

Бомба А. Я., д.т.н., професор (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне), **Кот В. В., к.т.н.** (Відокремлений структурний підрозділ «Рівненський фаховий коледж Національного університету біоресурсів і природокористування України», м. Рівне)

ОПТИМІЗАЦІЯ РУХУ ОДНОЛАНКОВОГО РОБОТА ПРИ МАЛОМУ ВПЛИВІ ДЕМПФЕРНИХ ПРУЖИН

Запропоновано метод оптимізації руху одноланкового робота-маніпулятора з мінімальним впливом демпферних пружин. Для цього адаптовано метод збурень, який дозволяє ефективно визначити оптимальне активне керування, враховуючи вплив пасивних сил. Розроблено математичну модель маніпулятора, яка враховує пружні властивості демпферних пружин, їхній вплив на динаміку системи та обмеження активного керування. Задачу розв'язано у вигляді асимптотичного ряду з урахуванням поправок першого порядку, що дозволяє мінімізувати час виконання циклічної операції. Отримані результати сприяють підвищенню ефективності роботи одноланкових маніпуляторів у промислових умовах.

Ключові слова: оптимізація; одноланковий робот; демпферні пружини; асимптотичний метод; математичне моделювання.

Вступ. Одноланкові роботи-маніпулятори відіграють ключову роль у багатьох галузях промисловості завдяки своїй простоті, надійності та високій точності виконання завдань. Вони широко застосовуються у виробничих процесах, транспортуванні матеріалів та інших сферах, де потрібне точне і швидке виконання циклічних операцій. З огляду на зростаючі вимоги до продуктивності та ефективності, підвищення швидкодії таких роботів є надзвичайно важливим завданням.

Проблема підвищення швидкодії одноланкових маніпуляторів нерозривно пов'язана з оптимізацією часу виконання ними операцій. Ефективне використання часу не лише сприяє зростанню продуктивності, але й дозволяє зменшити енерговитрати та знос обладнання. Одним з підходів до оптимізації є використання демпферних пружин, які залежно від їх параметрів можуть впливати

на динаміку системи. У випадках, коли вплив демпферних сил є малим, виникає необхідність дослідження цього чинника на загальну ефективність роботи маніпулятора.

У літературі подібні задачі досліджувалася у працях кількох авторів. Зокрема, значний внесок у розвиток методів оптимізації руху маніпуляторів зробив М.В. Демидюк [1]. У своїх роботах він акцентував увагу на оптимізації законів руху та конструктивних параметрів маніпуляційних модулів, що виконують циклічні транспортні операції. В його дослідженнях розглядається можливість використання пасивних приводів, таких як пружинно-демпферні механізми, для підвищення енергоефективності роботи маніпуляторів.

У статті описано метод оптимізації руху одноланкового робота-маніпулятора, що враховує малий вплив демпферних пружин і являє собою адаптацію відомого асимптотичного підходу.

Постановка задачі. Розглянемо одноланковий маніпулятор, що виконує циклічну транспортну операцію, яка полягає у перенесенні вантажу з початкового стану до кінцевого і поверненні назад без вантажу (рис. 1). Маніпулятор знаходиться під дією активного керування та пасивних сил, що генеруються пружинними приводами. Задача полягає в оптимізації руху маніпулятора, з урахуванням малого впливу демпферних пружин, з метою мінімізації часу виконання операції.

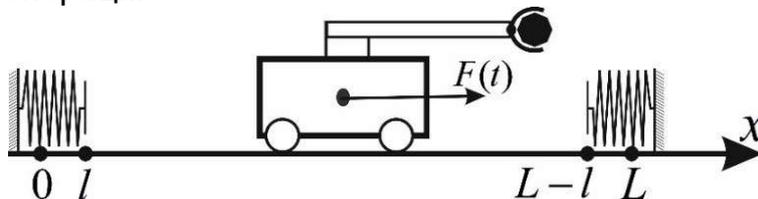


Рис. 1. Схема руху маніпулятора

Математична модель. Модель одноланкового маніпулятора включає каретку з вантажем, що має масу $m(t)$ і рухається вздовж горизонтальної осі Ox . Пасивні пружинні приводи описуються лінійними залежностями, де сила, що діє на маніпулятор, прямо пропорційна його зміщенню.

Рівняння руху маніпулятора має вигляд:

$$m(t)\ddot{x}(t) = G(t), \quad (1)$$

де $x = x(t)$ – функція, через яку визначається координата каретки в момент часу t , $G(t) = g(x(t)) = F(t) + \varepsilon F_p(x(t))$ – сумарне активне керування, $F(t)$ – активна сила керування, а $F_p(x(t))$ – сумарна сила

пасивних приводів, що включає сили пружності,

$$m(t) = \begin{cases} m_0 + m_*, & 0 < t \leq t_0 \\ m_0, & t_0 < t \leq T \end{cases}, \quad t_0 - \text{ час, коли каретка досягне до пункту}$$

призначення і почне повертатися назад, T – кінцевий час, при якому каретка здійснить рух від початкового стану до кінцевого і повернеться назад, m_0 – маса каретки, m_* – маса вантажу, який перевозить маніпулятор, ε – малий параметр, який характеризує вплив пружин на рух робота в початковому і кінцевому станах.

