

Ткачук О. А., д.т.н., професор (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне, o.a.tkachuk@nuwm.edu.ua)

ДО РОЗВИТКУ НАПІВЕМПІРИЧНОЇ ТЕОРІЇ ТУРБУЛЕНТНИХ ПОТОКІВ У ТРУБОПРОВОДАХ

Наведено результати теоретичних та експериментальних обґрунтувань щодо застосування розглянутих раніше аспектів теорії турбулентних потоків у трубопроводах та отриманих на їхній основі аналітичних залежностей для практичних розрахунків. Показано, що розглянуті гідравлічні закономірності узгоджуються з постулатами класичної напівемпіричної теорії турбулентності руху рідин у трубах, які слід розглядати у плані її розвитку. Розглянуто складові відносної гідравлічної товщини примежового шару на стінках трубопроводів та отримано параметри для їх визначення. Уточнено напівемпіричні залежності для визначення коефіцієнтів гідравлічного тертя у трубопроводах з різною шорсткістю їхніх стінок. Показано, що отримані залежності дають змогу визначати значення коефіцієнтів гідравлічного тертя трубопроводів із будь-якими видами та величинами шорсткості.

Ключові слова: гідравлічні розрахунки; напівемпірична теорія турбулентності; трубопроводи.

Для гідравлічних розрахунків трубопроводів різного призначення з 30-х років минулого століття широкого застосування набула напівемпірична теорія турбулентності [1–4]. Вона заснована на теорії перенесення кількості руху, є відносно простою та наглядною і отримала подальший розвиток у наукових працях багатьох провідних вчених (Л. Прандтль, Т. Карман, Ф. Кольбрук, А.Д. Альтшуль, Ф.А. Шевельов, М.Ф. Федоров, Ю.М. Константинов, А.М. Курганов, М.М. Хлапук, Д. Бркіч, П. Віховський та ін.) [1–10]. Враховуючи складність і багатофакторність турбулентних потоків у трубопроводах ними запропоновано кілька напівемпіричних та емпіричних формул для їхніх гідравлічних розрахунків, значення показників турбулентного руху в трубах із різних матеріалів та умов функціонування. Однак до нині спірними залишаються питання щодо екстремальних точок логарифмічної залежності розподілу



осереднених швидкостей потоку у перетині труби (на осі труби еюра швидкості має точку перелому ($du/dr \neq 0$), а на внутрішній поверхні стінки трубопроводу – прямує до мінус нескінченності), місцезнаходження середньої швидкості потоку, впливу різних видів шорсткості на зміну коефіцієнтів гідравлічного тертя від режимів турбулентних потоків ($\lambda = f(Re)$) тощо.

Метою статті є теоретичне обґрунтування доцільності застосування розглянутих раніше аспектів теорії турбулентних потоків у трубопроводах та отриманих на їхній основі аналітичних залежностей [3; 4] для практичних розрахунків трубопроводів із різними типами шорсткості у діапазонах турбулентних режимів.

У результаті раніше проведених теоретичних досліджень [3; 4] отримано такі аналітичні залежності гідравлічних закономірностей турбулентних потоків у трубопроводах:

- для осереднених місцевих швидкостей у перетині трубопроводу
- $$u = \frac{u_x}{\kappa_o} \cdot \ln \left(1 + \frac{\chi}{b} \right); \quad (1)$$

- для коефіцієнтів гідравлічного тертя
- $$\lambda = \frac{8 \cdot \kappa_o^2}{\left[(1+b)^2 \cdot \ln \left(1 + \frac{\chi}{b} \right) - b - 1,5 \right]^2}, \quad (2)$$

де u_x – динамічна швидкість, м/с;

κ_o – коефіцієнт пропорційності, що враховує зміну дотичних напружень у турбулентному ядрі, для якого переважають турбулентні пульсації;

χ – відносна відстань від стінки труби, що дорівнює відношенню лінійної відстані u до радіуса труби r_o : $\chi = u/r_o$;

b – відносна гідравлічна товщина примежового шару, обумовленого молекулярною в'язкістю (далі b_μ)

$$b = b_\mu = \frac{2 \cdot \sqrt{8}}{\kappa_p \cdot Re \cdot \sqrt{\lambda}}, \quad (3)$$

де κ_p – коефіцієнт пропорційності, що враховує зміну дотичних напружень у примежовому шарі, у якому режими руху рідини близькі до ламінарного;

Re – число Рейнольдса.

