Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та природокористування
Навчально-науковий інститут кібернетики, інформаційних технологій та інженерії
Кафедра комп'ютерних технологій та економічної кібернетики

04-05-112М

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання лабораторних робіт і самостійної роботи
з навчальної дисципліни «**Теорія прийняття рішень**»
для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня
за освітньо-професійною програмою «Інформаційні системи і технології» спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології»
денної та заочної форми навчання

Рекомендовано науково-методичною
радою з якості ННІ КІТІ
Протокол № 1 від 20.10.2025 р.

Рівне – 2025

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт і самостійної роботи з навчальної дисципліни «Теорія прийняття рішень» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою «Інформаційні системи і технології» спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології» денної та заочної форми навчання. [Електронне видання] / Барановський С. В. – Рівне : НУВГП, 2025. – 45 с.

Укладач:
Барановський С. В., доцент, к.т.н., доцент кафедри комп'ютерних технологій та економічної кібернетики.

Відповідальний за випуск:
Грицюк П. М., професор, д.е.н., завідувач кафедри комп'ютерних технологій та економічної кібернетики.

Гарант освітньої програми:
Гладка О. М., доцент, к.т.н., доцент кафедри комп'ютерних технологій та економічної кібернетики.

Зміст

Вступ

У сучасному високотехнологічному та динамічному світі, що характеризується значною невизначеністю та обсягами даних, здатність до прийняття науково обґрунтованих, раціональних та ефективних рішень є важливою компетенцією для фахівців у галузі інформаційних систем і технологій. Теорія прийняття рішень є міждисциплінарною наукою, що інтегрує елементи математики, статистики, інформатики та психології. Вона надає системний підхід до аналізу проблемних ситуацій, формалізації задач вибору, оцінки альтернативних варіантів та визначення оптимальних стратегій поведінки в умовах ризику та багатокритеріальності.

Основною метою даних лабораторних робіт є не лише поглиблене засвоєння теоретичних положень теорії прийняття рішень, але й формування стійких практичних навичок застосування її основних методів, моделей та алгоритмів. Зокрема, студенти освоять інструментарій для:

- ідентифікації та формалізації проблем прийняття рішень;
- розробки та аналізу систем критеріїв оцінки альтернатив;
- моделювання ситуацій прийняття рішень в умовах визначеності, ризику та невизначеності;
- застосування методів багатокритеріального аналізу та оптимізації;
- оцінки ефективності прийнятих рішень.

Кожна лабораторна робота структурована для забезпечення послідовного вивчення матеріалу. Вона включає: необхідні теоретичні відомості, приклади розв'язання типових задач та завдання для самостійного виконання. Рекомендується ретельне попереднє вивчення теоретичного матеріалу та використання додаткових джерел інформації, зазначених у списку рекомендованої літератури.

Набуті під час виконання цих лабораторних робіт знання та практичні навички стануть основою для успішного вирішення складних задач, що виникають у професійній діяльності фахівців з інформаційних систем і технологій, сприяючи підвищенню їхньої конкурентоспроможності та ефективності у прийнятті стратегічних та оперативних рішень.

Лабораторна робота №1.
Бінарні відношення.

Теоретичні відомості

Властивості предметів оточуючого світу можемо розділити на два типи: властивості першого типу можуть бути віднесені до окремих предметів (може бути “високим”, “червоним”, “металічним” і т.п.). Властивості другого типу можуть бути віднесені лише до наборів предметів, наприклад, властивість “бути родичем” відноситься до пар людей, властивість “бути більшим” – до пар чисел, “знаходитись між” – до трьох предметів і т.п. Властивість другого типу прийнято називати відношеннями. При цьому властивості, що відносяться до пар предметів, називають бінарними відношеннями; до трьох предметів – тернарними відношеннями і т.д.

Бінарне відношення можна визначити як множину, що складається з пар елементів. Пара, що складається з елементів a і b записується у вигляді $(a;b)$, причому a називається першою, а b – другою компонентою цієї пари. Відзначимо, що порядок компонент у парі суттєвий, тобто при $a \neq b$ пари $(a;b)$ і $(b;a)$ вважаються різними: в даному випадку кажуть, що пари впорядковані. Як правило бінарні відношення позначають буквами ρ, σ, τ і ін.

Бінарні відношення можна задати, перераховуючи всі пари, що входять в нього; за допомогою булевих матриць; за допомогою графа; або за допомогою перерізів.

Задання матрицею. Нехай Ω складається з n елементів, R – відношення на Ω. Пронумеруємо множину Ω цілими числами від 1 до n. Побудуємо квадратну таблицю розміру $n \times n$. На перетині i-го рядка і j-го стовбця ставимо одиницю, якщо виконано $x_i R x_j$, і нуль – в протилежному випадку.

Задання графом. Покладемо у взаємно однозначну відповідність елементам скінченної множини Ω вершини графа $x_1,...,x_n$ (при деякій нумерації). Проведемо дугу від x_i до x_j тоді і тільки тоді, коли виконується $x_i R x_j$. Якщо заданий довільний граф G з n вершинами і вибрана нумерація на множині Ω, то тим самим на Ω задається деяке відношення $R=R(G)$ таке, що $x_i R x_j$ виконується тоді і тільки тоді, коли на графі G є дуга (x_i, x_j).

Задання перерізами. Цей спосіб менш поширений, ніж попередні, але він придатний і для задання відношень на нескінченних множинах.

Верхнім перерізом $R^+(x)$ називається множина елементів $y \in \Omega$ таких, що $(y,x) \in R$:

$$R^+(x) = \{y \in \Omega | (y,x) \in R\}. \tag{1}$$

Аналогічно визначається *нижній переріз*:

$$R^-(x) = \{y \in \Omega | (x,y) \in R\}. \tag{2}$$

Таким чином, множина $R^-(x)$ – це множина всіх елементів $y \in \Omega$, з якими фіксований елемент $x \in \Omega$ знаходиться у відношенні R. Множина $R^+(x)$ – це множина всіх елементів $y \in \Omega$, які знаходиться у відношенні R з фіксованим елементом $x \in \Omega$.

1. *Вкладення.* Відношення R_1 вкладено у відношення R_2 (позначається $R_1 \subseteq R_2$), якщо множина пар, для яких виконується відношення R_1, міститься у множині пар, для яких виконується R_2.

2. *Доповнення.* Відношення $\overline{R}$ називається доповненням відношення R, якщо воно виконується для тих і тільки тих пар, для яких не виконується відношення R.

3. *Перетин.* Перетином відношень R_1 і R_2 ($R_1 \cap R_2$) називається відношення, що визначається перетином відповідних підмножин з Ω^2.

4. *Об'єднання.* Об'єднанням відношень R_1 і R_2 ($R_1 \cup R_2$) називається відношення, що визначається об'єднанням відповідних підмножин з Ω^2.

5. *Обернення.* Оберненим до відношення R називається відношення R^{-1}, яке визначається умовою $xR^{-1}y \Leftrightarrow yRx$.

6. *Двоїстість.* Двоїстим до R називається відношення R^d, що визначається формулою $R^d = \overline{R^{-1}}$. Іншими словами, двоїстим до R є відношення R^d доповнення до оберненого до R.

3. *Добуток або композиція.* Добутком відношень R_1 і R_2

називається відношення, що визначається наступним чином: $xR_1 \cdot R_2 y$, якщо існує $z \in \Omega$, для якого $xR_1 z$ і $zR_2 y$, де $R_1 \cdot R_2$ – символ добутку відношень.

Елемент $x \in \Omega$ називається *максимумом по відношенню R*, заданому на Ω, якщо для всіх $y \in \Omega$ виконується xRy. Аналогічно, $x \in \Omega$ називається *мінімумом по відношенню R*, заданому на Ω, якщо для всіх $y \in \Omega$ виконується yRx. Максимуми і мінімуми по відношенню *R* можуть існувати або не існувати.

Елемент $x \in \Omega$ називається *мажорантою по відношенню R*, заданому на Ω, якщо для всіх $y \in \Omega$ виконується $y\bar{R}x$. Елемент $x \in \Omega$ називається *мінорантою по відношенню R*, заданому на Ω, якщо для всіх $y \in \Omega$ виконується $x\bar{R}y$.

ЗАВДАННЯ

1. На множині Ω={А. Карпов, Л. Портиш, Я. Тімман, Г. Сосонко, Б. Спаский, М. Таль, В. Горт, Б. Ларсен, У. Андерсен, З. Ріблі, Р. Хюбнер, Л. Кавалек} учасників шахового турніру задано бінарного відношення “*x* – переможець *y*”:

(А. Карпов; Я. Тімман); (А. Карпов; Б. Спаский); (А. Карпов; У. Андерсен); (А. Карпов; З. Ріблі); (А. Карпов; Р. Хюбнер); (Л. Портиш; М. Таль); (Л. Портиш; Б. Ларсен); (Л. Портиш; Л. Кавалек); (Я. Тімман; Б. Ларсен); (Я. Тімман; Р. Хюбнер); (Я. Тімман; Л. Кавалек); (Г. Сосонко; З. Ріблі); (Б. Спаский; Б. Ларсен); (Б. Спаский; У. Андерсен); (Б. Спаский; З. Ріблі); (М. Таль; Б. Спаский); (Б. Ларсен; А. Карпов); (Б. Ларсен; В. Горт); (Б. Ларсен; Р. Хюбнер); (З. Ріблі; Б. Ларсен); (Р. Хюбнер; Л. Кавалек).

Представити бінарне відношення у вигляді:

– булевої матриці;

– графа;

– верхнього і нижнього перерізів

2. Описати словесно та зобразити на графіку кожне з наступних множин (відношень на множині дійсних чисел):

1) $\left\{\left\langle x,y\right\rangle \in E_2 \middle|\ x^2+y^2=1\right\}$;7) $\left\{\left\langle x,y\right\rangle \in E_2 \middle|\ x \geq y\right\}$;

2) $\left\{\left\langle x,y\right\rangle \in E_2 \middle|\ y=2x,\ y=3x\right\}$;8) $\left\{\left\langle x,y\right\rangle \in E_2 \middle|\ x^2+4y^2=1\right\}$;

3) $\left\{\left\langle x,y\right\rangle \in E_2 \middle|\ x^2-y^2=0\right\}$;9) $\left\{\left\langle x,y\right\rangle \in E_2 \middle|\ |x|+2|y|=y\right\}$;

4) $\{\langle x,y\rangle\in E_2|\ |x|=|y|\}$;10) $\{\langle x,y\rangle\in E_2|\ x^2+y^2>1,\ x>0\}$;

5) $\{\langle x,y\rangle\in E_2|\ x<y\}$;11) $\{\langle x,y\rangle\in E_2|\ y\ge 0,\ y\le x,\ x+y\le 1\}$;

6) $\{\langle x,y\rangle\in E_2|\ x^2+y^2\ge 1\}$;12) $\{\langle x,y\rangle\in E_2|\ x=y\}$;

3. Виписати верхні і нижні перерізи для відношень $R\subseteq E_2$ з пп. 1), 2), 4), 6), 7), 11) задачі 2.

4. В задачі 2 вказати всі пари вкладених відношень

5. В задачі 2 вказати всі пари взаємно доповнювальних відношень.

6. Для відношень 1)-5) із задачі 2 виписати обернені і двоїсті відношення.

7. Які з відношень задачі 2 є транзитивними.

8. Нехай відношення *R* задано на множині $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ такою матрицею:

$$R=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Побудувати відповідні йому обернене відношення та доповнення.

9. Знайти максимуми і мінімуми, мажоранти і міноранти по відношенню із задачі 1.

Лабораторна робота №2.
Функції вибору.

Теоретичні відомості

Функцією вибору C, задану на Ω, називають відображення, що зіставляє кожному $X \subseteq \Omega$ його підмножину $C(X) \subseteq X$.

Нехай на Ω задане бінарне відношення R і для $x, y \in \Omega$ виконується xRy. Будемо вважати, що для вибору надана множина $X = \{x, y\}$.

Розгляд всіх пар елементів з Ω, для яких виконується xRy породжує на Ω дві різні функції вибору:

$$C^R(X) = \left\{x \in X \middle| \ \forall y \in X \ \ y\bar{R}x\right\}, \tag{1}$$

$$C_R(X) = \left\{x \in X \middle| \ \forall y \in X \ \ xRy\right\}. \tag{2}$$

Функції вибору $C^R(X)$ і $C_R(X)$, породжені бінарними відношенням R називають *блокуванням* і *перевагою* відповідно.