Сила $F_p(x(t))$ визначається як:

$$F_p(x(t)) = \begin{cases} k(l - x(t)), & \text{при } x(t) \leq l; \\ 0, & \text{при } l < x(t) < L - l; \\ -k(x(t) - (L - l)), & \text{при } x(t) \geq L - l, \end{cases} \quad (2)$$

де k – коефіцієнт жорсткості відповідного привода, l – довжина вільного стану пружини, L – довжина шляху, який проходить робот-маніпулятор з початкового стану до кінцевого.

Задачі оптимізації. Необхідно знайти керування $G(t)$ при відомих параметрах пасивних приводів k , l , що мінімізує час виконання операції T ,

$$T \rightarrow \min, \quad (3)$$

забезпечуючи виконання наступних умов:

1. Початкові та кінцеві умови

$$x(0) = 0, \quad x(T) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \dot{x}(T) = 0; \quad (4)$$

2. Обмеження на активне керування

$$F_{\min} < F(t) < F_{\max}, \quad \forall t \in [0, T]; \quad (5)$$

3. Врахування малого впливу демпферних пружин

$$\varepsilon \ll 1. \quad (6)$$

Метод розв'язання. Керування при заданій прямолінійній траєкторії руху визначаються наближено, з урахуванням впливу пружних сил першого порядку.

Вважатимемо, що маніпулятор, досягнувши точки L , не повертається назад, а продовжує рухатися вперед до точки $2L$ (рис. 2).

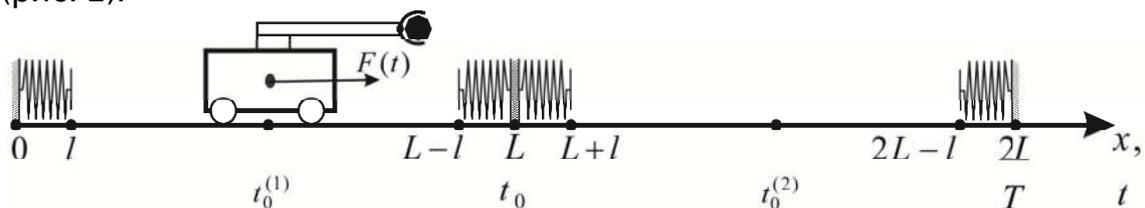


Рис. 2. Схема руху маніпулятора з фіктивною областю



Очевидно, що відстань між точками L та $2L$ дорівнює відстані між початковою точкою 0 і точкою L . Область $[L, 2L]$ є умовною (фіктивною) та відображає шлях маніпулятора у зворотному напрямку від L до 0 . Зв'язок між умовною та фізичною областями можна виразити наступним чином:

$$\tilde{x} = 2L - x, \quad (7)$$

де x – координата у фізичній області, а \tilde{x} – координата в умовній області.

Відповідно, якщо сила $F(x(t))$ діє на маніпулятор у фізичній області, то сила $\tilde{F}(x(t))$ в умовній області буде мати протилежний напрямок, щоб відобразити зворотний рух $\tilde{F}(x(t)) = -F(x(t))$. Таким чином, сила в умовній області є «дзеркальним» відображенням сили у фізичній області з врахуванням зміни знаку. У подальших формулах ми не будемо додатково позначати координату та силу в умовній області хвилькою, проте пам'ятатимемо про це. Крім того, припустимо, що пружини можуть стискатися до однієї точки, і в точці L на вагонетку буде діяти пружина, яка штовхатиме маніпулятор в фіктивній області в додатному напрямку вздовж осі Ox .

Відповідно до цього, умови задачі (2–4) запишемо у наступному вигляді:

$$F_p(x(t)) = \begin{cases} k(l - x(t)), \text{ при } x(t) < l; \\ 0, \text{ при } l < x(t) < L - l; \\ -k(x(t) - (L - l)), \text{ при } L - l < x(t) < L; \\ k(L + l - x(t)), \text{ при } L < x(t) < L + l; \\ 0, \text{ при } L + l < x(t) < 2L - l; \\ -k(x(t) - (2L - l)), \text{ при } 2L - l < x(t); \end{cases} \quad (8)$$

$$x(0) = 0, \quad x(t_0) = L, \quad x(T) = 2L, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \dot{x}(t_0) = 0, \quad \dot{x}(T) = 0. \quad (9)$$

Розв'язок цієї задачі шукаємо у вигляді асимптотичного ряду за степенями малого параметра ε [2–3]:

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots; \quad (10)$$

$$T = T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2 + \dots, \quad t_0 = t_{00} + \varepsilon t_{01} + \varepsilon^2 t_{02} + \dots, \quad (11)$$

де $x_0(t)$ – розв'язок виродженої задачі, що відповідає ідеальному руху маніпулятора без урахування впливу пружних сил; $x_i(t)$, ($i = 0, 1, 2, \dots$) – поправки, що враховують вплив пружних сил; t_{0i} – час досягнення роботом-маніпулятором кінцевого положення у випадку ідеального руху маніпулятора при $i = 0$ та при впливі тільки пружних

сил $i > 0$ відповідно T_i ; ($i = 0, 1, 2, \dots$) – час завершення циклічної операції за ідеального руху маніпулятора при $i = 0$ та при впливі тільки пружних сил $i > 0$. Для знаходження членів асимптотичного ряду $x_0(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$, ... підставляємо (10), (11) в (1)–(9) та застосовуємо стандартну процедуру «прирівнювання» [2–5]. В результаті отримуємо послідовність «підзадач» для визначення членів асимптотики $x_i(t)$ у вигляді простіших (лінійних) диференціальних рівнянь з відповідними обмеженнями.

