Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та природокористування
Навчально-науковий інститут кібернетики, інформаційних технологій та інженерії
Кафедра комп’ютерних технологій та економічної кібернетики

04-05-111М

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання лабораторних робіт і самостійної роботи з навчальної дисципліни «**Методи оптимізації та дослідження операцій**» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою «Інформаційні системи і технології» спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології» денної та заочної форми навчання

Рекомендовано науково-методичною
радою з якості ННІ КІТІ
Протокол № 1 від 20.10.2025 р.

Рівне – 2025

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт і самостійної роботи з навчальної дисципліни «Методи оптимізації та дослідження операцій» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою «Інформаційні системи і технології» спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології» денної та заочної форми навчання. [Електронне видання] / Барановський С. В. – Рівне : НУВГП, 2025. – 65 с.

Укладач:
Барановський С. В., доцент, к.т.н., доцент кафедри комп'ютерних технологій та економічної кібернетики.

Відповідальний за випуск:
Грицюк П. М., професор, д.е.н., завідувач кафедри комп'ютерних технологій та економічної кібернетики.

Гарант освітньої програми:
Гладка О. М., доцент, к.т.н., доцент кафедри комп'ютерних технологій та економічної кібернетики.

Зміст

Вступ

Лабораторні роботи з дисципліни "Методи оптимізації та дослідження операцій" є невід'ємною частиною освітнього процесу для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 126 "Інформаційні системи та технології". Ці методичні вказівки розроблено для того, щоб надати необхідні теоретичні знання та практичні навички, що дозволять ефективно застосовувати математичні методи для вирішення широкого кола задач оптимізації та прийняття рішень в реальних умовах.

У сучасному світі, де інформаційні системи та технології відіграють ключову роль у всіх сферах діяльності, вміння знаходити оптимальні рішення є критично важливим. Методи оптимізації та дослідження операцій надають потужний інструментарій для підвищення ефективності виробничих процесів, логістики, фінансового менеджменту, розробки програмного забезпечення та багатьох інших галузей.

Виконання лабораторних робіт допоможе:

- закріпити теоретичні знання, отримані на лекціях, шляхом застосування їх до практичних задач;
- опанувати основні алгоритми та методи оптимізації, такі як лінійне, нелінійне, динамічне програмування, сіткові методи, теорія ігор тощо;
- набути практичних навичок використання сучасного програмного забезпечення для моделювання та розв'язання оптимізаційних задач;
- розвинути аналітичне мислення та здатність формулювати задачі оптимізації з реальних проблемних ситуацій;
- підготуватися до самостійної роботи та подальшого поглибленого вивчення дисципліни.

Кожна лабораторна робота містить необхідні теоретичні відомості, приклади розв'язання типових задач, завдання для самостійного виконання та рекомендації щодо оформлення звітів.

Перед виконанням практичних завдань лабораторної роботи рекомендується ретельно опрацьовувати теоретичний матеріал та базові алгоритми розв'язання типових задач.

Лабораторна робота №1
Графічний метод розв'язання задач лінійного програмування

Теоретичні відомості

Графічний метод, як правило, використовують при розв'язанні задач лінійного програмування, що містять дві невідомі x_1 та x_2, наприклад, задачі знаходження максимального значення функції

$$L = c_1 x_1 + c_2 x_2 ,$$

при умовах $$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \le b_i \ (i = \overline{1,k}), \ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0 .$$

Кожна з нерівностей системи обмежень задачі геометрично визначає півплощину відповідно з граничними прямими $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 = b_i$ ($i = \overline{1,k}$), $x_1 = 0$ та $x_2 = 0$. Переріз цих півплощин (якщо він не є порожньою множиною) утворюють область допустимих розв'язків, а вихідна задача лінійного програмування полягає у знаходженні такої точки цієї області, у якій цільова функція приймає максимальне значення. Реалізується графічний метод наступним алгоритмом:

1. Провести граничні прямі, рівняння яких отримують в результаті заміни в обмеженнях знаків нерівності на рівності.
2. Визначити півплощини, що відповідають обмеженням-нерівностям. Для цього достатньо підставити у відповідну нерівність координати довільної точки півплощини (наприклад, (0,0)): якщо отримуємо справедливу нерівність, то відповідна півплощина і є шуканою; у протилежному випадку – шуканою є інша півплощина.
3. Побудувати многокутник допустимих розв'язків, який отримується у результаті перетину півплощин, що визначаються нерівностями.
4. Побудувати вектор $\vec{N} = (c_1, c_2)$ ($\vec{N} = grad\, L$), який вказує напрямок найшвидшого зростання функції *L*.
5. Провести пряму $c_1 x_1 + c_2 x_2 = const$ (яку називають *опорною*) та, умовно переміщуючи її у напрямку вектора *N*, знайти точку, в якій цільова функція досягає максимуму, або встановити необмеженість цільової функції зверху на многокутнику розв'язків.
6. Визначити координати точки максимуму цільової функції та

обчислити значення цільової функції в цій точці.

Зауважимо, що у випадку знаходження мінімуму цільової функції опорну пряму потрібно умовно переміщувати у протилежному до вектора N напрямку (тобто у напрямку найшвидшого спадання функції L).

Приклад 1. Знайти розв'язок ЗЛП графічним методом.

$$L = x_1 + 2x_2 + 7 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ 1/4x_1 + 1/2x_2 \le 2 \\ 2x_1 - x_2 \le 6 \\ x_1, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Розв'язання. Необхідні для розв'язання задачі геометричні побудови зображені на рис. 1.

Оскільки опорна пряма паралельна прямій $1/4x_1+1/2x_2=2$, то максимальне значення функції досягається в будь-якій точці відрізка, кінцями якого є точка (0;4) та точка перетину прямих $x_1+x_2=5$ та $1/4x_1+1/2x_2=2$. Знайдемо цю точку:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ 1/4x_1 + 1/2x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 - x_2 \\ 5 - x_2 + 2x_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Отже, оптимальний розв'язок задачі $X^*=(2;3)$. При цьому значення цільової функції $L_{\max}(X^*) = 2 + 2 \cdot 3 + 7 = 15$.

ЗАВДАННЯ. Знайти розв'язок задачі лінійного програмування графічним методом

1. $F = x_1 + x_2 \to \max$,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 14, \\ -5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ 4x_1 + 6x_2 \ge 24, \end{cases}$$
$x_1, x_2 \ge 0;$

2. $F = x_1 + 2x_2 \to \max$,

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \le 12, \\ -x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 16, \end{cases}$$
$x_1, x_2 \ge 0;$

3. $F = x_1 + x_2 \to \max$,

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 16, \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \ge 9, \end{cases}$$
$x_1, x_2 \ge 0;$

4. $F = 2x_1 + x_2 \to \min$,

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 16, \\ -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + 3x_2 \ge 9, \end{cases}$$
$x_1, x_2 \ge 0;$

5. $F = 12x_1 + 16x_2 \to \min$,

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 \ge 24, \\ 5x_1 + 4x_2 \ge 31, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 18, \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0;$

6. $F = 2x_1 - 2x_2 \to \max$,

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2, \\ 5x_1 + 3x_2 \le 18, \\ x_1 - 2x_2 \le 1, \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0;$

7. $F = -3x_1 + 2x_2 \to \min$,

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 \le 3, \\ x_1 - x_2 \ge -2, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0;$

8. $F = -3x_1 + 4x_2 \to \min$,

$$\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 \le 12, \\ -2x_1 + x_2 \le 2, \\ 4x_1 + 3x_2 \le 24, \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0;$

9. $F = 2x_1 - 2x_2 \to \min$,

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2, \\ 5x_1 + 3x_2 \le 18, \\ x_1 - 2x_2 \le 1, \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0;$

10. $F = -2x_1 + x_2 \to \min$,

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 12, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0;$

Звіт про виконання лабораторної роботи №1.

Звіт про виконання лабораторної роботи має містити вихідні дані завдання для самостійного виконання, розв’язок та його інтерпретацію, висновки. Звіт необхідно зберегти за наступним форматом: ***Прізвище_Звіт_ЛР1.xlsx*** і здати на платформі Moodle, завантаживши у відповідне поле.

Лабораторна робота №2
Симплексний метод розв'язання ЗЛП

Теоретичні відомості

При ручному розв'язанні ЗЛП умову та наступні необхідні обчислення зручно здійснювати у так званій симплекс-таблиці, що має такий вигляд.

Таблиця 1

№ ітер.	Базис	$c_б$	B	c_1		c_l		c_m	c_{m+1}		c_k		c_n	θ_i
				P_1	...	P_l	...	P_m	P_{m+1}	...	P_k	...	P_n	
	P_1	c_1	b_1	1	...	0	...	0	a_{1m+1}	...	a_{1k}	...	a_{1n}	θ_1
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
s	P_l	c_l	b_l	0	...	1	...	0	a_{lm+1}	...	a_{lk}	...	a_{ln}	θ_l
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	P_m	c_m	b_m	0	...	0	...	1	a_{mm+1}	...	a_{mk}	...	a_{mn}	θ_m
	Δ_j		$L(X)$	0	...	0	...	0	Δ_{m+1}	...	Δ_k	...	Δ_n	

Симплекс-метод, як правило, застосовується для знаходження розв'язку канонічної ЗЛП (за умови $m<n$, $b_i>0$ $(i=\overline{1,m})$) і реалізується наступним алгоритмом.

1. Знаходять початковий опорний план, за який для канонічної ЗЛП приймають $X^0=\left(b_1,...,b_m,0,...,0\right)$. Після цього обчислюють відносні оцінки змінних:

$$\Delta_k^0=\sum_{i=1}^{m}c_j^0 a_{ik}-c_k^0,\ k=\overline{m+1,n}.$$

2. Аналізують відносні оцінки Δ_k^0:

   а) якщо всі $\Delta_k^0\le 0$: ($k=\overline{1,n}$), то записаний базисний розв'язок X^0 – оптимальний. Пошук розв'язку припиняють.

   б) якщо існують оцінки $\Delta_k^0>0$ і для них усі $a_{ik}^0\le 0$, $i=\overline{1,m}$, то цільова функція ЗЛП не обмежена на допустимій множині. Задача не має розв'язку. Пошук розв'язку припиняють.

   в) якщо одержані $\Delta_k^0>0$, для яких існують $a_{ik}^0>0$, то записаний опорний план можна покращити. Для цього потрібно перейти до нового опорного плану. Такий перехід здійснюється шляхом виключення з вихідного опорного плану якого-небудь вектора і уведенням в нього нового вектора. У якості вектора, що вводиться у базис, можна взяти будь-який із векторів P_k, для якого відповідна оцінка $\Delta_k^0 > 0$. Як правило, номер *k* вектора, що вводиться у базис, визначають з умови: $\Delta_k^0 = \max\limits_{\Delta_j^0 > 0}\{\Delta_j^0\}$ – це номер вектора з найбільшою серед додатних симплекс різницею.

3. Нехай нами вирішено увести в базис вектор P_k. Для визначення вектора, що виводиться з базису, знаходять $\min\{b_i^0 / a_{ik}^0 = \theta_i^0\}$ для усіх $a_{ik}^0 > 0$. Нехай цей мінімум досягається при $i = l$: $\theta_l^0 = \min\{b_i^0 / a_{ik}^0\}$. Тоді із базису виводять вектор P_l. Число a_{lk}^0 називають *ведучим елементом*, а стовпець та рядок, на перетині яких знаходиться ведучий елемент – *ведучими*.

4. Методом виключення Жордана-Гауса знаходять новий опорний план і коефіцієнти розкладу векторів P_j через вектори нового базису, який відповідає новому опорному плану. Перерахунок компонентів нового опорного плану та коефіцієнтів розкладу векторів P_j через вектори нового базису здійснюють за формулами

$$b_i' = \begin{cases} b_l / a_{lk}, & i = l, \\ b_i - b_l a_{ik} / a_{lk}, & i \neq l, \end{cases} \qquad a_{ij}' = \begin{cases} a_{lj} / a_{lk}, & i = l, \\ a_{ij} - a_{lj} a_{ik} / a_{lk}, & i \neq l, \end{cases} \qquad a_{ik}' = \begin{cases} 0, & i \neq l, \\ 1, & i = l. \end{cases}$$

Останні формули легше запам'ятати, якщо скористатись наступною схемою, так званого “правила прямокутника” (рис. 1):

5. Знаходять відносні оцінки для нового опорного плану та переходять до пункту 2.

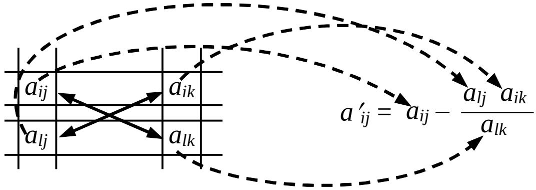

Рис. 1

Приклад 1. Знайти розв'язок ЗЛП:

$$2x_1 - x_2 - 7x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 4 \\ -x_1 - 4x_2 + 10x_3 \le 7 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

Розв'язання. Перейшовши до канонічної ЗЛП, отримаємо:

$$2x_1 - x_2 - 7x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 4 \\ -x_1 - 4x_2 + 10x_3 + x_5 = 7 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}.$$

Розв'язок представимо у симплекс-таблиці (табл. 2).

Таблиця 2

№	Базис	$c_б$	B	2	–1	–7	0	0	θ_k
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
1	P_4	0	4	1	2	3	1	0	4/3
	P_5	0	7	–1	–4	$\boxed{10}$	0	1	7/10
	Δ_j		0	–2	1	7	0	0	
2	P_4	0	19/10	13/10	$\boxed{32/10}$	0	1	–3/10	19/32
	P_3	–7	7/10	–1/10	–4/10	1	0	1/10	
	Δ_j		–49/10	–13/10	19/5	0	0	–7/10	
3	P_2	–1	19/32	13/32	1	0	5/16	–3/32	
	P_3	–7	15/16	1/16	0	1	1/8	1/16	
	Δ_j		–229/32	–91/32	0	0	–19/16	–11/32	

З останньої симплексної таблиці отримаємо $X^* = (0, 19/32, 15/16, 0, 0)$ – оптимальний розв'язок канонічної ЗЛП. Тоді, $X^{**} = (0, 19/32, 15/16)$ – оптимальний розв'язок вихідної ЗЛП. $L(X^{**}) = \min L(X) = -229/32$.