Нехтуючи дуже малими значеннями величин b у порівнянні із їхніми сумами з числами 1,0 та 1,5 ($b \ll 0,001$) для практичних розрахунків на підставі формули (3) рекомендовано спрощену залежність

$$\lambda = \frac{8 \cdot \kappa_o^2}{\left[\ln \left(1 + \frac{\chi}{b} \right) - 1,5 \right]^2}. \quad (4)$$

Для розрахунків коефіцієнтів гідравлічного тертя гідравлічно гладких труб рекомендовано напівемпіричну залежність

$$\lambda = \frac{8 \cdot \kappa_0^2}{\left[\ln\left(1 + \frac{1}{\kappa_0}\right) - 1,5\right]^2} = \frac{8 \cdot 0,354^2}{\left[\ln(1 + Re^{0,78}) - 1,5\right]^2} = \frac{1}{\left[\ln(1 + Re^{0,78}) - 1,5\right]^2}. \quad (5)$$

Валідність отриманих залежностей і величин параметрів у них підтверджується практично повним збігом результатів розрахунків за отриманою формулою (5) із результатами формули Прандтля – Кольбрука [4] для гладких труб, у якій коефіцієнт λ задано у неявній формі. Крім того, отримана теоретичним шляхом величина параметра $\kappa_0 = 0,354$ вказує на особливі умови турбулентних потоків у гідравлічно гладких трубах. Разом з тим, знехтувавши значенням 1 у порівнянні із набагато більшими величинами $Re^{0,78}$ ($Re > 4000$) формулу (5) можна трансформувати до виду

$$\lambda = \frac{1}{\left[\ln(1 + Re^{0,78}) - 1,5\right]^2} = \frac{1}{\left[\frac{0,78}{1,8} \lg(Re) - 1,5\right]^2} = \frac{1}{\left[1,8 \lg(Re) - 1,5\right]^2}, \quad (6)$$

яка повністю відповідає формулі Конакова П.К. [5, С. 29] та максимально наближена до формули Кольбрука С. [6, С. 15]

$$\lambda = \frac{1}{\left[1,8 \lg(Re) - 1,5\right]^2} = \frac{1}{\left[1,8(\lg(Re) - 0,833)\right]^2} = \frac{1}{\left[1,8 \lg\left(\frac{Re}{6,81}\right)\right]^2}, \quad (7)$$

або

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,8 \lg\left(\frac{Re}{6,81}\right) \approx 1,8 \lg\left(\frac{Re}{7}\right). \quad (8)$$

Проведене порівняння із відомими формулами, які підтвержені багатьма експериментальними даними, вказує на універсальність формул (2) і (4), отриманих теоретичним шляхом. Придатність цих формул для розрахунків коефіцієнтів гідравлічного тертя шорстких труб потребує більш поглибленого аналізу гідравлічних закономірностей турбулентних потоків таких трубопроводів.

Для цього турбулентну в'язкість ε_τ [3, С. 89], яка залежить від пульсаційних складових осереднених швидкостей \bar{u}_x (далі u) у різних точках турбулентного потоку для перерізу перпендикулярному напрямку його руху представлено у вигляді

$$\varepsilon_\tau = \frac{\tau_{\text{ж}} \cdot r_D}{u_*} \cdot (\chi + \xi_w), \quad (9)$$

де ξ_w – безрозмірний показник турбулентності, що обумовлена шорсткістю труби (для гідравлічно гладких труб $\xi_w = 0$);

u_* – динамічна швидкість турбулентного потоку, м/с;

τ – дотичне напруження у точці потоку на відстані χ від стінки труби, н/м², яке, виходячи із формул [3, С. 89], буде рівним

$$\tau = \frac{\tau_{\text{ж}}}{u_*} \cdot \left(\frac{\mu u_*}{\tau_{\text{ж}} \cdot r_D} + \chi + \xi_w \right) \cdot \frac{du}{d\chi}, \quad (10)$$



Звідки

$$\frac{w_s}{\kappa_p} = (b + \chi) \cdot \frac{dw}{dx}, \quad (11)$$

де b – відносна гідравлічна товщина примежового шару, що є комплексним показником впливу молекулярної в'язкості b_μ та турбулентності, обумовленої шорсткістю стінок труби ξ_w , на розподіл швидкостей у потоці, яка із врахуванням формули (3) становить

$$b = b_\mu + \xi_w = \frac{2 \cdot \sqrt{8}}{\kappa_p \cdot Re \cdot \sqrt{\lambda}} + \xi_w. \quad (12)$$

Формула (11) за своєю структурою ідентична отриманій раніше [3, С. 89]. Тому формули (1), (2) і (4), що походять від неї, можуть бути придатними для подальшого аналізу гідравлічних залежностей турбулентних потоків у трубопроводах як для гідравлічно гладких труб, так і шорстких із різними видами шорсткості. При цьому відносна гідравлічна товщина примежового шару b залежить від параметрів потоку (Re і κ_p) і стану внутрішньої поверхні труб (λ і ξ_w). Для гідравлічно гладких труб $\xi_w = 0$, а величина b обумовлена молекулярною в'язкістю (в основному молекулярним зчепленням рідини з матеріалом стінки труби). У шорстких трубах вона залежить як від молекулярної в'язкості, так і шорсткості стінок труб, яка залежить від видів шорсткості (рівномірна піщана, хвиляста, нерівномірна по площі, із значними рідко розташованими виступами різної форми тощо) і величин самих виступів, їхньої форми та способів розташування на стінках труб. Тому однозначно оцінити різні види шорсткості та їхні впливи на гідравлічні характеристики потоків достатньо складно. Очевидно, що саме цим і обумовлена наявність значної кількості формул для визначення гідравлічних опорів труб, рекомендованих різними авторами [1; 2; 5; 6; 9; 10].