Зокрема, для знаходження $x_0(t)$, T_0 отримуємо наступні співвідношення:

$$m(t)\ddot{x}_0(t) = F(t), T_0 \rightarrow \min; \quad (12)$$

$$x_0(t_{00}) = L, x_0(T_0) = 2L, \dot{x}_0(0) = 0, \dot{x}_0(t_{00}) = 0, \dot{x}_0(T_0) = 0. \quad (13)$$

Надлишковість граничних умов задачі зумовлена необхідністю забезпечити узгодженість руху одноланкового маніпулятора з обмеженнями, накладеними на функцію $x = x_0(t)$ та її похідні як у фізичній, так і в уявній областях. Крім того, ці умови потрібні для точного визначення часу переключення активного керування, що є ключовим для досягнення оптимального руху маніпулятора. Відповідно до цього, функція керування набуває наступного вигляду:

$$F(t) = \begin{cases} F_{\max}^{(1)}, \text{ нпу } 0 < t < t_0^{(1)}; \\ -F_{\min}^{(1)}, \text{ нпу } t_0^{(1)} < t < t_{00}; \\ F_{\max}^{(2)}, \text{ нпу } t_{00} < t < t_0^{(2)}; \\ -F_{\min}^{(2)}, \text{ нпу } t_0^{(1)} < t < T, \end{cases} \quad (14)$$

де $t_0^{(1)}$, $t_0^{(2)}$ – точки переключення керування, у яких розгін робота змінюється його гальмуванням і, навпаки, які необхідно разом з часом T знайти в процесі розв'язання задачі. $F_{\max}^{(1)}$, $F_{\max}^{(2)}$ – сили, які розганяють робота-маніпулятора реальній і фіктивній областях відповідно. $F_{\min}^{(1)}$, $F_{\min}^{(2)}$ – сили гальмування, що протидіють руху робота у реальній і фіктивній областях.

Для знаходження поправок необхідно розв'язати наступні «підзадачі»

$$m(t)\ddot{x}_i(t) = F_p(x_{i-1}(t)), T_i \rightarrow \min, i = 1, 2, 3, \dots; \quad (15)$$

$$x_i(0) = 0, x_i(t_{0i}) = 0, x_i(T_i) = 0, \dot{x}_i(0) = 0, \dot{x}_i(t_{0i}) = 0, \dot{x}_i(T_i) = 0. \quad (16)$$

Підставивши вираз (14) у (12), при врахуванні (13), отримуємо:



$$x_0(t) = \begin{cases} \frac{F_{\max}^{(1)}}{m_0 + m_*} \frac{t^2}{2}, \text{ при } 0 < t < t_0^{(1)}; \\ -\frac{F_{\min}^{(1)}}{m_0 + m_*} \frac{t^2}{2} + \frac{F_{\min}^{(1)}}{m_0 + m_*} t_{00} t - \frac{F_{\min}^{(1)}}{m_0 + m_*} \frac{t_{00}^2}{2} + L, \text{ при } t_0^{(1)} < t < t_{00}; \\ \frac{F_{\max}^{(2)}}{m_0} \frac{t^2}{2} - \frac{F_{\max}^{(2)}}{m_0} t_{00} t + \frac{F_{\max}^{(2)}}{2m_0} t_{00}^2 + L, \text{ при } t_{00} < t < t_0^{(2)}; \\ -\frac{F_{\min}^{(2)}}{m_0} \frac{t^2}{2} + \frac{F_{\min}^{(2)}}{m_0} T_0 t + 2L - \frac{F_{\min}^{(2)}}{2m_0} T_0^2, \text{ при } t_0^{(1)} < t < T_0. \end{cases} \quad (17)$$

Значення $t_0^{(1)}$, $t_0^{(2)}$, t_{01} , T_0 шукаємо з умов рівності швидкостей і координат в цих же точках:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{F_{\max}^{(1)}}{m_0 + m_*} t_0^{(1)} = -\frac{F_{\min}^{(1)}}{m_0 + m_*} t_0^{(1)} + \frac{F_{\min}^{(1)}}{m_0 + m_*} t_{00} \\ & \frac{F_{\max}^{(1)}}{m_0 + m_*} \frac{(t_0^{(1)})^2}{2} = -\frac{F_{\min}^{(1)}}{m_0 + m_*} \frac{(t_0^{(1)})^2}{2} + \frac{F_{\min}^{(1)}}{m_0 + m_*} t_{00} t_0^{(1)} - \frac{F_{\min}^{(1)}}{m_0 + m_*} \frac{t_{00}^2}{2} + L \end{aligned} \right. \quad (18)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{F_{\max}^{(2)}}{m_0} t_0^{(2)} - \frac{F_{\max}^{(2)}}{m_0} t_{00} = -\frac{F_{\min}^{(2)}}{m_0} t_0^{(2)} + \frac{F_{\min}^{(2)}}{m_0} T_0 \\ & \frac{F_{\max}^{(2)}}{m_0} \frac{(t_0^{(2)})^2}{2} - \frac{F_{\max}^{(2)}}{m_0} t_{00} t_0^{(2)} + \frac{F_{\max}^{(2)}}{2m_0} t_{00}^2 + L = \\ & = -\frac{F_{\min}^{(2)}}{m_0} \frac{(t_0^{(2)})^2}{2} + \frac{F_{\min}^{(2)}}{m_0} T_0 t_0^{(2)} + 2L - \frac{F_{\min}^{(2)}}{2m_0} T_0^2 \end{aligned} \right. \quad (19)$$

