}\cos 2x + \frac{5}{164}\sin 2x$ є частинним розв'язком даного рівняння, а функція

$$y = C_1 + C_2 e^{-\frac{5}{2}x} + \frac{1}{10}x - \frac{1}{41}\cos 2x + \frac{5}{164}\sin 2x$$

є його загальним розв'язком.

7.2.4. Нормальні системи диференціальних рівнянь

Систему диференціальних рівнянь, розв'язаних відносно перших похідних від шуканих функцій, називають *нормальною системою диференціальних рівнянь*. Така система двох рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f_1(x, y), \\ \frac{dx}{dt} = f_2(x, y), \end{cases} \quad (7.26)$$

де $y(t), x(t)$ – невідомі функції, а $f_1(x, y), f_2(x, y)$ – лінійні функції своїх аргументів.

Розв'язком даної системи лінійних диференціальних рівнянь називають дві неперервно диференційовні функції $y_1 = \varphi_1(x)$ та $y_2 = \varphi_2(x)$, які задовольняють кожне рівняння системи.

Одним із методів розв'язання нормальної системи диференціальних рівнянь є *метод виключення*. Його суть полягає в тому, що за допомогою диференціювання одного з рівнянь та заміни похідних, система зводиться до одного диференціального рівняння другого порядку, що містить лише одну невідому функцію. Після знаходження цієї функції, другу функцію визначають із заданих рівнянь та рівнянь, отриманих у результаті диференціювання.

Приклад 16. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -7x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x - 5y. \end{cases}$$

Розв'язання. Це нормальна система лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Виходячи з методу виключення невідомих функцій, диференціюємо перше рівняння: $x'' = -7x' + y'$. Підставляючи значення y' з другого рівняння системи, знаходимо $x'' + 7x' + 2x + 5y = 0$. З першого рівняння системи $y = x' + 7x$, тоді отримуємо однорідне лінійне рівняння $x'' + 12x' + 37x = 0$ зі сталими коефіцієнтами.

Легко показати, що його загальним розв'язком є $x(t) = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$. Оскільки $y = x' + 7x$, то $y(t) = e^{-6t}[(C_1 + C_2) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t]$.

Отже, функції $x(t) = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$, $y(t) = e^{-6t}[(C_1 + C_2) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t]$ є загальним розв'язком даної системи.

Приклад 17. Знайти частинний розв'язок системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 4y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 5y, \end{cases} \quad \text{який задовольняє початковим умовам}$$

$$x|_{t=0} = 2, \quad y|_{t=0} = 0.$$

Розв'язання. Методом виключення знайдемо загальний розв'язок системи.

Диференціюємо перше рівняння і, враховуючи обидва рівняння системи, послідовно знаходимо

$$x'' = 5x' + 4y' = 5(5x + 4y) + 4(4x + 5y), \quad x'' = 41x + 40y,$$

$x'' - 10x' + 9x = 0$ – лінійне однорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Оскільки корені характеристичного рівняння $k^2 - 10k + 9 = 0$ є $k_1 = 1$ і $k_2 = 9$, то $x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{9t}$.

З першого рівняння системи $y = \frac{1}{4}(x' - 5x)$ і, підставивши сюди значення $x(t)$ і $x'(t) = C_1 e^t + 9C_2 e^{9t}$, отримаємо $y(t) = -C_1 e^t + C_2 e^{9t}$.

Отже, $x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{9t}$, а $y(t) = -C_1 e^t + C_2 e^{9t}$ є загальним розв'язком системи.

Розв'яжемо задачу Коші. Підставивши початкові умови $x|_{t=0} = 2, y|_{t=0} = 0$ в загальний розв'язок, матимемо систему

$$\begin{cases} 2 = C_1 + C_2, \\ 0 = -C_1 + C_2, \end{cases}$$
 звідки $C_2 = 1, C_1 = 1$, тоді $x(t) = e^t + e^{9t}$,
 $y(t) = -e^t + e^{9t}$ є шуканим частинним розв'язком.

Запитання для самоконтролю

1. Яку підстановку використати для рівнянь вигляду $y'' = f(x, y')$?

2. Яку підстановку використати для рівнянь вигляду $y'' = f(y, y')$?

3. Яке рівняння називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку?

4. Яка функція виходячи з теореми про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння, є загальним розв'язком диференціального рівняння $y'' + py' + qy = f(x)$?

5. Сформулюйте означення нормальної системи диференціальних рівнянь.

6. Що називають розв'язком нормальної системи диференціальних рівнянь?

Завдання для самостійного розв'язування

Приклад 1. Розв'язати рівняння:

а) $y'' = 3x^2 - 2x + 1$; б) $y'' = \sin 3x - \cos 2x$;

в) $y'' = 4e^{2x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 5$;

г) $y'' = \frac{y'}{x} + x$; д) $xy'' - y' = 0$;

е) $y'' = \frac{2xy'}{1+x^2}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$;

$$\epsilon) y'' = \frac{2(y')^2}{y-1}; \quad \text{жс) } y'' = \frac{(y')^2}{2y}, \quad y(-1) = 4, \quad y'(-1) = 1.$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння:

$$a) y'' - 8y' + 16y = 0; \quad б) y'' - 8y' + 12y = 0;$$

$$в) y'' - 6y' + 10y = 0; \quad г) y'' - 4y' + 5y = 0;$$

$$д) y'' - 7y' + 10y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3;$$

$$е) y'' + 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 4.$$

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$a) y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65; \quad б) y'' - y' = 2x;$$

$$в) y'' - 3y' + 2y = e^{3x}; \quad г) y'' - 2y' = 3\sin x.$$

Відповіді

$$1. a) y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2;$$

$$б) y = -\frac{1}{9}\sin 3x + \frac{1}{4}\cos 2x + C_1x + C_2;$$

$$в) y = e^{2x} + 3x + 1; \quad г) y = \frac{x^3}{3} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2;$$

$$д) y = C_1x^2 + C_2; \quad е) y = x^2 + 3x + 1;$$

$$\epsilon) y = 1 - \frac{1}{C_1^2(x + C_2)}; \quad \text{жс) } y = \frac{(x+9)^2}{16}.$$

$$2. a) y = e^{4x}(C_1 + C_2x); \quad б) y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{6x};$$

$$в) y = e^{3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x); \quad г) y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x);$$

$$д) y = \frac{2}{3}e^{2x} + \frac{1}{3}e^{5x}; \quad е) y = e^{-3x}(2 + 10x).$$

$$3. a) y = e^{3x}(C_1 + C_2x) + x^2 - 3x + 5;$$

$$б) y = C_1 + C_2 e^x - x^2 - 2x;$$

$$в) y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x};$$

$$з) y = C_1 + C_2 e^{2x} + \frac{6}{5} \cos x - \frac{3}{5} \sin x.$$

Тести

1. Диференціальним рівнянням другого порядку (не розв'язаним відносно другої похідної) називається рівняння:

- а) $y' = f(x, y)$;
- б) $F(x, y, y', y'') = 0$;
- в) $F(x, y, y') = 0$;
- г) $F(y, y') = 0$;
- д) $F(x, y^2, y') = 0$.

2. Диференціальним рівнянням другого порядку (розв'язаним відносно другої похідної) називається рівняння:

- а) $F(x, y, y', y'') = 0$;
- б) $y' = f(x, y, y'') = 0$;
- в) $F(x, y, y') = 0$;
- г) $F(x, y, y'') = 0$;
- д) $y'' = f(x, y, y')$.

3. Розв'язати рівняння $y'' = f(x, y, y')$ означає знайти

- а) всі його розв'язки;
- б) хоча б один розв'язок цього рівняння;
- в) один розв'язок цього рівняння;
- г) розв'язок із додатними значеннями;
- д) розв'язок із від'ємними значеннями.

4. Співвідношення $G(x, y, C_1, C_2) = 0$, де C_1 і C_2 – сталі, називається загальним інтегралом рівняння $y'' = f(x, y, y')$, якщо це співвідношення

- а) неявно визначає загальний розв'язок цього рівняння;
- б) неявно визначає один частинний розв'язок цього рівняння;
- в) визначає частинні інтеграли цього рівняння для скінченного числа значень сталих C_1 і C_2 ;

з) є також інтегралом для рівняння $y'' = f^2(x, y, y')$ при $C_1 = C_2 = 0$;

д) є також інтегралом для рівняння $y'' = \sqrt[3]{f(x, y, y')}$ при $C_2 = 1$.

5. Частинним розв'язком рівняння $y'' = y'$ є

а) $y = x$;

б) $y = 2x$;

в) $y = 1$;

г) $y = -x$;

д) $y = \sin x$.

6. Частинним розв'язком рівняння $y'' = y^2$ є

а) $y = x$;

б) $y = 2x$;

в) $y = -x$;

г) $y = 0$;

д) $y = \sin x$.