На наш погляд, найбільш простим і наглядним, але значно спрощеним, буде підхід, за яким відносна гідравлічна товщина примежового шару може бути розрахована за формулою

$$b = \frac{k_w}{Re^\alpha} + \frac{\Delta_w}{d}, \quad (13)$$

де k_w – коефіцієнт, що залежить від виду і величини шорсткості (для гідравлічно гладких труб $k_w = 1,0$ [4]);

α – показник степені, що залежать від виду шорсткості (для гідравлічно гладких труб $\alpha = 0,78$ [4]);

Δ_w – гідравлічна шорсткість труби діаметром d , мм

$$\Delta_w = k_{hr} \cdot \delta, \quad (14)$$

де k_{hr} – коефіцієнт, що залежить від типу і виду шорсткості;

δ – середня величина виступів шорсткості, мм.

Для подальшого аналізу мають значення величини гідравлічної шорсткості труб із різними її типами, а значення Δ_w визначені опосередковано за експериментальними даними залежностей $\lambda = f(Re, d)$ для них. На підставі залежностей (4) і (13) отримано найбільш спрощений варіант формули для визначення коефіцієнтів гідравлічного тертя у трубопроводах

$$\lambda = \frac{K}{\left[-\ln\left(4,48 \cdot \left(\frac{k_w}{Re} + \frac{\Delta_w}{d}\right)\right)\right]^2}, \quad (15)$$

де K – коефіцієнт, що залежить від величини параметра κ_o (див. формули (2) і (4);

4,48 – константа, отримана перенесенням коефіцієнта 1,5 під знак логарифма ($1,5 = \ln(e^{1.5}); e^{1.5} = 4.48$).

Отримані на основі обробки розрахункових та експериментальних даних величин коефіцієнтів K і k_w , показника степені α і гідравлічної шорсткості Δ_w для труб різних матеріалів та із різними типами шорсткості наведені у таблиці, а окремі графіки залежностей $\lambda = f(Re, \Delta_w/d)$ – на рис. 1–6.

Таблиця

Оціночні величини параметрів K , k_w , α і Δ_w для труб із різними типами та величинами шорсткості

№ з/п	Тип шорсткості і матеріал труб	Параметри			
		K	k_w	α	Δ_w , мм
1	Згідно з формулою Кольбрука – Уайта	1,34	1,2	0,9	0,029
2	Нові сталеві без стиків	1,72	1,15	1,0	0,0018
3	Те ж, з муфтовими стиками труборізом	2,05	1,10	1,0	0,0018
4	Те ж, зі зварними стиками через 3/1,5 м	2,0/2,2	1,25/1,5	1,0	0,0018
5	Те ж, зі стиками через 0,75/0,375 м	2,3/2,5	2,0/2,8	1,0	0,0018
6	Ненові сталеві, бувші в експлуатації	1,72–2,05	4,0–6,5	1,0	0,009–0,024
7	Нові чавунні стандартної довжини	1,22	22,0	1,0	0,022
8	Нові чавунні укорочені (у 4–8 разів)	1,26–1,41	21–25	1,0	0,022
10	Ненові чавунні, бувші в експлуатації	1,22–1,55	22–42	1,0	0,025–0,04
11	Залізобетонні труби,	1,0	45–175	1,0	0,0055–0,02
12	З піщаною шорсткістю крупністю 1,0 мм	2,3	-2,3	1,0	0,014
13	З піщаною шорсткістю крупністю 0,5 мм	2,06	-2,3	1,0	0,01
14	З регулярною шорсткістю типів I, II і III	1,34	4,0–50	1,0	0,01–0,18
15	Гідравлічно гладкі труби	1,0	1,0	0,78	0