ЗАВДАННЯ. Знайти розв'язок ЗЛП симплексним методом

1. $F = 11x_1 + 5x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 91, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 34, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_5 = 80, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad (j = \overline{1,5})$

2. $F = 27x_1 + 24x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 101, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 99, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 37, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad (j = \overline{1,5})$

3. $F = 25x_1 + 12x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} 4x_1 + 13x_2 + x_3 = 379, \\ 5x_1 + 6x_2 + x_4 = 197, \\ 11x_1 + 5x_2 + x_5 = 335, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad (j = \overline{1,5})$

4. $F = 10x_1 + 14x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 249, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 438, \\ 7x_1 + 3x_2 + x_5 = 812, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad (j = \overline{1,5})$

5. $F = 12x_1 + 9x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 48, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 100, \\ 4x_1 + 15x_2 + x_5 = 225, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad (j = \overline{1,5})$

6. $F = 10x_1 + 6x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 + x_3 = 187, \\ 7x_1 + 2x_2 + x_4 = 143, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 29, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad (j = \overline{1,5})$

7. $F = 20x_1 + 15x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + x_3 = 126, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 30, \\ 6x_1 + x_2 + x_5 = 120, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad (j = \overline{1,5})$

8. $F = 12x_1 + 10x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 125, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 83, \\ x_1 + 8x_2 + x_5 = 152, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad (j = \overline{1,5})$

9. $F = 30x_1 + 20x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 65, \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 70, \\ 7x_1 + 8x_2 + x_5 = 235, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad (j = \overline{1,5})$

10. $F = 9x_1 + 7x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 34, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_4 = 105, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_5 = 91, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad (j = \overline{1,5})$

Звіт про виконання лабораторної роботи №2.

Звіт про виконання лабораторної роботи має містити вихідні дані завдання для самостійного виконання, розв'язок та його інтерпретацію, висновки. Звіт необхідно зберегти за наступним форматом: ***Прізвище_Звіт_ЛР2.xlsx*** і здати на платформі Moodle, завантаживши у відповідне поле.

Лабораторна робота №3
М-метод розв’язання СЗЛП

Теоретичні відомості

Нехай маємо стандартну ЗЛП:

$$L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1\ , \\ &a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2\ , \\ &\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ &a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_m\ , \\ &\quad x_j \ge 0 \quad (j=\overline{1,n}). \end{aligned} \tag{1}$$

де без обмеження загальності усі $b_i \ge 0$, $i=1,...,m$.

Розглянемо допоміжну канонічну ЗЛП

$$L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + M(x_{n+1}+x_{n+2}+...+x_{n+m}) \to \min\ ,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n+x_{n+1}=b_1\ , \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n+x_{n+2}=b_2\ , \\ \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n+x_{n+m}=b_m\ , \end{cases} \tag{2}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j=\overline{1,n+m}).$$

де M (M>0) – деяке досить велике число (для задачі на max – досить мале від’ємне число). Задачу (2) називають *М-задачею*, а сам метод – *М-методом*. Дана задача, очевидно, має базис, який утворюють вектори $A_{n+1}, A_{n+2}, ..., A_{n+m}$, що відповідають штучним змінним. Розв'язуючи цю задачу симплекс-методом, одержимо один із трьох випадків:

1) в оптимальному розв'язку $X_M^*=(x_1^*,...,x_n^*,x_{n+1}^*,...,x_{n+m}^*)$ М-задачі всі $x_{n+i}^*=0$, i=1,...,m;

2) в X_M^* принаймні одна з компонент $x_{n+i}^*>0$;

3) М-задача розв'язку не має ($\min L_M=-\infty$).

Можна довести, що у цих випадках відповідно маємо:

1) оптимальний розв'язок вихідної задачі (1) має вид $X^* = (x_1^*,...,x_n^*)$, тобто, одержується з X_M^* відкиданням нульових компонент, що відповідають x_{n+i}^*, i=1,...,m;

2) СЗЛП (1) не має жодного допустимого розв'язку;

3) СЗЛП (1) розв'язку не має ($\min L = -\infty$).

Зауважимо, що у М-методі константі M не обов'язково надавати певного значення. Досить лише вимагати, щоб M було більшим будь-якого числа, з яким необхідно порівнювати його в процесі розв'язування задачі. Відмітимо, що коли вектор умов, який відповідає штучній змінній виводиться з базису, то увійти знову в базис після наступних ітерацій він вже не може, оскільки M – достатньо велике число. Тому надалі проводити обчислення у відповідному стовпчику не потрібно.

Приклад 1. Знайти розв’язок задачі лінійного програмування

$$L = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_6 = 10, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}.$$

Розв’язок. Серед векторів A_1,...,A_6 системи обмежень задачі є тільки 2-одиничних – A_4,A_5. Тому додаємо до лівої частини третього рівняння системи змінну x_7 і розглянемо розширену задачу

$$L = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 + M \cdot x_7 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_6 + x_7 = 10, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,7}.$$

Розширена задача має початковий базисний розв’язок (0;0;0;24;12;0;10).

Розв’язок представимо у симплекс-таблиці (табл. 1).

Після 4-ої ітерації отримуємо оптимальний план $X^* = \left(34/3;\, 4/3;\, 0;\, 0;\, 8;\, 0;\, 0\right)$, $L_{\min} = 56/3$.

Таблиця 1

№	$x_{баз}$	$c_{баз}$	B	2	–3	6	1	0	0	M	
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	θ
1	x_4	1	24	2	1	–2	1	0	0	0	
	x_5	0	22	1	2	4	0	1	0	0	22/4
	x_7	M	10	1	–1	$\boxed{2}$	0	0	–1	1	5
$L,\ \Delta$			24+10M	M	4–M	2M–8	0	0	–M	0	
2	x_4	1	34	3	0	0	1	0	–1	1	34/3
	x_5	0	2	–1	4	0	0	1	2	–2	
	x_3	6	5	$\boxed{1/2}$	–1/2	1	0	0	–1/2	1/2	10
$L,\ \Delta$			64	4	0	0	0	0	–4	4–M	
3	x_4	1	4	0	$\boxed{3}$	–6	1	0	2	2	4/3
	x_5	0	12	0	3	2	0	1	1	–1	4
	x_1	2	10	1	–1	2	0	0	–1	1	
$L,\ \Delta$			24	0	4	–8	0	0	0	4–M	
4	x_2	–3	4/3	0	1	–2	1/3	0	2/3	2/3	
	x_5	0	8	0	0	8	–1	1	–1	–3	
	x_1	2	34/3	1	0	0	1/3	0	–1/3	2/3	
$L,\ \Delta$			56/3	0	0	0	–4/3	0	–8/3	–M–2/3	

ЗАВДАННЯ. Знайти розв’язок ЗЛП симплексним методом

1. $F = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to \max$;

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad (j = \overline{1,4})$

2. $F = -2x_1 - 2x_2 + x_3 \to \min$;

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_5 = 4, \\ 3x_1 - x_2 + x_5 = 6, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad (j = \overline{1,5})$

3. $F = x_1 + 2x_3 \to \max$;

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 15, \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_5 = 12, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 17, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad (j = \overline{1,6})$

4. $F = -x_1 - 2x_2 - 2x_3 \to \min$;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 12, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 19, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 14, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad (j = \overline{1,4})$

5. $F = -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 6x_4 + 4x_5 \to \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 8, \\ -x_1 + 4x_2 + x_4 = 1, \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,5})$

6. $F = x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 9, \\ x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 6, \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,5})$

7. $F = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 = 3, \\ -x_2 + x_3 + 2x_5 = 1, \\ -x_3 + x_4 - 2x_5 = -1, \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,5})$

8. $F = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ -x_1 + x_2 - 6x_3 + x_4 + x_5 = 1, \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,5})$

9. $F = x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 - x_3 + 7x_4 - 8x_5 = 9, \\ x_2 + 8x_3 + 9x_4 + 7x_5 = 25, \\ x_3 + x_4 + x_5 = 3, \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,5})$

10. $F = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,5})$

Звіт про виконання лабораторної роботи №3.

Звіт про виконання лабораторної роботи має містити вихідні дані завдання для самостійного виконання, розв’язок та його інтерпретацію, висновки. Звіт необхідно зберегти за наступним форматом: ***Прізвище_Звіт_ЛР3.xlsx*** і здати на платформі Moodle, завантаживши у відповідне поле.

Лабораторна робота №4
Двоїстий симплексний метод розв'язання ЗЛП

Теоретичні відомості

Двоїстою до *стандартної* задачі лінійного програмування

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min, \quad (1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ..... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (2)$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = \overline{1,n}).$$

є задача

$$L^* = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m \to \max, \quad (3)$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \leq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \leq c_2, \\ ..... \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \leq c_n, \end{cases} \quad (4)$$

Правила побудови двоїстих задач:

1. Якщо цільова функція прямої задачі мінімізується, то цільова функція двоїстої – максимізується.
2. Число змінних двоїстої задачі дорівнює числу непрямих обмежень у системі (4) прямої задачі, а число обмежень в системі (11) двоїстої задачі – числу змінних прямої задачі.
3. Матриця умов непрямих обмежень двоїстої задачі утворюється транспонуванням відповідної матриці прямої задачі:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{m2} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

4. Коефіцієнти при невідомих у цільовій функції (11) є вільними членами в системі (4), а праві частини у системі обмежень (11) двоїстої задачі є коефіцієнтами при невідомих у цільовій функції прямої задачі.
5. Якщо змінна x_j прямої задачі (3)-(4) може приймати лише

додатні значення ,то j-а умова в системі обмежень (11) двоїстої задачі є нерівністю виду “$\leq$”. Якщо змінна x_j приймає як додатні, так і від’ємні значення, то j-те обмеження двоїстої задачі є рівністю. Аналогічний зв’язок існує і для обмежень прямої задачі. Якщо i-те обмеження прямої задачі є нерівністю, то i-та змінна двоїстої задачі $y_i \geq 0$. В іншому випадку змінна y_i може приймати як додатні, так і від’ємні значення.

Алгоритм двоїстого симплекс-методу реалізується наступною послідовністю кроків.

1. Знаходять псевдоплан задачі та аналізують вектор P_0. Якщо усі $b_i \geq 0$, то одержаний псевдоплан $\left(b_1,...,b_m,0,...,0\right)$ є оптимальним планом. Пошук розв’язку припиняють.

2. Якщо існує такий індекс i, що $b_i < 0$ і усі $a_{ij} \geq 0$ $(j = \overline{1,n})$, то ЗЛП не має планів (цільова функція ЗЛП не обмежена знизу). Пошук розв’язку припиняють.

3. Якщо для будь-якого $b_i < 0$ існують $a_{ij} < 0$, то знаходять номер ведучого рядка l з умови: $b_l = \min\limits_{i:\ \beta_i < 0} b_i$, та номер ведучого стовпця k так, щоб $\gamma_k = \Delta_k / a_{lk} = \min\limits_{j:\ a_{lj} < 0} \{\Delta_j / a_{lj}\}$.

4. Знаходять новий псевдоплан $\overline{X}$ за допомогою перетворень Жордана-Гауса та переходять до першого пункту.

Необхідні обчислення, як правило, проводять у таблицях, що незначно відрізняються від симплекс-таблиць: у них немає стовпчика з відношеннями b_i / a_{ik} та уведено додатковий рядок, де записують значення $\gamma_j = \Delta_j / a_{lj}$ (див. табл. 3).

Приклад 1. Знайти розв’язок ЗЛП:

$$L = x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 - x_2 \geq 4, \\ x_1 + 2x_2 \geq 6, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Розв’язання. Представимо вихідну ЗЛП у канонічній формі:

$$L^* = -x_1 - x_2 - 2x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 - x_2 - x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - x_5 = 6, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

Помноживши 2-е і 3-є рівняння системи непрямих обмежень на (–1), одержимо:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = -4, \\ -x_1 - 2x_2 + x_5 = -6. \end{cases}$$

Вектори P_3, P_4, P_5 у цій системи є одиничними і утворюють початковий базис. Розв'язок реалізуємо у симплекс-таблицях.

Таблиця 3

№	Базис	$c_{баз}$	P_0	–1	–1	–2	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_3	–2	8	1	1	1	0	0
	P_4	0	–4	–1	1	0	1	0
	P_5	0	–6	–1	$\boxed{-2}$	0	0	1
	Δ_j		–16	–1	–1	0	0	0
	Δ_j/a_{lj}		—	1	1/2	—	—	—

Виводимо з базису вектор P_5 і вводимо вектор P_2.

Продовження таблиці 3

№	Базис	$c_{баз}$	P_0	–1	–1	–2	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
2	P_3	–2	5	1/2	0	1	0	1/2
	P_4	0	–7	–3/2	0	0	1	1/2
	P_2	–1	3	1/2	1	0	0	–1/2
	Δ_j		–13	–1/2	0	0	0	–1/2
	Δ_j/a_{lj}			1/3				
3	P_3	–2	8/3	0	0	1	1/2	2/3
	P_1	–1	14/3	1	0	0	–2/3	–1/3
	P_2	–1	2/3	0	1	0	1/3	–1/3
	Δ_j		–32/3	0	0	0	–1/3	–2/3

Отже, нами отримано оптимальний план: $X^* = (14/3; 2/3; 8/3; 0; 0)$, $L(X^*) = -32/3$;

ЗАВДАННЯ. Скласти двоїсту до задачі, визначеної умовою завдання та знайти її розв'язок двоїстим симплекс-методом.

1. $F = 11x_1 + 5x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 91, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 34, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_5 = 80, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad (j = \overline{1,5})$

2. $F = 27x_1 + 24x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 101, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 99, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 37, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad (j = \overline{1,5})$

3. $F = 25x_1 + 12x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} 4x_1 + 13x_2 + x_3 = 379, \\ 5x_1 + 6x_2 + x_4 = 197, \\ 11x_1 + 5x_2 + x_5 = 335, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad (j = \overline{1,5})$

4. $F = 10x_1 + 14x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 249, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 438, \\ 7x_1 + 3x_2 + x_5 = 812, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad (j = \overline{1,5})$

5. $F = 12x_1 + 9x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 48, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 100, \\ 4x_1 + 15x_2 + x_5 = 225, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad (j = \overline{1,5})$

6. $F = 10x_1 + 6x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 + x_3 = 187, \\ 7x_1 + 2x_2 + x_4 = 143, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 29, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad (j = \overline{1,5})$

7. $F = 20x_1 + 15x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + x_3 = 126, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 30, \\ 6x_1 + x_2 + x_5 = 120, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad (j = \overline{1,5})$

8. $F = 12x_1 + 10x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 125, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 83, \\ x_1 + 8x_2 + x_5 = 152, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad (j = \overline{1,5})$

9. $F = 30x_1 + 20x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 65, \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 70, \\ 7x_1 + 8x_2 + x_5 = 235, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad (j = \overline{1,5})$

10. $F = 9x_1 + 7x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 34, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_4 = 105, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_5 = 91, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad (j = \overline{1,5})$

Звіт про виконання лабораторної роботи №4.

Звіт про виконання лабораторної роботи має містити вихідні дані завдання для самостійного виконання, розв'язок та його інтерпретацію, висновки. Звіт необхідно зберегти за наступним форматом: ***Прізвище_Звіт_ЛР4.xlsx*** і здати на платформі Moodle, завантаживши у відповідне поле.