7. Лінійним диференціальним рівнянням другого порядку називається рівняння:

а) $p(x)y' + q(x)y = f(x)$;

б) $y'' + (p(x)y' + q(x)y)^2 = f(x)$;

в) $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$;

г) $(y'')^2 + p(x)y' + q(x)y = f(x)$;

д) $y'' + p(x)(y')^2 + q(x)y = f(x)$.

8. Лінійним однорідним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами називається рівняння:

а) $y'' + p y' + q y = 0$, де p і q – сталі дійсні числа;

б) $y'' + 2 y' + 3 y = 1$;

в) $y'' = 2$;

г) $y' + 4 y = 0$;

д) $y' + 5y = 3$.

9. Характеристичним рівнянням для однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами $y'' + p y' + q y = 0$ є рівняння:

а) $k^2 + p k + q = 1$;

б) $k^2 - p k - q = 0$;

в) $k^2 + p + q k = 2$;

г) $k^2 + p - q k^2 = 0$;

д) $k^2 + p k + q = 0$.

10. Коренями характеристичного рівняння

$k^2 + p k + q = 0$ є

а) $k_1 = p, k_2 = q$;

б) $k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$;

в) $k_1 = -p, k_2 = -q$;

г) $k_1 = -p, k_2 = q$;

д) $k_1 = p, k_2 = -q$.

11. Якщо корені k_1 і k_2 характеристичного рівняння $k^2 + p k + q = 0$ є дійсними і різними, то загальним розв'язком відповідного диференціального рівняння є

а) $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$;

б) $y = C_1 e^{-k_1 x} + C_2 e^{-k_2 x}$;

в) $y = (C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x})^2$;

г) $y = (C_1 + C_2) e^{k_1 x} + e^{k_2 x}$;

д) $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.

12. Якщо корені k_1 і k_2 характеристичного рівняння $k^2 + pk + q = 0$ є дійсними і різними, то частинними розв'язками відповідного диференціального рівняння є

а) $y_1 = \sin x$ і $y_2 = \cos x$;

б) $y_1 = \sin 2x$ і $y_2 = \cos 2x$;

в) $y_1 = e^{k_1 x}$ і $y_2 = e^{k_2 x}$;

г) $y_1 = \sin 5k_1 x$ і $y_2 = \cos 4k_2 x$;

д) $y_1 = \arccos k_1 x$ і $y_2 = \arcsin k_2 x$.

13. Загальний розв'язок рівняння $y'' - y = 0$ має вигляд:

а) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$;

б) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$;

в) $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-4x}$;

г) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$;

д) $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-5x}$.

14. Загальний розв'язок рівняння $y'' - 25y = 0$ має вигляд:

а) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$;

б) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$;

в) $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-4x}$;

г) $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-5x}$;

д) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

15. Загальний розв'язок рівняння $y'' - 2y' + y = 0$ має вигляд:

а) $y = (C_1 + C_2 x) e^{2x}$;

б) $y = (C_1 + C_2 x) e^{3x}$;

в) $y = (C_1 + C_2 x) e^x$;

$$з) y = (C_1 + C_2 x) e^{4x};$$

$$д) y = (C_1 + C_2 x) e^{5x}.$$

16. Загальний розв'язок рівняння $y'' - 6y' + 9y = 0$ має вигляд:

$$а) y = (C_1 + C_2 x) e^{2x};$$

$$б) y = (C_1 + C_2 x) e^{3x};$$

$$в) y = (C_1 + C_2 x) e^x;$$

$$з) y = (C_1 + C_2 x) e^{4x};$$

$$д) y = (C_1 + C_2 x) e^{5x}.$$

17. Яка з функцій є загальним розв'язком рівняння $y'' = 1$?

$$а) y = C_1 x;$$

$$б) y = x + C_2;$$

$$в) y = C_1 |x|;$$

$$з) y = C_1 \sin x + C_2;$$

$$д) y = \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2.$$

18. Інтегрування диференціального рівняння другого порядку $F(y, y', y'') = 0$, що не містить явно x , зводиться до інтегрування рівняння першого порядку за допомогою функції

$$а) z = y', \text{ де } z = z(y(x));$$

$$б) z = y' y, \text{ де } z = z(y(x));$$

$$в) z = y' + y, \text{ де } z = z(y(x));$$

$$з) z = y' - y, \text{ де } z = z(y(x));$$

$$д) z = y' + \sqrt[3]{y}, \text{ де } z = z(y(x)).$$

19. Інтегрування диференціального рівняння другого порядку $F(y, y', y'') = 0$, що не містить явно y , зводиться до інтегрування рівняння першого порядку за допомогою функції

а) $z = y' y$, де $z = z(x)$;

б) $z = y' + y$, де $z = z(x)$;

в) $z = y' - y$, де $z = z(x)$;

г) $z = y + \sqrt[3]{y}$, де $z = z(x)$;

д) $z = y'$, де $z = z(x)$.

20. Загальний розв'язок рівняння $y'' = f(x)$, де $f(x)$ – неперервна функція, яка подається у вигляді

а) $y = C_1 x + C_2$;

б) $y = C_1 x + C_2 x^2$;

в) $y = C_1 x^2 + C_2$;

г) $y = C_1 + C_2 x^3$;

д) $y = F(x) + C_1 x + C_2$, де $F(x)$ – первісна для $G(x)$, а $G(x)$ – первісна для x ; C_1 і C_2 – сталі.

21. Загальним розв'язком рівняння $y'' + y = 0$ є функція

а) $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$;

б) $y = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x$;

в) $y = C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x$;

г) $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$;

д) $y = C_1 \sin 5x + C_2 \cos 5x$.

22. Рівняння $y'' = f(x, y, y')$ для кожної точки (x_0, y_0, y_1) області G має хоча б один розв'язок $y = y(x)$, що задовольняє початкові умови $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, якщо

а) функція $f(x, y, z)$ є розривною в кожній точці області G ;

б) $f(x, y, z) > 0$ для всіх $(x, y, z) \in G$;

в) функція $f(x, y, z)$ неперервна на G ;

з) $f(x, y, z) < 0$ для всіх $(x, y, z) \in G$;

д) $f(x, y, z) > \sqrt[3]{f(x, y, z)}$ для всіх $(x, y, z) \in G$.

23. Загальним розв'язком рівняння $y'' + y = 1$ є функція

а) $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$;

б) $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + 1$;

в) $y = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x$;

г) $y = C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x$;

д) $y = C_1 \sin 5x + C_2 \cos 5x$.

Відповіді

1. б). 2. д). 3. а). 4. а). 5. в). 6. г). 7. в). 8. а). 9. г). 10. б). 11. д).
12. в). 13. г). 14. г). 15. в). 16. б). 17. д). 18. а). 19. д). 20. д).
21. г). 22. в). 23. б).

Розділ 8. РЯДИ

8.1. Числові ряди

8.1.1. Основні означення. Властивості числових рядів. Необхідна умова збіжності числового ряду

Нехай задано деяку нескінченну послідовність чисел

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \quad (8.1)$$

Складений з цих чисел вираз

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (8.2)$$

називається *числовим рядом*, де $a_1, a_2, a_3, \dots$ – члени ряду, а a_n – загальний член ряду.

$$S_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \quad \text{називається} \quad n\text{-ю}$$

частинною сумою ряду.

Якщо існує $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, то ряд називається збіжним, а S – називається сумою ряду. Якщо ця границя не існує або нескінченна, то ряд називається розбіжним.

Приклад 1. Дослідити на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}).$$

$$\begin{aligned} \text{Розв'язання. } S_n &= (\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + \sqrt{1}) + (\sqrt{4} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2}) + \\ &+ (\sqrt{5} - 2\sqrt{4} + \sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} + \sqrt{n-2}) + (\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \\ &+ \sqrt{n-1}) + (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}. \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \right) = 1 - \sqrt{2}.$$

Отже, даний ряд збіжний, причому

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = 1 - \sqrt{2}.$$

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \cos n\pi$.

Розв'язання. Оскільки $\cos n\pi = \begin{cases} 1, & n = 2k, \\ -1, & n = 2k+1, \end{cases}$ то

$$S_n = 1 + \cos \pi + \cos 2\pi + \cos 3\pi + \dots + \cos n\pi = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ 1, & n = 2k+1. \end{cases}$$

Послідовність S_n частинних сум набуває двох значень і з ростом n не прямує ні до якої границі. Отже, даний ряд розбіжний.

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

$$\begin{aligned} \text{Розв'язання. } S_n &= (\sqrt{1} - 0) + (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots \\ &+ (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{n+1}. \end{aligned}$$

Отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} = \infty$ і даний ряд розбіжний.