В результаті розв'язування (18), (19) отримаємо:

$$t_0^{(1)} = \sqrt{\frac{2(m_0 + m_*)}{F_{\max}^{(1)} + F_{\min}^{(1)}} \cdot L \cdot \frac{F_{\min}^{(1)}}{F_{\max}^{(1)}}}, \quad t_{00} = \sqrt{\frac{2(F_{\max}^{(1)} + F_{\min}^{(1)}) (m_0 + m_*)}{F_{\max}^{(1)} F_{\min}^{(1)}} L};$$

$$t_0^{(2)} = \frac{2 \frac{(F_{\max}^{(2)} + F_{\min}^{(2)})^2}{F_{\min}^{(2)}} t_{00} + \sqrt{D}}{2 \left(\frac{F_{\max}^{(2)} + F_{\min}^{(2)}}{F_{\min}^{(2)}} - F_{\max}^{(2)} - F_{\min}^{(2)} \right)}, \quad T_0 = \frac{F_{\max}^{(2)} + F_{\min}^{(2)}}{F_{\min}^{(2)}} t_{00}^2 - \frac{F_{\max}^{(2)}}{F_{\min}^{(2)}} t_{00}; \quad (20)$$

$$D = 4 \frac{(F_{\max}^{(2)} + F_{\min}^{(2)})^4}{(F_{\min}^{(2)})^2} t_{00}^2 - 4 \left(\frac{(F_{\max}^{(2)} + F_{\min}^{(2)})^2}{F_{\min}^{(2)}} - F_{\max}^{(2)} - F_{\min}^{(2)} \right) \cdot \left(F_{\min}^{(2)} t_{00}^2 + \frac{F_{\max}^{(2)}}{F_{\min}^{(2)}} t_{00}^2 - L \right).$$

Задачу (15), (16), розв'язуємо з врахуванням сили (7), яка має різний вигляд на кожному з інтервалів дії пружних демпферів. З огляду на надлишкову громіздкість таких обчислень, у цій статті розглядається лише знаходження першої поправки. При цьому

припускається, що точки переключення активного керування не можуть перебувати всередині проміжків, на яких діють пружинні демпфери. Також приймається, що сила пружин у демпферах є достатньою для забезпечення руху робота з початкового стану в кінцевий як у фізичній, так і в уявній областях. З урахуванням цих припущень для знаходження поправки необхідно розв'язати шість «підрівнянь», по одному для кожного проміжку, відповідно до визначених інтервалів дії сили:

$$\begin{aligned}
 & (m_0 + m_*) \ddot{x}_1(t) = k \left(l - \frac{F_{\max}^{(1)}}{m_0 + m_*} \frac{t^2}{2} \right), \text{ нпу } x_0(t) < l, 0 < t < t_0^{(1)}; \\
 & (m_0 + m_*) \ddot{x}_1(t) = 0 \text{ нпу } l < x_0(t) < L - l; \\
 & (m_0 + m_*) \ddot{x}_1(t) = -k \left(L - \frac{F_{\min}^{(1)}}{m_0 + m_*} \frac{t^2}{2} + \frac{F_{\min}^{(1)}}{m_0 + m_*} t_{00} t - \frac{F_{\min}^{(1)}}{2(m_0 + m_*)} t_{00}^2 - (L - l) \right), \\
 & \text{нпу } L - l < x_0(t) < L, t_0^{(1)} < t < t_{00}; \\
 & m_0 \ddot{x}_1(t) = k \left(L + l - \frac{F_{\max}^{(2)}}{m_0} \frac{t^2}{2} + \frac{F_{\max}^{(2)}}{m_0} t_{00} t - \frac{F_{\max}^{(2)}}{2m_0} t_{00}^2 - L \right), \\
 & \text{нпу } L < x_0(t) < L + l, t_{00} < t < t_0^{(2)}; \\
 & m_0 \ddot{x}_1(t) = 0, \text{ нпу } L < x_0(t) < 2L - l; \\
 & m_0 \ddot{x}_1(t) = -k \left(-\frac{F_{\min}^{(2)}}{m_0} \frac{t^2}{2} + \frac{F_{\min}^{(2)}}{m_0} T_0 t + 2L - \frac{F_{\min}^{(2)}}{2m_0} T_0^2 - (2L - l) \right), \\
 & \text{нпу } t_0^{(2)} < t < T_0, 2L - l < x_0(t);
 \end{aligned} \tag{21}$$

$$x_1(0) = 0, x_1(t_{01}) = 0, x_1(T_1) = 0, \dot{x}_1(0) = 0, \dot{x}_1(t_{01}) = 0, \dot{x}_1(T_1) = 0.$$