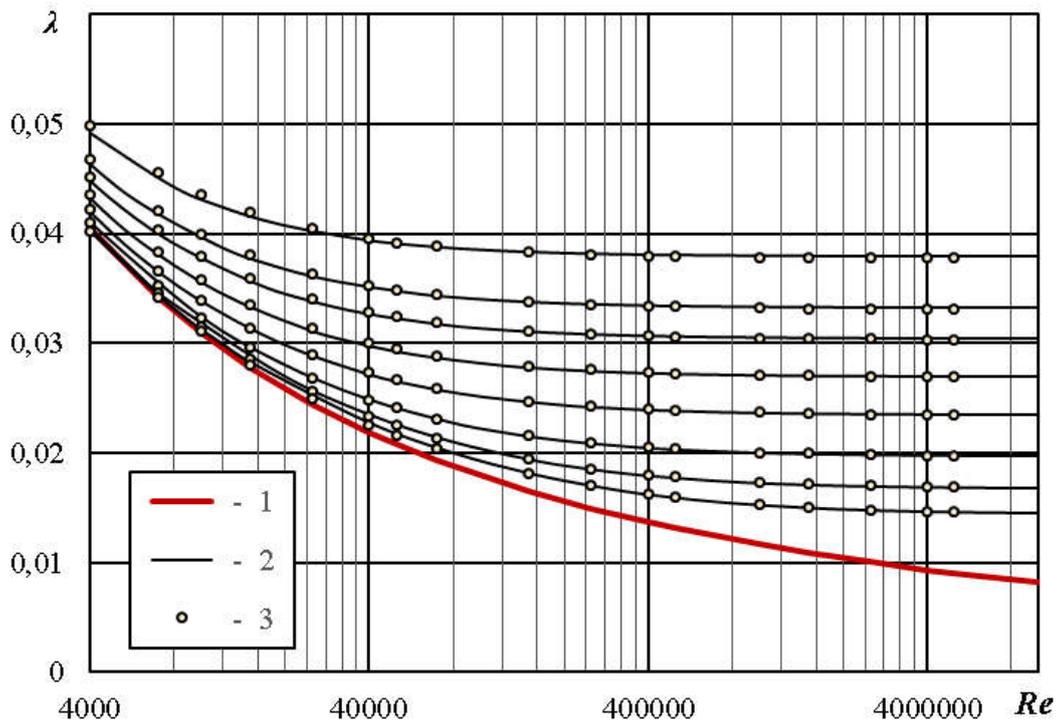


Рис. 1. Відповідність розрахункових даних $\lambda = f(Re, \Delta_w/d)$:

1 – для гладких труб; 2 – для шорстких труб за формулою Кольбрука – Уайта при $d/\Delta = 100 \div 4000$; 3 – те ж, за формулами (2) і (13) при аналогічній гідравлічній шорсткості $d/\Delta_w = 1724 \div 68966$

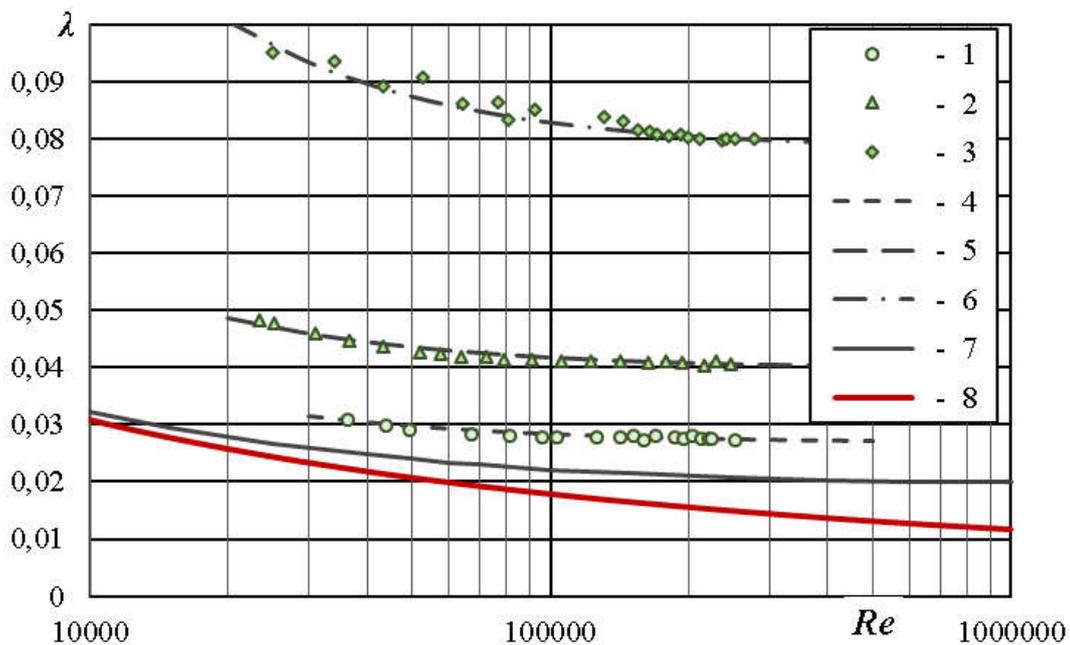


Рис. 2. Залежності $\lambda = f(Re, \Delta_w/d)$ для труб з регулярною шорсткістю:

1 – експериментальні дані для I типу шорсткості ($d_y=50$ мм) [6];
2 – таке саме, для II типу; 3 – таке саме, для III типу; 4, 5 і 6 – за формулами (2) і (13); 7 – таке саме, для нових труб; 8 – для гладких труб