Приклад 4. Обчислити суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Розв'язання. Оскільки $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, то

$$S_1 = 1 \cdot \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}, \quad S_2 = 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = 1 - \frac{1}{3},$$

$$S_3 = S_2 + \frac{1}{3 \cdot 4} = 1 - \frac{1}{3} + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = 1 - \frac{1}{4}, \dots, \quad S_n = 1 - \frac{1}{n+1}, \quad \text{а}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1.$$

Отже, ряд збіжний, причому $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

Приклад 5. Встановити розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n})$.

Розв'язання. Знаходимо

$$\begin{aligned} S_n &= \ln(1 + \frac{1}{1}) + \ln(1 + \frac{1}{2}) + \dots + \ln(1 + \frac{1}{n}) = \\ &= \ln(1 + \frac{1}{1})(1 + \frac{1}{2}) \dots (1 + \frac{1}{n}) = \ln \frac{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} = \frac{(n+1)!}{n!} = \\ &= \ln(n+1), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty - \text{даний ряд розбіжний.} \end{aligned}$$

Гармонічний ряд

Числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad (8.3)$$

називають гармонічним рядом.

Гармонічний ряд розбіжний.

Геометричний ряд

Числовий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots \quad (8.4)$$

називається геометричним рядом із першим членом a і знаменником q ($a, q \in R$).

Частинна сума n -го порядку даного ряду

$$S_n = \sum_{k=0}^n aq^k = a \sum_{k=0}^n q^k.$$

Якщо $q=1$, то $S_n = (n+1)a$, а $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)a = \infty$ і ряд розбіжний.

Якщо $q=-1$ то $S_n = \begin{cases} 0, & n=2k, \\ a, & n=2k+1. \end{cases}$, а $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не існує і

ряд теж розбіжний.

Сума n членів геометричної прогресії $S_n = \frac{a - a q^{n+1}}{1 - q}$.

Якщо $|q| < 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} |q|^{n+1} = 0$, а $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1 - q}$ і ряд

збіжний.

Якщо $|q| > 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} |q|^{n+1} = \infty$ і ряд розбіжний.

Отже, геометричний ряд збіжний при $|q| < 1$ і розбіжний при $|q| \geq 1$.

Властивості числових рядів

1. Природа ряду не зміниться, якщо викреслити скінченне число його членів.

2. Природа ряду не зміниться, якщо усі його члени помножити на відмінне від нуля дійсне число.

3. Алгебраїчна сума скінченного числа збіжних рядів є збіжний ряд.

4. Якщо числовий ряд збіжний, то його залишок n -ного порядку прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$.

Необхідна умова збіжності числових рядів

Теорема. Для того щоб числовий ряд був збіжним, необхідно, щоб границя його n -го члена дорівнювала нулю при $n \rightarrow \infty$.

Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$. Оскільки $a_n = A_n - A_{n-1}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n - A_{n-1}) = A - A = 0$

Отже, для збіжного числового ряду $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Обернене твердження помилкове, тобто розглянута теорема є необхідною, але не є достатньою умовою збіжності ряду.

Гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбіжний, хоч

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Зауваження. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, то числовий ряд розбіжний, оскільки в цьому випадку $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \infty$ або не існує.

Можна стверджувати, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ є достатньою умовою розбіжності ряду.

Приклад 6. Дослідити на збіжність ряди

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{7n+3}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+1}.$$

Розв'язання

$$a) \text{ Знаходимо } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{7n+3} = \frac{2}{7} \neq 0.$$

Отже, ряд розбіжний, оскільки не виконується необхідна ознака збіжності ряду;

$$б) \text{ Ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+1} \text{ розбіжний, тому що}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n+1} = \frac{1}{3} \neq 0.$$

8.1.2. Числові ряди з додатними членами

Ряд, всі члени якого є додатними членами, називається знакододатним. Наведемо достатні ознаки збіжності знакододатних рядів.

Ознака порівняння. Якщо задані ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, при чому $0 \leq a_n \leq b_n$, то зі збіжності другого ряду впливає

збіжність першого ряду, а із розбіжності першого ряду випливає розбіжність другого ряду.

Зручною є **гранична ознака порівняння**: якщо існує

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$, $k \neq 0$, $k \neq \infty$ то обидва ряди або одночасно

збіжні, або одночасно розбіжні.

Для застосування ознак порівняння часто використовують ряди, члени яких утворюють геометричну прогресію і гармонічні ряди, тобто:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} a q^{n-1} \begin{cases} \text{збіжний, якщо } |q| < 1, \\ \text{розбіжний, якщо } |q| \geq 1; \end{cases} \quad (8.5)$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \begin{cases} \text{збіжний, якщо } \alpha > 1, \\ \text{розбіжний, якщо } \alpha \leq 1. \end{cases} \quad (8.6)$$

Ознака Даламбера. Нехай для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ існує

границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l. \quad (8.7)$$

Тоді ряд збіжний при $l < 1$ і розбіжний при $l > 1$. У випадку $l = 1$ потрібно скористатися іншою ознакою.

Радикальна ознака Коші. Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$

існує

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l, \quad (8.8)$$

то при $l < 1$ ряд збіжний, а при $l > 1$ – розбіжний. У випадку $l = 1$ потрібно скористатися іншою ознакою.

Інтегральна ознака Коші. Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,

$a_n = f(n)$, де $f(x) \geq 0$ неперервна і незростаюча функція на

$[1; \infty)$, то якщо $\int_1^{\infty} f(x) dx$ збіжний, тоді і ряд збіжний, якщо

вказаний невласний інтеграл розбіжний, тоді і ряд розбіжний.

Приклад 6. Дослідити на збіжність ряди

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n(n+1)}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2+3}; \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{6n^3+5}.$$

а) Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$, який збіжний як геометричний ряд з

знаменником $q = \frac{1}{3} < 1$. Оскільки члени даного ряду менші членів

збіжного геометричного ряду $(\frac{1}{3^n(n+1)} < \frac{1}{3^n})$, то за ознакою порівняння рядів даний ряд збіжний;

б) Порівняємо даний ряд з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, який

розбіжний, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{4n^2+3} : \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{4n^2+3} = \frac{1}{4} \neq 0$.

Отже, даний ряд також розбіжний;

в) Порівняємо даний ряд з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, який збіжний,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{6n^3+5} : \frac{1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{6n^3+5} = \frac{1}{6} \neq 0.$$

Отже, даний ряд також збіжний.

Приклад 7. Дослідити на збіжність ряди:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{3^n}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{4^{2n-1}}; \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}; \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n \cdot 3^n}.$$

Розв'язання. Оскільки загальні члени даних рядів містять вирази a^n і $n!$, тому для дослідження на збіжність таких рядів зручно використовувати ознаку Даламбера.

а) Оскільки $a_n = \frac{n^2 + 2}{3^n}$; $a_{n+1} = \frac{(n+1)^2 + 2}{3^{n+1}}$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)^2 + 2}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^2 + 2} \right) = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 3}{n^2 + 2} = \frac{1}{3} < 1, \text{ от}$$

же даний ряд збіжний;

б) Маємо $a_n = \frac{3n+1}{4^{2n-1}}$; $a_{n+1} = \frac{3n+4}{4^{2n+1}}$.

Обчислимо
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+4}{4^{2n+1}} \cdot \frac{4^{2n-1}}{3n+1} \right) = \frac{1}{16} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+4}{3n+1} =$$

$$= \frac{1}{16} < 1, \text{ отже даний ряд збіжний;}$$

в) Оскільки $a_n = \frac{2^n}{n!}$; $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$, тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} \right) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n!(n+1)} =$$

$$= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1, \text{ тому даний ряд збіжний;}$$

г) Маємо $a_n = \frac{n!}{n^n \cdot 3^n}$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1} \cdot 3^{n+1}}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1} \cdot 3^{n+1}} \cdot \frac{n^n \cdot 3^n}{n!} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)n!}{(n+1)^n (n+1) \cdot 3^n \cdot 3} \cdot \frac{n^n \cdot 3^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n \cdot 3} =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{3e} < 1$$

Отже, за ознакою Даламбера даний ряд збіжний.