Розв'язуючи його одержимо:



$$x_1(t) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{k}{m_0 + m_*} \left(\frac{lt^2}{2} - \frac{F_{\max}^{(1)}}{24(m_0 + m_*)} t^4 \right), 0 < t < t_0^{(1)}, x_0 < l; \\ C_1 t + C_2, l < x_0 < L - l; \\ \frac{k}{m_0 + m_*} \left(-\frac{F_{\min}^{(1)}}{24(m_0 + m_*)} t^4 + \frac{F_{\min}^{(1)} t_{00}}{6(m_0 + m_*)} t^3 - \frac{F_{\min}^{(1)} t_{00}^2}{4(m_0 + m_*)} t^2 + \frac{l}{2} t^2 \right) + \\ + \frac{k}{m_0 + m_*} \left[-\frac{F_{\min}^{(1)} t_{01}^3}{6(m_0 + m_*)} + \frac{F_{\min}^{(1)} t_{00} t_{01}^2}{2(m_0 + m_*)} - \frac{F_{\min}^{(1)} t_{00}^2 t_{01}}{2(m_0 + m_*)} + l t_{01} \right] t + \\ + \frac{k}{m_0 + m_*} \left[\frac{F_{\min}^{(1)} t_{01}^4}{24(m_0 + m_*)} - \frac{F_{\min}^{(1)} t_{00} t_{01}^3}{6(m_0 + m_*)} + \frac{F_{\min}^{(1)} t_{00}^2 t_{01}^2}{4(m_0 + m_*)} - \frac{l}{2} t_{01}^2 \right] - \\ \frac{k}{m_0 + m_*} \left[-\frac{F_{\min}^{(1)} t_{01}^4}{6(m_0 + m_*)} + \frac{F_{\min}^{(1)} t_{00}^2 t_{01}^2}{2(m_0 + m_*)} - \frac{F_{\min}^{(1)} t_{00}^2 t_{01}^2}{2(m_0 + m_*)} + l t_{01}^2 \right], \\ L - l < x_0 < L, t_0^{(1)} < t < t_0; \\ \frac{k}{m_0} \left(\frac{lt^2}{2} + \frac{F_{\max}^{(2)}}{m_0} \frac{t^4}{24} + \frac{F_{\max}^{(2)} t_{00}}{m_0} \frac{t^3}{6} - \frac{F_{\max}^{(2)} t_{00}^2}{4m_0} t^2 \right) - \\ - \frac{k}{m_0} \left(l t_{01} + \frac{F_{\max}^{(2)}}{m_0} \frac{t_{01}^3}{6} + \frac{F_{\max}^{(2)} t_{00}}{m_0} \frac{t_{01}^2}{2} - \frac{F_{\max}^{(2)} t_{00}^2}{2m_0} t_{01} \right) t - \\ - \frac{k}{m_0} \left(\frac{l t_{01}^2}{2} + \frac{F_{\max}^{(2)}}{m_0} \frac{t_{01}^4}{8} + \frac{F_{\max}^{(2)} t_{00}}{m_0} \frac{t_{01}^3}{3} - \frac{3 F_{\max}^{(2)} t_{00}^2}{4m_0} t_{01}^2 \right) + \\ + \frac{k}{m_0} \left(l t_{01}^2 + \frac{F_{\max}^{(2)}}{m_0} \frac{t_{01}^4}{6} + \frac{F_{\max}^{(2)} t_{00}}{m_0} \frac{t_{01}^3}{2} - \frac{F_{\max}^{(2)} t_{00}^2}{2m_0} t_{01}^2 \right), \\ L < x_0 < L + l, t_0 < t < t_0^{(2)}; \\ \tilde{C}_1 t + \tilde{C}_2, L < x_0 < 2L - l; \\ \frac{k}{m_0^2} \left[\frac{F_{\min}^{(2)}}{24} t^4 - \frac{F_{\min}^{(2)} T_0}{6} t^3 - \left(L - \frac{F_{\min}^{(2)}}{4m_0} - \frac{2L - l}{3} \right) t^2 \right] + \\ + \frac{k T_1}{m_0} \left[-\frac{F_{\min}^{(2)}}{6m_0} T_1^2 + \frac{F_{\min}^{(2)} T_0}{2m_0} T_1 - \frac{F_{\min}^{(2)} T_0^2}{2m_0} - l \right] t + \\ + 2L - \frac{k}{m_0^2} \left(\frac{F_{\min}^{(2)}}{24} T_1^4 - \frac{F_{\min}^{(2)} T_0}{6} T_1^3 - \left(L - \frac{F_{\min}^{(2)}}{4m_0} - \frac{2L - l}{3} \right) T_1^2 \right) - \\ - \frac{k T_1}{m_0} \left[-\frac{F_{\min}^{(2)}}{6m_0} T_1^3 + \frac{F_{\min}^{(2)} T_0}{2m_0} T_1^2 - \frac{F_{\min}^{(2)} T_0^2}{2m_0} - l T_1 \right], t_0^{(2)} < t < T, 2L - l < x_0. \end{array} \right. \quad (22)$$

Сталі $C_1, C_2, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2, t_{00}, T_0$ шукаємо з наступних співвідношень:

$$\begin{aligned}
 & \frac{k}{m_0+m_*} \left(-\frac{F_{\min}^{(1)}}{24(m_0+m_*)} t_{01}^4 + \frac{F_{\min}^{(1)} t_{00}}{6(m_0+m_*)} t_{01}^3 - \frac{F_{\min}^{(1)}}{4(m_0+m_*)} t_{01}^2 - \frac{(l-L)}{2} t_{01}^2 \right) - \\
 & - \frac{k}{m_0+m_*} \left[-\frac{F_{\min}^{(1)} t_{01}^3}{3(m_0+m_*)} + \frac{F_{\min}^{(1)} t_{00} t_{01}^2}{2(m_0+m_*)} - \frac{F_{\min}^{(1)} t_{01}}{2(m_0+m_*)} - (l-L) t_{01} \right] t_{01} + L - \\
 & - \frac{k}{m_0+m_*} \left[-\frac{F_{\min}^{(1)} t_{01}^4}{24(m_0+m_*)} + \frac{F_{\min}^{(1)} t_{00} t_{01}^3}{6(m_0+m_*)} - \frac{F_{\min}^{(1)} t_{01}^2}{4(m_0+m_*)} - \frac{(l-L)}{2} t_{01}^2 \right] = \\
 & \frac{k}{m_0} \left(\frac{lt_{01}^2}{2} + \frac{F_{\max}^{(2)} t_{01}^4}{m_0} + \frac{F_{\max}^{(2)} t_{00} t_{01}^3}{m_0} - \frac{F_{\max}^{(2)} t_{01}^2}{4m_0} t_{01}^2 \right) - \\
 & - \frac{k}{m_0} \left(lt_{01} + \frac{F_{\max}^{(2)} t_{01}^3}{m_0} + \frac{F_{\max}^{(2)} t_{00} t_{01}^2}{m_0} - \frac{F_{\max}^{(2)} t_{01}^2}{2m_0} t_{01} \right) t_{01} + \\
 & - \frac{k}{m_0} \left(\frac{lt_{01}^2}{2} + \frac{F_{\max}^{(2)} t_{01}^4}{m_0} + \frac{F_{\max}^{(2)} t_{00} t_{01}^3}{m_0} - \frac{3F_{\max}^{(2)} t_{01}^2}{4m_0} t_{01}^2 \right) + \\
 & + \frac{k}{m_0} \left(lt_{01}^2 + \frac{F_{\max}^{(2)} t_{01}^4}{m_0} + \frac{F_{\max}^{(2)} t_{00} t_{01}^3}{m_0} - \frac{F_{\max}^{(2)} t_{01}^2}{2m_0} t_{01}^2 \right); \tag{23}
 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \frac{k}{m_0+m_*} \left(\frac{lt_q^2}{2} - \frac{F_{\max}^{(1)}}{24(m_0+m_*)} t_q^4 \right) = C_1 t_q + C_2; \\
 & C_1 t_q + C_2 = l; \\
 & C_1 t_w + C_2 = \frac{k}{m_0+m_*} \left(-\frac{F_{\min}^{(1)}}{24(m_0+m_*)} t_w^4 + \frac{F_{\min}^{(1)} t_{00}}{6(m_0+m_*)} t_w^3 - \frac{F_{\min}^{(1)} t_{00}^2}{4(m_0+m_*)} t_w^2 + \frac{l}{2} t_w^2 \right) + \\
 & + \frac{k}{m_0+m_*} \left[-\frac{F_{\min}^{(1)} t_{01}^3}{6(m_0+m_*)} + \frac{F_{\min}^{(1)} t_{00} t_{01}^2}{2(m_0+m_*)} - \frac{F_{\min}^{(1)} t_{00}^2 t_{01}}{2(m_0+m_*)} + lt_{01} \right] t_w + \\
 & + \frac{k}{m_0+m_*} \left[\frac{F_{\min}^{(1)} t_{01}^4}{24(m_0+m_*)} - \frac{F_{\min}^{(1)} t_{00} t_{01}^3}{6(m_0+m_*)} + \frac{F_{\min}^{(1)} t_{00}^2 t_{01}^2}{4(m_0+m_*)} - \frac{l}{2} t_{01}^2 \right] - \\
 & - \frac{k}{m_0+m_*} \left[-\frac{F_{\min}^{(1)} t_{01}^4}{6(m_0+m_*)} + \frac{F_{\min}^{(1)} t_{00}^2 t_{01}^2}{2(m_0+m_*)} - \frac{F_{\min}^{(1)} t_{00}^2 t_{01}^2}{2(m_0+m_*)} + lt_{01}^2 \right]; \\
 & C_1 t_w + C_2 = L-l;
 \end{aligned} \right. \tag{24}$$