Нехай $\Omega = \{x_1, \ldots, x_N\}$, $X \subseteq \Omega$. Зіставимо кожному елементу булеву змінну β_i. Встановимо взаємно однозначну відповідність між підмножинами Ω та векторами довжини N з компонентами 0 і 1 за формулами

$$\beta(X) = \langle \beta_1(X), \ldots, \beta_N(X) \rangle, \tag{3}$$

$$\beta_i(X) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x_i \in X, \\ 0, \text{ якщо } x_i \notin X. \end{cases} \tag{4}$$

Множині Ω відповідає вектор $\beta(\Omega) = \langle 1, \ldots, 1 \rangle$, а множині $\varnothing$ – вектор $\beta(\varnothing) = \langle 0, \ldots, 0 \rangle$.

Нехай на Ω задана функція вибору C. Розглянемо сімейство функцій від $N-1$ змінних

$$f_1(\gamma_1, \ldots, \gamma_{N-1}), \ldots, f_N(\gamma_1, \ldots, \gamma_{N-1}), \tag{5}$$

яку побудоване за наступним правилом:

$$\beta_i(X) \wedge f_i(\beta(X)) = 1 \Leftrightarrow x_i \in C(X), \tag{6}$$

де
$$\begin{aligned} &f_i(\beta) = f_i(\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \ldots, \gamma_N), \ i \neq \overline{1, N}, \\ &f_1(\beta) = f_1(\beta_2, \ldots, \gamma_N), \ \ f_N(\beta) = f_N(\beta_1, \ldots, \gamma_{N-1}). \end{aligned} \tag{7}$$

Логічною формою функції вибору C (ЛФВ(C)) називається сімейство функцій $\langle f_1,\ldots,f_N\rangle$ від $N-1$ змінних, побудоване за допомогою формули (6).

1. *Об'єднанням функцій вибору* C_1 і C_2 називається функція C, що визначається формулою

$$C(X)=C_1(X)\cup C_2(X);\tag{8}$$

2. *Перерізом функцій вибору* C_1 і C_2 називається функція C, що визначається формулою

$$C(X)=C_1(X)\cap C_2(X);\tag{9}$$

3. *Доповненням функції* C_1 називається функція $\overline{C}_1$, що визначається формулою

$$\overline{C}_1(X)=X\setminus C_1(X).\tag{10}$$

Між введеними операціями і операціями над ЛФВ існує відповідність.

Теорема 1. *Нехай а)* $C=C_1\cup C_2$*; б)* $C=C_1\cap C_2$*; в)* $C=\overline{C}_1$*. Тоді для довільного* $i=\overline{1,N}$

$$\text{а) } f_i^C=f_i^{C_1}\vee f_i^{C_2}\text{; б) } f_i^C=f_i^{C_1}\wedge f_i^{C_2}\text{; в) } f_i^C=\overline{f}_i^{C_1}.$$

4. *Композицією (добутком) функцій вибору* C_1 і C_2 називається функція C, що визначається рівністю

$$C(X)=C_2(C_1(X)).$$

Твердження 2. *Нехай* $C=C_1\cdot C_2$*. Тоді*

$$f_i^{C_1C_2}=f_i^{C_1}(\beta_1,\ldots,\beta_{i-1},\beta_{i+1},\ldots,\beta_N)\wedge f_i^{C_2}\big(\beta_1\wedge f_1^{C_1}(\beta_2,\ldots,\beta_{i-1},1,\beta_{i+1},\ldots,\beta_N),\ldots$$
$$\ldots,\beta_{i-1}\wedge f_{i-1}^{C_1}(\beta_1,\ldots,\beta_{i-2},1,\beta_{i+1},\ldots,\beta_N),\beta_{i+1}\wedge f_{i+1}^{C_1}(\beta_1,\ldots,\beta_{i-1},1,\beta_{i+2},\ldots,\beta_N),\ldots$$
$$\ldots,\beta_N\wedge f_N^{C_1}(\beta_1,\ldots,\beta_{i-1},1,\beta_{i+1},\ldots,\beta_{N-1})\big).$$

Приклад 1 на побудову ЛФФВ(C).

Нехай $\Omega=\{x_1,x_2,x_3\}$ і задано функцію вибору C так: $C(x_i)=x_i$, $C(x_i,x_j)=x_k$, де k = min{i, j}, $C(\Omega)=x_1$ (див. табл. 1). Побудуємо табл. 2-3, що задають булеві функції f_i, $i=\overline{1,3}$.

За таблицями 2-4 побудуємо розклад функцій у досконалу диз'юнктивну нормальну форму:

$$f_1(\beta_2,\beta_3)\equiv1,\ \ f_2(\beta_1,\beta_3)=\overline{\beta}_1\overline{\beta}_3\vee\overline{\beta}_1\beta_3=\overline{\beta}_1(\overline{\beta}_3\vee\beta_3)=\overline{\beta}_1,\ \ f_3(\beta_1,\beta_2)=\overline{\beta}_1\overline{\beta}_2$$

Таблиця 1

X	$C(X)$	$\beta(X)$	$\beta(C(X))$
x_1	x_1	(1,0,0)	(1,0,0)
x_2	x_2	(0,1,0)	(0,1,0)
x_3	x_3	(0,0,1)	(0,0,1)
x_1,x_2	x_1	(1,1,0)	(1,0,0)
x_1,x_3	x_1	(1,0,1)	(1,0,0)
x_2,x_3	x_2	(0,1,1)	(0,1,0)
x_1,x_2,x_3	x_1	(1,1,1)	(1,0,0)

Таблиця 2

β_2	β_3	f_1
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Таблиця 3

β_1	β_3	f_2
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

Таблиця 4

β_1	β_2	f_3
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Приклад 2 на побудову функції вибору за її логічною формою. Нехай $\Omega=\{x_1,x_2,x_3\}$ і задано сім'ю булевих функцій:

$$f_1(\gamma_1,\gamma_2)=\gamma_1,\ \ f_2(\gamma_1,\gamma_2)=\gamma_2,\ \ f_3(\gamma_1,\gamma_2)\equiv 0$$

Перенумеруємо змінні відповідно до (2.11):

$$f_1(\beta_2,\beta_3)=\beta_2,\ \ f_2(\beta_1,\beta_3)=\beta_3,\ \ f_3(\beta_1,\beta_2)\equiv 0$$

отримані функції зведемо у табл. 5-7.

Таблиця 5

β_2	β_3	f_1
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Таблиця 6

β_1	β_3	f_2
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Таблиця 7

β_1	β_2	f_3
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Використовуючи табл. 1.3.6-1.3.8 і формулу (1.3.3), отримаємо табл. 1.3.9.

Таблиця 8

X	**β₁**	**β₂**	**β₃**	$\boldsymbol{\beta_1 f_1}$	$\boldsymbol{\beta_2 f_2}$	$\boldsymbol{\beta_3 f_3}$	***C(X)***
x_1	1	0	0	0	0	0	$\varnothing$
x_2	0	1	0	0	0	0	$\varnothing$
x_3	0	0	1	0	0	0	$\varnothing$
x_1,x_2	1	1	0	1	0	0	x_1
x_1,x_3	1	0	1	0	0	0	$\varnothing$
x_2,x_3	0	1	1	0	1	0	x_2
x_1,x_2,x_3	1	1	1	1	1	0	x_1,x_2

ЗАВДАННЯ

1. Нехай $\Omega=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ і задана функція вибору

$$C(x_i)=x_i\,;\ C(x_i,x_j)=x_k \text{ , де } k=\min\{i,j\}\,;$$

$$C(x_i,x_j,x_k)=\{x_i,x_j,x_k\}\backslash x_r \text{ , де } r=\max n\{i,j,k\}\,; C(\Omega)=x_1\,.$$

Побудувати для неї логічну форму.

2. Нехай $\Omega=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ і задано сімейство булевих функцій

$$f_1(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\gamma_1\vee\overline{\gamma}_2\,,\ f_2(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)\equiv 1\,,\ f_3(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)\equiv 0\,,\ f_4(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\gamma_2\,,$$

$$ЛФФВ(C)=\langle f_1,f_2,f_3,f_4\rangle\,.$$

Визначити функцію вибору за її логічною формою.

3. Нехай $\Omega=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$; $f_1=\overline{\gamma}_1$, $f_2=\overline{\gamma}_1\overline{\gamma}_2\overline{\gamma}_3$, $f_3\equiv 1$, $f_4=\overline{\gamma}_2\overline{\gamma}_3$. Побудувати функцію вибору C за її $ЛФФВ(C)=\langle f_1,f_2,f_3,f_4\rangle$.

4. Знайти перетин і об’єднання функцій вибору із задач 1 і 2.

5. Знайти композицію функцій вибору із задач 1 і 2 та логічну форму отриманої функції.

6. Знайти функцію вибору, яка буде доповненням до функції з задачі 3.

Лабораторна робота №3. Бінарні відношення на E_m. Координатні відношення

Теоретичні відомості

Вирішення практичної задачі вибору може виявитись ускладненим при заданні альтернатив у вигляді елементів абстрактної множини, оскільки воно може вимагати більш детального їх опису. З цією метою кожну альтернативу представляють у критеріальному просторі. Для формального опису критеріального простору використовують евклідовий простір E_m. *Бінарним відношенням на* E_m є відношення з областю задання E_m. *Інваріантним відносно перенесення* називається таке відношення, для якого верхній переріз в будь-якій точці можна отримати паралельним перенесенням верхнього перерізу у будь-якій іншій точці, тобто для довільних $x^1,\ x^2 \in E_m$ виконується

$$R^+\left(x^1\right)=R^+\left(x^2\right)+x^1-x^2 . \qquad (1)$$

Твердження 1. *Відношення R інваріантне тоді і лише тоді, коли*

$$\left[x^1-x^2=x^3-x^4\right]\Rightarrow\left[x^1Rx^2\Leftrightarrow x^3Rx^4\right]. \qquad (2)$$

Клас відношень, інваріантних відносно перенесення, позначимо ***I***; для вказівки розмірності простору, на якому задані відношення з ***I***, будемо записувати $\boldsymbol{I}_m$.

Твердження 2. *Нехай* $R\in\boldsymbol{I}$. *Тоді*

1. $R^-(0)=-R^+(0)$.
2. $[R\ \textit{транзитивне}]\Leftrightarrow\left[a,b\in R^-(0)\Rightarrow(a+b)\in R^-(0)\right]$.
3. $[R\ \textit{ациклічне}]\Leftrightarrow\left[a_1,\ldots,a_k\in R^-(0)\Rightarrow\sum_{i=1}^{k}a_i\notin R^+(0)\right]$.

В силу інваріантності відношень $R\in\boldsymbol{I}$ для їх задання достатньо описати верхній і нижній переріз у початку координат.

Твердження 3. $$R_1^-(0)\subseteq R_2^-(0)\Rightarrow R_1\subseteq R_2 . \qquad (3)$$

Твердження 4. *Для будь-якого інваріантного відношення має місце рівність:*

$$R^+(x)=2x-R^-(x) . \qquad (4)$$

Конусом називають множину К точок з E_m, що володіють наступними властивостями:

а) якщо $x \in K$ і $\alpha > 0$, то $\alpha x \in K$;

б) якщо $x \in K$ і $y \in K$, то $(x + y) \in K$.

Твердження 5. *Відношення* R_K *інваріантне для будь-якого конуса К.*

Відношення Парето (P):

$$(\forall x, y \in \Omega)\ [xPy] \Leftrightarrow \left\{ \left(\forall\ j = \overline{1,m}\right) \left[x_j \geq y_j\right]\ i\ (\exists\ j_0 \in \{1,...,m\}) \left[x_{j_0} > y_{j_0}\right] \right\}.$$

Множиною Парето на $\Omega \subseteq E_m$ називається множина

$$\Omega^P = \left\{ x \in \Omega \middle| (\forall y \in \Omega)\ y \bar{P} x \right\}.$$

З означення множини випливає, що Ω^P містить тільки ті елементи x^*, для яких $P_\Omega^+\left(x^*\right) = \varnothing$. Бінарне відношення R на E_m називається *раціональним*, якщо $P \subseteq R$.

Нехай на осях координат заданий лінійний порядок, такий, що $k_1 > k_2 > ... > k_m$, де k_i – номер координати на *i*-му місці порядку.