Приклад 8. Дослідити на збіжність ряди:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n-1} \right)^n; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{4n+5} \right)^{2n}; \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n+4}{5n-1} \right)^{n^2}.$$

Розв'язання

а) За радикальною ознакою Коші знаходимо

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{3n-1} \right)^n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n-1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{3 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{3} < 1 - \text{даний ряд збіжний}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} б) \quad \text{Знаходимо} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n+2}{4n+5} \right)^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{4n+5} \right)^2 = \\ &= \left(\frac{3}{4} \right)^2 = \frac{9}{16} < 1, \text{ отже, даний ряд збіжний.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} в) \quad \text{Обчислимо} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{5n+4}{5n-1} \right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n+4}{5n-1} \right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \frac{4}{5n}}{1 - \frac{1}{5n}} \right)^n = \frac{e^{\frac{4}{5}}}{e^{-\frac{1}{5}}} = e > 1, \text{ отже, даний ряд розбіжний.} \end{aligned}$$

Приклад 9. Дослідити на збіжність ряди:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 5}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \ln(n+2)}; \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \ln^3(n+2)}.$$

Розв'язання

а) Запишемо декілька перших доданків ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+5} = \frac{1}{1^2+5} + \frac{1}{2^2+5} + \frac{1}{3^2+5} + \dots + \frac{n}{n^2+5} + \dots = \frac{1}{6} + \frac{2}{9} + \frac{3}{14} + \dots + \frac{n}{n^2+5} + \dots.$$

Заданий знакододатний ряд дослідимо за інтегральною ознакою Коші. Розглянемо неперервну незростаючу функцію

$$f(x) = \frac{x}{x^2+5}, \quad \text{для якої} \quad f(1) = \frac{1}{1^2+5}, \quad f(2) = \frac{2}{2^2+5},$$

$$f(3) = \frac{3}{3^2+5}, \dots. \text{ Дослідимо на збіжність невласний інтеграл}$$

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} f(x) dx &= \int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+5} dx = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{2x}{x^2+5} dx = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{d(x^2+5)}{x^2+5} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \ln |x^2+5| \Big|_1^b = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln |b^2+5| - \ln |1^2+5|) = \infty. \end{aligned}$$

Оскільки невласний інтеграл розбіжний, то відповідно до інтегральної ознаки Коші розбіжним буде і даний знакододатний ряд.

б) Застосуємо інтегральну ознаку Коші:

функція $f(x) = \frac{1}{(x+2)\ln(x+2)}$. Знайдемо невласний інтеграл

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} f(x) dx &= \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+2)\ln(x+2)} = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{(x+2)\ln(x+2)} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln \ln(x+2) \Big|_1^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \ln \ln(b+2) - \ln \ln 3 = \infty. \end{aligned}$$

Отже, невласний інтеграл розбіжний, тому ряд теж розбіжний;

в) Функція $f(x) = \frac{1}{(x+2)\ln^3(x+2)}$. Невласний інтеграл

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+2)\ln^3(x+2)} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{(x+2)\ln^3(x+2)} =$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln^2(x+2)} \Big|_1^b = -\frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln^2(b+2)} + \frac{1}{2\ln^2 3} = \frac{1}{2\ln^2 3}. \quad \text{Отже,}$$

невласний інтеграл збіжний, тому ряд теж збіжний.

8.1.3. Знакозмінні та знакопочережні числові ряди

Числовий ряд називають *знакозмінним*, якщо він містить як додатні, так і від'ємні члени.

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, складений з модулів членів даного ряду, збіжний, то даний ряд теж збіжний і називається *абсолютно збіжним*.

Якщо ряд, утворений з модулів розбіжний, а даний знакозмінний ряд збіжний, то він називається *умовно збіжним*.

Знакопочережні ряди є частковим випадком знакозмінних рядів. Числовий ряд виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^n a_n + \dots \quad (8.9)$$

називають *знакопочережним*. Природу знакопочережного ряду визначають за теоремою Лейбніца.

Теорема Лейбніца. Якщо знакопочережний ряд такий, що:

- 1) модулі його членів спадають ($a_n > 0$)
 $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > \dots$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$,

то ряд збіжний, його сума додатня й не вища від першого члена ряду.

Приклад 10. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+2)}{n^3+4}$.

Розв'язання. Маємо знакозмінний ряд:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+2)}{n^3+4} &= \frac{\sin(1+2)}{1^3+4} + \frac{\sin(2+2)}{2^3+4} + \frac{\sin(3+2)}{3^3+4} + \dots + \\ &+ \frac{\sin(n+2)}{n^3+4} + \dots = \frac{\sin 3}{1+4} + \frac{\sin 4}{8+4} + \frac{\sin 5}{27+4} + \dots + \frac{\sin(n+2)}{n^3+4} + \dots = \\ &= \frac{\sin 3}{5} + \frac{\sin 4}{12} + \frac{\sin 5}{31} + \dots + \frac{\sin(n+2)}{n^3+4} + \dots \end{aligned}$$

Розглянемо ряд, складений з абсолютних величин даного ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(n+2)}{n^3+4} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(n+2)|}{n^3+4}$ – цей ряд знакододатний.

Для його дослідження використаємо ознаку порівняння:

$$a_n = \frac{|\sin(n+2)|}{n^3+4} < \frac{1}{n^3+4} < \frac{1}{n^3}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{n^3} + \dots$ – збіжний, як узагальнений гармонічний ряд ($\alpha > 1$).

За ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(n+2)|}{n^3+4}$ збіжний, а заданий знакозмінний ряд – збіжний абсолютно.

Приклад 11. Дослідити на збіжність ряди:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n^2}}.$$

Розв'язання. Маємо знакопочережні ряди.

а) Дослідимо ряд з абсолютних величин його членів.

Оскільки, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ – збіжний, як узагальнений гармонічний ряд при $\alpha = 3 > 1$, то даний знакопочережний ряд абсолютно збіжний;

б) Ряд з абсолютних величин його членів – $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$. Цей ряд

розбіжний, оскільки він є узагальненим гармонічним рядом при $\alpha = \frac{2}{3} < 1$. Тому для подальшого дослідження даного ряду

використаємо ознаку Лейбніца. На підставі цієї ознаки, маємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = 0 \text{ і даний знакопочережний ряд збіжний.}$$

Оскільки, ряд з абсолютних величин його членів розбіжний, то даний ряд умовно збіжний.

Запитання для самоконтролю

1. Дайте означення числового ряду.
2. Дайте означення збіжності і розбіжності числового ряду.
3. Який числовий ряд називають гармонічним? Гармонічний ряд збіжний чи розбіжний?
4. Який числовий ряд називають геометричним? Геометричний ряд збіжний чи розбіжний?
5. Сформулюйте властивості числових рядів.
6. Яка необхідна умова збіжності числових рядів?
7. Сформулюйте необхідну і достатню умови збіжності числових рядів з додатними членами.
8. Сформулюйте ознаку Даламбера для числових рядів з додатними членами.

9. Сформулюйте радикальну ознаку Коші для числових рядів з додатними членами.

10. Сформулюйте інтегральну ознаку Коші. Наведіть приклад її використання.

11. Які знакозмінні ряди називають абсолютно і які умовно збіжними?

Завдання для самостійного розв'язування

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряди:

$$\begin{aligned} a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{7n-2}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}; \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{5^n}; \\ г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}; \quad д) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-2}{5n+3} \right)^{2n}; \quad е) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}; \\ є) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}. \end{aligned}$$

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряди:

$$\begin{aligned} a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{4^n}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{2n+1}{3n-2} \right)^n; \\ в) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3 + 2n - 1}. \end{aligned}$$

Відповіді

1. а) розбіжний; б) збіжний; в) збіжний; г) збіжний;
д) збіжний; е) збіжний; є) розбіжний.
2. а) збіжний абсолютно; б) збіжний абсолютно;
в) збіжний умовно.

Тести

1. Нехай $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ – довільні числа. Числовим рядом називається вираз

а) $a_1 + a_2 + \dots + a_n$;

б) $\sin(a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots)$;

в) $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \cdot \dots$;

г) $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$;

д) $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$.

2. Частинними сумами числового ряду

$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ називають

а) суми $C_1 = a_1$, $C_2 = a_1 - a_2, \dots$, $C_n = a_1 - a_2 + \dots + (-1)^{n+1} a_n, \dots$;

б) суми $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2, \dots$, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \dots$;

в) вирази $\Pi_1 = a_1$, $\Pi_2 = a_1 \cdot a_2, \dots$, $\Pi_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$;

г) вирази $A_1 = a_1$, $A_2 = 2a_2, \dots$, $A_n = n a_n, \dots$;

д) вирази $B_1 = a_1$, $B_2 = \frac{(a_1 + a_2)}{2}, \dots$, $B_n = \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}{n}, \dots$.

3. Числовий ряд $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ збігається, якщо

а) послідовність частинних сум $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ цього ряду збігається;

б) існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$;

в) не існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$;

г) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$;

д) $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| < 1$.

4. Сумою збіжного числового ряду $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ називають

а) границю $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$;

б) границю послідовності частинних сум $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ цього ряду;

в) границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_1 + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{n^2} \right)$;

г) границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_1 + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{n^n} \right)$;

д) границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_1 + \frac{a_2}{2\sqrt{2}} + \dots + \frac{a_n}{n\sqrt{n}} \right)$.

5. Гармонічним рядом називається ряд

а) $1 - \frac{1}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots$;

б) $1 + 2 + \dots + n + \dots$;

в) $1 - 2 + \dots + (-1)^{n+1} n + \dots$;

г) $1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$;

д) $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$.

6. Гармонічний ряд $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$

а) є збіжним;

б) є знакопереміжним;

в) є розбіжним;

г) є умовно збіжним;

д) є степеневим рядом.