$$\begin{aligned}
& \frac{k}{m_0^2} \left[\frac{F_{\min}^{(2)}}{24} T_1^4 - \frac{F_{\min}^{(2)} T_0}{6} T_1^3 - \left(L - \frac{F_{\min}^{(2)}}{4m_0} - \frac{2L-l}{3} \right) T_1^2 \right] + \\
& \frac{kT_1}{m_0} \left[-\frac{F_{\min}^{(2)}}{6m_0} T_1^2 + \frac{F_{\min}^{(2)} T_0}{2m_0} T_1 - \frac{F_{\min}^{(2)} T_0^2}{2m_0} - l \right] T_1 + \\
& -\frac{k}{m_0^2} \left(\frac{F_{\min}^{(2)}}{24} T_1^4 - \frac{F_{\min}^{(2)} T_0}{6} T_1^3 - \left(L - \frac{F_{\min}^{(2)}}{4m_0} - \frac{2L-l}{3} \right) T_1^2 \right) - \\
& -\frac{kT_1}{m_0} \left[-\frac{F_{\min}^{(2)}}{6m_0} T_1^3 + \frac{F_{\min}^{(2)} T_0}{2m_0} T_1^2 - \frac{F_{\min}^{(2)} T_0^2}{2m_0} - lT_1 \right] = 0;
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\left\{ \begin{aligned}
& \tilde{C}_1 t_e + \tilde{C}_2 = L + l; \\
& \frac{k}{m_0} \left(lt_e^2 + \frac{F_{\max}^{(2)}}{m_0} t_e^4 + \frac{F_{\max}^{(2)} t_{00}}{m_0} t_e^3 - \frac{F_{\max}^{(2)} t_{00}^2}{4m_0} t_e^2 \right) - \\
& \frac{k}{m_0} \left(lt_{01} + \frac{F_{\max}^{(2)}}{m_0} t_{01}^3 + \frac{F_{\max}^{(2)} t_{00}}{m_0} \frac{t_{01}^2}{2} - \frac{F_{\max}^{(2)} t_{00}^2}{2m_0} t_{01} \right) t_e + \\
& -\frac{k}{m_0} \left(lt_{01}^2 + \frac{F_{\max}^{(2)}}{m_0} \frac{t_{01}^4}{8} + \frac{F_{\max}^{(2)} t_{00}}{m_0} \frac{t_{01}^3}{3} - \frac{3F_{\max}^{(2)} t_{00}^2}{4m_0} t_{01}^2 \right) + \\
& \frac{k}{m_0} \left(lt_{01}^2 + \frac{F_{\max}^{(2)}}{m_0} \frac{t_{01}^4}{6} + \frac{F_{\max}^{(2)} t_{00}}{m_0} \frac{t_{01}^3}{2} - \frac{F_{\max}^{(2)} t_{00}^2}{2m_0} t_{01}^2 \right) = \tilde{C}_1 t_e + \tilde{C}_2; \\
& \tilde{C}_1 t_r + \tilde{C}_2 = 2L - l; \\
& \frac{k}{m_0^2} \left[\frac{F_{\min}^{(2)}}{24} t_r^4 - \frac{F_{\min}^{(2)} T_0}{6} t_r^3 - \left(L - \frac{F_{\min}^{(2)}}{4m_0} - \frac{2L-l}{3} \right) t_r^2 \right] + \\
& + \frac{kT_1}{m_0} \left[-\frac{F_{\min}^{(2)}}{6m_0} T_1^2 + \frac{F_{\min}^{(2)} T_0}{2m_0} T_1 - \frac{F_{\min}^{(2)} T_0^2}{2m_0} - l \right] t_r + \\
& + 2L - \frac{k}{m_0^2} \left(\frac{F_{\min}^{(2)}}{24} T_1^4 - \frac{F_{\min}^{(2)} T_0}{6} T_1^3 - \left(L - \frac{F_{\min}^{(2)}}{4m_0} - \frac{2L-l}{3} \right) T_1^2 \right) - \\
& -\frac{kT_1}{m_0} \left[-\frac{F_{\min}^{(2)}}{6m_0} T_1^3 + \frac{F_{\min}^{(2)} T_0}{2m_0} T_1^2 - \frac{F_{\min}^{(2)} T_0^2}{2m_0} - lT_1 \right] t_r = \tilde{C}_1 t_r + \tilde{C}_2.
\end{aligned} \right. \tag{26}$$

Тут t_q , t_w , t_e , t_r – момент часу, в який закінчується або починається дія пружинних демпферів на робота-маніпулятора.

Зі співвідношень (23), (25) випливає, що у такому випадку $t_{01} = 0$ і $T_1 = 0$. Це пояснюється тим, що сили, які створюються пружинами, діють як система балансування імпульсу. Одна пружина забезпечує початковий поштовх, а інша діє в протилежному напрямку, коли маніпулятор досягає кінцевої точки. Таким чином, імпульс повністю гаситься, і система приходиться у стан рівноваги.

Результати розрахунку. Результати розв'язання задачі (1)–(26) для робота маніпулятора при наступних параметрах: $m = 1(\text{кг})$, $m_* = 0.5(\text{кг})$, $L = 10(\text{м})$, $\varepsilon = 0.01$, $F_{\max}^{(1)} = 12$, $F_{\max}^{(2)} = 10$, $F_{\min}^{(1)} = 8$, $F_{\min}^{(2)} = 6$, $l = 0,3(\text{м})$, $k = 0$ (суцільна лінія), $k = 5$ (пунктирна лінія), $k = 10$ (штрихова лінія) – зображено на рис. 3.