Відношення лексикографії (L):

$(\forall x, y \in E_m)\ [xLy] \Leftrightarrow \left[x_{k_1} > y_{k_1}\right]$, або $\left[x_{k_1} = y_{k_1}\ \text{і}\ x_{k_2} > y_{k_2}\right]$, або … і $[x \neq y]$.

Множина Ω^L складається з єдиного елемента.

ЗАВДАННЯ

1. Обґрунтувати, що $R_K^+(0) = K \setminus \{0\}, R_K^-(0) = -K \setminus \{0\}$.

2. Показати, що для будь-яких точок x^0, $x^* \in E_m$

$$P^-\left(x^0\right) = P^-\left(x^*\right) + x^0 - x^*,\quad P^+\left(x^0\right) = P^+\left(x^*\right) + x^0 - x^*.$$

3. Нехай $\Omega = \left\{x^1, ..., x^6\right\}$; $x_1^1 = 2, x_1^2 = 3, x_1^3 = 1, x_1^4 = 1, x_1^5 = 4, x_1^6 = 5;$ $x_2^1 = 5, x_2^2 = 3, x_2^3 = 4, x_2^4 = 3, x_2^5 = 3, x_2^6 = 4.$ Знайти $P_\Omega^+\left(x^1\right)$, $P_\Omega^+\left(x^2\right)$, $P_\Omega^+\left(x^3\right)$, $P_\Omega^+\left(x^3\right)$, $P_\Omega^+\left(x^4\right)$, $P_\Omega^+\left(x^5\right)$, $P_\Omega^+\left(x^6\right)$.

4. Показати, що для будь-яких точок x^0, $x^* \in E_m$

$$L^-\left(x^0\right) = L^-\left(x^*\right) + x^0 - x^*,\quad L^+\left(x^0\right) = L^+\left(x^*\right) + x^0 - x^*.$$

5. Нехай $\Omega = \left\{x^1, ..., x^{10}\right\}$;

$$x_1^1 = 1, x_1^2 = 4, x_1^3 = 3, x_1^4 = 5, x_1^5 = 2, x_1^6 = 7, x_1^7 = 6, x_1^8 = 8, x_1^9 = -2, x_1^{10} = 0;$$
$$x_2^1 = 7, x_2^2 = 2, x_2^3 = 8, x_2^4 = 0, x_2^5 = -1, x_2^6 = 5, x_2^7 = 3, x_2^8 = 6, x_2^9 = 4, x_2^{10} = 1.$$

Знайти множини Ω^P та Ω^L.

6. Нехай $R=P$. Позначимо через $P(E_m)$ відношення Парето на просторі E_m. Записати ЛФО$\left(P(E_3)\right)$, ГЧ ЛФО$\left(P(E_3)\right)$, ЛФО$\left(P(E_m)\right)$, ГЧ ЛФО$\left(P(E_m)\right)$.

7. Нехай $R=L$. Позначимо через $L(E_m)$ відношення лексикографії на просторі E_m. Записати ЛФО$\left(L(E_3)\right)$, ГЧ ЛФО $\left(L(E_3)\right)$, ЛФО$\left(L(E_m)\right)$, ГЧ ЛФО$\left(L(E_m)\right)$.

Лабораторна робота №4. Статистичні методи обробки експертної інформації

Теоретичні відомості

Суть обробки експертної інформації полягає у знаходженні результуючої оцінки системи за оцінками, що надані експертами. Результати оцінок кожного з експертів можна розглядати як реалізації деякої випадкової величини, що приймає значення з Ω_e, а отже можна застосувати до них методи математичної статистики.

Числові оцінки. Задача полягає у зіставленні системі одного числа. Для її розв'язання використовується експертиза Е1: $\Omega = E_1; \Omega_e = E_1;$ L – експерти ізольовані; Q – зворотній зв'язок відсутній;

$$\phi(x_1,...,x_N) = \sum_{i=1}^{N} x_i \alpha_i \Big/ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \ . \tag{1}$$

Результуючу оцінку знаходять за формулою середньозваженого значення, де $\alpha_i \ (i = \overline{1,N})$ – вага експертів. При відсутності інформації про компетентність експертів можна покласти $\alpha_i = 1 \ (i = \overline{1,N})$. Ступінь узгодженості думок експертів в експертизі Е1 служить дисперсія σ^2:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} (a - a_i)^2 \alpha_i \Big/ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \ . \tag{2}$$

де a_i – оцінка i-го експерта, a – результуюча оцінка.

Експертиза Е1 може бути певним чином модифікована, що підвищує точність оцінювання. Експертиза Е2 характеризується параметрами

$$\Omega_e = E_3,\ \phi\left(x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_1^2, x_2^2, x_3^2, ..., x_1^N, x_2^N, x_3^N\right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_1^i \gamma_1 + x_2^i \gamma_2 + x_3^i \gamma_3}{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3} \alpha_i \Big/ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \ . \tag{3}$$

Інші параметри такі ж як і в експертизі Е1. Ступінь узгодженості між оцінками визначається

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^2 \alpha_i \Big/ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i + \sum_{i=1}^{N} (a - a_i)^2 \alpha_i \Big/ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \ , \tag{4}$$

де $a_i = x_1^i \gamma_1 + x_2^i \gamma_2 + x_3^i \gamma_3$ – середня оцінка i-го експерта,

$\sigma_i^2=(a_3^i-a_1^i)^2/\gamma_4$; γ_4 – ступінь невпевненості експерта у своїй відповіді, a_1^i,a_2^i,a_3^i – інтерпретується як оптимістична, найбільш ймовірна і песимістична оцінки *i*-го експерта, коефіцієнти $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ визначаються емпірично. За однією методикою $\gamma_1=1,\gamma_2=4,\gamma_3=1,\gamma_4=36$, за іншою – $\gamma_1=3,\gamma_2=0,\gamma_3=2,\gamma_4=25$.

В експертизах Е1 і Е2 можна визначити статистичну значимість отриманих результатів. Задавши ймовірність помилки $P_{пом}$, можна вказати інтервал, в якому величина, що оцінюється попадає з ймовірністю $1-P_{пом}$: $\bar{a}-t\sigma/\sqrt{N}\le a\le\bar{a}+t\sigma/\sqrt{N}$, де t має розподіл Стюдента з N–1 ступенем свободи.

Строге ранжування. Задача полягає у зіставленні системі, що оцінюється однієї перестановки. Визначимо експертизу Е3: Ω – множина всіх перестановок; $\Omega_e=\Omega$; L – експерти ізольовані; Q – зворотній зв'язок відсутній. Відображення φ визначається наступним чином. Результати опитування експертів зводяться у таблицю. В *i*-тому рядку місця (ранги), надані *i*-м експертом об'єктам, що проходять ранжування. В $(N+1)$-му рядку стоять суми рангів, отриманих об'єктами від експертів. Всі n об'єктів впорядковуються у відповідності з величиною $r_s=\sum_{j=1}^{N}r_{sj}$ у порядку зростання. Ступінь узгодженості думок експертів визначається за допомогою коефіцієнта конкордації.

Коефіцієнтом конкордації W для випадку строгого ранжування, тобто відсутності рівних рангів у ранжуванні кожного експерта, називається величина

$$W=\frac{12\sum_{i=1}^{n}\left[r_i-\frac{1}{2}N(n+1)\right]^2}{N^2\left(n^3-n\right)}, \tag{5}$$

де n – число об'єктів, N – число експертів.

Нестроге ранжування. Задача полягає у зіставленні системі нестроге ранжування. При цьому деякі об'єкти можуть бути рівноцінними і мати однакові ранги. Експертиза Е4 відрізняється від експертизи Е3 тільки множиною Ω.

Коефіцієнтом конкордації для нестрогого ранжування визначається формулою

$$W=\frac{12\sum_{i=1}^{n}\left[r_i-\frac{1}{2}N(n+1)\right]^2}{N^2\left(n^3-n\right)-N\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{k_i}\left(t_{ij}^3-t_{ij}\right)},\qquad(6)$$

де k_i – число груп рівних рангів, введених *i*-им експертом; t_{ij} – кількість дробових рангів у *j*-й групі, введеної *i*-им експертом.

Якщо компетентність експертів різна і оцінюється додатними нормованими величинами α_j $\left(\sum_{j=1}^{N}\alpha_j=1\right)$ (вагою експертів), то формули (5)-(6) потребують уточнення. Для цього суму рангів розраховують за формулою $r_i=\sum_{j=1}^{N}r_{ij}\alpha_j$. Коефіцієнт конкордації з врахуванням компетентності експертів визначаються формулою (6).

ЗАВДАННЯ

1. (*Числові оцінки*). Десять експертів з вагою $\alpha_1=0{,}5$, $\alpha_2=1$, $\alpha_3=2{,}5$, $\alpha_4=1$, $\alpha_5=3$, $\alpha_6=2{,}5$, $\alpha_7=1{,}5$, $\alpha_8=1$, $\alpha_9=2$, $\alpha_{10}=2{,}5$ оцінюють величину *T*. Від них отримані наступні оцінки: $T_1=24$; $T_2=32$; $T_3=27$; $T_4=35$; $T_5=28$; $T_6=39$; $T_7=33$; $T_8=41$; $T_9=32$; $T_{10}=34$. Знайти результуючу оцінку, ступінь узгодженості думок експертів, статистичну значимість одержаних результатів, якщо ймовірність помилки не перевищує $P_{пм}=0{,}05$.

Приклад. (*Числові оцінки*). Десять експертів з однаковою вагою $\alpha_i=1$ $\left(i=\overline{1,10}\right)$ оцінюють величину *T*. Від них отримані наступні оцінки: $T_1=33$; $T_2=35$; $T_3=32{,}2$; $T_4=34$; $T_5=38$; $T_6=34$; $T_7=37$; $T_8=40$; $T_9=36$; $T_{10}=35{,}5$. Знайти результуючу оцінку, ступінь узгодженості думок експертів, статистичну значимість одержаних результатів, якщо ймовірність помилки не перевищує $P_{пм}=0{,}05$.

Розв’язок. Знаходимо значення $\overline{T}$ та σ^2 за формулами

$$\overline{T}=\sum_{i=1}^{N}T_i\alpha_i\Big/\sum_{i=1}^{N}\alpha_i=35{,}47,\ \sigma^2=\sum_{i=1}^{N}\left(\overline{T}-T_i\right)^2\alpha_i\Big/\sum_{i=1}^{N}\alpha_i=5{,}0881,\ \sigma=2{,}2557.$$

Використовуючи значення ймовірності похибки $P_{пм}=0{,}05$, за таблицями розподілу Стюдента визначаємо величину *t*: число степенів свободи дорівнює $N-1=9$; $t=2{,}262$; $\Delta = t\sigma/\sqrt{N} = 1{,}6135$. Таким чином з ймовірністю 0,95 величина T знаходиться в інтервалі $[33{,}8565;37{,}0835]$.

3. (*Числові оцінки*). Десять експертів з однаковою вагою $\alpha_i = 1$ $\left(i=\overline{1,10}\right)$ оцінюють величину T. Від них отримані наступні оцінки:

Оцінки	Значення T									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Оптимістична	33	36	31	35	36	30	32	42	44	35
Найбільш ймовірна	30	32	29	28	35	26	28	38	40	33
Песимістична	26	30	25	26	33	22	25	32	35	29

Знайти результуючу оцінку, ступінь узгодженості думок експертів, статистичну значимість одержаних результатів, якщо ймовірність помилки не перевищує $P_{пм} = 0{,}05$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 4$, $\gamma_3 = 1$, $\gamma_4 = 36$.

4. (*Строге ранжування*). Проведена експертиза з оцінки технологічного процесу виплавляння сталі в конверторі. Заданий список із шести показників, що впливають на процес. Десять експертів здійснили ранжування показників за важливістю. Результати їх роботи приведені в таблиці 1. Розрахувати коефіцієнт конкордації та визначити статистичну значимість ранжування.

Таблиця 1.

Показники	Номери експертів									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Шум	5	2	6	6	6	5	4	5	6	6
Колір футеровки	4	5	4	4	5	3	5	6	5	4
Колір полум'я	2	1	2	3	4	2	1	1	1	2
Колір диму	1	4	3	2	2	4	2	2	3	3
Якість диму	3	3	1	1	1	1	3	3	2	1
Іскри	6	6	5	5	3	6	6	4	4	5

Приклад. (*Строге ранжування*). Проведена експертиза з оцінки технологічного процесу виплавляння сталі в конверторі. Заданий список із шести показників, що впливають на процес. Десять експертів здійснили ранжування показників за важливістю.