Лабораторна робота №5
Метод потенціалів розв’язання транспортних задач

Теоретичні відомості

Загальна постановка транспортної задачі полягає у визначенні оптимального плану перевезення деякого однорідного вантажу з m пунктів відправлення $A_1, A_2, ..., A_m$ в n пунктів призначення $B_1, B_2, ..., B_n$. При цьому, в якості критерію оптимальності, як правило, вибирають або мінімальну вартість перевезення усього вантажу, або мінімальний час доставки. Якщо через c_{ij} позначити тариф перевезення одиниці вантажу із i-го пункту відправлення у j-й пункт призначення, через a_i – запаси вантажу у i-му пункті відправлення, через b_j – потребу у вантажі в j-му пункті призначення, а через x_{ij} – кількість одиниць вантажу, що перевозиться із i-го пункту відправлення у j-й пункт призначення, то математичне формулювання транспортної задачі полягатиме у знаходженні мінімального значення функції

$$L = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}\ , \qquad (1)$$

при умовах

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1,n}), \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1,m}), \qquad (3)$$

$$x_{ij} \ge 0 \ (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}). \qquad (4)$$

Очевидно, що задача (1)-(4) є задачею лінійного програмування, а, отже, може бути розв’язана і симплекс-методом. Однак специфіка таких задач дозволяє будувати більш ефективні методи їх розв’язання.

Якщо загальна потреба у вантажі в пунктах призначення $\sum_{j=1}^{n} b_j$ дорівнює загальним запасам вантажів в пунктах відправлення $\sum_{i=1}^{m} a_i$: $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, то модель такої транспортної задачі називають *закритою*, у протилежному випадку – *відкритою*.

Для розв’язності транспортної задачі необхідно й досить, щоб вона була закритою. Якщо ж у моделі справедлива нерівність $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, то уводять фіктивний (n+1)-й пункт призначення з потребою $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ з нульовими тарифами перевезень: $c_{in+1} = 0$ $(i = \overline{1,m})$. У випадку, коли $\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i$, то вводять фіктивний (m+1)-й пункт відправлення із запасами $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ та тарифами перевезень: $c_{m+1j} = 0$ $(j = \overline{1,n})$.

Будь-який опорний план транспортної задачі має не більше ніж $n+m-1$ відмінних від нуля компонент. Якщо таких компонент дорівнює $n+m-1$, план є невиродженим, у протилежному випадку – виродженим.

Теорема. *Якщо для деякого опорного плану* $X^* = (x_{ij}^*)$ $(i = \overline{1,m},$ $j = \overline{1,n})$ *транспортної задачі існують такі числа* $u_1, u_2, ..., u_m$, $v_1, v_2, ..., v_n$, *що*

а) $u_i + v_j = c_{ij}$ *при* $x_{ij} > 0$ *(для заповнених клітинок)*

б) $u_i + v_j \le c_{ij}$ *при* $x_{ij} = 0$ *(для незаповнених клітинок)*

для усіх $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, *то* $X^* = (x_{ij}^*)$ *– оптимальний план транспортної задачі.*

Числа u_i і v_j $(i = \overline{1,m},$ $j = \overline{1,n})$ називають *потенціалами* відповідно пунктів призначення і пунктів відправлення.

Циклом в транспортній таблиці називають замкнену ламану лінію, усі вершини якої, крім однієї, розмішені у зайнятих клітинках, а сторони розміщені вздовж рядків чи стовпців, причому у кожній вершині зустрічаються лише дві сторони, одна з яких знаходиться в рядку, а інша – у стовпці.

Алгоритм методу потенціалів.

1. Визначають початковий опорний план, наприклад, одним із описаних вище методів.
2. Знаходять потенціали u_i та v_j так, щоб для кожної заповненої клітинки виконувалась умова: $\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) = 0$ або, що теж саме,

$u_i + v_j = c_{ij}$ $(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$. Оскільки система обмежень має $m+n-1$ рівнянь і $m+n$ невідомих, то одну із них можна задати довільно (наприклад, $u_1 = 0$), останні знаходимо виходячи з вказаної.

3. Визначають оцінки Δ_{ij} для незаповнених клітинок. Якщо для всіх цих клітинок виконується умова $\Delta_{ij} \geq 0$, то знайдено оптимальний план. Процес розв'язання транспортної задачі припиняють.

4. Якщо існують незаповнені клітинки, для яких $\Delta_{ij} < 0$, то можна перейти до нового опорного плану з меншою загальною вартістю перевезень. Для цього вибирають клітинку з найменшою від'ємною оцінкою (i_0, j_0): $\Delta_{i_0 j_0} = \min\limits_{(i,j):\Delta_{ij}<0} \{\Delta_{ij}\}$ та будують цикл так, щоб він включав одну незаповнену клітинку (i_0, j_0), а інші були заповненими. Далі клітинку (i_0, j_0) відмічають знаком „+", а інші вершини циклу почергово знаками „–" та „+". Потім аналізують клітинки циклу, які позначені знаком „–" та знаходять значення найменшого обсягу перевезень θ: $0 < \theta \leq \min\limits_{i,j:(i,j)^-} \{x_{ij}\}$. Після цього здійснюють перерозподіл вантажів, а саме значення обсягів перевезень, які знаходяться у клітинках зі знаком "+", збільшують на величину θ, а значення обсягів перевезень, що знаходяться у клітинках зі знаком "–", – зменшують на цю ж саму величину θ. У результаті клітинка (i_0, j_0) стане заповненою, а одна із раніше заповнених – порожньою.

5. Переходять до пункту 2. Процедуру повторюють поки не отримають оптимальний план перевезень.

Приклад 1. Знайти опорний план перевезень транспортної задачі.

$$a_i = (50; 20; 25),\ b_j = (20; 45; 25; 20),\ c_{ij} = \begin{pmatrix} 15 & 6 & 2 & 8 \\ 11 & 7 & 5 & 7 \\ 7 & 9 & 4 & 13 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Порівняємо загальні запаси вантажів у пунктах відправлення та потреби у пунктах призначення.

$$\sum\nolimits_{i=1}^{3} a_i = 50 + 20 + 25 = 95 < \sum\nolimits_{j=i}^{4} b_j = 20 + 45 + 25 + 20 = 110,$$

отже, задача є відкритою, тому для зведення до закритої введемо фіктивний пункт відправлення з запасами $a_4 = \sum_{j=i}^{4} b_j - \sum_{i=1}^{3} a_i = 110 - 95 = 15$. Далі будуємо початковий опорний план перевезень.

Метод північно-західного кута. Заповнення транспортної таблиці починаємо з її верхньої лівої клітинки (північно-західної). При цьому розподіляємо запас 1-го пункту відправлення, максимально задовольняючи 1-й пункт призначення, потім 2-й і т.д. до повного розподілу наявних запасів першого пункту відправлення. Аналогічно розподіляються запаси інших пунктів відправлення. Заповнення транспортної таблиці методом північно-західного кута продемонстровано в табл. 5, де порядок виконання кроків показаний числами обведеними колами.

Таблиця 5

Пункти відправлення	Пункти призначення				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	① 15 20	② 6 30	2	8	50
A_2	11	③ 7 15	④ 5 5	7	20
A_3	7	9	⑤ 4 20	⑥ 13 5	25
$A_4^{Ф}$	0	0	0	⑦ 0 15	15
Потреби	20	45	25	20	110

Метод мінімального елементу. Ідея методу полягає в тому, щоб у першу чергу забезпечити перевезення від тих пунктів відправлення і саме до таких пунктів призначення, де найменші транспортні витрати. Приклад реалізації методу представлений в табл. 6.

Метод подвійної переваги. Якщо таблиця тарифів перевезень велика, то перебір усіх елементів ускладнюється. В цьому випадку використовують метод подвійної переваги, суть якого полягає в наступному: в кожному стовпчику помічають значком „v” клітинку з найменшим значенням тарифу. Це ж саме виконують і для кожного рядка. В результаті деякі клітинки матимуть подвійну мітку „vv”. В них знаходиться мінімальна вартість перевезень як в

Таблиця 6

Пункти відправлення	Пункти призначення				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	15	② 6 25	① 2 25	8	50
A_2	11	③ 7 20	5	7	20
A_3	④ 7 20	9	⑦ 4 0	⑤ 13 5	25
A_4^{Φ}	0	0	0	⑥ 0 15	15
Потреби	20	45	25	20	110

стовпці, так і в рядку. Саме з цих клітинок і починають заповнювати транспортну таблицю. Далі заповнюють ті клітинки, які відмічені значком „v”. Решту таблиці перевезення заповнюють за найменшими тарифами. Приклад реалізації методу наведено у табл. 7.

Таблиця 7

Пункти відправлення	Пункти призначення				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	15	V 6 25 ②	VV 2 25 ①	8	50
A_2	11	7 0 ⑦	V 5	V 7 20 ③	20
A_3	V 7 20 ④	9 5 ⑤	V 4	13	25
A_4^{Φ}	0	0 15 ⑥	0	0	15
Потреби	20	45	25	20	110

Приклад 2. Знайти оптимальний план перевезень транспортної задачі

$$a_i = (50;20;25),\ b_j = (20;45;25;40),\ c_{ij} = \begin{pmatrix} 15 & 6 & 2 & 8 \\ 11 & 7 & 5 & 7 \\ 7 & 9 & 4 & 13 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання. 1. Перевіримо чи є задача закритою:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 50+20+25 = 95,\ \sum_{j=1}^{4} b_j = 20+45+25+20 = 110.$$

$\sum_{i=1}^{3} a_i < \sum_{j=1}^{4} b_j$, отже, транспортна задача відкрита. Для зведення її до закритої введемо фіктивний пункт відправлення A_4^{ϕ} із запасами вантажу $a_4 = \sum_{j=1}^{4} b_j - \sum_{i=1}^{3} a_i = 110 - 90 = 15$. Тарифи перевезень від цього пункту відправлення до всіх пунктів призначення кладемо рівними нулю.

2. Початковий опорний план перевезень будуємо методом подвійної переваги (табл.8).

Кількість заповнених клітинок дорівнює 6, тобто отримали вироджений опорний план. Тому записуємо нуль в одну із клітинок, але таким чином, щоб не можна було побудувати цикл перевезень (в даному випадку $c_{22} = 0$). Загальна вартість перевезень при цьому опорному плані буде рівною:

$$L = 25\cdot 6 + 25\cdot 2 + 0\cdot 7 + 20\cdot 7 + 20\cdot 7 + 5\cdot 9 + 15\cdot 0 = 525.$$

3. Перевіримо одержаний опорний план на оптимальність методом потенціалів. Складемо систему потенціалів для заповнених клітинок та знаходимо її розв'язок поклавши u_1=0:

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 6, & u_3 + v_1 = 7, \\ u_1 + v_3 = 2, & u_3 + v_2 = 9, \\ u_2 + v_2 = 7, & u_4 + v_2 = 0, \\ u_2 + v_4 = 7, & \end{cases} \quad \begin{cases} u_1 = 0, & v_1 = 4, \\ u_2 = 1, & v_2 = 6, \\ u_3 = 3, & v_3 = 2, \\ u_4 = -6, & v_4 = 6, \end{cases}$$

Таблиця 8

Пункти відправлення	Пункти призначення				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	15	V 6 25 ②	VV 2 25 ①	8	50
A_2	11	7 0 ⑦	V 5	V 7 20 ③	20
A_3	V 7 20 ④	9 5 ⑤	V 4	13	25
$A_4^{Ф}$	0	0 15 ⑥	0	0	15
Потреби	20	45	25	20	110

Перевіримо на оптимальність незаповнені клітинки табл. 8.

$$\Delta_{11} = c_{11} - (u_1 + v_1) = 15 - (0 + 4) = 11 > 0,$$

$$\Delta_{14} = c_{14} - (u_1 + v_4) = 8 - (0 + 6) = 2 > 0,$$

$$\Delta_{21}=c_{21}-(u_2+v_1)=11-(1+4)=6>0,$$
$$\Delta_{23}=c_{23}-(u_2+v_3)=5-(1+2)=2>0,$$
$$\Delta_{33}=c_{33}-(u_3+v_3)=4-(3+2)=-1<0,$$
$$\Delta_{34}=c_{34}-(u_3+v_4)=13-(3+6)=4>0,$$
$$\Delta_{41}=c_{41}-(u_4+v_1)=0-(-6+4)=2>0,$$
$$\Delta_{43}=c_{43}-(u_4+v_3)=0-(-6+2)=4>0,$$
$$\Delta_{44}=c_{44}-(u_4+v_4)=0-(-6+6)=0=0.$$

Для клітинки (3,3) умова оптимальності не виконується ($\Delta_{33}<0$). Тому переходимо до нового опорного плану шляхом побудови циклу перерозподілу вантажу(табл. 9).

Таблиця 9

Пункти відправлення	Пункти призначення				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	15	+ 6 25	– 2 25	8	50
A_2	11	7 0	5	7 20	20
A_3	7 20	9 5 –	4 +	13	25
$A_4^{Ф}$	0	0 15	0	0	15
Потреби	20	45	25	20	110

Мінімальну кількість вантажу, яку потрібно перерозподілити в циклі визначаємо серед клітинок позначених знаком “–“ з умови:

$$\theta=\min(x_{32},x_{13})=\min(5;25)=5\,.$$

До значень обсягів перевезення вантажів у клітинках із знаком “+“ додаємо 5 одиниць вантажу, а від значень обсягів перевезення вантажів у клітинках із знаком “–“ – віднімаємо 5 одиниць вантажу. В результаті отримаємо новий опорний план перевезень (табл. 10)

Складемо систему потенціалів для заповнених клітинок табл. 10.

$$\begin{array}{llll}
u_1+v_2=6, & u_3+v_1=7, & u_1=0, & v_1=5,\\
u_1+v_3=2, & u_3+v_3=4, & u_2=1, & v_2=6,\\
u_2+v_2=7, & u_4+v_2=0, & u_3=2, & v_3=2,\\
u_2+v_4=7, & & u_4=-6, & v_4=6.
\end{array}$$

Таблиця 10

Пункти відправлення	Пункти призначення				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	$\boxed{15}$	$\boxed{6}$ 30	$\boxed{2}$ 20	$\boxed{8}$	50
A_2	$\boxed{11}$	$\boxed{7}$ 0	$\boxed{5}$	$\boxed{7}$ 20	20
A_3	$\boxed{7}$ 20	$\boxed{9}$	$\boxed{4}$ 5	$\boxed{13}$	25
$A_4^Ф$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$ 15	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	15
Потреби	20	45	25	20	110

Перевіряємо на оптимальність незаповнені клітинки у табл. 10.

$$\Delta_{11} = c_{11} - (u_1 + v_1) = 15 - (0 + 5) = 10 > 0,$$
$$\Delta_{14} = c_{14} - (u_1 + v_4) = 8 - (0 + 6) = 2 > 0,$$
$$\Delta_{21} = c_{21} - (u_2 + v_1) = 11 - (1 + 5) = 5 > 0,$$
$$\Delta_{23} = c_{23} - (u_2 + v_3) = 5 - (1 + 2) = 2 > 0,$$
$$\Delta_{32} = c_{32} - (u_3 + v_2) = 9 - (2 + 6) = 1 > 0,$$
$$\Delta_{34} = c_{34} - (u_3 + v_4) = 13 - (2 + 6) = 5 > 0,$$
$$\Delta_{41} = c_{41} - (u_4 + v_1) = 0 - (-6 + 5) = 1 > 0,$$
$$\Delta_{43} = c_{43} - (u_4 + v_3) = 0 - (-6 + 2) = 4 > 0,$$
$$\Delta_{44} = c_{44} - (u_4 + v_4) = 0 - (-6 + 6) = 0 = 0.$$