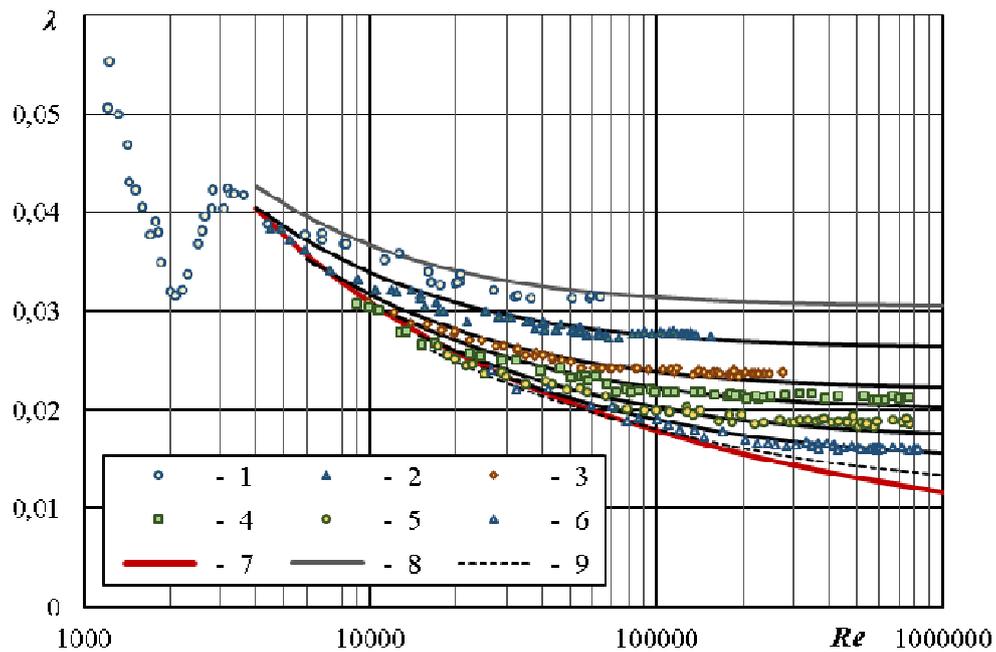


Рис. 3. Залежності $\lambda = f(Re, \Delta_w/d)$ для нових сталевих труб без стиків:
1–6 – експериментальні дані [6] для $d=15,55; 26,2; 52,4; 78,5; 155,1$ і $302,0$ мм;
7 – для гладких труб; 8 – для нових труб за формулами (2) і (13) цих же діаметрів; 9 – для труб $d=1000$ мм

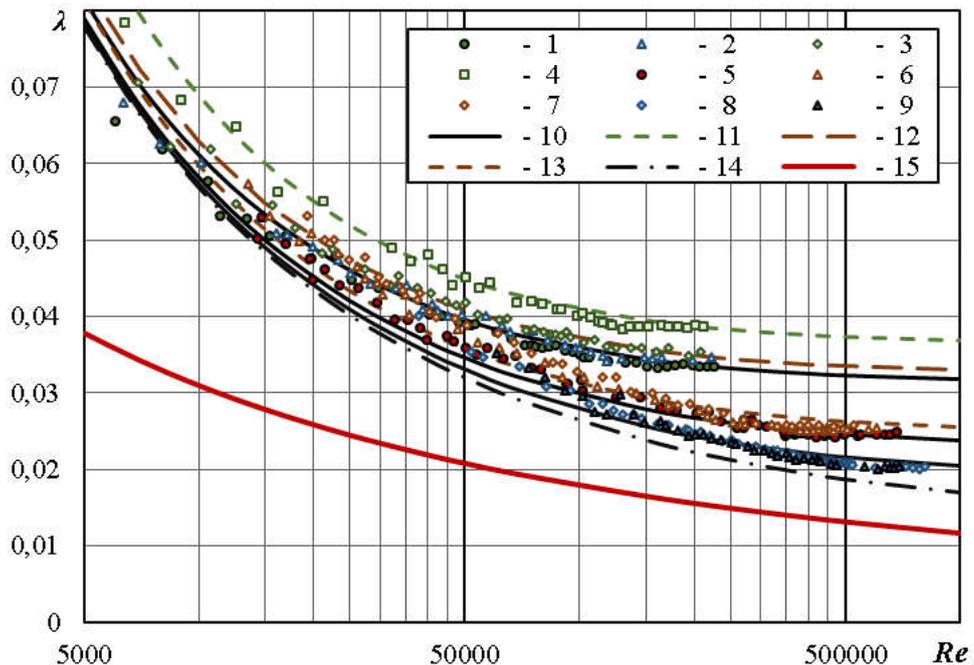


Рис. 5. Залежності $\lambda = f(Re, \Delta_w/d)$ для нових чавунних труб:
1–4 – експериментальні дані [6] для $d_y=50$ мм з $l_{cr}=2,0; 1,0; 0,5$ і $0,25$ м;
5–7 – таке саме, для $d=152,0$ мм з $l_{cr}=3,1; 1,55$ і $0,775$ м;
8 і 9 – таке саме, для $d=301,0$ мм з $l_{cr}=3,0$ і $1,5$ м; 10 – за формулами (2) і (13)
для $d=51,5, 152,0$ і $301,0$ мм з $l_{cr}=2,0(3,0)$ м; 11–13 – таке саме, для
укорочених труб; 14 – таке саме, для $d=1000$ мм; 15 – для гладких труб