Результати їх роботи приведені в таблиці 2. Розрахувати коефіцієнт конкордації та визначити статистичну значимість ранжування.

Таблиця 2.

Показники	Номери експертів										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum r_{ij}$
Шум	6	1	6	6	6	6	4	5	6	6	52
Колір футеровки	4	5	4	5	5	3	5	6	4	5	46
Колір полум'я	2	2	2	3	3	2	1	1	1	2	19
Колір диму	1	4	3	2	2	4	3	3	3	3	28
Якість диму	3	3	1	1	1	1	2	2	2	1	17
Іскри	5	6	5	4	4	5	6	4	5	4	48

Розв'язок. Знаходимо суми рангів $r_1 = 52$, $r_2 = 46$, $r_3 = 19$, $r_4 = 28$, $r_5 = 17$, $r_6 = 48$. Знаходимо r_{icp} за формулою

$$r_{i\,cp} = \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{n} = \frac{N(n+1)}{2} = 35\,.$$

Використовуючи знайдені значення, знаходимо коефіцієнт конкордації за формулою:

$$W = \frac{12\sum_{i=1}^{n}\left[r_i - \frac{1}{2}N(n+1)\right]^2}{N^2\left(n^3 - n\right)} = 0{,}690\,.$$

5. (*Нестроге ранжування*). Визначити статистичну значимість ранжування у задачі 4, якщо ймовірність того, що отримане ранжування є випадковою, $P_{пм} = 0{,}01$.

Лабораторна робота №5. Алгебраїчний метод обробки експертної інформації

Теоретичні відомості

Суть алгебраїчних методів обробки експертної інформації полягає у введенні деякої відстані між оцінками. Задача полягає у зіставлені системі нестрогого ранжування. Для цього використовується експертиза Е6: Ω – множина всіх нестрогих ранжувань *n* об'єктів; $\Omega_e = \Omega$; *L* – експерти ізольовані; *Q* – зворотній зв'язок відсутній. Відображення φ визначається наступним чином. Результуюча оцінка A_0 знаходиться за формулою

$$A_0 \in \underset{A \in \Omega}{Arg\min} \sum_{i=1}^{N} d\left(A, A^i\right),$$

де *d* – відстань між ранжуваннями.

Ранжування (тобто елементи Ω) будемо задавати матрицями $A = (a_{ij})$, в яких $a_{ij} = 1$ тоді і тільки тоді, коли *i*-ий об'єкт передує *j*-му; якщо об'єкти *i* та *j* рівноцінні, то $a_{ij} = 0$; крім того, $a_{ii} = 0$ $(i = \overline{1,n})$; $a_{ij} = 1 \Rightarrow a_{ji} = -1$. Будемо говорити, що ранжування *C* знаходиться *між ранжуваннями A і B*, якщо $a_{ij} \le c_{ij} \le b_{ij}$ для всіх $i, j = \overline{1,n}$ або $a_{ij} \ge c_{ij} \ge b_{ij}$ для всіх $i, j = \overline{1,n}$.

Відстань *d* між ранжуваннями вводиться аксіоматично:

1) $d(A,B) \ge 0$, причому $d(A,B) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $A = B$.
2) $d(A,B) = d(B,A)$.
3) $d(A,B) + d(B,C) \ge d(A,C)$, причому рівність досягається тоді і тільки тоді, коли *B* знаходиться між *A* і *C*.
4) Відстань *d* інваріантна щодо позначень.
5) Якщо два ранжування відрізняються один від одного тільки на частині об'єктів, то відстань між вихідними ранжуваннями дорівнює відстані між ранжуваннями тільки цих об'єктів.
6) Мінімальна додатна відстань між ранжуваннями дорівнює одиниці.

Аксіоми 1)-6) однозначно визначають відстань $d(A,B)$ при будь-яких ранжуваннях $n \geq 2$, яка визначається формулою

$$d(A,B)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left|a_{ij}-b_{ij}\right|. \tag{1}$$

Ранжування A_0 називається *медіаною Кемені-Снелла* ранжувань $A^1,...,A^N$. Поряд з медіаною Кемені-Снелла в якості групової думки використовують ранжування

$$A_0 \in Arg\min_{A\in\Omega}\sum_{i=1}^{N}d^2\left(A,A^i\right), \tag{2}$$

яке називають *середнім значенням*.

ЗАВДАННЯ

1. (*Алгебраїчний метод*). Трьома експертами впорядковані три об'єкти і отримано ранжування у вигляді $A=\langle x,y,z\rangle$, $B=\langle y,x,z\rangle$, $C=\langle z,x,y\rangle$, яким відповідають матриці.

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Обчислити відстані між ранжуваннями та знайти медіану Кемені-Снелла.

Приклад. (*Алгебраїчний метод*). Трьома експертами впорядковані три об'єкти і отримано ранжування у вигляді $A=\langle x,y,z\rangle$, $B=\langle x,y,z\rangle$, $C=\langle y,x,z\rangle$, яким відповідають матриці.

$$A=B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Обчислити відстані між ранжуваннями та знайти середнє значення.

Розв'язання. Користуючись виразом $d\left(A,B\right)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left|a_{ij}-b_{ij}\right|$, обчислимо відстані:

$d\left(A,B\right)=0$, оскільки $a_{ij}=b_{ij}$ $\left(i,j=\overline{1,3}\right)$, $d\left(A,C\right)=d\left(B,C\right)=2$.

Якщо взяти в якості медіани ранжування *A* або *B*, то сума відстаней від неї до всіх ранжувань дорівнює 2. Якщо взяти будь-яке інше ранжування, то сума відстаней від неї до всіх інших виявиться більше. Наприклад, для ранжування $D = \langle x, z, y \rangle$ матриця має вигляд

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

відстані $d(A, D) = d(B, D) = 2,\ d(C, D) = 4$. Сума відстаней від D до вихідних ранжувань A, B, C дорівнює 8.

2. Знайти середнє значення за вихідними даними задачі 1.

3. Знайти медіани і середні значення для наступних ранжувань:

а) $A = \langle x, y, z \rangle$, $B = \langle z, x, y \rangle$, $C = \langle x, z, y \rangle$;

б) $A = \langle x, y, z \rangle$, $B = \langle x, y \sim z \rangle$, $C = \langle y \sim z, x \rangle$.

Тут знак ~ означає еквівалентність об’єктів.

4. Побудувати алгоритми обчислення медіан і середніх значень.

Лабораторна робота №6. Методи шкалювання обробки експертної інформації

Теоретичні відомості

Одномірне шкалювання. Введемо експертизу Е8: $\Omega = E_n$; Ω_e – така ж, як у Е5; L – експерти ізольовані; Q – зворотній зв’язок відсутній. Для побудови відображення φ здійснюють наступні операції.

1) Обчислюють матрицю $P = \sum_{j=1}^{N} A^j / N$, де A^j – ранжування, надане j-им експертом. Елемент p_{ij} матриці P інтерпретують як ймовірність переваги i-го об’єкта j-му.

2) Знаходять Z_{ij} за формулою

$$G(Z_{ij}) = p_{ij} = \int_{-\infty}^{Z_{ij}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \qquad (1)$$

з використанням таблиць нормального розподілу, виходячи з відомих p_{ij}. Величина Z_{ij} вимірюється в одиницях стандартного відхилення.

3) Утворюють матрицю $Z = (Z_{ij})$. Підраховують суму оцінок $Z_i = \sum_{j=1}^{n} Z_{ij}$ і середнє значення $\bar{Z}_i = Z_i / n$. Величину $\bar{Z}_i$ приймають за шукану оцінку об’єкта A_i $(i = \overline{1,n})$.

4) Визначають величини $\bar{P}_i = G(\bar{Z}_i)$ за формулою (1), які нормують за формулою

$$P_i^* = \bar{P}_i \Big/ \sum_{j=1}^{n} \bar{P}_j \, ;$$

P_i^* – називають *показниками відносної важливості об’єктів*.

5) Здійснюють перевірку на несуперечливість. Для цього за формулою (1) знаходять $\bar{p}_{ij} = G(\bar{Z}_i - \bar{Z}_j)$ і обчислюють різниці Δ_{ij} між отриманими значеннями $\bar{p}_{ij}$ і вихідними p_{ij}. Визначають середнє відхилення

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} \left|\Delta_{ij}\right| / n(n-1);$$

якщо воно мале, то це свідчить про несуперечливість отриманих експертних ранжувань.

ЗАВДАННЯ

1. (*Одномірне шкалювання*). Десять спеціалістів здійснили оцінку відносної важливості чотирьох параметрів літака. Результати експертизи приведені в таблиці 1.

Таблиця 1.

Параметри	Експерти										Сума рангів	Середній ранг
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
S	4	1	3	1	3	3	2	3	2	2	24	2,4
R	2	2	1	2	2	1	3	4	3	1	21	2,1
C	1	4	2	3	1	2	4	2	1	3	23	2,3
P	3	3	4	4	4	4	1	1	4	4	32	3,2

Користуючись алгоритмом одномірного шкалювання визначити показник відносної важливості параметрів та здійснити перевірку на несуперечливість.

Приклад. (*Одномірне шкалювання*). Десять спеціалістів здійснили оцінку відносної важливості чотирьох параметрів літака. Результати експертизи приведені в табл. 1.

Таблиця 1.

Параметри	Експерти										Сума рангів	Середній ранг
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
S	3	1	3	1	3	3	3	3	2	2	24	2,4
R	2	2	1	2	1	1	2	4	4	1	20	2,0
C	1	3	2	3	2	2	4	1	1	3	22	2,2
P	4	4	4	4	4	4	1	2	3	4	34	3,4

Користуючись алгоритмом одномірного шкалювання визначити показник відносної важливості параметрів та здійснити перевірку на несуперечливість.

Розв'язок. Сформуємо матрицю A розміру 4×4, в якій вказано число випадків, коли один параметр важливіший іншого (табл. 2). Розділивши елементи матриці A на 10, отримаємо матрицю P. З її елементами здійснимо необхідні відповідно до методу одномірного шкалювання операції. Матриця *Z*, величини Z_i і оцінки $\bar{Z}_i$ наведені у таблиці 3. Величини, необхідні для розрахунку відносної важливості параметрів, наведені в таблиці 4.

Таблиця 2.

	S	*R*	*C*	*P*
S	—	4	4	8
R	6	—	7	7
C	6	3	—	9
P	2	3	1	—

Таблиця 3.

Параметр *i*	Параметр *j*					
	S	*R*	*C*	*P*	Z_i	$\bar{Z}_i$
S	0	–0,25334	–0,25334	0,84161	0,33493	0,08373
R	0,25334	0	0,52441	0,52441	1,30216	0,35554
C	0,25334	–0,52441	0	1,28155	1,01048	0,25262
P	–0,84161	–0,52441	–1,28155	0	–2,64757	–0,66189

Таблиця 4.

Параметр *i*	$\bar{Z}_i$	$\bar{P}_i = G\left(\bar{Z}_i\right)$	Нормована відносна важливість P_i^*
S	0,08373	0,53336	0,2647
R	0,32554	0,62761	0,3115
C	0,25262	0,59972	0,2977
P	–0,66189	0,25403	0,1261

Здійснимо перевірку на несуперечливість. Необхідні дані зібрані в таблиці 5. Середнє відхилення в даному випадку дорівнює 0,45482/6=0,0758. Найбільше за абсолютною величиною відхилення p_{ij} від $\bar{p}_{ij}$ дорівнює 0,17094; це свідчить про несуперечливість ранжувань.

Таблиця 5.