Умови оптимальності виконується, отже, записаний у таблиці 10 опорний план перевезень є оптимальним. Загальна вартість перевезення за цим планом буде рівною:

$$L_{\min} = 30 \cdot 6 + 20 \cdot 2 + 0 \cdot 7 + 20 \cdot 7 + 20 \cdot 7 + 5 \cdot 4 + 15 \cdot 0 = 520 \text{ (гр.од.)}.$$

ЗАВДАННЯ

1. $a_i = (320; 220; 250)$,

   $b_j = (300; 300; 240; 280)$

   $$c_{ij} = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 8 & 5 \\ 6 & 7 & 11 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

2. $a_i = (290; 190; 210)$

   $b_j = (200; 220; 210; 180)$

   $$c_{ij} = \begin{pmatrix} 14 & 10 & 11 & 13 \\ 8 & 12 & 7 & 9 \\ 5 & 4 & 6 & 11 \end{pmatrix}$$

3. $a_i = (310; 230; 300)$

4. $a_i = (220; 160; 240)$

$b_j = (260;340;220;270)$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 12 & 6 \\ 7 & 9 & 10 & 8 \\ 5 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}$$

$b_j = (160;180;190;170)$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 & 9 \\ 4 & 5 & 8 & 3 \\ 7 & 6 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

5. $a_i = (260;180;200)$

$b_j = (180;160;210;180)$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 7 \\ 8 & 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

6. $a_i = (240;160;210)$

$b_j = (195;175;200;180)$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

7. $a_i = (250;180;200)$

$b_j = (220;180;165;195)$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 & 2 \\ 7 & 5 & 9 & 6 \\ 3 & 6 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

8. $a_i = (260;220;180)$

$b_j = (190;210;185;140)$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 11 & 8 & 7 & 9 \\ 6 & 4 & 2 & 6 \\ 7 & 5 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

9. $a_i = (230;210;160)$

$b_j = (160;190;200;170)$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 8 & 4 \\ 5 & 9 & 11 & 6 \end{pmatrix}$$

10. $a_i = (400;200;300)$

$b_j = (350;300;450;310)$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 & 3 \\ 6 & 10 & 2 & 11 \\ 7 & 5 & 4 & 15 \end{pmatrix}$$

Звіт про виконання лабораторної роботи №5.

Звіт про виконання лабораторної роботи має містити вихідні дані завдання для самостійного виконання, розв’язок та його інтерпретацію, висновки. Звіт необхідно зберегти за наступним форматом: ***Прізвище_Звіт_ЛР5.xlsx*** і здати на платформі Moodle, завантаживши у відповідне поле.

Лабораторна робота №6
Метод потенціалів розв'язання транспортних задач з обмеженням пропускної спроможності комунікацій

ТЗЛП з обмеженими пропускними спроможностями (ТЗЛПО) будемо називати ЗЛП вигляду:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min\,; \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\quad i=1,\dots,m\,, \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\quad j=1,\dots,n\,, \qquad (3)$$

$$0 \le x_{ij} \le r_{ij},\quad i=1,\dots,m,\quad j=1,\dots,n\,. \qquad (4)$$

Означення. *Допустимий розв'язок* $X = \| x_{ij} \|$, *i=1,...,m, j=1,...,n, ТЗЛПО називається базисним, якщо його перевезенням* x_{ij}, *таким, що* $0 < x_{ij} < r_{ij}$, *відповідає система лінійно незалежних векторів умов* A_{ij}. *Якщо число перевезень* x_{ij}: $0 < x_{ij} < r_{ij}$, *дорівнює m+n–1, то базисний розв'язок X називається невиродженим, якщо ж число таких компонент менше ніж m+n–1, то – виродженим.*

Теорема. (двоїстий критерій оптимальності для ТЗЛПО). *Базисний розв'язок* $X = \| x_{ij} \|$, *i=1,...,m, j=1,...,n, оптимальний тоді і лише тоді, коли існують потенціали* u_i, *i=1,...,m,* v_j, *j=1,...,n, такі, що для симплекс-різниць*

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - (v_j - u_i)$$

виконуються співвідношення

$\Delta_{ij} = 0$, *якщо* x_{ij} *– базисне* ($0 < x_{ij} < r_{ij}$),

$\Delta_{ij} \ge 0$, *якщо* x_{ij} *– небазисне та* $x_{ij} = 0$,

$\Delta_{ij} \le 0$, *якщо* x_{ij} *– небазисне та* $x_{ij} = r_{ij}$.

Метод потенціалів розв'язування ТЗЛПО:

1. Нехай є відомим початковий базисний розв'язок *ТЗЛПО*. Зауважимо, що на відміну від звичайної *ТЗЛП* цей розв'язок може і не існувати, наприклад, якщо для деякого i виконується нерівність

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ij} < a_i .$$

2. Знаходимо потенціали u_i та v_j як розв'язок системи

$$(v_j - u_i) = c_{ij} ,$$

(i, j): x_{ij} – базисне перевезення, що містить $m+n$–1 рівнянь та $m+n$ невідомих. Покладаючи один із потенціалів рівним, наприклад, 0, знаходимо решту невідомих.

Зрозуміло, що при цьому симплекс-різниці Δ_{ij} для базисних змінних рівні 0, тобто виконується перша умова сформульованого вище критерію оптимальності для *ТЗЛПО*. Якщо при цьому виконуються друга та третя умови цього критерію, то базисний розв'язок $X = \| x_{ij} \|$, i=1,...,m, j=1,...,n, є оптимальним розв'язком *ТЗЛПО*. Інакше базисний розв'язок X можна поліпшити на наступному кроці.

3.1. Нехай існує клітинка (i_0, j_0) така, що $x_{i_0 j_0} = 0$, $\Delta_{i_0 j_0} < 0$.

Як і у звичайній *ТЗЛП*, будуємо цикл **C**, що відповідає клітинці (i_0, j_0) , розбиваємо його на додатний C^+ та від'ємний C^- півцикли.

Знаходимо

$$\theta' = \min_{i,j:(i,j)\in C^-} x_{ij} , \quad \theta'' = \min_{i,j:(i,j)\in C^+} (r_{ij} - x_{ij}) , \quad \theta = \min\{\theta', \theta''\} .$$

Зрозуміло, що у невиродженому випадку $\theta > 0$. Будуємо новий розв'язок $X' = \| x'_{ij} \|$, i=1,...,m, j=1,...,n, згідно співвідношень

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} \ , & \textit{якщо} \ \ (i,j) \notin C \\ x_{ij} + \theta, & \textit{якщо} \ \ (i,j) \in C^+ \\ x_{ij} - \theta, & \textit{якщо} \ \ (i,j) \in C^- \end{cases}$$

При цьому $L(X') = L(X) + \theta\Delta_{i0\,j0}$, тобто $L(X') < L(X)$ у невиродженому випадку.

3.2. Нехай існує клітинка (i_0, j_0) така, що $x_{i_0 j_0} = r_{i_0 j_0}$, $\Delta_{i_0 j_0} > 0$. Як і раніше будуємо цикл **C**, що відповідає клітинці (i_0, j_0) , розбиваємо його на додатний C^+ та від'ємний C^- півцикли, включаючи на цей раз клітинку (i_0, j_0) до C^- . Знаходимо

$$\theta' = \min_{i,j:(i,j)\in C^-} x_{ij}, \quad \theta'' = \min_{i,j:(i,j)\in C^+} (r_{ij} - x_{ij}), \quad \theta = \min\{\theta', \theta''\}.$$

Зрозуміло, що у невиродженому випадку $\theta > 0$. Будується новий допустимий розв'язок аналогічно до попереднього випадку, при цьому

$$L(X') = L(X) - \theta\Delta_{i0\,j0}$$

тобто у невиродженому випадку знову забезпечується зменшення цільової функції.

Після цього повертаємося до виконання пункту 2. Зауважимо, що у випадку виродженого базисного розв'язку до числа базисних включаються клітинки, де $x_{ij} = 0$ або $x_{ij} = r_{ij}$, але так, щоб у сукупності всі базисні клітинки не утворювали циклу.

Пошук *початкового базисного розв'язку ТЗЛПО* (якщо він існує).

І етап.

1) Знаходимо мінімальний елемент $c_{i_1 j_1}$ матриці $C = \| c_{ij} \|$, $i=1,...,m$, $j=1,...,n$.

2) Обчислюємо $x_{i_1 j_1} = \min\{a_{i_1}, b_{i_1}, r_{i_1 j_1}\}$. При цьому можливі три випадки:

а) $x_{i_1 j_1} = a_{i_1}$. Покладемо $x_{i_1 j} = 0,\ j \neq j_1$, рядок i_1 матриці C з подальшого розгляду вилучається;

б) $x_{i_1 j_1} = b_{j_1}$. Покладемо $x_{ij_1} = 0,\ i \neq i_1$, стовпець j_1 матриці C надалі не розглядається;

в) $x_{i_1 j_1} = r_{i_1 j_1}$ ($r_{i_1 j_1} < a_{i_1}$, $r_{i_1 j_1} < b_{j_1}$). У цьому випадку з подальшого розгляду вилучається лише елемент $c_{i_1 j_1}$ матриці C.

3) Покладемо $a_{i_1} = a_{i_1} - x_{i_1 j_1}$, $b_{j_1} = b_{j_1} - x_{i_1 j_1}$.

Подальші кроки цього етапу полягають у виконанні дій 1, 2, 3 стосовно не викреслених елементів матриці C і продовжуються до остаточного заповнення транспортної таблиці.

В результаті одержимо матрицю $X = \| x_{ij} \|$, $i=1,...,m$, $j=1,...,n$. За побудовою маємо:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq b_j, \quad 0 \leq x_{ij} \leq r_{ij}, \quad i=1,...,m, \quad j=1,...,n$$

Нехай $x_{i,n+1} = a_i - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$, $\quad i = 1,...,m,$ $\quad x_{m+1,j} = b_j - \sum_{i=1}^{m} x_{ij}$, $j = 1,...,n$.

Якщо $x_{i,n+1} = x_{m+1,j} = 0$, i=1,...,m, j=1,...,n, то, очевидно, X є допустимим розв'язком *ТЗЛПО*. Інакше $\sum_{i=1}^{m} x_{i,n+1} = \sum_{j=1}^{n} x_{m+1,j} = \omega > 0$ і для одержання початкового допустимого розв'язку слід провести на другому етапі декілька ітерацій методу потенціалів для допоміжної розширеної *ТЗЛПО*.

II етап. Розширена *ТЗЛПО* наведена в таблиці 1.

Таблиця 1.

	Q_1	Q_2	…	Q_n	Q_{n+1}	a_i
P_1					M x_{ij} ∞	a_1
P_2						a_2
…			c_{ij} x_{ij} r_{ij}			…
P_m					M $x_{m,n+1}$ ∞	a_m
P_{m+1}	M $x_{m+1,1}$ ∞	M $x_{m+1,2}$ ∞		M $x_{m+1,n}$ ∞	0 $x_{m+1,n+1}$ ∞	a_{m+1}=ω
b_j	b_1	b_2	…	b_n		

Тут M – число, більше будь-якої фіксованої величини, з якою його прийдеться порівнювати при розв'язуванні задачі. Матриця $\overline{X} = \| x_{ij} \|$, i=1,...,m+1, j=1,...,n+1, де x_{ij} – перевезення, знайдені на першому етапі, $x_{m+1,n+1} = 0$, очевидно, є допустимим розв'язком розширеної *ТЗЛПО*.

Застосовуючи до цієї задачі метод потенціалів, знаходимо її розв'язок $\overline{X}^*$. При цьому $x^*_{m+1,n+1} = \omega$ або $x^*_{m+1,n+1} < \omega$. Можна показати, що у першому випадку перевезення між пунктами P_i та Q_j, i=1,...,m, j=1,...,n, одержаного розв'язку $\overline{X}^*$ утворюють початковий базисний розв`язок вихідної *ТЗЛПО*, а у другому випадку вихідна *ТЗЛПО* не має жодного допустимого розв'язку. Зауважимо, що другий етап можна закінчити при . $x_{m+1,n+1}=\omega$.

Приклад. Розв’язати транспортну задачу з обмеженнями.

Таблиця 2.

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	a_i
P_1	1 3 3	4 1	2 2 2	5 1	6
P_2	2 1	1 1 1	4 1	1 2 2	3
P_3	3 1 2	2 1 1	1 1 1	3 1	3
b_j	4	2	4	2	12

Перший етап знаходження початкового базисного розв'язку *ТЗЛПО* ілюструється таблицею 2 (у нижньому лівому кутові клітинок транспортної таблиці записуються величини r_{ij}). На перших трьох кроках викреслюються відповідно елементи c_{11}, c_{22} та c_{33} матриці *C*, на четвертому – другий рядок та четвертий стовпець, на п'ятому – другий стовпець, на шостому – елемент c_{13}, на сьомому – перший стовпець та третій рядок. Бачимо, що отримали недопустимий розв’язок, але він є базисним.

Отже переходимо до *другого етапу*. Розширена *ТЗЛПО* наведена в таблиці 3.

Як бачимо, лише три перевезення $\overline{x}_{15}$, $\overline{x}_{31}$, $\overline{x}_{43}$ задовольняють умову $0<\overline{x}_{ij}<r_{ij}$, тобто є базисними. Доповнюємо їх необхідною кількістю перевезень $\overline{x}_{ij}=0$ та $\overline{x}_{ij}=r_{ij}$, які розглядаємо як базисні (загальна кількість базисних змінних – 8). Зауважимо, що до числа базисних слід вводити в першу чергу клітинки, які пов'язані з фіктивними пунктами. У таблиці 3 базисні змінні виділено курсивом.

Таблиця 3.

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	a_i
P_1	1 3 3	4 1	2 2 2	5 ***0*** 1	M ***1*** ∞	6
P_2	2 1	1 1 1	4 1	1 ***2*** 2	M ∞	3
P_3	3 ***1*** 2	2 ***1*** 1	1 1 1	3 1	M ∞	3
P_4	M ***0*** ∞	M ∞	M ***1*** ∞	M ∞	0 ***0*** ∞	1
b_j	4	2	4	2	1	12

Знаходимо потенціали u_i та v_j так, щоб для базисних клітинок виконувалась умова $v_j - u_i = c_{ij}$, і заносимо їх у табл. 4.

Таблиця 4.