7. Геометричним рядом називається ряд

а) $a + aq + \dots + aq^{n-1} + \dots$, де a і q – числа

б) $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$

в) $1 - \frac{1}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots$

г) $\sin 1 + \sin 2 + \dots + \sin n + \dots$

$$\partial) 1 + \frac{1}{2^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$$

8. Якщо числовий ряд $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ збігається, то

а) $a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;

б) $\frac{a_n}{n^2} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;

в) ряд $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots$ збігається;

г) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (необхідна умова збіжності ряду);

д) ряд $|a_1| + 2|a_2| + \dots + n|a_n| + \dots$ збігається.

9. Числовий ряд $1 - 1 + 1 - 1 \dots + (-1)^{n+1} + \dots$ є

а) збіжним;

б) умовно збіжним;

в) абсолютно збіжним;

г) знакододадним рядом;

д) розбіжним.

10. Нехай числовий ряд $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ збігається.

Тоді

а) для кожного натурального числа n_0 ряд

$$a_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_{n_0+n} + \dots$$

б) для кожного натурального числа n_0 ряд

$$a_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_{n_0+n} + \dots$$

в) для деякого натурального числа n_0 ряд

$$a_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_{n_0+n} + \dots$$

г) ряд $k a_1 + k a_2 + \dots + k a_n + \dots$ розбігається для кожного $k \neq 0$;

д) $a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

11. Нехай для рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ виконується

співвідношення $a_n \geq b_n \geq 0$ для всіх $n \geq 1$. Тоді

а) із збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ впливає розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$;

б) із збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ впливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$;

в) з розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ впливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$;

г) ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігаються;

д) ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ розбігаються.

12. Нехай для знакододатних рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ існує

границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k \neq 0$. Тоді

а) ряди одночасно збігаються або розбігаються;

б) перший ряд збігається, другий – розбігається;

в) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ збігається;

г) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ розбігається;

д) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ розбігається.

13. Нехай для знакододатного числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Тоді ряд

а) розбігається, якщо $l < 1$, і збігається, якщо $l > 1$;

б) збігається, якщо $l = 1$;

- в) розбігається, якщо $l = 1$;
 з) збігається, якщо $l < 1$, і розбігається, якщо $l > 1$ (ознака Даламбера);
 д) збігається, якщо $l = 1$ і $a_n \geq a_{n+1}$ для всіх $n \geq 1$.

14. Для числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2^n}$ границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

дорівнює

- а) 3^{-1} ; б) 2^{-1} ; в) 4^{-1} ; з) 5^{-1} ; д) 6^{-1} .

15. Нехай для знакододатного числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$. Тоді ряд

- а) розбігається, якщо $l < 1$, і збігається, якщо $l > 1$;
 б) збігається, якщо $l = 1$;
 в) розбігається, якщо $l = 1$;
 з) збігається, якщо $l = 1$ і $a_n \geq a_{n+1}$ для всіх $n \geq 1000$;
 д) збігається, якщо $l < 1$, і розбігається, якщо $l > 1$ (ознака Коші).

16. Для числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n+1} \right)^n$ границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$

дорівнює

- а) 3^{-1} ; б) 4^{-1} ; в) 5^{-1} ; з) 2^{-1} ; д) 6^{-1} .

17. Узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ розбігається,

якщо

- а) $\alpha \leq 1$; б) $\alpha > 1$; в) $\alpha > 2$; з) $\alpha = 2$; д) $\alpha = \pi$.

18. Знакопереміжним числовим рядом називається ряд

а) $a_1 + a_2 - a_3 - a_4 + a_5 + a_6 - \dots$, де $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ – додатні числа

б) $a_1 - a_2 + \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots$, де числа $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ одночасно додатні або одночасно від'ємні

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n, \text{ де } a_n > 0$$

$$г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$$

$$д) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{(-1)^n p}}$$

19. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, де $a_n > 0$, збіжний, якщо

$$а) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ і } a_n > a_{n+1} \text{ для всіх } n \geq 1;$$

$$б) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0;$$

$$в) a_n > a_{n+1} \text{ для всіх } n \geq 1;$$

$$г) a_n \leq a_{n+1} \text{ для всіх } n \geq 1;$$

$$д) a_n < a_{n+1} \text{ для всіх } n \geq 1.$$

20. Знакозмінний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається

абсолютно збіжним, якщо

$$а) \text{ ряд } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ розбіжний};$$

$$б) \text{ ряд } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n |a_n| \text{ збіжний};$$

$$в) \text{ ряд } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ збіжний};$$

$$г) \text{ ряд } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ збіжний};$$

$$д) \text{ ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n} \text{ збіжний}.$$

21. Знакозмінний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається

умовно збіжним, якщо

а) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ збіжний;

б) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n |a_n|$ збіжний;

в) цей ряд збіжний, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ розбіжний;

г) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ збіжний;

д) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ збіжний.

22. Для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ виконання умови $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

а) є необхідним для збіжності;

б) є достатнім для збіжності;

в) є необхідним і достатнім для збіжності;

г) не є необхідним і не є достатнім для збіжності;

д) означає, що сума ряду дорівнює 2017.

23. Які з наведених нижче тверджень правильні?

а) Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ розбіжний, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ теж розбіжний;

б) Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ теж збіжний;

в) Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ збіжний, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ теж збіжний;

з) Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ збіжний, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ теж збіжний;

д) Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ збіжний, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ теж збіжний.

24. Сума ряду $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$ дорівнює

а) 2; б) -3; в) 4; з) -2; д) π .

25. Із наступних трьох рядів $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ і $\sum_{n=1}^{\infty} n^n$

збіжними є

а) усі ряди;

б) перший та третій ряди;

в) другий та третій ряди;

з) тільки третій ряд;

д) перші два ряди.

26. Сума ряду $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \dots$ дорівнює

а) -2; б) 3; в) -3; з) π ; д) 1.

27. Сума ряду $1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{x^6}{7!} + \dots + \frac{2^n}{3^n} + \dots$ дорівнює

а) 4; б) 3; в) 5; з) 6; д) 7.

28. Якщо $x \neq 0$, то функція $\frac{\sin x}{x}$ є сумою ряду

а) $1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$;

б) $1 + 3!x^2 + 5!x^4 + 7!x^6 + \dots$;

в) $x + x^3 + x^5 + \dots$;

з) $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots$;

д) $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$.

Відповіді

1. з). 2. б). 3. а). 4. б). 5. д). 6. в). 7. а). 8. з). 9. д). 10. б). 11. б).
12. а). 13. з). 14. б). 15. д). 16. з). 17. а). 18. б). 19. а). 20. в).
21. в). 22. а). 23. д). 24. а). 25. д). 26. д). 27. б). 28. а).

8.2. Функціональні ряди

8.2.1. Основні означення

Розглянемо послідовність функцій

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x), \dots,$$

обмежених $\forall x \in X$.

Означення. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots + f_n(x) + \dots, \quad (8.10)$$

членами якого є функції від x , називається функціональним рядом.

Для кожного значення $x \in X$ з даного ряду отримаємо числовий ряд. Серед цих рядів будуть як збіжні, так і розбіжні ряди.

Означення. Множина E значень x , для яких функціональний ряд збіжний, називається областю збіжності ряду.

Означення. Сума $S_n(x)$ n перших членів функціонального ряду називається частинною сумою порядку n .

За означенням

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots + f_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$$

є функцією від x .

За означенням області збіжності функціонального ряду $\forall x \in E$ існує $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$ і називається сумою функціонального ряду.

Ця сума є функцією від x , означеною в області збіжності функціонального ряду. Якщо $S(x)$ є сума функціонального ряду, то $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$.

8.2.2. Степеневі ряди

Частковим випадком функціональних рядів є степеневі ряди.

Функціональний ряд, членами якого є степеневі функції:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots + a_n (x - x_0)^n + \dots, \quad (8.11)$$

або

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (8.12)$$

називається степеневим рядом. Дійсні числа $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ називаються коефіцієнтами ряду.

Інтервал збіжності степеневого ряду можна знайти за ознаками Даламбера і Коші. Щоб знайти область збіжності, потрібно додатково дослідити збіжність ряду в крайніх точках його інтервалу збіжності.

Якщо функція $f(x)$ на деякому проміжку є сумою степеневого ряду, то будемо говорити, що вона розкладається в степеневий ряд на цьому проміжку.

Якщо функція $f(x)$ на деякому проміжку розкладається в степеневий ряд, то цей ряд єдиний і є рядом Тейлора (Маклорена) для цієї функції.