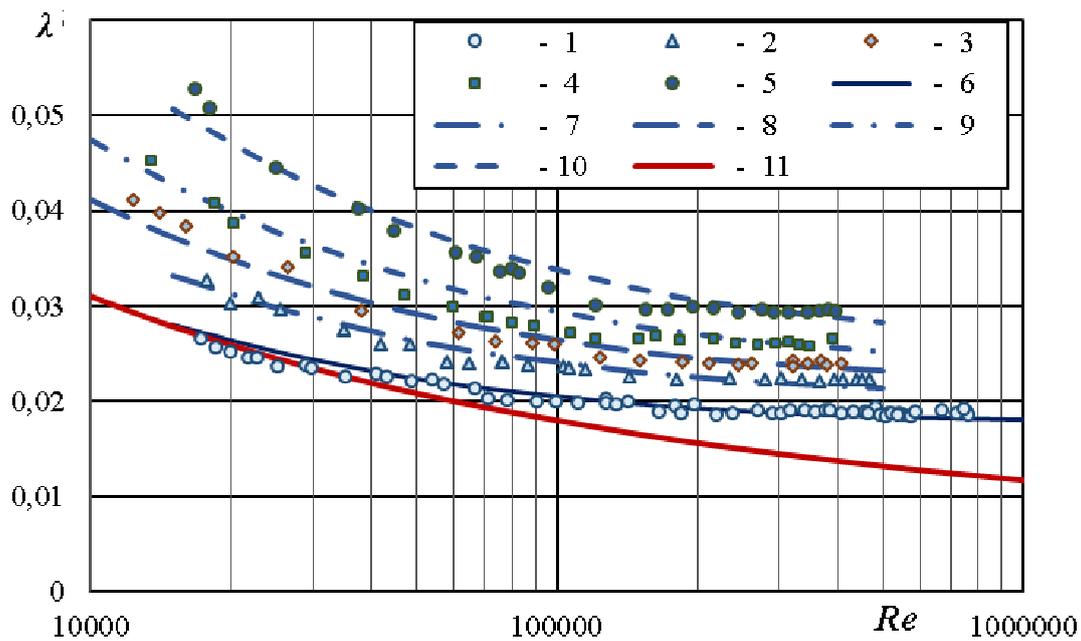


Рис. 4. Залежності $\lambda = f(Re, \Delta_w/d)$ для нових сталевих труб:
1–4 – експериментальні дані [6] для $d_y=155,1$ мм зі зварними стицями ($l_{cr}=3,0$; $1,5$; $0,75$ і $0,375$ м); 5 – таке саме, труб без стицїв; 6 – за формулами (2) і (13) для $d=155,1$ мм без стицїв; 7–10 – таке саме, для труб з $l_{cr}=3,0$; $1,5$; $0,75$ і $0,375$ м; 11 – для гладких труб