$\bar{Z}_i - \bar{Z}_j$	$\bar{p}_{ij}$ розрахункове	p_{ij} вихідне	Відхилення Δ_{ij}
$\bar{Z}_1 - \bar{Z}_2 = 0,08373 - 0,32554 = -0,24181$	0,40447	0,400	0,0047
$\bar{Z}_1 - \bar{Z}_3 = 0,08373 - 0,25262 = -0,16889$	0,43297	0,400	0,032295
$\bar{Z}_1 - \bar{Z}_4 = 0,08373 - (-0,6189) = 0,74562$	0,77205	0,800	–0,02795
$\bar{Z}_2 - \bar{Z}_3 = 0,32554 - 0,25262 = 0,07292$	0,52906	0,700	–0,17094
$\bar{Z}_2 - \bar{Z}_4 = 0,32554 - (-0,66189) = 0,98743$	0,83828	0,700	0,13828
$\bar{Z}_3 - \bar{Z}_4 = 0,25262 - (-0,66189) = 0,91451$	0,81977	0,900	–0,08023

Лабораторна робота №7. Методи розв’язку задач багатокритеріальної оптимізації

Теоретичні відомості

Розглянемо задачу багатокритеріальної оптимізації у такій постановці:

$$y_i = f_i(x) \to \max,\ i = \overline{1,m};\quad x \in X \subseteq E_n,$$

де X – множина допустимих розв’язків (альтернатив), f_i – цільові функції. Вектор $y(x) = (f_1(x),..., f_m(x))$ будемо називати оцінкою допустимого розв’язку (альтернативи) x. Множину оцінок, яка відповідає всім альтернативам будемо позначати через $Y = \{y \in E_m \mid y = y(x), x \in X\}$ і називатимемо множиною допустимих оцінок. Простір n-вимірних векторів $x \in E_n$ будемо називати простором розв’язків (альтернатив, планів, параметрів), простір m-вимірних векторів $y \in E_m$ називатимемо простором критеріїв (оцінок). Порівняння альтернатив будемо проводити на основі зіставлення оцінок, які їм відповідають:

1) x' рівноцінний x'' $(x' \sim x'')$, якщо $y' = y''$, тобто $y_i' = y_i'', \forall i = \overline{1,m}$;
2) x' нерівноцінний x'' $(x' \neg\sim x'')$, якщо $y' \neq y''$, тобто $\exists i: y_i' \neq y_i''$;
3) x' переважає (кращий) x'' $(x' \geq x'')$, якщо $y' \geq y''$, тобто $y_i' \geq y_i'', \forall i = \overline{1,m}$;
4) x' строго переважає x'' $(x' > x'')$, якщо $y' > y''$, тобто $y' \geq y'', y' \neq y''$.

Якщо для альтернатив x' і x'' не виконується жодне зі співвідношень 1-4 (тобто $\exists i, j$: $y_i' > y_i''$, $y_j' < y_j''$), то альтернативи x' і x'' називають непорівняльними.

Визначимо множини ефективних альтернатив та ефективних оцінок відповідно:

$$E(X) = \{x \in X \mid \neg\exists x': x' > x\},\quad E(Y) = \{y = y(x) \mid x \in E(x)\}.$$

Проблема розв’язку задач багатокритеріальної оптимізації полягає у заданні деякого правила вибору на множині ефективних альтернатив (оцінок).

Метод ідеальної точки. Визначимо функцію вибору C_I на множині *Y* наступним чином. Покладемо $a_i = \max_{y_i \in Y_i} y_i$, $i = \overline{1,m}$. Таким чином, a_i є максимально можливим значенням по *i*-му критерію. Точка $y \in Y$, така, що $y_i = a_i$, є розв'язком звичайної однокритеріальної задача оптимізації. Припускається, що *Y* – замкнута обмежена множина в E_m, тому розв'язки задачі існують.

Покладемо $a = \langle a_1,...,a_m \rangle$. Точка *a* називається *ідеальною.* Суть назви пов'язаний з тим, що такі точки оптимальні відразу за всіма критеріями: отримати більше значення ні по одному критерію неможливо. Очевидно, що для всіх $y \in Y$ справедливо

$$aPy. \tag{1}$$

Як правило, ідеальна точка *a* не належить *Y*. Правило вибору у цьому методі полягає у знаходженні альтернативи, яка буде найближчою до ідеальної точки в деякій метриці.

Задаємо для всіх точок $y \in Y$ функцію, що є відстанню між точками *x* і *a*:

$$\rho(y,a) = \left[\sum_{i=1}^{m} (a-y)^2 \right]^{1/2}. \tag{2}$$

Введені поняття дозволяють задати функцію вибору C_I формулою

$$C_I(Y) = \arg\min_{Y} \rho(y, a(Y)), \tag{3}$$

де $a(Y)$ – точка, ідеальна для множини *Y*.

Розв'язок загальної задачі оптимізації, в якій принцип оптимальності виражається функцією C_I, зводиться до розв'язання звичайної однокритеріальної задачі оптимізації.

$$\rho(y,a) \to \min_{Y}. \tag{4}$$

Теорема 1. *Для будь-якої* $Y \subseteq E_m$ *має місце включення*

$$C_I(Y) \subseteq \Omega^P. \tag{5}$$

Метод ідеальної точки використовують і при інших функціях відстані. Нехай $a, b \in E_m$. Покладемо

$$\rho_s(a,b)=\left[\sum_{i=1}^{m}|a_i-b_i|^s\right]^{1/s}. \qquad (6)$$

При $s=2$ отримаємо звичайну евклідову відстань. При $s=1$ маємо

$$\rho_1(a,b)=\sum_{i=1}^{m}|a_i-b_i|.$$

При $s=\infty$ отримаємо *рівномірну метрику*

$$\rho_\infty(a,b)=\max_i|a_i-b_i|. \qquad (7)$$

Вибір з урахуванням кількості домінуючих критеріїв. Тут правило вибору враховує взаємні співвідношення (типу більше й менше) між оцінками альтернатив і не враховує величини різниць оцінок за критеріями. Розглянемо альтернативи $x,y\in\Omega$ і визначимо число критеріїв, за якими *y* має більші оцінки, ніж *x*. Можна знайти y^*, для якого це число максимальне, і задати числову функцію на множині альтернатив Ω, яка приймає значення, що відповідають знайденим максимальним числам. З допомогою такої функції можна побудувати функцію вибору C^K, яка враховує число домінуючих критеріїв. Нехай $q(x,y)$ – число критеріїв, за якими варіант *y* переважає варіант *x*. Покладемо для $X\subseteq\Omega$

$$Q_X(x)=\max_{y\in X}q(x,y). \qquad (8)$$

Величина $Q_X(x)$ називається *домінуючим показником варіанту x при пред'явлені X*. Значенням функції вибору $C^K(X)$ є підмножина усіх варіантів $x\in X$ з мінімальним в X домінуючим показником:

$$C^K(X)=\{x\in X|\,Q_X(x)=\min_{z\in X}Q_X(z)\}. \qquad (9)$$

Величину $Q_\Omega=\min_{x\in X}Q_\Omega(x)$ називають *домінуючим показником множини* Ω. Функція вибору C^K "звужує" множину Парето Ω^P.

Твердження 4. $C^K(\Omega)\subseteq\Omega^P$.

Важливою властивістю функції C^K є те, що вибір за нею не залежить від елементів Ω, що не входять у множину Парето. Таким чином, вибір $C^K(\Omega)$ при різних Ω однаковий, якщо множини Парето в них однакові.

Твердження 5. $C^K(\Omega)=C^K(\Omega^P)$.

ЗАВДАННЯ

І. Метод ідеальної точки.

1. Нехай $\Omega=\{x^1,x^2,x^3,x^4,x^5\}$, $x^1=\langle 5{,}0.5\rangle$, $x^2=\langle 3.5{,}1{,}5\rangle$, $x^3=\langle 2{,}1\rangle$, $x^4=\langle 1{,}4\rangle$, $x^5=\langle 1{,}5\rangle$. Методом ідеальної точки знайти розв'язок задачі багатокритеріальної оптимізації.

Приклад. Нехай $\Omega=\{x^1,x^2,x^3,x^4,x^5\}$, $x^1=\langle 4{,}0\rangle$, $x^2=\langle 3{,}1\rangle$, $x^3=\langle 2{,}2\rangle$, $x^4=\langle 1{,}3\rangle$, $x^5=\langle 0{,}4\rangle$. Методом ідеальної точки знайти розв'язок

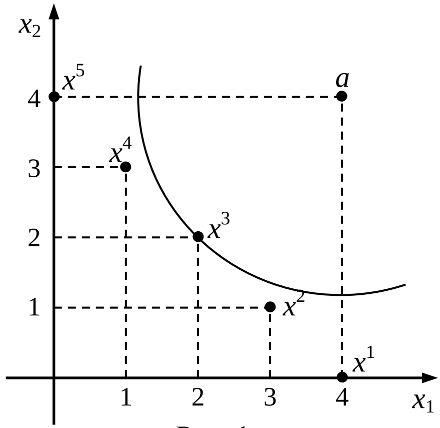

Рис. 1.

Розв'язок. Розв'язок загальної задачі оптимізації, в якій принцип оптимальності виражається функцією вибору $C_{\text{опт}}=C_I(X)=\arg\min\limits_X \rho(x,a(X))$, зводиться до розв'язання звичайної однокритеріальної задачі оптимізації $\rho(x,a)\to\min\limits_\Omega$.

Ідеальною точкою буде $a(\Omega)=\langle 4{,}4\rangle$ і $C_I(\Omega)=\{x^3\}$. Геометрична інтерпретація даного прикладу показана на рис. 1.

Тут $\rho(x^1,a)=4$, $\rho(x^2,a)=\sqrt{10}$, $\rho(x^3,a)=2\sqrt{2}$, $\rho(x^4,a)=\sqrt{10}$, $\rho(x^5,a)=4$, Коло з центром в $(4{,}4)$ радіуса $2\sqrt{2}$ проходить через точку $(2{,}2)$, найближчу до $(4{,}4)$. Таким чином, точка $x^3=(2{,}2)$ є розв'язком вихідної задачі.

2. Нехай Ω співпадає з трикутником OAB (рис. 2), $|OA|=|OB|=1$. Знайти розв'язок задачі оптимізації при метриках $\rho_1(x,a(\Omega))$ та $\rho_2(x,a(\Omega))$. Зробити висновок про вплив метрики ρ_s на значення функції вибору $C_I^s(\Omega)$.

3. Нехай Ω має вигляд, показаний на рис. 3. Знайти $C_I^1(\Omega)$,

$C_I^2(\Omega)$, $C_I^\infty(\Omega)$.

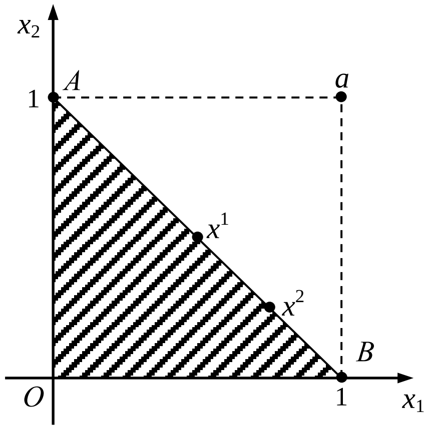

Рис. 2.

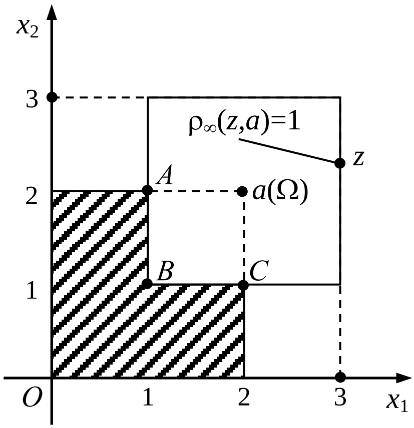

Рис. 3.

II. Метод вибору з врахуванням числа домінуючих критеріїв.

4. Нехай $\Omega=\{x^1,...,x^5\}$, $x^1=\langle 1,2,5\rangle$, $x^2=\langle 4,3,1\rangle$, $x^3=\langle 2,5,3\rangle$, $x^4=\langle 6,1,4\rangle$, $x^5=\langle 3,0,7\rangle$. Знайти $C^K(\Omega)$ та $C^P(\Omega)$.

Приклад. Нехай $\Omega=\{x^1,...,x^5\}$, $x^1=\langle 1,1,5\rangle$, $x^2=\langle 3,2,4\rangle$, $x^3=\langle 4,3,2\rangle$, $x^4=\langle 7,0,1\rangle$, $x^5=\langle 2,8,0\rangle$. Знайти $C^K(\Omega)$ та $C^P(\Omega)$.

Розв'язок. Підрахуємо $Q_\Omega(x^i)$ $(i=\overline{1,5})$. Для цього сформуємо матрицю A розміром 5×5 з елементами $a_{ij}=q(x^i,x^j)$:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді в силу формули $Q_\Omega(x)=\max\limits_{y\in\Omega} q(x,y)$ маємо: $Q_\Omega(x^i)=2$ $(i\neq 3)$, $Q_\Omega(x^3)=1$.