Розклад функції $f(x)$ в ряд Тейлора має вигляд:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) +$$

$$+ \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \dots \quad (8.13)$$

При $x_0 = 0$ маємо розклад функції в ряд Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots \quad (8.14)$$

Розклад в ряд Маклорена деяких елементарних функцій (в дужках вказано область збіжності цього ряду):

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < \infty), \quad (8.15)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad (-\infty < x < \infty), \quad (8.16)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots \quad (-\infty < x < \infty), \quad (8.17)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + \dots \quad (-1 < x < 1), \quad (8.18)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-1 < x \leq 1), \quad (8.19)$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \quad (-1 \leq x \leq 1), \quad (8.20)$$

$$\begin{aligned} \arcsin x = & x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots + \\ & + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \quad (-1 \leq x \leq 1). \end{aligned} \quad (8.21)$$

Степеневі ряди застосовуються при наближених обчисленнях визначених інтегралів, при знаходженні наближених значень функцій, при наближеному інтегруванні диференціальних рівнянь.

Приклад 1. Визначити область збіжності степеневого

$$\text{ряду } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n 4^n}.$$

Розв'язання. Використовуючи ознаку Даламбера, знайдемо інтервал збіжності цього ряду з нерівності

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| < 1.$$

$$\text{Маємо, } u_n(x) = \frac{(x-2)^n}{n 4^n}, \quad u_{n+1}(x) = \frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1) 4^{n+1}};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \left| \frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1) 4^{n+1}} \cdot \frac{n 4^n}{(x-2)^n} \right| = \frac{|x-2|}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{|x-2|}{4};$$

$$\frac{|x-2|}{4} < 1, \quad |x-2| < 4, \quad -4 < x-2 < 4, \quad -2 < x < 6.$$

Отже, $-2 < x < 6$ – інтервал збіжності. Дослідимо збіжність ряду на кінцях цього інтервалу.

При $x = 6$ маємо знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n 4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – розбіжний гармонічний ряд.

При $x = -2$ маємо знакопозережний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n 4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ – умовно збіжний ряд, оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбіжний, а за ознакою Лейбніца $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ і члени ряду спадають.

Отже, область збіжності даного ряду є проміжок $-2 \leq x < 6$.

Приклад 2. Визначити область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{n 16^n}.$$

Розв'язання. Знайдемо спочатку інтервал збіжності ряду. Оскільки $u_n(x) = \frac{(x-3)^{2n}}{n16^n}$, $u_{n+1}(x) = \frac{(x-3)^{2n+2}}{(n+1)16^{n+1}}$ і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \left| \frac{(x-3)^{2n+2}}{(n+1)16^{n+1}} \cdot \frac{n16^n}{(x-3)^{2n}} \right| = \frac{(x-3)^2}{16} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{(x-3)^2}{16},$$

то даний ряд абсолютно збіжний при значеннях x ,

які задовольняють нерівність $\frac{(x-3)^2}{16} < 1$, або $|x-3| < 4$,
 $-4 < x-3 < 4$, $-1 < x < 7$ – шуканий інтервал збіжності.

На кінцях інтервалу при $x = -1$ і $x = 7$ маємо гармонічний розбіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Отже, область збіжності даного ряду є проміжок $-1 < x < 7$.

Приклад 3. Визначити область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Розв'язання. Знаходимо границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| =$

$$= \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 \text{ для } -\infty < x < \infty.$$

Отже, ряд збіжний на всій числовій прямій.

Приклад 4. Знайти інтервал і радіус збіжності степеневих рядів:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n \cdot \sqrt{2n-1}}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2 \cdot 2^n}; \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{2n+1} \right)^n x^n.$$

Розв'язання

$$\begin{aligned}
 a) \text{ За ознакою Даламбера } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} &= \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}\sqrt{2n+1}} : \frac{|x|^n}{n3^n\sqrt{2n-1}} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^n \cdot |x|}{(n+1)3^n \cdot 3 \cdot \sqrt{2n+1}} \cdot \frac{n3^n\sqrt{2n-1}}{|x|^n} = \\
 &= \frac{|x|}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{2n-1}}{(n+1)\sqrt{2n+1}} = \frac{|x|}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2-\frac{1}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\sqrt{2+\frac{1}{n}}} = \frac{|x|}{3} \cdot 1 = \frac{|x|}{3}.
 \end{aligned}$$

Отже, даний ряд збіжний якщо $\frac{|x|}{3} < 1$, звідки $-3 < x < 3$ – інтервал збіжності ряду.

Встановимо збіжність даного ряду на кінцях $x = \pm 3$ його інтервалу збіжності.

При $x = -3$ з даного ряду отримуємо знакопочеревний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{2n-1}}$. Цей ряд абсолютно збіжний, оскільки збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{2n-1}}$, складений з модулів його членів.

При $x = 3$ з даного ряду отримуємо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{2n-1}}$ з додатними членами. Цей ряд збіжний. Справді, розглянемо збіжний узагальнений гармонічний ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ($\alpha = \frac{3}{2} > 1$). За ознакою порівняння числових рядів з

$$\begin{aligned} &\text{додатними членами отримуємо } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\sqrt{2n-1}} : \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n}}{n\sqrt{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad - \text{обидва} \end{aligned}$$

ряди збіжні.

Отже, $-3 \leq x \leq 3$ є проміжок збіжності даного ряду, а $R = 3$ – його радіус збіжності;

$$\begin{aligned} \text{б) За ознакою Даламбера знаходимо } &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x-2|^{n+1}}{(n+1)^2 2^{n+1}} \cdot \frac{n^2 2^n}{|x-2|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x-2|^n \cdot |x-2|}{(n+1)^2 2^n \cdot 2} \cdot \frac{n^2 2^n}{|x-2|^n} = \\ &= \frac{|x-2|}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{|x-2|}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \\ &= \frac{|x-2|}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{|x-2|}{2}. \text{ Даний ряд збіжний, якщо} \end{aligned}$$

$$\frac{|x-2|}{2} < 1, \text{ звідки } -2 < x-2 < 2, \quad 0 < x < 4.$$

Дослідимо природу ряду на кінцях $x = 0$, $x = 4$ інтервалу його збіжності.

При $x = 0$ з даного ряду отримуємо знакопочережний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \cdot 2^n}$. Цей ряд абсолютно збіжний, оскільки

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot 2^n}$, складений з модулів його членів збіжний за ознакою порівняння числових рядів з додатніми членами (його члени не більші членів збіжного геометричного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ із знаменником $q = \frac{1}{2} < 1$).

При $x = 4$ з даного ряду отримуємо $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збіжний узагальнений гармонічний ряд ($\alpha = 2 > 1$).

Отже, $0 \leq x \leq 4$ є проміжок збіжності даного степеневому ряду, а $R = 2$ – його радіус збіжності.

в) За радикальною ознакою Коші

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n |x|^n} = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{2n+1} = \\ &= |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = |x| \cdot \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Отже, даний ряд збіжний якщо $\frac{|x|}{2} < 1$, звідки $-2 < x < 2$ – його інтервал збіжності.

На кінцях $x = \pm 2$ числові ряди розбіжні, оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$.

Отже, $-2 < x < 2$ є інтервал збіжності даного ряду, а $R = 2$ – його радіус збіжності.

8.2.3. Застосування степеневих рядів

За допомогою степеневих рядів із довільною точністю можна обчислити значення функцій, значення визначених

інтегралів від функцій, первісні яких не є елементарними функціями, а також знайти розв'язки диференціальних рівнянь.

Обчислення визначених інтегралів за допомогою рядів

Існує досить багато функцій, первісні яких не є елементарними функціями. Говорять, що невизначені інтеграли від таких функцій не беруться. Значить не можна обчислити й визначені інтеграли від таких функцій за формулою Ньютона – Лейбніца, хоч багато з них мають широке застосування в математиці.

Підінтегральні функції таких інтегралів розкладають у степеневі ряди. Межі інтегрування повинні належати інтервалам збіжності цих рядів.

Інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою рядів

Як відомо, знаходження розв'язків диференціальних рівнянь зводиться до обчислення невизначених інтегралів або, як кажуть, зводиться до квадратур (обчислення інтегралів пов'язане з обчисленням площ, звідки й походить термін «квадратура»).

У багатьох випадках розв'язання диференціальних рівнянь не зводиться до квадратур і їх розв'язки знаходять з довільною точністю наближеними методами. Одним з таких методів є метод степеневих рядів.

Приклад 5. Обчислити $\arctg 0,2$ з точністю до 0,0001.

Розв'язання. Використаємо розклад функції $\arctg x$ в

ряд Маклорена:
$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$$

Покладемо $x = 0,2$, отримаємо:

$$\arctg 0,2 = 0,2 - \frac{0,2^3}{3} + \frac{0,2^5}{5} - \frac{0,2^7}{7} + \dots, \text{ або}$$

$\arctg 0,2 = 0,2 - \frac{0,008}{3} + \frac{0,00032}{5} - \dots$ Оскільки одержаний числовий ряд є знакопочережним і третій член розкладу менший за 0,0001, для забезпечення потрібної точності, цей і всі наступні члени ряду можна відкинути. Тому,

$$\arctg 0,2 \approx 0,2 - \frac{0,008}{3} = \frac{0,6 - 0,008}{3} = \frac{0,592}{3} = 0,1973.$$

Приклад 6. Обчислити з точністю до 0,001 визначений

інтеграл $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctg x}{x} dx$.