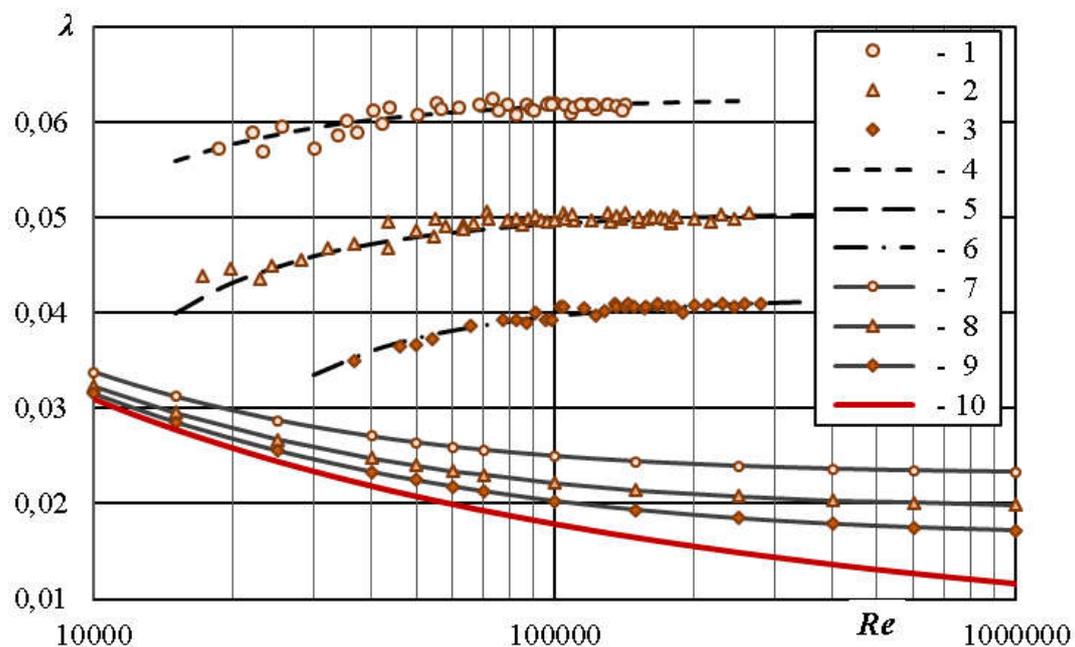


Рис. 6. Залежності $\lambda = f(Re, \Delta_w/d)$ для труб з піщаною шорсткістю:
1–3 – експериментальні дані [6] для $d_y=26,9$; $52,7$ і $105,4$ мм з крупністю піску $\Delta=1,0$ мм; 4–6 – за формулами (2) і (13) для цих труб; 7–9 – те ж, для нових труб без піщаної шорсткісті; 10 – для гладких труб

Наведені на рис. 1–6 дані засвідчують відповідність розрахунків за формулами (2) і (13) експериментальним даним. Для практичних розрахунків цілком придатна формула (15), яка є спрощеним варіантом формули (2) у поєднанні із формулою (13). Похибки у розрахунках за спрощеною формулою у порівнянні із її повним варіантом залежать від величин відносної гідравлічної товщини примежового шару b і не перевищують 1–2,5% для чавунних труб і 0,5–1,0% для інших типів труб при малих числах Рейнольдса ($Re=4000\div 10000$). Із збільшенням Re і діаметрів труб похибки зменшуються і, зазвичай, не перевищують 0,2%.

Висновки. Отримані гідравлічні залежності повністю відповідають постулатам класичної напівемпіричної теорії турбулентності руху рідин у трубах. Їх можна розглядати у плані її розвитку. Запропоновано відносну гідравлічну товщину примежового шару на стінках трубопроводів визначати як суму молекулярної в'язкості та відносної гідравлічної шорсткості труби. Отримано величини параметрів з визначення відносних гідравлічних товщин примежового шару для труб із різними типами та величинами шорсткості. Показано, що отримана теоретичним шляхом залежність (2) і напівемпірична формула (13) дають змогу визначати значення коефіцієнтів гідравлічного тертя трубопроводів із будь-якими видами та величинами шорсткості.

1. Константинов Ю. М., Гіжа О. О. Технічна механіка рідин та газу : підручник. Київ : Вища школа, 2002. 277 с.
2. Ткачук О. А. Гідравлічні розрахунки трубопроводних систем водопостачання та водовідведення : монографія. Рівне : НУВГП, 2022. 183 с.
3. Ткачук О. А., Герасімов Є. Г., Шевчук О. В. Аспекти теорії турбулентного руху потоків у трубопроводах. *Вісник НУВГП. Технічні науки*. 2023. Вип. 1(101). С. 86–99.
4. Ткачук О. А., Шевчук О. В. До розвитку гідравлічних закономірностей турбулентних потоків у трубопроводах. Проблеми водопостачання, водовідведення та гідравліки : наук.-техн. зб. Київ : КНУБА, 2023. Вип. 42. С. 71–83. URL: <http://wateruse.org.ua/article/view/277160> (дата звернення: 10.02.2025).
5. Хлапук М. М., Безусяк О. В., Волк Л. Р., Чжан Цзелу. Теоретичні дослідження коефіцієнта гідравлічного опору в гідравлічно гладких трубопроводах. *Вісник НУВГП. Технічні науки*. 2020. Вип. 4(92). С. 23–36. URL: <https://ep3.nuwm.edu.ua/22100/> (дата звернення: 10.02.2025).
6. Шевелев Ф. А. Исследование основных гидравлических закономерностей турбулентного движения в трубах. М. : Стройиздат, 1953. 208 с.
7. Arifjanov A., Rakhimov Q., Samiev L., Abduraimova D., Apakhodjaeva T. Hydraulic Friction Coefficient at Hydraulic Mixing Movement in Pressure Pipelines. *Jour of Adv Research in Dynamical & Control Systems*. 2020. Vol. 12,



07-Special Issue. P. 1332–1336. **8.** Choo Y.-M.; Kim J.-G.; Park S.-H. A Study on the Friction Factor and Reynolds Number Relationship for Flow in Smooth and Rough Channels. *Water*. 2021. Vol. 13. P. 1714. URL: <https://doi.org/10.3390/w13121714> **9.** Pérez Pupo J. R., Navarro-Ojeda M. N., Pérez-Guerrero J. N., Batista-Zaldívar M. A. On the explicit expressions for the determination of the friction factor in turbulent regime. *Revista Mexicana de Ingeniera Quimica*. 2020. Vol. 19 (1). P. 313–334. URL: <https://doi.org/10.24275/rmiq/Fen497> **10.** Wichowski P., Kalenik M., Lal A., Morawski D., Chalecki M. Hydraulic and technological investigations of a phenomenon responsible for increase of major head losses in exploited cast-iron water supply pipes. *Water (Switzerland)*. 2021. URL: <https://www.mdpi.com/2073-4441/13/11/1604> (дата звернення: 10.02.2025).