Тому в силу виразу $C^K(\Omega)=\{x\in\Omega \mid Q_\Omega(x)=\min\limits_{z\in\Omega} Q_\Omega(z)\}$ $C^K(\Omega)=\{x^3\}$. Разом з цим $C^P(\Omega)=\Omega$. Вибір $C^K(\Omega)$ вужчий вибору за відношенням Парето.

5. Нехай $X_1 = \{x^1, ..., x^4\}$: $x^1 = \langle 1; 2; 3; 4 \rangle$, $x^2 = \langle 10; 1; 2; 3 \rangle$, $x^3 = \langle 9; 10; 1,5; 2,5 \rangle$, $x^4 = \langle 8,5; 9,5; 10; 1,5 \rangle$; $X_2 = \{y^1, y^2\}$: $y^1 = x^1 = \langle 1; 2; 3; 4 \rangle$, $y^2 = \langle 100; 100; 2,9; 3,9 \rangle$. Знайти $C^K(X_1)$, $C^K(X_2)$, $C^K(X_1 \cup X_2)$.

Лабораторна робота №8. Метод аналізу ієрархій прийняття рішень в умовах визначеності

Теоретичні відомості

Метод аналізу ієрархій (МАІ) – це математичний інструмент системного підходу до складних проблем прийняття рішень запропонований американським математиком Томасом Сааті. Основа мета методу – структуризація задачі прийняття рішень на основі *багаторівневої ієрархії*. Метод ґрунтується на таких аксіомах:

1. Аксіома *пов'язаності*. Якщо $w(a,b)$ – пріоритет, що визначає у скільки разів деякий елемент ієрархії a має переваги порівняно з іншим елементом b, то виконується умова $w(a,b)=1/w(b,a)$. Наприклад, якщо a в 2 рази має перевагу над елементом b, то з цього випливає, що b в 0,5 разів має перевагу над a.

2. Аксіома *гомогенності*. На кожному рівні ієрархії діапазон оцінок елементів, що порівнюють, не повинен сильно відрізнятися і має бути однаковим для всіх парних оцінок, наприклад від 1/9 до 9.

3. Аксіома *синтезу*. Оцінки елементів більш високого рівня ієрархії не залежать від оцінок на низьких рівнях.

Головний принцип методу аналізу ієрархій – узагальнення задачі на верхньому рівні та її деталізація на нижніх рівнях ієрархії. Тобто верхній рівень визначає головні цілі, а нижні рівні – способи формування та методи розбиття елементів попереднього рівня.

На першому етапі прийняття рішень методом МАІ – побудова ієрархії. У вершині ієрархії знаходиться найбільш важливий критерій або ж ціль задачі прийняття рішення (ЗПР). Деяка підмножина критеріїв утворює другий (по важливості) рівень ієрархії, інша підмножина – третій і т. д. На нижньому рівні ієрархії знаходяться безпосередньо альтернативи.

На другому етапі проводиться визначення пріоритетів всіх елементів ієрархії з використанням методу парних порівнянь. Для отримання кожної матриці експерт виносить $n(n-1)/2$ суджень (тут n – порядок матриці парних порівнянь). У результаті обробки матриць попарних порівнянь визначається множина векторів пріоритетів критеріїв. Спочатку оцінюються елементи верхнього рівня ієрархії. В останню чергу оцінюються безпосередньо альтернативи.

На третьому етапі здійснюється власне ієрархічний синтез, що полягає в послідовному визначенні векторів пріоритетів альтернатив щодо критеріїв f_j^i, які знаходяться на всіх ієрархічних рівнях, крім передостаннього, що містить критерії f_j^s. Обчислення векторів пріоритетів проводиться в напрямку від нижніх рівнів до верхнього з урахуванням конкретних зв'язків між критеріями, що належать різним рівням. Обчислення проводиться шляхом перемножування відповідних векторів і матриць.

Складність методу аналізу ієрархій полягає у визначенні відносних вагових коефіцієнтів для оцінки альтернативних рішень. Якщо маємо n критеріїв на заданому рівні ієрархії, то відповідна процедура створює матрицю **A** розмірності $n \times n$, яку називають *матрицею парних порівнянь,* що відображає судження особи, яка приймає рішення, щодо важливості різних критеріїв. Парне порівняння виконується так, що критерій у рядку i (i=1,2,...,n) оцінюється щодо кожного з критеріїв, представлених n стовпцями. Позначимо через a_{ij} елемент матриці **A**, який знаходиться на перетинанні i-го рядка і j-го стовпця. Відповідно до методу аналізу ієрархій для опису згаданих оцінок використовуються цілі числа від 1 до 9. Для встановлення відносної важливості елементів ієрархії використовується шкала відношень Сааті. Дана шкала дозволяє експерту ставити у відповідність ступеням переваги одному порівнюваному об'єкту перед іншим - деяке число. Тобто $a_{ij}=1$ означає, що *і-й* і *j-й* критерії *однаково важливі,* $a_{ij}=5$ відображає думку, що *і-й* критерій *значно важливіший,* ніж *j-й*, а $a_{ij}=9$ вказує, що *і-й* критерій *надзвичайно важливіший j-го*. Інші проміжні значення між 1 і 9 інтерпретуються аналогічно.

ЗАВДАННЯ

1. Відділ кадрів фірми звузив пошук майбутнього співробітника до трьох кандидатур: Тарас (*Т*), Галина (*Г*), Михайло (*М*). Остаточний відбір ґрунтується на трьох критеріях: співбесіді (*С*), досвіду роботи (*Д*) та рекомендації (*Р*). Відділ кадрів використовує матрицю ***A*** для порівняння трьох критеріїв. Після проведеної співбесіди з трьома претендентами, збору даних, які відносяться до досвіду їх роботи та рекомендацій, побудовані матриці $\boldsymbol{A_С}$, $\boldsymbol{A_Д}$, $\boldsymbol{A_Р}$. Визначте якого з трьох кандидатів потрібно прийняти на роботу. Оцініть узгодженість матриць порівнянь. Зобразіть графічно структуру задачі прийняття рішення.

Варіанти:

№	Матриці порівнянь
1	$A=\begin{array}{cc} & \begin{matrix}С&Д&Р\end{matrix}\\ \begin{matrix}С\\Д\\Р\end{matrix} & \begin{vmatrix}1&2&1/4\\1/2&1&1/5\\4&5&1\end{vmatrix}\end{array},\ A_С=\begin{array}{cc} & \begin{matrix}Т&Г&М\end{matrix}\\ \begin{matrix}Т\\Г\\М\end{matrix} & \begin{vmatrix}1&3&2/3\\1/3&1&1/5\\2&5&1\end{vmatrix}\end{array},\ A_Д=\begin{array}{cc} & \begin{matrix}Т&Г&М\end{matrix}\\ \begin{matrix}Т\\Г\\М\end{matrix} & \begin{vmatrix}1&1/3&5/2\\3&1&3/2\\1/3&1/3&1\end{vmatrix}\end{array},\ A_Р=\begin{array}{cc} & \begin{matrix}Т&Г&М\end{matrix}\\ \begin{matrix}Т\\Г\\М\end{matrix} & \begin{vmatrix}1&1/2&1/3\\2&1&1/2\\3&2&1\end{vmatrix}\end{array}$
2	$A=\begin{array}{cc} & \begin{matrix}С&Д&Р\end{matrix}\\ \begin{matrix}С\\Д\\Р\end{matrix} & \begin{vmatrix}1&2&1/4\\1/2&1&1/5\\4&5&1\end{vmatrix}\end{array},\ A_С=\begin{array}{cc} & \begin{matrix}Т&Г&М\end{matrix}\\ \begin{matrix}Т\\Г\\М\end{matrix} & \begin{vmatrix}1&4&3\\1/4&1&1/5\\1/3&7/2&1\end{vmatrix}\end{array},\ A_Д=\begin{array}{cc} & \begin{matrix}Т&Г&М\end{matrix}\\ \begin{matrix}Т\\Г\\М\end{matrix} & \begin{vmatrix}1&3&2\\1/3&1&1/2\\1/2&2&1\end{vmatrix}\end{array},\ A_Р=\begin{array}{cc} & \begin{matrix}Т&Г&М\end{matrix}\\ \begin{matrix}Т\\Г\\М\end{matrix} & \begin{vmatrix}1&1/2&1/7\\2&1&1/2\\7&2&1\end{vmatrix}\end{array}$
3	$A=\begin{array}{cc} & \begin{matrix}С&Д&Р\end{matrix}\\ \begin{matrix}С\\Д\\Р\end{matrix} & \begin{vmatrix}1&2&1/4\\1/2&1&1/5\\4&5&1\end{vmatrix}\end{array},\ A_С=\begin{array}{cc} & \begin{matrix}Т&Г&М\end{matrix}\\ \begin{matrix}Т\\Г\\М\end{matrix} & \begin{vmatrix}1&7&3\\1/7&1&1/5\\1/3&5&1\end{vmatrix}\end{array},\ A_Д=\begin{array}{cc} & \begin{matrix}Т&Г&М\end{matrix}\\ \begin{matrix}Т\\Г\\М\end{matrix} & \begin{vmatrix}1&5&2\\1/5&1&1/2\\1/2&2&1\end{vmatrix}\end{array},\ A_Р=\begin{array}{cc} & \begin{matrix}Т&Г&М\end{matrix}\\ \begin{matrix}Т\\Г\\М\end{matrix} & \begin{vmatrix}1&1&1/2\\1&1&1/2\\2&2&1\end{vmatrix}\end{array}$
4	$A=\begin{array}{cc} & \begin{matrix}С&Д&Р\end{matrix}\\ \begin{matrix}С\\Д\\Р\end{matrix} & \begin{vmatrix}1&2&1/4\\1/2&1&1/5\\4&5&1\end{vmatrix}\end{array},\ A_С=\begin{array}{cc} & \begin{matrix}Т&Г&М\end{matrix}\\ \begin{matrix}Т\\Г\\М\end{matrix} & \begin{vmatrix}1&2&1/5\\1/2&1&1/6\\5&6&1\end{vmatrix}\end{array},\ A_Д=\begin{array}{cc} & \begin{matrix}Т&Г&М\end{matrix}\\ \begin{matrix}Т\\Г\\М\end{matrix} & \begin{vmatrix}1&1/3&2\\3&1&4\\1/2&1/4&1\end{vmatrix}\end{array},\ A_Р=\begin{array}{cc} & \begin{matrix}Т&Г&М\end{matrix}\\ \begin{matrix}Т\\Г\\М\end{matrix} & \begin{vmatrix}1&1/2&1/3\\2&1&1/3\\3&3&1\end{vmatrix}\end{array}$
5	$A=\begin{array}{cc} & \begin{matrix}С&Д&Р\end{matrix}\\ \begin{matrix}С\\Д\\Р\end{matrix} & \begin{vmatrix}1&2&1/4\\1/2&1&1/5\\4&5&1\end{vmatrix}\end{array},\ A_С=\begin{array}{cc} & \begin{matrix}Т&Г&М\end{matrix}\\ \begin{matrix}Т\\Г\\М\end{matrix} & \begin{vmatrix}1&3&6\\1/3&1&2\\1/6&1/2&1\end{vmatrix}\end{array},\ A_Д=\begin{array}{cc} & \begin{matrix}Т&Г&М\end{matrix}\\ \begin{matrix}Т\\Г\\М\end{matrix} & \begin{vmatrix}1&1/4&1/5\\4&1&1/2\\5&2&1\end{vmatrix}\end{array},\ A_Р=\begin{array}{cc} & \begin{matrix}Т&Г&М\end{matrix}\\ \begin{matrix}Т\\Г\\М\end{matrix} & \begin{vmatrix}1&2/3&1/4\\2&1&1/2\\4&2&1\end{vmatrix}\end{array}$
6	$A=\begin{array}{cc} & \begin{matrix}С&Д&Р\end{matrix}\\ \begin{matrix}С\\Д\\Р\end{matrix} & \begin{vmatrix}1&2&1/4\\1/2&1&1/5\\4&5&1\end{vmatrix}\end{array},\ A_С=\begin{array}{cc} & \begin{matrix}Т&Г&М\end{matrix}\\ \begin{matrix}Т\\Г\\М\end{matrix} & \begin{vmatrix}1&3&4\\1/3&1&1/2\\1/4&3/2&1\end{vmatrix}\end{array},\ A_Д=\begin{array}{cc} & \begin{matrix}Т&Г&М\end{matrix}\\ \begin{matrix}Т\\Г\\М\end{matrix} & \begin{vmatrix}1&1/3&1/4\\3&1&1/2\\5&2&1\end{vmatrix}\end{array},\ A_Р=\begin{array}{cc} & \begin{matrix}Т&Г&М\end{matrix}\\ \begin{matrix}Т\\Г\\М\end{matrix} & \begin{vmatrix}1&1/3&1/3\\3&1&1/2\\2&5/2&1\end{vmatrix}\end{array}$
7	$A=\begin{array}{cc} & \begin{matrix}С&Д&Р\end{matrix}\\ \begin{matrix}С\\Д\\Р\end{matrix} & \begin{vmatrix}1&2&1/4\\1/2&1&1/5\\4&5&1\end{vmatrix}\end{array},\ A_С=\begin{array}{cc} & \begin{matrix}Т&Г&М\end{matrix}\\ \begin{matrix}Т\\Г\\М\end{matrix} & \begin{vmatrix}1&6&4\\1/6&1&1/5\\1/4&4&1\end{vmatrix}\end{array},\ A_Д=\begin{array}{cc} & \begin{matrix}Т&Г&М\end{matrix}\\ \begin{matrix}Т\\Г\\М\end{matrix} & \begin{vmatrix}1&1/3&1\\3&1&5\\1/4&1/4&2\end{vmatrix}\end{array},\ A_Р=\begin{array}{cc} & \begin{matrix}Т&Г&М\end{matrix}\\ \begin{matrix}Т\\Г\\М\end{matrix} & \begin{vmatrix}1&1/2&2/3\\2&1&1/2\\3/2&2&1\end{vmatrix}\end{array}$