Розв'язання. Оскільки $\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$, то

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctg x}{x} dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \right) dx = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^6}{7} + \dots \right) dx = \left(x - \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^5}{5^2} - \frac{x^7}{7^2} + \dots \right) \Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3 \cdot 3^2} + \frac{1}{2^5 \cdot 5^2} - \frac{1}{2^7 \cdot 7^2} + \dots = \\ &= 0,5000 - 0,0139 + 0,0012 - 0,00016 + \dots \end{aligned}$$

В отриманому числовому ряді член $\frac{1}{2^7 \cdot 7^2} = 0,00016 < 0,001$. За ознакою Лейбніца, щоб обчислити даний інтеграл з заданою точністю, досить взяти три перших члени ряду:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctg x}{x} dx = 0,5000 - 0,0139 + 0,0012 = 0,487.$$

Приклад 7. Обчислити з точністю до 0,001 визначений

інтеграл $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin 2x}{x} dx$.

Розв'язання

Знаходимо $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin 2x}{x} dx = \left| \sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots, t = 2x \right| =$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} \left(2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \frac{(2x)^7}{7!} + \dots \right) dx =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(2 - \frac{2^3}{3!} x^2 + \frac{2^5}{5!} x^4 - \frac{2^7}{7!} x^6 - \dots \right) dx =$$

$$= \left(2x - \frac{2^3}{3!} \frac{x^3}{3} + \frac{2^5}{5!} \frac{x^5}{5} - \frac{2^7}{7!} \frac{x^7}{7} + \dots \right) \Bigg|_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{2^3}{3! \cdot 3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{2^5}{5! \cdot 5} \frac{1}{2^5} - \frac{2^7}{7! \cdot 7} \frac{1}{2^7} - \dots =$$

$$= 1 - \frac{1}{3! \cdot 3} + \frac{1}{5! \cdot 5} - \frac{1}{7! \cdot 7} + \dots = 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} - \frac{1}{35280} + \dots$$

Оскільки $\frac{1}{35280} < 0.001$, то, відкинувши всі члени, починаючи

з члена $\frac{1}{35280}$, за теоремою Лейбніца похибка не перевищуватиме 0,001.

Знаходимо $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin 2x}{x} dx = 1 - 0.0556 + 0.0017 \approx 0,946$.

Приклад 8. Обчислити з точністю до 0,001 інтеграл

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx.$$

Розв'язання. Розкладаємо підінтегральну функцію в степеневий ряд.

$$\text{Оскільки } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

$$\text{тоді } e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{n!} + \dots. \text{ Тому,}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots \right) dx = \\ &= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots \right) \Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{320} - \frac{1}{42 \cdot 128} + \dots \end{aligned}$$

Одержаний ряд – знакопочережний. Тому для знаходження його суми з точністю до 0,001 досить взяти лише три перші

члени, оскільки $\frac{1}{42 \cdot 128} < 0,001$.

$$\text{Маємо: } \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{320} = \frac{480 - 40 + 3}{960} = \frac{443}{960} = 0,461.$$

Приклад 9. Обчислити з точністю до 0,0001 інтеграл

$$\int_0^{\frac{1}{5}} \sqrt[3]{1+x^2} dx.$$

Розв'язання. Запишемо підінтегральну функцію у вигляді $\sqrt[3]{1+x^2} = (1+x^2)^{\frac{1}{3}}$ і використаємо біноміальний ряд:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots,$$

замінивши в ряді x на x^2 і $m = \frac{1}{3}$. Отримаємо ряд:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1+x^2} &= (1+x^2)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{2!}x^4 + \\ &+ \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)}{3!}x^6 + \dots = 1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{x^4}{9} + \frac{5}{81}x^6 - \dots\end{aligned}$$

Тому будемо мати:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{5}} \sqrt[3]{1+x^2} dx &= \int_0^{\frac{1}{5}} \left(1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{x^4}{9} + \frac{5}{81}x^6 - \dots\right) dx = \\ &= \left(x + \frac{x^3}{9} - \frac{x^5}{45} + \frac{5}{81} \frac{x^7}{7} - \dots\right) \Big|_0^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} + \frac{1}{125 \cdot 9} - \frac{1}{625 \cdot 5 \cdot 45} + \dots \approx \\ &\approx \frac{1}{5} + \frac{1}{125 \cdot 9} = \frac{226}{1125} = 0,2009, \text{ оскільки } \frac{1}{625 \cdot 5 \cdot 45} < 0,0001.\end{aligned}$$

$$\text{Отже, } \int_0^{\frac{1}{5}} \sqrt[3]{1+x^2} dx \approx 0,2009.$$

Приклад 10. Обчислити з точністю до 0,001 інтеграл

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1+x^3) dx.$$

Розв'язання. Оскільки $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$, то

$$\ln(1+x^3) = x^3 - \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} - \frac{x^{12}}{4} + \dots \text{ Тому будемо мати:}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1+x^3) dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x^3 - \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} - \frac{x^{12}}{4} + \dots \right) dx = \\ &= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^7}{14} + \frac{x^{10}}{30} - \dots \right) \bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4 \cdot 2^4} - \frac{1}{14 \cdot 2^7} + \frac{1}{30 \cdot 2^{10}} - \dots \approx \\ &\approx \frac{1}{4 \cdot 2^4} = \frac{1}{64} = 0,016, \end{aligned}$$

враховуємо, що $\frac{1}{14 \cdot 2^7} = \frac{1}{1792} < 0,001$.

$$\text{Отже, } \int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1+x^3) dx \approx 0,016.$$

Приклад 11. Знайти три перших відмінних від нуля члени розкладу в степеневий ряд розв'язку $y = f(x)$ диференціального рівняння $y' = y^2 + \cos x$, який задовольняє початкову умову $y(0) = 1$.

Розв'язання. Використаємо ряд Маклорена

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \dots + \\ &+ \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \dots \end{aligned}$$

З початкової умови знаходимо, що $f(0) = y(0) = 1$, а з даного рівняння – $f'(0) = y'(0) = 1^2 + \cos 0 = 2$. Диференціюючи послідовно обидві частини диференціального

рівняння, отримуємо $y'' = 2yy' - \sin x$,

$$y''' = 2y'^2 + 2yy'' - \cos x, \dots, \text{ тоді } f''(0) = y''(0) = 2 \cdot 1 \cdot 2 - \sin 0 = 4,$$

а $f'''(0) = y'''(0) = 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 1 \cdot 4 - \cos 0 = 15, \dots$ Підставляючи отримані результати в ряд Маклорена, отримаємо

$$f(x) = 1 + 2x + \frac{4}{2!}x^2 + \frac{15}{3!}x^3 + \dots = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{5}{3}x^3 + \dots -$$

шуканий розв'язок даного диференціального рівняння.

Приклад 12. Знайти чотири перших, відмінних від нуля, члени розкладу в степеневий ряд розв'язку $y(x)$ диференціального рівняння $y' = y^2 + x^3$, який задовольняє початкову умову $y(0) = \frac{1}{2}$.

Розв'язання. Шукаємо розв'язок рівняння у вигляді ряду

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

Диференціюючи це рівняння, знаходимо похідні в точці $x = 0$:

$$y'(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 = \frac{1}{4}, \quad y'' = 2yy' + 3x^2,$$

$$y''(0) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}, \quad y''' = 2y'y' + 2yy'' + 6x = 2(y')^2 + 2yy'',$$

$$y'''(0) = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}.$$

Підставляючи значення $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$, $y'''(0)$ в ряд Маклорена для функції $y(x)$ і обмежуючись чотирма першими відмінними від нуля членами розкладу, одержуємо наближений розв'язок:

$$y(x) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3.$$

Запитання для самоконтролю

1. Запишіть степеневий ряд по степенях x . Як знайти його інтервал і радіус збіжності?

2. Запишіть ряд Тейлора для нескінченно диференційовної функції $y = f(x)$.

3. Яка необхідна і достатня умови збіжності ряду Тейлора?

4. Запишіть ряд Маклорена для нескінченно диференційовної функції.

5. Запишіть ряди Маклорена для функцій $f(x) = e^x$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$ і вкажіть їх інтервал збіжності.

6. Запишіть біноміальний ряд, вкажіть його інтервал збіжності.

7. Як обчислити за допомогою степеневих рядів визначений інтеграл з заданою точністю? Наведіть приклад.

Тести

1. Степеневим рядом називається ряд вигляду

a) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^n - x_0)$;

б) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^x$;

г) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - n)^n$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{a_n}$.