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	a_i	u_i
P_1	1 3 3	4 1	2 2 + 2	5 ***0*** 1	M ***1*** ∞ –	6	0
P_2	2 1	1 1 1	4 1	1 ***2*** 2	M ∞	3	4
P_3	3 ***1*** 2 +	2 ***1*** 1 –	1 1 1	3 1	M ∞	3	$2M$–3
P_4	M ***0*** ∞ –	M ∞	M ***1*** ∞	M ∞	0 ***0*** ∞ +	1	M
b_j	4	2	4	2	1	12	
v_j	$2M$	$2M$–1	$2M$	5	M		

Обчислюємо симплекс-різниці $\Delta_{ij} = c_{ij} - (v_j - u_i)$ для небазисних змінних $\bar{x}_{ij}$ і записуємо їх заради зручності в окрему матрицю (звичайно вони заносяться у верхні ліві кути клітинок транспортної таблиці):

$$\begin{Vmatrix} 1-2M & 5-2M & 2-2M & 0 & 0 \\ 6-2M & 6-2M & 8-2M & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2M-5 & 2M-3 \\ 0 & 1 & 0 & 2M-5 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Аналізуючи одержані Δ_{ij}, приходимо до висновку, що для небазисних r-клітинок ($\overline{x}_{ij} = r_{ij}$) (1,1), (1,3), (2,2), (3,3) критерій оптимальності ($\Delta_{ij} \le 0$) виконується, якщо M – досить велике число. Для небазисних 0-клітинок ($\overline{x}_{ij} = 0$) (1,2), (2,1), (2,3) критерій оптимальності ($\Delta_{ij} \ge 0$) не виконується. Одну з них слід увести до числа базисних. Як і в звичайній *ТЗЛП* до числа базисних уводиться небазисна змінна з мінімальною симплекс-різницею. Уведемо до числа базисних змінну $\overline{x}_{23}$. Для цього методом викреслювання будуємо цикл, що відповідає клітинці (2,3) (див. табл. 4).

Очевидно, що має місце випадок 3.1 описаного вище алгоритму.

Позначаючи клітинки циклу знаками "+" та "–", як показано в таблиці, знаходимо $\theta' = \min(1,1,2) = 1$, $\theta'' = \min(1-0, 1-0, \infty - 0) = 1$, $\theta = \min(1,1) = 1$.

Тепер перераховуємо $\overline{X}$ в $\overline{X}'$ згідно відповідних формул п. 3.1 алгоритму. Допустимий розв'язок $\overline{X}'$ буде мати вигляд

$$\begin{Vmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Оскільки $\overline{x}_{45} = 1 = \omega$, то початковий базисний розв'язок вихідної *ТЗЛПО* має вигляд

$$X = \begin{Vmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Далі вихідна *ТЗЛПО* розв'язується методом потенціалів. Пропускаючи відповідні обчислення, вкажемо, що її оптимальний розв'язок задається матрицею

$$X^* = \left\| \begin{matrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

При цьому транспортні витрати складають $L(X^*) = 23$.

ЗАВДАННЯ

1. $a_i = (320; 220; 250; 330)$, $b_j = (300; 300; 240; 280)$,

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 8 & 5 \\ 6 & 7 & 11 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 8 \\ 5 & 12 & 7 & 9 \end{pmatrix}; \quad r_{ij} = \begin{pmatrix} 100 & 40 & 50 & 140 \\ 90 & 80 & 120 & 30 \\ 60 & 110 & 60 & 60 \\ 50 & 90 & 70 & 150 \end{pmatrix}$$

2. $a_i = (290; 190; 210; 120)$, $b_j = (200; 220; 210; 180)$,

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 14 & 10 & 11 & 13 \\ 8 & 12 & 7 & 9 \\ 5 & 4 & 6 & 11 \\ 9 & 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}; \quad r_{ij} = \begin{pmatrix} 50 & 70 & 50 & 120 \\ 80 & 80 & 30 & 50 \\ 60 & 60 & 60 & 50 \\ 40 & 90 & 70 & 20 \end{pmatrix}$$

3. $a_i = (310; 230; 300; 250)$, $b_j = (260; 340; 220; 270)$,

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 12 & 6 \\ 7 & 9 & 10 & 8 \\ 5 & 13 & 14 & 15 \\ 9 & 12 & 9 & 13 \end{pmatrix}; \quad r_{ij} = \begin{pmatrix} 80 & 90 & 150 & 40 \\ 100 & 80 & 20 & 50 \\ 70 & 110 & 60 & 70 \\ 30 & 60 & 70 & 120 \end{pmatrix}$$

4. $a_i = (220; 160; 240; 80)$, $b_j = (160; 180; 190; 170)$,

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 & 9 \\ 4 & 5 & 8 & 3 \\ 7 & 6 & 4 & 10 \\ 5 & 9 & 6 & 8 \end{pmatrix}; \quad r_{ij} = \begin{pmatrix} 60 & 40 & 50 & 90 \\ 80 & 80 & 40 & 30 \\ 60 & 70 & 60 & 60 \\ 40 & 60 & 40 & 50 \end{pmatrix}$$

5. $a_i = (260; 180; 200; 90)$, $b_j = (180; 160; 210; 180)$,

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 7 \\ 8 & 2 & 5 & 9 \\ 6 & 5 & 4 & 8 \end{pmatrix}; \quad r_{ij} = \begin{pmatrix} 80 & 70 & 50 & 90 \\ 60 & 80 & 20 & 30 \\ 30 & 60 & 80 & 70 \\ 40 & 20 & 60 & 20 \end{pmatrix}$$

6. $a_i = (240;160;210;140)$, $b_j = (195;175;200;180)$,

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 3 & 5 \\ 9 & 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}; \quad r_{ij} = \begin{pmatrix} 80 & 70 & 50 & 60 \\ 90 & 80 & 50 & 20 \\ 70 & 50 & 60 & 70 \\ 30 & 60 & 80 & 50 \end{pmatrix}$$

7. $a_i = (250;180;200;130)$, $b_j = (220;180;165;195)$,

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 & 2 \\ 7 & 5 & 9 & 6 \\ 3 & 6 & 6 & 10 \\ 5 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}; \quad r_{ij} = \begin{pmatrix} 90 & 60 & 50 & 70 \\ 80 & 80 & 120 & 30 \\ 30 & 110 & 60 & 60 \\ 40 & 90 & 70 & 50 \end{pmatrix}$$

8. $a_i = (260;220;180;65)$, $b_j = (190;210;185;140)$,

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 11 & 8 & 7 & 9 \\ 6 & 4 & 2 & 6 \\ 7 & 5 & 10 & 8 \\ 10 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}; \quad r_{ij} = \begin{pmatrix} 60 & 70 & 20 & 150 \\ 80 & 80 & 40 & 40 \\ 60 & 50 & 100 & 50 \\ 40 & 40 & 90 & 20 \end{pmatrix}$$

9. $a_i = (230;210;160;120)$, $b_j = (160;190;200;170)$,

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 8 & 4 \\ 5 & 9 & 11 & 6 \\ 9 & 8 & 10 & 7 \end{pmatrix}; \quad r_{ij} = \begin{pmatrix} 80 & 50 & 150 & 60 \\ 70 & 80 & 20 & 50 \\ 60 & 110 & 60 & 70 \\ 30 & 60 & 70 & 30 \end{pmatrix}$$

10. $a_i = (400;200;300;510)$, $b_j = (350;300;450;310)$,

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 & 3 \\ 6 & 10 & 2 & 11 \\ 7 & 5 & 4 & 15 \\ 8 & 9 & 7 & 12 \end{pmatrix}; \quad r_{ij} = \begin{pmatrix} 100 & 40 & 220 & 80 \\ 80 & 80 & 120 & 30 \\ 90 & 110 & 80 & 90 \\ 160 & 90 & 170 & 160 \end{pmatrix}$$

Звіт про виконання лабораторної роботи №6.

Звіт про виконання лабораторної роботи має містити вихідні дані завдання для самостійного виконання, розв'язок та його інтерпретацію, висновки. Звіт необхідно зберегти за наступним форматом: ***Прізвище_Звіт_ЛР6.xlsx*** і здати на платформі Moodle, завантаживши у відповідне поле.

Лабораторна робота №7
Метод Гоморі розв'язання задач цілочислового програмування

Теоретичні відомості

Задача цілочислового програмування формулюється так: знайти мінімальне значення лінійної функції

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n\,, \qquad (1)$$

при умовах
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ..... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0 \; (j = \overline{1,n})\,, \qquad (3)$$

$$x_j - \text{цілі } (j = \overline{1,n_1};\, n_1 \leq n). \qquad (4)$$

Такі задачі виникають тоді, коли невідомі величини означають кількість одиниць неподільної продукції, наприклад, розподіл виробничих задач між підприємствами, розкрій матеріалів, завантаження обладнання, розподіл літаків за рейсами та інші.

Для розв'язання задач цілочислового програмування застосовують спеціальні методи. Існує декілька таких методів, з яких найбільш відомим є метод Гоморі.

Реалізується метод Гоморі наступним алгоритмом.

1. Розв'язують задачу (1)–(3) симплекс-методом без урахування вимоги цілочисловості значень невідомих. Якщо одержано цілочисловий оптимальний план, то він є і оптимальним планом вихідної задачі (1)–(4) і на цьому процес розв'язування припиняють.
2. Якщо оптимальний план задачі (1)–(3) не є цілочисловим, то складають додаткове обмеження, яке відтинає від множини планів цієї задачі частину області, у якій немає планів задачі (1)–(3), але є знайдений оптимальний план задачі (1)–(3). Для цього серед тих компонент оптимального плану задачі (1)–(3), які в оптимальному плані вихідної задачі (1)–(4) мають бути цілочисловими, виділяють ту з них, що має найбільшу дробову частину. Нехай це b_l. Тоді додаткове обмеження матиме вигляд

$$-\{a_{l1}\}x_1 - \{a_{l2}\}x_2 - ... - \{a_{ln}\}x_n + x_{n+1} = -\{b_l\}\,,$$

де через $\{a_{lj}\}$ $(j=\overline{1,n})$, $\{b_l\}$ позначені дробові частини відповідних чисел (нагадаємо, якщо через $[a_{lj}],[b_l]$ позначити цілі частини відповідних чисел, то справедливими будуть рівності $a_{lj}=[a_{lj}]+\{a_{lj}\}$, $b_l=[b_l]+\{b_l\}$, де $\{a_{lj}\}\geq 0$, $\{b_l\}\geq 0$).

3. Задачу (1)–(3), доповнену додатковим обмеженням, продовжують розв'язувати двоїстим симплекс-методом. Якщо у результаті буде знайдено цілочисловий оптимальний план, то він і буде шуканим оптимальним планом задачі (1)–(4). Процес розв'язання припиняють.

4. У протилежному випадку складають нове додаткове обмеження і продовжують розв'язувати задачу двоїстим симплекс-методом.

5. Процес складання додаткових обмежень і розв'язання одержаних при цьому задач лінійного програмування продовжують доти, поки не одержать цілочисловий розв'язок або не виявиться, що задача є нерозв'язною.

Приклад 1. Знайти розв'язок задачі

$$L=x_1-x_2-3x_3\to\min$$

$$\begin{cases}2x_1-x_2+x_3\leq 1,\\ -4x_1+2x_2-x_3\leq 2,\\ 3x_1+x_3\leq 5,\end{cases}$$

$$x_j\geq 0,\ x_j-\text{цілі}\ (j=\overline{1,3})$$

Розв'язання. В табл. 1 наведено знайдений оптимальний план задачі $X'=\{1/3;11/3;4\}$ без урахування вимоги цілочисловості.

В одержаному розв'язку змінні x_1, x_2 – дробові. Складемо додаткове обмеження і продовжимо процес до отримання цілочислового розв'язку. Додаткове обмеження складемо для $x_2=11/3$, що має найбільшу дробову частину:

$\{b_2\}=b_2-[b_2]=11/3-3=2/3;$ $\qquad\{a_{21}\}=\{a_{22}\}=\{x_{23}\}=0;$

$\{a_{24}\}=a_{24}-[a_{24}]=-1/3-(-1)=2/3;$ $\quad\{a_{25}\}=a_{25}-[a_{25}]=1/3-0=1/3;$

$\{a_{26}\}=a_{26}-[a_{26}]=2/3-0=2/3;$

$$-0\cdot x_1-0\cdot x_2-0\cdot x_3-2/3x_4-1/3x_5-2/3x_6+x_7=-2/3\,.$$

Допишемо коефіцієнти цього рівняння до останньої симплекс-таблиці та введемо в базис додаткових вектор P_7, компоненти якого записані в останньому стовпчику таблиці.

Таблиця 1

№	Базис	$c_{баз}$	P_0	1	-1	-3	0	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
1	P_3	–3	4	0	0	1	2	1	0	0
	P_2	–1	11/3	0	1	0	–1/3	1/3	2/3	0
	P_1	1	1/3	1	0	0	–2/3	–1/3	1/3	0
	Δ_j		–46/3	0	0	0	–19/3	–11/3	–1/3	0
	P_7	0	–2/3	0	0	0	–2/3	–1/3	$\boxed{-2/3}$	1
2	P_3	–3	4	0	0	1	2	1	0	0
	P_2	–1	3	0	1	0	–1	0	0	1
	P_1	1	0	1	0	0	–1	–1/2	0	1/2
	P_6	0	1	0	0	0	1	1/2	1	–3/2
	Δ_j		–15	0	0	0	–6	–7/2	0	–1/2

Застосовуючи алгоритм двоїстого симплекс-методу, проводимо одну ітерацію та отримуємо у результаті оптимальний цілочисловий розв'язок вихідної задачі X=(0;3;4) при якому $L_{\min} = -15$.