8	$A=\begin{array}{cccc} & С & Д & Р \\ С & 1 & 2 & 1/4 \\ Д & 1/2 & 1 & 1/5 \\ Р & 4 & 5 & 1 \end{array}$, $A_С=\begin{array}{cccc} & Т & Г & М \\ Т & 1 & 3 & 6 \\ Г & 1/3 & 1 & 4 \\ М & 1/5 & 1/6 & 1 \end{array}$, $A_Д=\begin{array}{cccc} & Т & Г & М \\ Т & 1 & 1/3 & 2 \\ Г & 1/2 & 1 & 1/4 \\ М & 1/2 & 4 & 1 \end{array}$, $A_Р=\begin{array}{cccc} & Т & Г & М \\ Т & 1 & 2 & 1 \\ Г & 2/3 & 1 & 1/2 \\ М & 1 & 2 & 1 \end{array}$
9	$A=\begin{array}{cccc} & С & Д & Р \\ С & 1 & 2 & 1/4 \\ Д & 1/2 & 1 & 1/5 \\ Р & 4 & 5 & 1 \end{array}$, $A_С=\begin{array}{cccc} & Т & Г & М \\ Т & 1 & 3 & 4 \\ Г & 1/3 & 1 & 1/2 \\ М & 1/4 & 3/2 & 1 \end{array}$, $A_Д=\begin{array}{cccc} & Т & Г & М \\ Т & 1 & 3 & 4 \\ Г & 1/3 & 1 & 3/2 \\ М & 1/4 & 2/3 & 1 \end{array}$, $A_Р=\begin{array}{cccc} & Т & Г & М \\ Т & 1 & 1/2 & 1/3 \\ Г & 2 & 1 & 1/2 \\ М & 3 & 2 & 1 \end{array}$
10	$A=\begin{array}{cccc} & С & Д & Р \\ С & 1 & 2 & 1/4 \\ Д & 1/2 & 1 & 1/5 \\ Р & 4 & 5 & 1 \end{array}$, $A_С=\begin{array}{cccc} & Т & Г & М \\ Т & 1 & 7 & 3 \\ Г & 1/6 & 1 & 1/5 \\ М & 1/4 & 5 & 1 \end{array}$, $A_Д=\begin{array}{cccc} & Т & Г & М \\ Т & 1 & 1/3 & 1/6 \\ Г & 5/2 & 1 & 1/2 \\ М & 7 & 2 & 1 \end{array}$, $A_Р=\begin{array}{cccc} & Т & Г & М \\ Т & 1 & 1/3 & 1 \\ Г & 3 & 1 & 2 \\ М & 1 & 1/2 & 1 \end{array}$

Приклад. Максим Петренко – випускник-відмінник середньої школи, що одержав запрошення на навчання за державний кошт від трьох університетів: A, B и C. З метою вибору університету Максим сформулював два основних критерії: місцезнаходження університету і його академічна репутація. Будучи відмінним учнем, він оцінює академічну репутацію університету в п'ять разів вище, ніж його місцезнаходження. Далі Максим використовує системний аналіз для оцінки трьох університетів з погляду їхнього місцезнаходження і репутації, в результаті чого ним отримані такі дві матриці порівняння:

$$\mathbf{A}_P=\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \\ 1/3 & 2/3 & 1 \end{bmatrix} \end{array},\quad \mathbf{A}_M=\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/5 \\ 2 & 1 & 1/2 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Необхідно визначити який з трьох університетів має обертати Максим та оцінити узгодженість матриць порівнянь.

Розв'язок. Почнемо з головного ієрархічного рівня, що має справу з критеріями академічної репутації університету і його місцезнаходження. З точки зору Максима академічна репутація університету *значно важливіша* за його місцезнаходження. Отже, він приписує елементові (1,2) матриці **A** значення 5, тобто $a_{12}=5$. Це автоматично означає, що $a_{21}=1/5$. Позначивши через P і M

критерії репутації університету і його місцезнаходження, можна записати матрицю порівняння так.

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ P \\ M \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} P & M \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1/5 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Відносні ваги критеріїв P і M можуть бути визначені шляхом ділення елементів кожного стовпця на суму елементів цього ж стовпця. Отже, для нормалізації матриці **А** ділимо елементи першого стовпця на величину 1+1/5=1.2, елементи другого – на величину 5+1=6. Шукані відносні ваги w_P і w_M критеріїв обчислюються тепер у вигляді середніх значень елементів відповідних рядків нормалізованої матриці **А.** Отже,

$$\mathbf{N} = \begin{array}{c} \\ P \\ M \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} P & M \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.83 & 0.83 \\ 0.17 & 0.17 \end{bmatrix} \end{array}$$

Середнє значення елементів рядків

$$w_P = (0.83+0.83)/2 = 0.83,$$
$$w_M = (0.17+0.17)/2 = 0.17.$$

У результаті обчислень одержали $w_P = 0.83$ і $w_M = 0.17$. Стовпці матриці **N** однакові, що має місце лише у випадку, коли особа, що приймає рішення, виявляє ідеальну *узгодженість* у визначенні елементів матриці **А.**

Відносні ваги альтернативних рішень, що відповідають університетам *A, B* и *C*, обчислюються в межах кожного критерію P і M з використанням згаданих в умові двох матриць порівняння.

$$\mathbf{A}_P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \\ 1/3 & 2/3 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad \mathbf{A}_M = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/5 \\ 2 & 1 & 1/2 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Сума елементів стовпців $\mathbf{A}_P$ =[1.83, 3.67, 5.5]. Сума елементів стовпців $\mathbf{A}_M$ =[8, 3.5, 1.7].

Елементи матриць $\mathbf{A}_P$ і $\mathbf{A}_M$ визначені на основі суджень Максима, що стосуються відносної важливості трьох університетів. При діленні елементів кожного стовпця матриць $\mathbf{A}_P$ і $\mathbf{A}_M$ на суму елементів цих же стовпців одержуємо наступні нормалізовані матриці.

$$\mathbf{N}_P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.545 & 0.545 & 0.545 \\ 0.273 & 0.273 & 0.273 \\ 0.182 & 0.182 & 0.182 \end{bmatrix} \end{array}$$

Середнє значення елементів рядків

$w_{PA} = (0.545 + 0.545 + 0{,}545)/3 = 0.545,$

$w_{PB} = (0.273 + 0.273 + 0{,}273)/3 = 0.273,$

$w_{PC} = (0.182 + 0.182 + 0{,}182)/3 = 0.182,$

$$\mathbf{N}_M = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.125 & 0.143 & 0.118 \\ 0.250 & 0.286 & 0.294 \\ 0.625 & 0.571 & 0.588 \end{bmatrix} \end{array}$$

Середнє значення елементів рядків

$w_{MA} = (0.125 + 0.143 + 0{,}118)/3 = 0.129,$

$w_{MB} = (0.250 + 0.286 + 0{,}294)/3 = 0.277,$

$w_{MC} = (0.625 + 0.571 + 0{,}588)/3 = 0.594.$

Величини $(w_{PA}, w_{PB}, w_{PC}) = (0.545{,}0.273{,}0.182)$ дають відповідні ваги для університетів *A*, *B* і *C* з точки зору академічної репутації. Аналогічно величини $(w_{MA}, w_{MB}, w_{MC}) = (0.129{,}0.277{,}0.594)$ є відносними вагами, що стосуються місцезнаходження університетів.

Структура задачі прийняття рішень наведена на рис. 1. Задача має єдиний ієрархічний рівень із двома критеріями (місцезнаходження і репутація) і три альтернативних рішення (університети *A, B* і *C*).

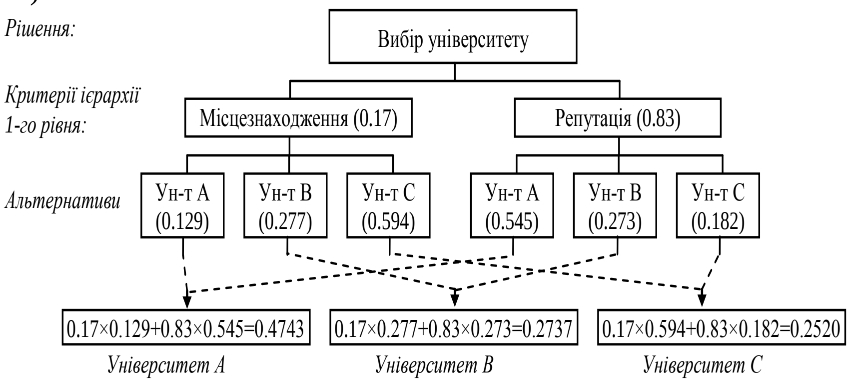

Рис. 1.

На основі цих обчислень університет *A* одержує найвищу комбіновану вагу і, отже, є найбільш оптимальним вибором Максима.

Аналіз матриць порівнянь свідчить про те, що матриця $\mathbf{A}_M$ є неузгодженою, оскільки стовпці матриці $\mathbf{N}_M$ неоднакові. Дослідимо узгодженість матриці $\mathbf{A}_M$.

Обчислимо значення $n_{\max}$. З даних прикладу маємо $\bar{w}_1 = 0.129$, $\bar{w}_2 = 0.277$, $\bar{w}_3 = 0.594$. Отже,

$$\mathbf{A}_M \bar{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/5 \\ 2 & 1 & 1/2 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.129 \\ 0.277 \\ 0.594 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3863 \\ 0.8320 \\ 1.7930 \end{bmatrix}.$$

Звідси одержуємо $n_{\max} = 0.3863 + 0.8320 + 1.7930 = 3.0113$. Отже, для $n = 3$ маємо

$$CI = \frac{n_{\max} - n}{n - 1} = \frac{3.0113 - 3}{3 - 1} = 0.00565,$$

$$RI = \frac{1.98(n-2)}{n} = \frac{1.98 \times 1}{3} = 0.66, \; CR = \frac{CI}{RI} = \frac{0.00565}{0.66} = 0{,}00856.$$

Оскільки $CR < 0.1$, рівень неузгодженості матриці $\mathbf{A}_M$ є прийнятним.