2. Ряд Тейлора функції $f(x)$ має вигляд

$$a) f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \dots;$$

$$б) f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} + \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} + \dots;$$

$$в) f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots;$$

$$г) f(x_0) + 1! f'(x_0)(x-x_0) + 2! f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + n! f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \dots;$$

$$д) f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{(1!)^2}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{(2!)^2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n!)^2}(x-x_0)^n + \dots$$

3. Ряд Маклорена функції $f(x)$ має вигляд

$$a) f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots;$$

$$б) f(0) + f'(0)x + f''(0)x^2 + \dots + f^{(n)}(0)x^n + \dots;$$

$$в) f(0) + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!};$$

$$г) f(0) + 1! f'(0)x + 2! f''(0)x^2 + \dots + n! f^{(n)}(0)x^n + \dots;$$

$$д) f(0) + \frac{f'(0)}{(1!)^2}x + \frac{f''(0)}{(2!)^2}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{(n!)^2}x^n + \dots$$

4. Яка функція є сумою ряду $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$?

$$a) e^x;$$

- б) $\sin x$;
- в) $\cos x$;
- г) $\ln(1+x)$;
- д) $\arctg x$.

5. Яка функція є сумою ряду

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots?$$

- а) e^x ;
- б) $\cos x$;
- в) $\ln(1+x)$;
- г) $\sin x$;
- д) $\arctg x$.

6. Яка функція є сумою ряду

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots?$$

- а) e^x ;
- б) $\cos x$;
- в) $\sin x$;
- г) $\ln(1+x)$;
- д) $\arctg x$.

7. Яка функція є сумою ряду

$$1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots?$$

- а) e^{-x} ;
- б) $\sin x$;
- в) $\cos x$;
- г) $\ln(1+x)$;
- д) $\arctg x$.

8. Радіусом збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ є

а) 2; б) 3; в) 4; г) 1; д) 5.

9. Число e є сумою ряду

а) $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots;$

б) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots;$

в) $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} + \dots;$

г) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots;$

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$

10. Інтервалом збіжності степеневого ряду називається такий інтервал $(-R, R)$, що

а) для кожної точки $x \in (-R, R)$ ряд збігається;

б) для кожної точки $x \in (-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$ ряд розбігається;

в) для кожної точки $x \in (-2R, 2R)$ ряд збігається;

г) для кожної точки $x \in (-\infty, -3R) \cup (3R, +\infty)$ ряд розбігається;

д) для кожної точки $x \in (-R, R)$ ряд збігається, а для кожної точки $x \in (-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$ – розбігається.

11. Біноміальним рядом називається ряд

а) $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots;$

б) $1 + x + x^2 + x^3 + \dots;$

в) $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots;$

г) $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots;$

$$\partial) 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots$$

12. Проміжком збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ є

a) $[-1, 1]$;

б) $(-1, 1)$;

в) $(-2, 2]$;

г) $[-3, 1]$;

д) $(0, 2)$.

13. Проміжком збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ є

a) $(-\infty, +\infty)$;

б) $[-1, 1]$;

в) $(-e, e]$;

г) $[-3, 1]$;

д) $(0, 2)$;

14. Радіус збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ дорівнює

a) 1; б) e ; в) 7; г) $+\infty$; д) π .

15. Множиною збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ є

a) $[-1, 1]$;

б) $(-e, e]$;

в) $\{0\}$ (ряд збігається тільки в точці $x = 0$);

г) $[-3, 1]$;

д) $(0, +\infty)$.

16. Число e^{-1} є сумою ряду

- а) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots$;
- б) $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} + \dots$;
- в) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$;
- г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$;
- д) $1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} + \dots$

17. Якщо степеневий ряд $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$ збігається при $x_0 \neq 0$, то цей ряд

- а) збігається абсолютно для x , для яких $|x| > |x_0|$;
- б) збігається абсолютно для x , для яких $|x| < |x_0|$;
- в) розбігається для x , для яких $|x| < |x_0|$;
- г) збігається для x , для яких $|x| > |x_0|$;
- д) збігається абсолютно при x_0 .

18. Якщо степеневий ряд $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$ розбігається при $x_0 \neq 0$, то цей ряд

- а) розбігається для x , для яких $|x| > |x_0|$;
- б) збігається абсолютно для x , для яких $|x| > |x_0|$;
- в) розбігається для x , для яких $|x| < |x_0|$;
- г) збігається для x , для яких $|x| > |x_0|$;
- д) збігається при $2x_0$.

19. Біноміальний ряд

$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots$ збігається при

- а) $x > 1$;
- б) $x < -1$;
- в) $x \in (-1, 1)$;
- г) $x = \pi$;
- д) $x = -\pi$.

20. Біноміальний ряд

$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots$ розбігається,

якщо

- а) $|x| < 1$; б) $|x| < \sin 1$; в) $|x| < \cos 1$; г) $|x| > 1$; д) $|x| < \sin^2 1$.

21. Радіус збіжності степеневого ряду

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$ дорівнює $+\infty$, якщо цей ряд збігається

- а) не для кожного $x \in (-\infty, +\infty)$;
- б) при $x = \pi$;
- в) при $x \in (-e, e)$;
- г) при $x = \pi + e$;
- д) для кожного $x \in (-\infty, +\infty)$.

22. Якщо $x \neq 0$, то функція $\frac{\sin x}{x}$ є сумою ряду

- а) $1 + 3!x^2 + 5!x^4 + 7!x^6 + \dots$;
- б) $1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$;
- в) $x + x^3 + x^5 + \dots$;
- г) $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots$;
- д) $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$.

23. Сума ряду $1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{6}{27} + \dots + (-1)^n \frac{2^n}{3^n} + \dots$ дорівнює

а) 3; б) 4; в) 5; г) 0,6; д) 7.

24. Число $\cos 1$ є сумою ряду

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$;

б) $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!} + \dots$;

в) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots$;

г) $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} + \dots$;

д) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$

Відповіді

1. б). 2. в). 3. а). 4. а). 5. г). 6. б). 7. а). 8. г). 9. а). 10. д). 11. д).
12. б). 13. а). 14. г). 15. в). 16. д). 17. б). 18. а). 19. в). 20. г).
21. д). 22. б). 23. а). 24. б).

ЛІТЕРАТУРА

1. Дудкін М. Є., Дюженкова О. Ю., Степахно І. В. Вища математика : підручник для здобувачів ступеня бакалавра за інженерними спеціальностями. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 449 с.
2. Математичний аналіз у задачах і прикладах : у 2-х ч. / Дюженкова Л. І., Колесник Т. В., Лященко М. Я., Михалін Г. О., Шкіль М. І. Київ : Вища школа, 2002. Ч. 1. 462 с.
3. Математичний аналіз у задачах і прикладах : у 2-х ч. / Дюженкова Л. І., Колесник Т. В., Лященко М. Я., Михалін Г. О., Шкіль М. І. Київ : Вища школа, 2002. Ч. 2. 470 с.
4. Панченко Н. Г., Резуненко М. Є. Вища математика : навч. посіб. Харків : УкрДУЗТ, 2022. Ч. 1. 231 с. URL: <http://lib.kart.edu.ua/bitstream/123456789/10149/.pdf> (дата звернення: 16.01.2025).
5. Murray R. Spiegel, Ph.D. Advanced Mathematics for Engineers and Scientists. URL: [file:///C:/Users/Win10/Downloads/Schaums-Advanced-Mathematics-for-Engineers-and-Scientists-by-Murray-R-Spiegel%20\(1\).pdf](file:///C:/Users/Win10/Downloads/Schaums-Advanced-Mathematics-for-Engineers-and-Scientists-by-Murray-R-Spiegel%20(1).pdf) (дата звернення: 18.01.2025).
6. Рудавський Ю. К., Костробій П. П., Лібацький Л. Л. Збірник задач з математичного аналізу : у 2 ч. Львів : Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2008. Ч. 1. 352 с.
7. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк О. М. Диференціальні рівняння в задачах : навч. посіб. К. : «Либідь», 2003. 504 с.
8. Шкіль М. І. Математичний аналіз : підручник : у 2-х ч. Київ : Вища школа, 2005. Ч. 1. 447 с.
9. Шкіль М. І. Математичний аналіз : підручник : у 2-х ч. Київ : Вища школа, 2005. Ч. 2. 510 с.
10. Ярмуш Я. І., Самолюк І. В. Вища математика. Практикум : навч. посіб. Рівне : НУВГП, 2015. 148 с.

Навчальне видання

*Іващук Яків Григорович
Цецик Світлана Петрівна
Самолук Ірина Василівна*

ВИЩА МАТЕМАТИКА ПРАКТИКУМ

*Навчальний посібник
Частина II*

Друкується в авторській редакції

Технічний редактор

Галина Сімчук

*Видавець і виготовлювач
Національний університет
водного господарства та природокористування
вул. Соборна, 11, м. Рівне, 33028.*

*Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до
державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів
видавничої продукції РВ № 31 від 26.04.2005 р.*