ЗАВДАННЯ. Знайти цілочисловий розв'язок задачі лінійного програмування, якщо остання симплекс таблиця має вигляд

1. $F = 2x_1 + 3x_2 - x_4 \to \max$;

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_4 + x_5 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 18, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_4 + x_6 = 24, \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

B	c_0	P_0	2	3	0	-1	0	0	θ_{ij}
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_5	0	254/11	0	0	-5/11	21/11	1	7/11	
P_1	2	6/11	1	0	3/11	-17/11	0	-2/11	
P_2	3	90/11	0	1	1/11	9/11	0	3/11	
Δ_j		282/11	0	0	9/11	4/11	0	5/11	

2. $F = x_1 + 3x_2 - 5x_4 \to \max$;

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 28, \\ -3x_1 + 5x_2 - 3x_4 + x_5 = 30, \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_4 + x_6 = 32, \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

B	c_0	P_0	1	3	0	-5	0	0	θ_{ij}
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_1	1	10/11	1	0	5/22	1	-2/11	0	
P_2	3	72/11	0	1	3/22	0	1/11	0	
P_6	0	456/11	0	0	-7/11	4	10/11	1	
Δ_j		226/11	0	0	7/11	6	1/11	0	

3. $F = x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_5 - x_6 \to \min$;

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 + 4x_5 - 2x_6 = 2, \\ x_2 - 3x_4 - x_5 + 2x_6 = 4, \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 6, \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

B	c_0	P_0	1	-1	3	0	2	-1	θ_{ij}
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_4	0	7/2	1/4	0	1/2	1	3/2	0	
P_2	-1	19/2	5/4	1	1/2	0	9/2	0	
P_6	-1	5/2	-1/4	0	1/2	0	-1/2	1	
Δ_j		-12	-2	0	-4	0	-6	0	

4. $F = -x_1 + 3x_2 - 2x_3 \to \min$;

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - 2x_3 \leq 5, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 3, \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 \leq 5, \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

B	c_0	P_0	-1	3	-2	0	0	0	θ_{ij}
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_4	0	71/10	0	-31/10	0	1	1/5	3/10	
P_1	-1	13/10	1	-13/10	0	0	3/5	-1/10	
P_3	-2	2/5	0	-2/5	1	0	-1/5	1/5	
Δ_j		-21/10	0	-9/10	0	0	-1/5	-3/10	

5. $F = 3x_1 + 2x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 13, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 6, \\ -3x_1 + x_2 + x_5 = 9, \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

B	c_0	P_0	3	2	0	0	0	θ_{ij}
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_6	
P_2	2	7/2	0	1	1/2	-1/2	0	
P_1	3	19/2	1	0	1/2	1/2	0	
P_5	0	34	0	0	1	2	1	
Δ_j		71/2	0	0	5/2	1/2	0	

6. $F = x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max$;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 - x_2 \ge 4, \\ x_1 + x_2 \ge 6, \end{cases}$$
$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

B	c_0	P_0	1	1	2	0	0	θ_{ij}
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
P_3	2	8/3	0	0	1	1/3	2/3	
P_1	1	14/3	1	0	0	-2/3	-1/3	
P_2	1	2/3	0	1	0	1/3	-1/3	
Δ_j		32/3	0	0	0	1/3	2/3	

7. $F = 2x_1 + 3x_2 - x_4 \to \max$;

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_4 + x_5 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 18, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_4 + x_6 = 24, \end{cases}$$
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0$

B	c_0	P_0	2	3	0	-1	0	0	θ_{ij}
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_5	0	254/11	0	0	-5/11	21/11	1	7/11	
P_1	2	6/11	1	0	3/11	-17/11	0	-2/11	
P_2	3	90/11	0	1	1/11	9/11	0	3/11	
Δ_j		282/11	0	0	9/11	4/11	0	5/11	

8. $F = x_1 + 3x_2 - 5x_4 \to \max$;

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 28, \\ -3x_1 + 5x_2 - 3x_4 + x_5 = 30, \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_4 + x_6 = 32, \end{cases}$$
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0$

B	c_0	P_0	1	3	0	-5	0	0	θ_{ij}
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_1	1	10/11	1	0	5/22	1	-2/11	0	
P_2	3	72/11	0	1	3/22	0	1/11	0	
P_6	0	456/11	0	0	-7/11	4	10/11	1	
Δ_j		226/11	0	0	7/11	6	1/11	0	

9. $F = x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_5 - x_6 \to \min$;

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 + 4x_5 - 2x_6 = 2, \\ x_2 - 3x_4 - x_5 + 2x_6 = 4, \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 6, \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

B	c_0	P_0	1	-1	3	0	2	-1	θ_{ij}
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_4	0	7/2	1/4	0	1/2	1	3/2	0	
P_2	-1	19/2	5/4	1	1/2	0	9/2	0	
P_6	-1	5/2	-1/4	0	1/2	0	-1/2	1	
Δ_j		-12	-2	0	-4	0	-6	0	

10. $F = -x_1 + 3x_2 - 2x_3 \to \min$;

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - 2x_3 \leq 5, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 3, \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 \leq 5, \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

B	c_0	P_0	-1	3	-2	0	0	0	θ_{ij}
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_4	0	71/10	0	-31/10	0	1	1/5	3/10	
P_1	-1	13/10	1	-13/10	0	0	3/5	-1/10	
P_3	-2	2/5	0	-2/5	1	0	-1/5	1/5	
Δ_j		-21/10	0	-9/10	0	0	-1/5	-3/10	

Звіт про виконання лабораторної роботи №7.

Звіт про виконання лабораторної роботи має містити вихідні дані завдання для самостійного виконання, розв’язок та його інтерпретацію, висновки. Звіт необхідно зберегти за наступним форматом: ***Прізвище_Звіт_ЛР7.xlsx*** і здати на платформі Moodle, завантаживши у відповідне поле.

Лабораторна робота №8
Метод Форда-Фалкерсона розв'язання задач про максимальний потік

Теоретичні відомості

Розглянемо мережу, що визначається графом g, який має єдине джерело s, єдиний витік t та означену на множині U функцію пропускної спроможності r_{ij}. Нехай інтенсивність джерела $d_s = d$. За теоремою існування потоку на мережі інтенсивність стоку має бути рівною $d_t = -d$. Допустимий потік для розглядуваної мережі визначається співвідношеннями:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j:(s,j)\in U} x_{sj} = d, \\ \sum\limits_{j:(i,j)\in U} x_{ij} - \sum\limits_{k:(k,i)\in U} x_{ki} = 0, i \neq s, i \neq t, \\ -\sum\limits_{k:(k,t)\in U} x_{kt} = -d, \\ 0 \leq x_{ij} \leq r_{ij}, (i,j)\in U. \end{cases} \tag{1}$$

Задача про максимальний потік полягає у знаходженні максимального значення інтенсивності d, при якому в розглядуваній мережі існує потік. Потік $x^* = \{x_{ij}^* : (i,j)\in U\}$, *що відповідає максимальному значенню* d^* *інтенсивності, називається максимальним потоком, а* d^* *– величиною цього потоку.*

Розрізом мережі, що відокремлює s від t, називається множина дуг $U(C) = \{(i,j)\in U : i\in C, j\notin C\}$, де C – деяка множина вершин ($C \subset I$) мережі, така, що $s\in C, t\notin C$. Пропускна спроможність цього розрізу визначається звичайним чином:

$$r(C) = \sum_{(i,j)\in U(C)} r_{ij} .$$

Розріз, що має найменшу пропускну спроможність, називається мінімальним. Задача пошуку такого розрізу називається задачею про мінімальний розріз.

Виявляється, що сформульовані задачі є двоїстими і, як слід чекати, їх розв'язки тісно пов'язані між собою.

Теорема. (Форда-Фалкерсона). *Величина максимального потоку із s в t дорівнює пропускній спроможності мінімального* *розрізу, що відокремлює s від t.*

Наслідок. *Якщо дуга (i,j) входить до мінімального розрізу, то величина максимального потоку по цій дузі дорівнює її пропускній спроможності* r_{ij}. *При цьому кажуть, що потік насичує дугу.*

Алгоритм методу Форда-Фалкерсона.

<u>*Крок 1*</u> *(процес розставлення позначок)*. На цьому кроці кожна з вершин належить до одного з трьох типів:

– непозначена,
– позначена і непроглянута,
– позначена і проглянута.

Спочатку всі вершини непозначені.

Позначимо вершину *s* позначкою $\mu(s)=(+s,\theta_s=\infty)$, що означає: можна послати потік з вершини *s* у саму себе необмеженої величини. Тепер вершина *s* позначена і непроглянута.

Взагалі, нехай *j* – позначена і непроглянута вершина, $\mu(j)=(+i,\theta_j)$ або $\mu(j)=(-i,\theta_j)$ – її позначка. Розглядаємо ще непозначені вершини *k*: $(j,k)\in U$ і $x_{jk}<r_{jk}$. Кожній з таких вершин приписуємо позначку $\mu(k)=(+j,\theta_k)$, де $\theta_k=\min\{\theta_j,r_{jk}-x_{jk}\}$. Розглядаємо ще непозначені вершини *k*: $(k,j)\in U$ і $x_{kj}>0$. Кожна з таких вершин одержує позначку $\mu(k)=(-j,\theta_k)$, де $\theta_k=\min\{\theta_j,x_{kj}\}$. Всі вершини *k*, які одержали позначки, тепер позначені і непроглянуті, а вершина *j* – позначена і проглянута.

Продовжуємо приписувати позначки непозначеним вершинам до тих пір, поки або вершина *t* виявиться позначеною, або не можна буде позначити жодної вершини і вершина *t* виявиться непозначеною. У другому випадку існуючий потік *x* – максимальний, а множина позначених вершин C^* визначає мінімальний розріз мережі. У першому випадку існуючий потік *x* на кроці 2 можна збільшити.

<u>*Крок 2*</u> *(збільшення потоку)*. Нехай $\mu(t)=(+k,\theta_t)$ або $\mu(t)=$ $=(-k,\theta_t)$ – позначка вершини *t*. Це означає, що існуючий потік з *s* в *t* можна збільшити на величину θ_t. Для цього в першому випадку замінюємо x_{kt} на $x_{kt}+\theta_t$, у другому – x_{tk} замінюємо на $x_{tk}-\theta_t$.

Переходимо до вершини *k* і виконуємо аналогічні операції, змінюючи величину потоку на ту ж величину θ_t. Продовжуємо ці дії, поки не досягнемо вершини s. Після цього ліквідовуємо позначки всіх вершин і переходимо до кроку 1.

Приклад 1. *Знайти максимальний потік з вершини 1 у вершину 7 на мережі, зображеній на рис. 1.*

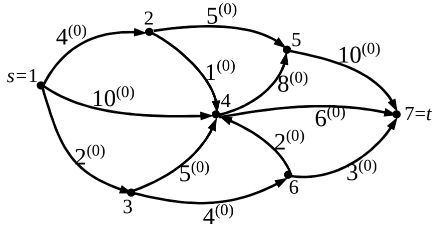

Рис. 1.

Розв’язок. Процес розв’язування задачі подано на рис. 2-4.

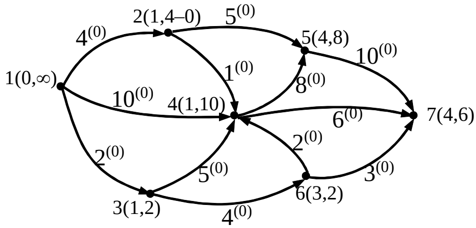

Рис. 2.

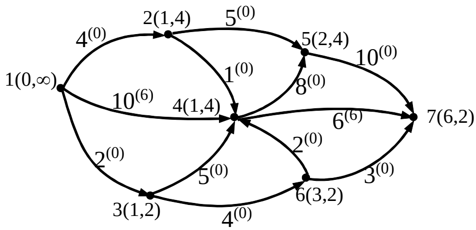

Рис. 3.

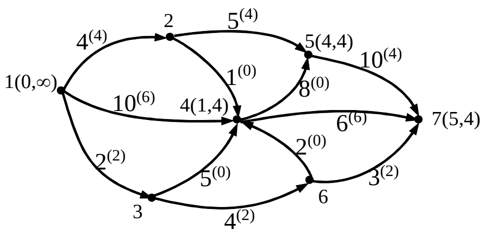

Рис. 4.

Відповідь: $U(C^*)=\{(1,2),(1,4),(1,3)\},\ d^*=4+10+2=16$.

ЗАВДАННЯ. Методом Форда-Фалкерсона знайти максимальний потік у мережі (рис. 5). Необхідні вихідні дані за варіантами подані в табл. 1.

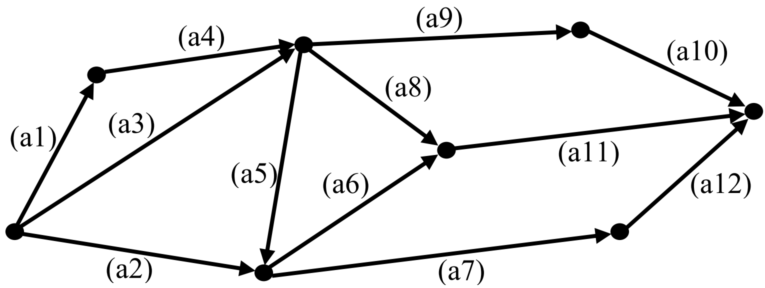

Рис. 5.

Таблиця 1.

Варіант	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12
1	11	5	6	7	8	4	5	6	6	7	8	3
2	4	5	6	7	4	5	3	2	1	1	2	8
3	5	6	4	3	2	1	7	6	4	4	3	5
4	2	2	3	4	5	6	7	6	5	4	3	2
5	5	3	3	4	6	4	5	5	2	1	1	3
6	7	6	5	4	4	3	3	2	2	3	4	5
7	2	1	6	2	3	3	4	5	6	2	7	6
8	10	4	5	3	5	6	7	2	3	4	6	8
9	11	2	3	4	5	6	7	8	9	5	6	7
10	8	3	4	5	7	3	3	4	5	3	4	5

Звіт про виконання лабораторної роботи №8.

Звіт про виконання лабораторної роботи має містити вихідні дані завдання для самостійного виконання, розв’язок та його інтерпретацію, висновки. Звіт необхідно зберегти за наступним форматом: ***Прізвище_Звіт_ЛР8.xlsx*** і здати на платформі Moodle, завантаживши у відповідне поле.

Лабораторна робота №9
Матричні ігри

Теоретичні відомості

Нехай маємо деяку матрицю C

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix},$$

яку назвемо *платіжною матрицею. Матрична гра визначається такими правилами.* Грають два гравці I_1 та I_2. Перший з них вибирає ціле число (*стратегію*) i ($i\in\{1,2,...,m\}$) – номер рядка платіжної матриці, другий – ціле число j ($j\in\{1,2,...,n\}$) – номер стовпчика платіжної матриці. Вибір гравці роблять одночасно і незалежно один від одного. Після цього гравець I_1 платить I_2 суму c_{ij}, що визначається умовами конкретної гри (якщо $c_{ij}>0$, то I_1 платить I_2, якщо $c_{ij}<0$, то I_2 платить I_1 суму $|c_{ij}|$). Величини c_{ij}, $i=1,...,m$, $j=1,...,n$, відомі кожному з гравців. Потрібно вказати найкращий вибір для кожного гравця. Матрицю C називають також *матрицею виграшів* гравця I_2.

Нижньою ціною гри G називається величина гарантованого виграшу гравця I_2

$$\max_{j=1,...,n}\min_{i=1,...,m} c_{ij}=\underline{v}, \tag{1}$$

Верхньою ціною гри G називають величину гарантованого програшу гравця I_1

$$\min_{i=1,...,m}\max_{j=1,...,n} c_{ij}=\overline{v} \tag{2}$$

Якщо $\underline{v}=\overline{v}=v$, тобто

$$v=\min_{i=1,...,m}\max_{j=1,...,n} c_{ij}=\max_{j=1,...,n}\min_{i=1,...,m} c_{ij}, \tag{3}$$

то числа i^*, j^* такі, що у співвідношенні (3) $c_{i^*j^*}=v$, природно назвати *оптимальними чистими стратегіями* гравців I_1 та I_2 відповідно. У цьому випадку кажуть, що матрична *гра G допускає* *розв'язок у чистих стратегіях*, а величина v називається *ціною гри*. Не кожна гра має розв'язок у чистих стратегіях.

Теорема 1. *Матрична гра G має розв'язок у чистих стратегіях тоді і лише тоді, коли її платіжна матриця C має сідлову точку. При цьому, якщо* (i^*, j^*) *– сідлова точка матриці C, то ціна гри* $v = c_{i^* j^*}$.

При відсутності сідлової точки в платіжній матриці гри жодному з гравців не слід постійно використовувати одну і ту ж чисту стратегію, оскільки у цьому випадку кожен гравець має можливість отримати більший за гарантований виграш. Проте в таких умовах гравцям стає важливим приховати свою поведінку від супротивника, що зумовлює необхідність відмови гравців від розумного вибору конкретних дій, оскільки будь-які міркування можуть бути відтворені іншим гравцем. З іншого боку повна відмова від раціональності означатиме припинення гри як такої і заміни її некерованим випадковим процесом. Компроміс у даному випадку можна досягти шляхом обґрунтованого, розумного введення елемента випадковості у дії сторін, коли кожен окремий хід залишається невідомими, але уся сукупність ходів має визначені, наперед задані властивості. У зв'язку з цим цілком природною є спроба означити поняття оптимальної стратегії для матричних ігор без сідлової точки в класі так званих *змішаних стратегій*.