Лабораторна робота №9. Методи прийняття рішень в умовах ризику та невизначеності

Теоретичні відомості

1. *Критерії прийняття рішень в умовах ризику.*

Критерій Байєса-Лапласа. Цей критерій враховує кожен із можливих наслідків альтернативи. Нехай $p(s)$ – імовірність появи стану $s \in S$, тоді для BL-критерію корисність кожної альтернативи характеризується математичним сподіванням корисностей її наслідків

$$E_{BL}(x) = \int_{s \in S} p(s)u(x,s)ds \tag{1}$$

Шукана альтернатива вибирається з умови:

$$x^* \in Arg\max_{x \in X} E_{BL}(x) = Arg\max_{x \in X} \int_{s \in S} p(s)u(x,s)ds \tag{2}$$

Критерій мінімізації дисперсії оцінки. Цей критерій використовують, коли ОПР, зацікавлена в отриманні "стійкого" щодо станів середовища рішення і відомо, що ймовірності станів середовища мають нормальний розподіл. При виборі цього критерію кожна альтернатива оцінюється дисперсією функції корисності її наслідків при всіх мінімізованих станах середовища:

$$\begin{aligned} E_D(x) &= \int_{s \in S} p(s)\left(\int_{s \in S} p(s)u(x,s)ds - u(x,s)\right)^2 ds = \\ &= \int_{s \in S} p(s)(E_{BL}(x) - u(x,s))^2 ds \end{aligned} \tag{3}$$

$$x^* \in Arg\min_{x \in X} E_D(x) = Arg\min_{x \in X} \int_{s \in S} p(s)(E_{BL}(x) - u(x,s))^2 ds \tag{4}$$

Модальний критерій. Суть цього критерію полягає у виборі альтернативи, виходячи з найбільш імовірного стану середовища $s^* \in S : s^* = Arg\max_{s \in S} p(s)$. При використанні цього критерію ОПР вважає, що середовище знаходиться у стані s^* і вибирає альтернативу з умови:

$$E_{MOD}(x)=\max_{x\in X} u(x,s^*)\ . \qquad (5)$$

2. *Критерії прийняття рішень в умовах невизначеності*.

Мінімаксний критерій Вальда. Мінімаксний критерій (ММ) використовує функцію корисності альтернатив $E_{MM}(x)=\min_{s\in S} u(x,s)$, що відповідає позиції крайньої обережності. Шукана альтернатива вибирається з умови

$$x^* = Arg\max_{x\in X} E_{MM}(x) = Arg\max_{x\in X}\min_{s\in S} u(x,s) \qquad (6)$$

Критерій Севіджа (*S-критерій*). За цим критерієм корисність кожної альтернативи характеризується величиною

$$E_{SE}(x)=\max_{s\in S}\left(\max_{z\in X} u(z,s)-u(x,s)\right). \qquad (7)$$

Цю величину можна інтерпретувати як втрати (штрафи), що виникають у стані $s\in S$ при заміні оптимальної для неї альтернативи на альтернативу x. Тоді логічно приймати рішення за умовою мінімізації максимально можливих втрат:

$$x^* \in Arg\min_{x\in X} E_{SE}(x) = Arg\min_{x\in X}\max_{s\in S}\left(\max_{z\in X} u(z,s)-u(x,s)\right) \qquad (8)$$

Критерій Гурвіца. Намагаючись зайняти найбільш урівноважену позицію, Л. Гурвіц запропонував критерій GW, функція корисності якого забезпечує компроміс між граничним оптимізмом і крайнім песимізмом. За цим критерієм корисність кожної альтернативи характеризується величиною

$$E_{GW}(x)=\alpha\max_{s\in S} u(x,s)+(1-\alpha)\min_{s\in S} u(x,s)\ , \qquad (9)$$

де $\alpha\in[0,1]$ – ваговий коефіцієнт, що характеризує схильність ОПР до ризику.

Рішення приймається з умови:

$$x^* \in Arg\max_{x\in X} E_{GW}(x) = Arg\max_{x\in X}\left(\alpha\max_{s\in S} u(x,s)+(1-\alpha)\min_{s\in S} u(x,s)\right) \qquad (10)$$

Критерій Ходжа-Лемана. Цей критерій спирається одночасно на ММ-критерій і BL-критерій. Функція корисності альтернатив визначається як:

$$E_{HL}(x)=\alpha\int_{s\in S} p(s)u(x,s)ds+(1-\alpha)\min_{s\in S} u(x,s)\ . \qquad (11)$$

За допомогою параметра $\alpha\in[0,1]$ виражається ступінь довіри до розподілу ймовірностей $p(s)$, $s \in S$, що використовується. Якщо ця довіра висока, то акцентується BL-критерій, у протилежному випадку перевага віддається ММ-критерію. Рішення приймається за умовою:

$$x^* \in Arg\max_{x\in X} E_{HL}(x) = Arg\max_{x\in X}\left(\alpha \int_{s\in S} p(s)u(x,s)ds + (1-\alpha)\min_{s\in S} u(x,s)\right). \quad (12)$$

ЗАВДАННЯ

1. Розглядається гра з природою 4×5, тобто з чотирма стратегіями гравця x_1, x_2, x_3, x_4 і п'ятьма варіантами станів природи $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5$. Матриця виграшів приведена в табл. 1. Відомо, що стани природи можуть реалізуватись, відповідно, з ймовірностями $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.3$, $p_3 = 0.4$, $p_4 = 0.15$, $p_5 = 0.05$. Необхідно обрати оптимальне рішення на основі:

1) критерію Байєса-Лапласа;
2) модального критерію;
3) критерію мінімізації дисперсії оцінки;
4) мінімаксного критерію Вальда;
5) критерію мінімального ризику Севіджа;
6) критерію Гурвіца, якщо коефіцієнт несхильності до ризику $\alpha = 0,5$;
7) критерію Ходжа-Лемана

Таблиця 1.

Стратегії	Стани природи				
	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
x_1	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}
x_2	u_{21}	u_{22}	u_{23}	u_{24}	u_{25}
x_3	u_{31}	u_{32}	u_{33}	u_{34}	u_{35}
x_4	u_{41}	u_{42}	u_{43}	u_{44}	u_{45}

Приклад. Розглядається гра з природою 3×4, тобто з трьома стратегіями гравця x_1, x_2, x_3 і чотирма варіантами станів природи $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$. Матриця виграшів приведена в табл. 2. Потрібно

Таблиця 2.

x_i \ Π_j	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4
x_1	2	3	4	5
x_2	5	4	1	2
x_3	7	2	8	1

знайти оптимальну стратегію за критеріями Вальда, Севіджа і Гурвіца при $\alpha = 0{,}5$.

Розв'язок.

Таблиця 3.

x_i \ $П_j$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$h_i = \min\limits_j a_{ij}$
x_1	2	3	4	5	2
x_2	5	4	1	2	1
x_3	7	2	8	1	1

Критерій Вальда.

$$W = \max_{1 \le i \le 3} \min_{1 \le j \le 4} a_{ij} = 2.$$

Оптимальна стратегія – x_1.

Таблиця 4.

x_i \ $П_j$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$\gamma_i = \max\limits_j r_{ij}$
x_1	5	1	4	0	5
x_2	2	0	7	3	7
x_3	0	2	0	4	4

Критерій Севіджа.

$$S = \min_{1 \le i \le 3} \max_{1 \le j \le 4} r_{ij} = 4.$$

Оптимальна стратегія – x_3.

Таблиця 5.

x_i \ $П_j$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$h_i = \min\limits_j a_{ij}$	$v_i = \max\limits_j a_{ij}$	$w_i = \frac{1}{2} h_i + \frac{1}{2} v_i$
x_1	2	3	4	5	2	5	3,5
x_2	5	4	1	2	1	5	3
x_3	7	2	8	1	1	8	4,5

Критерій Гурвіца.

$$H = \max_{1 \le i \le 3} \left[0{,}5 h_i + 0{,}5 v_i\right] = \\ = 4{,}5.$$

Оптимальна стратегія – x_3.

Таким чином, критерії Севіджа і Гурвіці з $\alpha = 0{,}5$ рекомендують вибрати стратегію x_3, а критерій Вальда – x_1. Якщо у дослідника немає особливих причин притримуватись позиції крайнього песимізму, то він може прийняти в якості оптимальної стратегію x_3.

Варіанти:

№	**Рішення**	**Стани природи**					**№**	**Рішення**	**Стани природи**				
		П$_1$	**П$_2$**	**П$_3$**	**П$_4$**	**П$_5$**			**П$_1$**	**П$_2$**	**П$_3$**	**П$_4$**	**П$_5$**
1	x_1	6	6,2	5,5	5,4	5	**2**	x_1	6	6,3	5,7	5,2	4,8
	x_2	7,5	7,1	7	6,8	6		x_2	7,5	7,3	6,9	6,7	6,1
	x_3	7,4	7,5	8	7,7	5		x_3	7,6	7,4	8,1	7,8	5
	x_4	7	5,8	6	6,2	6,4		x_4	7	5,8	5,8	6	6,3

3	x_1	6,2	6,1	5,6	5,3	5	**4**	x_1	6	6,2	5,8	5,4	4,8
	x_2	7,7	6,9	6,8	6,6	5,8		x_2	7,7	6,7	6,8	6,7	6
	x_3	7,4	7,6	8,2	7,6	4,9		x_3	7,6	7,5	8	7,4	4,7
	x_4	7,1	6	5,8	6,3	6,3		x_4	7,1	5,9	5,7	6,1	6,1
5	x_1	6,4	6,2	5,4	5,1	5,2	**6**	x_1	6,6	6,2	5,2	5,1	5,4
	x_2	7,7	6,9	6,7	6,5	6		x_2	7,5	6,9	6,7	6,6	5,8
	x_3	7,5	7,5	8,2	7,8	4,9		x_3	7,3	7,4	8,1	8	4,7
	x_4	7	6,1	5,6	6,5	6,1		x_4	7,2	5,9	5,4	6,6	6,3
7	x_1	6,3	6,4	5,2	5,1	5,2	**8**	x_1	6,1	6,3	5,3	5	5,4
	x_2	7,7	7	6,9	6,3	5,9		x_2	7,9	7,1	7,1	6,5	5,9
	x_3	7,6	7,6	8,4	8	4,9		x_3	7,7	7,8	8,5	8,1	5
	x_4	6,8	6	5,6	6,3	5,9		x_4	7	6,1	5,5	6,2	5,7
9	x_1	6,1	6,5	5,2	5	5,1	**10**	x_1	6,1	6,5	5,1	4,9	5
	x_2	7,6	6,9	7,1	6,1	5,8		x_2	7,5	7	7	6,3	5,9
	x_3	7,6	7,7	8,4	8,2	4,8		x_3	7,8	7,5	8,4	8,1	4,6
	x_4	7	5,8	5,7	6,1	5,8		x_4	6,9	5,6	5,7	6,2	5,9

Рекомендована література

1. Акуленко К. Ю. Конспект лекцій з навчальної дисципліни «Теорія прийняття рішень» для студентів спеціальності 122 «Комп’ютерні науки» денної форми навчання. Рівне : НУВГП, 2017. 51 с.
2. Акуленко К. Ю., Тулашвілі Ю. Й. Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з дисципліни «Теорія прийняття рішень» для студентів спеціальності 122 «Комп’ютерні науки» денної форми навчання. Рівне : НУВГП, 2017. 41 с.
3. Волошин О. Ф., Мащенко С. О. Моделі та методи прийняття рішень : навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів. Київ : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2010. 336 с.
4. Файнзільберг Л. С., Жуковська О. А., Якимчук В.С. Теорія прийняття рішень. Київ : Освіта України, 2018. 246 с.
5. Теорія прийняття рішень : підручник. / Бутко М. П. та ін. Київ : «Центр учбової літератури», 2015. 360 с.
6. Катренко А. В., Пасічник В. А., Пасько В. П. Теорія прийняття рішень. Київ : Видавнича група BHV, 2009. 448 с.
7. Воронин А. М, Зіатдінов Ю. К., Клімова А. С. Інформаційні системи прийняття рішень: навчальний посібник. Київ : НАУ-друк, 2009. 136 с.
8. Гнатієнко Г. М., Снитюк В. Є. Експертні технології прийняття рішень : монографія. Київ : ТОВ «Маклаут», 2008. 444 с.
9. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій: підручник. Київ, 2001. 688 с.
10. Зайченко Ю. П. Нечіткі моделі і методи в інтелектуальних системах. Київ : Слово, 2008. 341 с.
11. Тоценко В. Г. Методи та системи підтримки прийняття рішень. Алгоритмічний аспект. Київ : Наукова думка, 2002. 381 с.
12. Воробйов С. А., Мар’їн С. О., Пономаренко О. С. Теорія прийняття рішень. Класичні підходи : навчальний посібник. Харків : ХТУРЕ, 2000. 196 с.
13. Мічківський С. М., Прігунов О. В., Римар П. В. Системи та методи прийняття рішень : методичні вказівки. Вінниця : ДонНУ імені Василя Стуса, 2019. 76 с.