REFERENCES:

1. Konstantynov Yu. M., Hizha O. O. *Tekhnichna mekhanika ridyn ta hazu : pidruchnyk*. Kyiv : Vyshcha shkola, 2002. 277 s. **2.** Tkachuk O. A. *Hidravlichni rozrakhunky truboprovodnykh system vodopostachannia ta vodovidvedennia : monohrafiia*. Rivne : NUVHP, 2022. 183 s. **3.** Tkachuk O. A., Herasimov Ye. H., Shevchuk O. V. Aspekty teorii turbulentshogo rukhu potokiv u truboprovodakh. *Visnyk NUVHP. Tekhnichni nauky*. 2023. Vyp. 1(101). S. 86–99. **4.** Tkachuk O. A., Shevchuk O. V. Do rozvytku hidravlichnykh zakonmirnostei turbulentshnykh potokiv u truboprovodakh. *Problemy vodopostachannia, vodovidvedennia ta hidravliki : nauk.-tekhn. zb.* Kyiv : KNUBA, 2023. Vyp. 42. S. 71–83. URL: <http://wateruse.org.ua/article/view/277160> (дата звернення: 10.02.2025). **5.** Khlapak M. M., Bezusiak O. V., Volk L. R., Chzhan Tszelu. Teoretychni doslidzhennia koefitsiienta hidravlichnoho oporu v hidravlichno hladkykh truboprovodakh. *Visnyk NUVHP. Tekhnichni nauky*. 2020. Vyp. 4(92). S. 23–36. URL: <https://ep3.nuwm.edu.ua/22100/> (дата звернення: 10.02.2025). **6.** Shevelev F. A. *Yssledovanye osnovnykh hydravlycheskykh zakonmernostei turbulentshogo dvyzheniia v trubakh*. M. : Stroiyzdat, 1953. 208 s. **7.** Arifjanov A., Rakhimov Q., Samiev L., Abduraimova D., Apakhodjaeva T. Hydraulic Friction Coefficient at Hydraulic Mixing Movement in Pressure Pipelines. *Jour of Adv Research in Dynamical & Control Systems*. 2020. Vol. 12, 07-Special Issue. P. 1332–1336. **8.** Choo Y.-M.; Kim J.-G.; Park S.-H. A Study on the Friction Factor and Reynolds Number Relationship for Flow in Smooth and Rough Channels. *Water*. 2021. Vol. 13. P. 1714. URL: <https://doi.org/10.3390/w13121714> **9.** Pérez Pupo J. R., Navarro-Ojeda M. N., Pérez-Guerrero J. N., Batista-Zaldívar M. A. On the explicit expressions for the determination of the friction factor in turbulent regime. *Revista Mexicana de Ingeniera Quimica*. 2020. Vol. 19 (1). P. 313–334. URL: <https://doi.org/10.24275/rmiq/Fen497> **10.** Wichowski P., Kalenik M., Lal A., Morawski D., Chalecki M. Hydraulic and technological investigations of a phenomenon responsible for increase of major head losses in exploited cast-

iron water supply pipes. *Water (Switzerland)*. 2021. URL:
<https://www.mdpi.com/2073-4441/13/11/1604> (data zvernennia: 10.02.2025).

Tkachuk O. A., Doctor of Engineering, Professor (National University of Water and Environmental Engineering, Rivne)

TOWARDS THE DEVELOPMENT OF THE SEMI-EMPIRIC THEORY OF TURBULENT FLOWS IN PIPELINES

The results of theoretical and experimental justifications for the application of the previously considered aspects of the theory of turbulent flows in pipelines and the analytical dependencies obtained on their basis for practical calculations are presented. It is shown that the considered hydraulic patterns are consistent with the postulates of the classical semi-empirical theory of turbulence of fluid motion in pipes, which should be considered in terms of its development. The components of the relative hydraulic thickness of the boundary layer on the walls of pipelines are considered and the parameters for their determination are obtained. The semi-empirical dependencies for determining the coefficients of hydraulic friction in pipelines with different roughness of their walls are specified. It is shown that the obtained dependencies make it possible to determine the values of the coefficients of hydraulic friction of pipelines with any types and values of roughness.

Keywords: hydraulic calculations; semi-empirical turbulence theory; pipelines.