Змішаною стратегією гравця I_1 *називається вектор* $x = (x_1, ..., x_m)$, $x_i \ge 0$, $i = \overline{1, m}$, $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$, *а змішаною стратегією гравця* I_2 *– вектор* $y = (y_1, ..., y_n)$, $y_j \ge 0$, $j = \overline{1, n}$, $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$. Величини x_i ($i = 1, ..., m$) та y_j ($j = 1, ..., n$) трактуються як ймовірності, з якими гравці I_1 та I_2 вибирають відповідно *i*-й рядок та *j*-й стовпець матриці *C*.

Якщо гравець I_1 використовує свою змішану стратегію $x \in X$, а I_2 – $y \in Y$, то *математичне сподівання плати гравця* I_1 *гравцеві* I_2 (*середній виграш гравця* I_2) знаходиться звичайним чином

$$F(x,y) = xCy = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i y_j \,. \tag{4}$$

Гравець I_1 може забезпечити собі середній програш не більше $\min\limits_{x\in X}\max\limits_{y\in Y} F(x,y)$:

$$\max_{y\in Y} F(x,y) \to \min_{x\in X}, \tag{5}$$

а гравець I_2 може забезпечити собі середній виграш не менше $\max\limits_{y\in Y}\min\limits_{x\in X} F(x,y)$:

$$\min_{x\in X} F(x,y) \to \max_{y\in Y}. \tag{6}$$

Задачі (5) та (6) є задачами пошуку гарантованих змішаних стратегій першим та другим гравцем відповідно.

Теорема 2. *Задачі (5) та (6) гравців I_1 та I_2 еквівалентні відповідно таким ЗЛП:*

$$\begin{cases} \overline{v} \to \min, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} c_{ij} x_i \le \overline{v}, \quad j = 1,\dots,n, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1, \\ x_i \ge 0, \quad i = 1,\dots,m; \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} \underline{v} \to \max, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} y_j \ge \underline{v}, \quad i = 1,\dots,m, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} y_j = 1, \\ y_j \ge 0, \quad j = 1,\dots,n. \end{cases} \tag{8}$$

Лема 1. *Задачі (7), (8) є двоїстими ЗЛП.*

Теорема 3 (*про мінімакс***).** *Будь-яка матрична гра має розв'язок у змішаних стратегіях.*

Розділивши обмеження першої із записаних задач на $\overline{v}$, другої – $\underline{v}$ та ввівши позначення $\tilde{x}_i = \dfrac{x_i}{\overline{v}}$ та $\tilde{y}_j = \dfrac{y_j}{\underline{v}}$, можемо переписати їх у більш зручному для обчислень вигляді

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \ldots + \tilde{x}_m \to \max \\ \sum\limits_{i=1}^{m} c_{ij} \tilde{x}_i \le 1 \ (j = \overline{1,n}), \\ \tilde{x}_i \ge 0 \ (i = \overline{1,m}); \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + \ldots + \tilde{y}_n \to \min \\ \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} \tilde{y}_j \ge 1 \ (i = \overline{1,m}), \\ \tilde{y}_j \ge 0 \ (j = \overline{1,n}). \end{cases} \tag{10}$$

Зауважимо також, що використання таких перетворень доцільне у випадках, коли платіжна матриця не містить від’ємних компонент. Тому рекомендується перед зведенням матричної гри до задачі лінійного програмування до кожного елемента платіжної матриці додати деяке число так, щоб вона не містила від'ємних компонент. Після отримання розв'язку від знайденої ціни гри необхідно відняти це число.

Приклад 1. Розглянемо матричну гру з платіжною матрицею $C=\begin{pmatrix}-3 & 5\\ 4 & -2\end{pmatrix}$. Очевидно, що для цієї гри не має розв'язку у чистих стратегіях. Отже, будемо шукати розв'язок в області змішаних стратегій.

Додамо до кожного елемента матриці C число $h=4$ та отримаємо нову платіжну матрицю без від'ємних компонент:

$$\tilde{C}=\begin{pmatrix}4-3 & 4+5\\ 4+4 & 4-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 9\\ 8 & 2\end{pmatrix}.$$

Запишемо задачі (7), (8), що еквівалентні задачам 1-го та 2-го гравців відповідно.

Приклад.

$$\bar{v}\to\min \qquad\qquad \underline{v}\to\max$$

$$\begin{cases}x_1+8x_2\le\bar{v},\\ 9x_1+2x_2\le\bar{v},\\ x_1+x_2=1,\\ x_1\ge0,\ x_2\ge0;\end{cases}\qquad \begin{cases}y_1+9y_2\ge\underline{v},\\ 8y_1+2y_2\ge\underline{v},\\ y_1+y_2=1,\\ y_1\ge0,\ y_2\ge0.\end{cases}$$

Розділимо обмеження першої із записаних задач на $\bar{v}$, другої – $\underline{v}$ та перейдемо до нових змінних $\tilde{x}_i=\dfrac{x_i}{\bar{v}}$ та $\tilde{y}_j=\dfrac{y_j}{\underline{v}}$. Отримаємо:

$$\tilde{x}_1+\tilde{x}_2\to\max \qquad\qquad \tilde{y}_1+\tilde{y}_2\to\min$$

$$\begin{cases}x_1+8x_2\le1,\\ 9x_1+2x_2\le1,\\ x_1\ge0,\ x_2\ge0;\end{cases}\qquad \begin{cases}y_1+9y_2\ge1,\\ 8y_1+2y_2\ge1,\\ y_1\ge0,\ y_2\ge0.\end{cases}$$

Розв'язуючи останні ЗЛП, знаходимо оптимальні змішані стратегії $x^*=(3/7;4/7)$, $y^*=(1/2;1/2)$ першого і другого гравців відповідно. При цьому ціна гри $v=F(x^*,y^*)=1$.

ЗАВДАННЯ Шляхом переходу до задач лінійного програмування знайти розв'язок матричної гри, що задана платіжною матрицею

1. $c_{ij} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

2. $c_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

3. $c_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

4. $c_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

5. $c_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

6. $c_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

7. $c_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

8. $c_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

9. $c_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

10. $c_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Звіт про виконання лабораторної роботи №9.

Звіт про виконання лабораторної роботи має містити вихідні дані завдання для самостійного виконання, розв’язок та його інтерпретацію, висновки. Звіт необхідно зберегти за наступним форматом: ***Прізвище_Звіт_ЛР9.xlsx*** і здати на платформі Moodle, завантаживши у відповідне поле.

Лабораторна робота №10
Графічний метод розв’язання задач нелінійного програмування

Теоретичні відомості

Загальна задача математичного програмування формулюється так: знайти такі значення змінних x_j $(j=\overline{1,n})$, щоб цільова функція набувала екстремального (максимального чи мінімального) значення:

$$\max(\min) F = f(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{1}$$

за умов:

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n)\{\le,=,\ge\}b_i \ (i=\overline{1,m}); \tag{2}$$

$$x_j \ge 0 \ (j=\overline{1,n}). \tag{3}$$

Якщо всі функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ та $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$, $i=\overline{1,m}$ є лінійними, то це задача лінійного програмування, інакше (якщо хоча б одна з функцій є нелінійною) маємо *задачу нелінійного програмування*.

Геометрично цільова функція (1) визначає деяку поверхню, а обмеження (2)-(3) – допустиму підмножину n-вимірного евклідового простору. Знаходження оптимального розв’язку задачі нелінійного програмування зводиться до відшукання точки з допустимої підмножини, в якій досягається поверхня найвищого (найнижчого) рівня. Якщо цільова функція неперервна, а допустима множина розв’язків замкнена, непуста і обмежена, то глобальний максимум (мінімум) задачі існує.

Процес знаходження розв’язку задачі нелінійного програмування (1), (2) з використанням її геометричної інтерпретації включає наступні етапи:

1. Знаходять область допустимих розв’язків задачі, що визначається співвідношеннями (2) (якщо вона порожня, то задача не має розв’язку).

2. Будують гіперповерхню $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)=h$.

3. Визначають гіперповерхню найвищого (найнижчого) рівня або встановлюють нерозв’язність задачі внаслідок необмеженості функції (1) зверху (знизу) на множині допустимих розв’язків.

4. Знаходять точку області допустимих розв’язків, через яку

проходить гіперповерхня найвищого (найнижчого) рівня, і визначають в ній значення функції.

Приклад 1. Знайти мінімальне і максимальне значення функції:

$$Z=(x_1-2)^2+(x_2-2)^2$$

за умов: $\begin{cases} x_1+x_2\le 1; \\ 3x_1+4x_2\le 24. \end{cases}$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

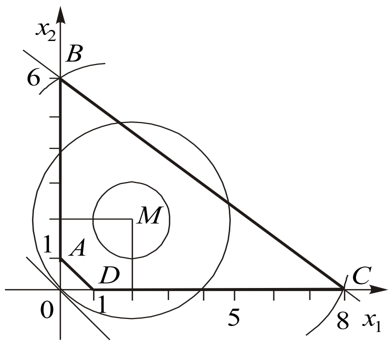

Рис.1

Розв'язання. Область допустимих розв'язків утворює чотирикутник $ABCD$ (рис. 1). Геометрично цільова функція представляє собою коло з центром у точці $M(2;\,2)$, квадрат радіуса якого $R^2=Z$. Це означає, що її значення буде збільшуватися (зменшуватися) зі збільшенням (зменшенням) радіуса кола. Проведемо з точки M кола різних радіусів. Функція Z має два локальних максимуми: точки $B\,(0;\,6)$ і $C\,(8;\,0)$. Обчислимо значення функціонала в цих точках:

$$Z(B)=(x_1-2)^2+(x_2-2)^2=(0-2)^2+(6-2)^2=4+16=20,$$

$$Z(C)=(x_1-2)^2+(x_2-2)^2=(8-2)^2+(0-2)^2=36+4=40.$$

Оскільки $Z(C)>Z(B)$, то точка $C\,(8;\,0)$ є точкою глобального максимуму.

Очевидно, що найменший радіус $R=0$, тоді:

$$R^2=0=Z=(x_1-2)^2+(x_2-2)^2\ \Rightarrow\ x_1=2;\ x_2=2.$$

Тобто точка M є точкою мінімуму, оскільки їй відповідає найменше можливе значення цільової функції.

Приклад 2. Знайти мінімальне значення функції:

$$Z=(x_1-4)^2+(x_2-4)^2$$

за умов: $\begin{cases} x_1x_2\le 8; \\ x_1+x_2\ge 12. \end{cases}$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

Розв'язування. У даному прикладі множина допустимих розв'язків складається з двох окремих частин, необмежених зверху (рис. 2). Цільова функція аналогічно попередньому випадку є колом з центром у точці $M(4;4)$. Функція Z має два локальних мінімуми: в точці A ($x_1 \approx 11,29$; $x_2 \approx 0,71$), і в точці B ($x_1 \approx 0,71$; $x_2 \approx 11,29$).

Значення функціонала в цих точках однакове і дорівнює:

$$Z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 = 64.$$

Отже, маємо два альтернативні оптимальні плани.

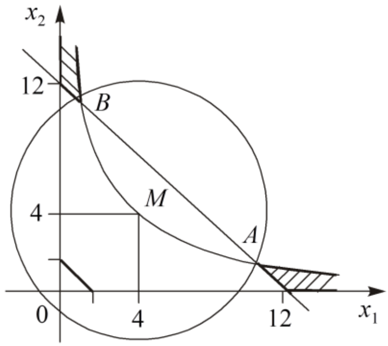

Рис. 2.

Основні *відмінності задач нелінійного програмування*:

1. Для задач нелінійного програмування *не існує універсального методу* розв’язання, що зумовило розроблення значної кількості різних методів розв’язування окремих типів задач нелінійного програмування.

2. Застосування відомих точних методів розв’язування нелінійних задач часто супроводжується з труднощами обчислювального характеру, тому здебільшого для розв’язування нелінійних задач виправданим є застосування наближених методів.

3. У задачах нелінійного програмування існують *кілька локальних оптимумів*, що потребує пошуку серед них глобального. Більшість же наближених методів дозволяють, як правило, знайти саме локальний оптимум.

4. Для нелінійних задач точка, яка визначає *оптимальний план*, може бути як граничною, так і знаходитися *всередині допустимої області розв’язків* (планів).

5. У разі, коли система обмежень задачі є нелінійною, вона може визначати *множину допустимих розв’язків як неопуклу*, або навіть складатися з довільних, не зв’язаних між собою частин.

Приклад 3. Знайти локальні та глобальні екстремуми задачі нелінійного програмування:

$$F = 2(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 7)^2, \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Розв’язування. Будуємо область *OABC* (рис.3) допустимих розв’язків на основі обмежень задачі.

Лініями рівня цільової функції є сімейство еліпсів, рівняння яких

$$2(x_1-5)^2+(x_2-7)^2=h=const,$$

або в канонічному вигляді

$$\frac{(x_1-5)^2}{h/2}-\frac{(x_2-7)^2}{h}=1.$$

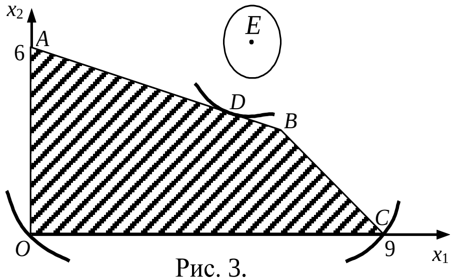

Рис. 3.

Центр сімейства еліпсів лежить за межами області допустимих розв’язків. З рис. 3 видно, що цільова функція досягає глобального мінімуму в точці D. Координати точки задовольняє рівняння прямої AB. Складемо друге рівняння, якому задовольнятимуть координати точки D з умови рівності кутового коефіцієнта дотичної до еліпса в точці D та кутового коефіцієнта прямої AB: $k_{AB}=-\frac{1}{2}$, $k_{дот}=x_2'=-\frac{2(x_1-5)}{(x_2-7)}$. Отже, одержали систему рівнянь для знаходження координат точки D

$$\begin{cases} x_1+2x_2=12, \\ 4x_1-x_2=13, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=38/9, \\ x_2=35/9. \end{cases}$$

Значення цільової функції в точці $D(38/9;35/9)$, дорівнює

$$Z_{\min}=Z(D)=Z(38/9;35/9)\approx 10{,}89\,.$$

Локальних максимумів цільова функція досягає в точках $O(0,0)$ і $C(9,0)$:

$$Z(O)=Z(0,0)=2\cdot(0-5)^2+(0-7)^2=99,$$
$$Z(C)=Z(9,0)=2\cdot(9-5)^2+(0-7)^2=81.$$

Глобальний максимум цільової функції досягається в точці $O(0;0)$: $Z_{\max}=Z(O)=99$.

ЗАВДАННЯ

1. $f=(x_1-7)^2+(x_2-1)^2$,

$$\begin{cases} x_1+2x_2\le 12, \\ x_1+x_2\le 9, \\ x_1,\ x_2\ge 0; \end{cases}$$

6. $f=2x_1^2+x_2^2$,

$$\begin{cases} x_1+2x_2\le 12, \\ -x_1+x_2\ge -8, \\ x_1,\ x_2\ge 0; \end{cases}$$

2. $f = 2(x_1 - 2)^2 + 3(x_2 + 5)^2$,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12, \\ 3x_1 + x_2 \le 15, \\ x_1,\ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

3. $f = 9(x_1 - 5)^2 + 4(x_2 - 6)^2$,

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 12, \\ x_1 - x_2 \le 6, \\ x_1,\ x_2 \ge 0, \quad x_2 \le 4; \end{cases}$$

4. $f = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 4)^2$,

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 30, \\ 2x_1 + x_2 \le 14, \\ x_1,\ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

5. $f = 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_1$,

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 3, \\ -x_1 + 2x_2 \ge 1, \\ x_1,\ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

7. $f = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2$,

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 18, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \quad x_1, x_2 \ge 0; \end{cases}$$

8. $f = 25(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1,\ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

9. $f = (x_1 - 3)^2 + 4(x_2 - 6)^2$,

$$\begin{cases} 0 \le x_1 \le 3, \\ 5x_1 + 3x_2 \le 24, \\ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

10. $f = (x_1 - 7)^2 + (x_2 - 7)^2$,

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 30, \\ 2x_1 + x_2 \le 14, \\ x_1,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Звіт про виконання лабораторної роботи №10.

Звіт про виконання лабораторної роботи має містити вихідні дані завдання для самостійного виконання, розв’язок та його інтерпретацію, висновки. Звіт необхідно зберегти за наступним форматом: ***Прізвище_Звіт_ЛР10.xlsx*** і здати на платформі Moodle, завантаживши у відповідне поле.

Лабораторна робота №11
Метод множників Лагранжа

Теоретичні відомості

Розглянемо класичну задачу оптимізації, в якій система обмежень містить тільки рівняння, відсутні умови невід'ємності змінних, а $f(x_1,x_2,...,x_n)$ і $f_i(x_1,x_2,...,x_n)$ – неперервні разом зі своїми чистинними похідними функції

$$f(x_1,x_2,...,x_n) \to \max \quad (\min); \tag{1}$$

$$f_i(x_1,x_2,...,x_n) = b_i \quad (i=\overline{1,m}). \tag{2}$$

Для її розв'язання можна скористаємось *методом множників Лагранжа*, ідея якого полягає в наступному. Введемо набір нових змінних $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$, які називають *множниками Лагранжа*, та складемо *функцію Лагранжа*

$$\begin{aligned} L\left(x_1,x_2,...,x_n,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m\right) = f\left(x_1,x_2,...,x_n\right) + \\ + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left[b_i - f_i\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\right]. \end{aligned} \tag{3}$$

Позначимо через M множину точок $X(x_1,x_2,...,x_n)$ простору E_n, які задовольняють систему рівнянь (2). Легко бачити, що побудована таким чином функція Лагранжа в області M співпадає з функцією $f(x_1,x_2,...,x_n)$. Як відомо з курсу математичного аналізу, необхідною умовою існування в точці $X^*(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$ екстремуму неперервно диференційованої в деякій області функції багатьох змінних є рівність нулю частинних похідних першого порядку за цими змінними. У нашому випадку побудованої спеціальним чином функції Лагранжа (3) забезпечення виконання необхідної умови існування екстремуму приводить до необхідності розв'язання системи $n+m$ рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0 \quad \left(j=\overline{1,n}\right); \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = b_i - f_i\left(x_1,x_2,...,x_n\right) = 0 \quad \left(i=\overline{1,m}\right); \end{cases} \tag{4}$$

з $n+m$ невідомими $x_1,x_2,...,x_n,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$. Як бачимо останні m

рівнянь системи (4) співпадає з системою (2). А тому будь-який розв'язок системи рівнянь (4) визначатиме і точку $X^0 = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$, в якій може бути екстремум функції $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ в області *M*. Отже, розв'язавши систему рівнянь (4), отримаємо точки, в яких функція (3) може мати екстремальні значення.

Для подальшого дослідження знайдених точок ґрунтується на використанні достатньої умови умовного локального екстремуму, яка формулюється наступним чином:

Теорема 1. *Для того, щоб точка* $X^0 = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$, *що задовольняє систему рівнянь (4) при визначених* $\left\{\lambda_i^0\right\} = \lambda^0 \quad \left(i = \overline{1, m}\right)$ *і двічі неперервно диференційованих функцій* $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ *та* $f_i\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, *була точкою локального мінімуму (максимуму), достатньо, щоб гессіан функції* $L\left(x, \lambda^0\right)$ *в точці* X^0 *був додатно (від'ємно) визначеною матрицею.*

Нагадаємо, що гессіан або визначник Гессе знаходиться за формулою:

$$H\left(X\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_1}, & \cdots & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_n \partial x_1} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}, & \cdots & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_n \partial x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

Таким чином, визначення екстремальних точок задачі (1)-(2) методом множників Лагранжа включає наступні етапи:

1. Складають функцію Лагранжа.
2. Знаходять частинні похідні від функції Лагранжа за змінними x_j і λ_i та прирівнюють їх до нуля.
3. Розв'язуючи систему рівнянь (4), знаходять такі, в яких цільова функція задачі може мати екстремум.
4. Серед знайдених точок знаходять такі, в яких досягається екстремум, та обчислюють значення функції (1) в цих точках.

Приклад 1. Знайти мінімальне значення функції $f = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2$ при умовах $x_1 + x_2 = 180$.

Розв'язання. Розв'яжемо задачу, використовуючи метод множників Лагранжа. Складемо функцію Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 + \lambda(180 - x_1 - x_2),$$

обчислимо її частинні похідні за змінними x_1, x_2, λ і прирівнюємо їх до нуля:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 4 + 2x_1 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 8 + 2x_2 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 180 - x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Переносячи в праві частини перших двох рівнянь λ і прирівнюючи їх ліві частини, отримаємо

$$4 + 2x_1 = 8 + 2x_2, \text{ або } x_1 - x_2 = 2.$$

Розв'язуючи останнє рівняння спільно з рівнянням $x_1 + x_2 = 180$, знаходимо $x_1^* = 91$ і $x_2^* = 89$. Ця точка є підозрілою на екстремум. Використовуючи другі частинні похідні, можна показати, що в цій точці функція f має умовний мінімум.

ЗАВДАННЯ. Методом множників Лагранжа знайти екстремуми функцій:

1. $F = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 + 3x_2 + 4$ при умові $x_1 + 2x_2 = 3$.

2. $F = 3x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 + 10$ при умові $2x_1 - 2x_2 = 7$.

3. $F = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1 + 1$ при умові $x_1^2 + x_2^2 = 4$.

4. $F = 2(x_1 - 1)^2 + 3(x_2 - 3)^2$ при умові $x_1 + x_2 = 6$.

5. $F = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 5)^2$ при умові $x_2 - 2x_1 = 5$.

6. $F = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2$ при умові $x_2 + x_1 = 7$.

7. $F = x_1 x_2 x_3$ при умові $x_1 + x_2 + x_3 = 4$.

8. $F = 2x_1 + 3x_2^2 + x_3^2$ при умові $x_1 + x_2 + x_3 = 8$.

9. $F = x_1 - 2x_2 + 2x_3$ при умові $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9$.

10. $F = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ при умові $x_1 + x_2 + x_3 = 4$.

Звіт про виконання лабораторної роботи №11.

Звіт про виконання лабораторної роботи має містити вихідні дані завдання для самостійного виконання, розв'язок та його інтерпретацію, висновки. Звіт необхідно зберегти за наступним форматом: ***Прізвище_Звіт_ЛР11.xlsx*** і здати на платформі Moodle, завантаживши у відповідне поле.

Лабораторна робота №12
Градієнтні методи розв'язання задач нелінійного програмування

Теоретичні відомості

Оскільки похідна за напрямком є лінійною частиною приросту функції в даному напрямку, то при відмінному від нуля градієнті при невеликому зміщенні в цьому напрямку значення функції збільшується, а при зміщенні в протилежному напрямку – зменшується. Ця властивість використовується для послідовного покращення значень неперервно диференційованих функцій при розв'язанні задач максимізації чи мінімізації, а відповідні методи називаються *релаксаційними*. Якщо рух здійснюється точно в напрямку градієнта, то метод називається градієнтним.

Нехай $f(X)$ – неперервно диференційована функція, визначена у всьому евклідовому просторі E_n, і така, що

$$\lim_{\|X\|\to\infty} f(X) = +\infty, \tag{1}$$

X_0 – деяка початкова точка. Розглянемо процес наступного виду (*метод найшвидшого спуску*):

$$X_{k+1} = X_k - h(X_k)\nabla f(X_k), \quad k = 0,1,2,...,$$

де

$$h(X_k) \geq 0; \quad f(X_{k+1}) = \min_{h\geq 0} f\left(X_k - h\nabla f(X_k)\right),$$

$$\nabla f(X_k) = \left(\frac{\partial f(X_k)}{\partial x_1}; \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_2}; ...; \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_n} \right),$$

тобто на кожному кроці процесу будемо рухатись в напрямку антиградієнта до мінімуму в цьому напрямку.

***Теорема* 1.** *При виконанні умови* (1) *для неперервно диференційованої функції* $f(X)$ *послідовність градієнтів* $\nabla f(X_k)$ *прямує до нуля:* $\lim_{k\to\infty} \nabla f(X_k) = 0$.

На кожному кроці методу найшвидшого спуску необхідно розв'язувати задачу мінімізації функції однієї змінної

$$\phi(h) = f\left(X - h\nabla f(X)\right).$$

Для розв'язання цієї задачі із заданою точністю можна використовувати різні чисельні процедури.

Приклад 1. Визначити градієнтним методом найшвидшого спуску локальний екстремум функції, починаючи ітераційний процес з точки X^0:

$$z = x_1^2 + x_2^2 - 12x_1 + 4x_2 \to \min, \quad X^0 = (1;1);$$

Розв'язання. Знаходження локального екстремуму градієнтним методом найшвидшого спуску організовується за схемою:

$$X^{k+1} = X^k - h(X^k)\nabla f(X^k), \quad k = 0,1,2,...,$$

$$h(X^k) \ge 0; \quad f(X^{k+1}) = \min_{h \ge 0} f(X^k - h\nabla f(X^k)).$$

I ітерація.

1. Знаходимо градієнт функції в точці X^0:

$$\nabla f(X) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2}; ... \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = (2x_1 - 12; 2x_2 + 4),$$

$$\nabla f(X^0) = (-10;6).$$

2. Знаходимо наступну точку за схемою методу:

$$X^1 = X^0 - h\nabla f(X^0) = (1;1) - h(-10;6) = (1+10h;1-6h).$$

3. Підставимо значення координат точки X^1 в цільову функцію:

$$\begin{aligned} z(X^1) &= (1+10h)^2 + (1-6h)^2 - 12\cdot(1+10h) + 4\cdot(1-6h) = \\ &= 136h^2 - 136h - 6 \end{aligned},$$

та знаходимо крок *h* з умови мінімуму функції $z(X^1)$:

$$\frac{dz(X^1)}{dh} = 272h - 136 = 0 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{1}{2}.$$

4. Остаточно знаходимо координати наступної точки:

$$X^1 = (1+10h;1-6h) = \left(1+10\cdot\frac{1}{2};1-6\cdot\frac{1}{2}\right) = (6;-2).$$

II ітерація.

1. Знаходимо градієнт функції в точці X^1:

$$\nabla f(X^1) = (2x_1 - 12; 2x_2 + 4) = (0,0).$$

Оскільки одержано нульовий градієнт, то знайдена точка X^1 і є точкою екстремуму:

$$z_{\min} = z(X^1) = 6^2 + (-2)^2 - 12\cdot 6 + 4\cdot(-2) = -40.$$

ЗАВДАННЯ. Визначити градієнтним методом найшвидшого спуску локальний екстремум функції, починаючи ітераційний процес з точки X^0

1. $z = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 32x_1 - 6x_2 \to \min$, $X^0 = (2;6)$
2. $z = -2x_1^2 - 2x_2^2 + 32x_1 + 24x_2 \to \max$, $X^0 = (3;10)$
3. $z = -x_1^2 - x_2^2 + 10x_1 + 16x_2 \to \max$, $X^0 = (1;2)$
4. $z = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 4x_2 \to \min$, $X^0 = (2;7)$
5. $z = -x_1^2 - x_2^2 + 18x_1 + 6x_2 \to \max$, $X^0 = (2;4)$
6. $z = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1 + 8x_2 \to \min$, $X^0 = (5;2)$
7. $z = -2x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_1 + 8x_2 \to \max$, $X^0 = (5;10)$
8. $z = x_1^2 + x_2^2 - 12x_1 \to \min$, $X^0 = (5;3)$
9. $z = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + 2x_2 \to \min$, $X^0 = (1;0)$
10. $z = 4x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + 5 \to \max$, $X^0 = (4;5)$

Звіт про виконання лабораторної роботи №12.

Звіт про виконання лабораторної роботи має містити вихідні дані завдання для самостійного виконання, розв'язок та його інтерпретацію, висновки. Звіт необхідно зберегти за наступним форматом: ***Прізвище_Звіт_ЛР12.xlsx*** і здати на платформі Moodle, завантаживши у відповідне поле.

Рекомендована література

1. Мартинюк П. М., Мічута О. Р. Методи оптимізації та дослідження операцій : навч. посібник. Рівне : НУВГП, 2011. 283 с.
2. Бейко І. В., Зінько П. М., Наконечний О. Г. Задачі, методи і алгоритми оптимізації : навчальний посібник. Рівне : НУВГП, 2011. 624 с.
3. Бейко І. В., Бублик Б. Н., Зінько П. Н. Методи і алгоритми розв’язання задач оптимізації. Київ : Вища школа, 1983. 512 с.
4. Попов Ю. Д., Тюптя В. І., Шевченко В. І. Методи оптимізації. Київ : КНУ, 2003. 215 с.
5. Hamdy A. Taha. Operations Research An Introduction. Tenth Edition. Global Edition. Pearson Education Limited, 2017. 849 с.
6. Григорків В. С., Григорків М. В., Ярошенко О. І. Оптимізаційні методи та моделі : підручник. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2022. 440 с.
7. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій : підручник. Київ : Видавничий Дім "Слово", 2006. 816 с.
8. Боровська Т. М., Колеснік І. С., Северілов В. А. Основи теорії управління та дослідження операцій : навчальний посібник. Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2008. 242 с.
9. Єгоршин О. О., Малярець Л. М. Математичне програмування : підручник. Харків : ВД "ІНЖЕК", 2006. 384 с.
10. Роман Л. Л. Дослідження операцій : курс лекцій. Львів : Видавництво Тараса Сороки, 2008. 272 с.