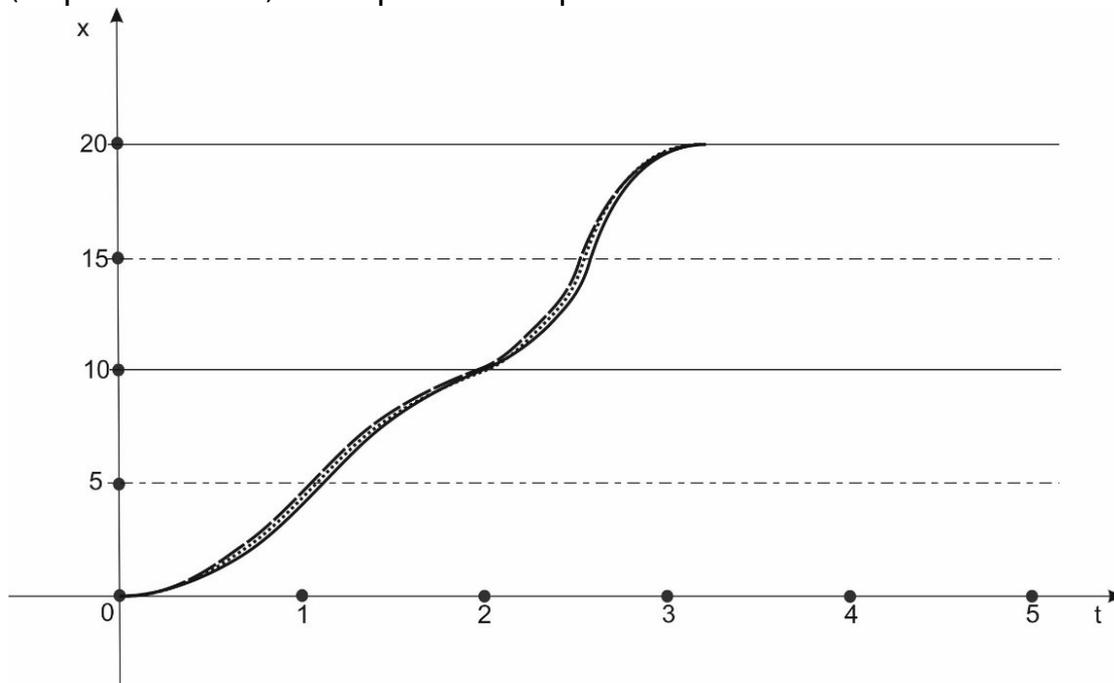


Рис. 3. Графік залежності шляху від часу для руху маніпулятора

Результати розрахунків показують, що ефективність руху маніпулятора лише частково залежить від параметрів демперних пружин, таких як жорсткість. Правильний вибір цих параметрів забезпечує плавність руху, проте не дає можливості скоротити час виконання операції за умови використання однакових пружин. Метод асимптотичного розв'язку продемонстрував свою ефективність у знаходженні оптимальних траєкторій маніпулятора, особливо за умов, коли вплив пружних сил є незначним. Це дозволило врахувати складну динаміку системи без необхідності виконання надмірно складних обчислень. Практичне застосування отриманих результатів може бути корисним для підвищення енергоефективності та



продуктивності одноланкових маніпуляторів у промислових процесах, особливо в тих випадках, де потрібна висока точність виконання циклічних операцій.

1. М. В. Демидюк, П. М. Демидюк, М. І. Ширко. Параметрична оптимізація циклічних транспортних операцій одноланкового маніпулятора з активними та пасивними приводами. *Прикл. проблеми механіки і математики*. 2023. Вип. 21. С. 64–71. URL: <https://doi.org/10.15407/apmm2023.21.64-71>. 2. М. О. Рашевський. Асимптотичний аналіз нестационарних систем автоматичного керування. *Математичне моделювання*. 2018. № 2. С. 72–78. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/Mm_2018_2_11. 3. А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О. В. Присяжнюк. Асимптотичний метод розв'язання одного класу модельних сингулярно збурених задач процесу масопереносу в різнопористих середовищах. *Доповіді Національної академії наук України*. 2013. № 3. С. 28–34. 4. А. Я. Бомба, С. В. Барановський. Покрокова асимптотика розв'язання одного класу сингулярно збурених нелінійних задач з вільними поверхнями. *Математичні методи і фізико-механічні поля*. 1999. Т. 42, № 2. С. 47–52. 5. А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк. Асимптотичне розв'язання розв'язків нелінійних сингулярно збурених крайових задач типу «конвекція-дифузія» із запізненням. *Доповіді НАН України*. 2005. № 3. С. 60–66.

REFERENCES:

1. M. V. Demydiuk, P. M. Demydiuk, M. I. Shyrko. Parametrychna optymizatsiia tsyklichnykh transportnykh operatsii odnolankovoho manipuliatora z aktyvnymy ta pasyvnymy pryvodamy. *Prykl. problemy mekhaniky i matematyky*. 2023. Vyp. 21. S. 64–71. URL: <https://doi.org/10.15407/apmm2023.21.64-71>. 2. M. O. Rashevskiy. Asymptotychnyi analiz nestatsionarnykh system avtomatychnoho keruvannia. *Matematychni modeliuvannia*. 2018. № 2. S. 72–78. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/Mm_2018_2_11. 3. A. Ya. Bomba, I. M. Prysiazhniuk, O. V. Prysiazhniuk. Asymptotychnyi metod rozviazannia odnogo klasu modelnykh synhuliarno zburenykh zadach protsesu masoperenosu v riznoporystykh seredovyshchakh. *Dopovidi Natsionalnoi akademii nauk Ukrainy*. 2013. № 3. S. 28–34. 4. A. Ya. Bomba, S. V. Baranovskyi. Pokrokovia asymptotyka rozviazannia odnogo klasu synhuliarno zburenykh neliniinykh zadach z vilnymy poverkhniamy. *Matematychni metody i fizyko-mekhanichni polia*. 1999. T. 42, № 2. S. 47–52. 5. A. Ya. Bomba, I. M. Prysiazhniuk. Asymptotychni rozvynennia rozviazkiv neliniinykh synhuliarno zburenykh kraiovykh zadach typu «konvektsiia-dyfuziia» iz zapiznenniam. *Dopovidi NAN Ukrainy*. 2005. № 3. S. 60–66.

Bomba A. Ya., Doctor of Engineering, Professor (National University of Water and Environmental Engineering, Rivne), **Kot V. V., Candidate of Engineering (Ph.D.)** (Rivne Vocational College of the National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine)

OPTIMIZATION OF THE MOVEMENT OF A SINGLE-LINK ROBOT UNDER THE MINIMAL INFLUENCE OF DAMPING SPRINGS

Single-link manipulator robots are crucial in industry due to their simplicity, reliability, and precision. They are widely used in manufacturing, transportation, and other areas where fast and accurate operation is essential. The increasing demand for productivity makes improving their speed critically important. Optimizing operation times contributes to reducing energy consumption and equipment wear. Damping springs can influence system dynamics, however, in cases of minimal impact, additional research is required. Nevertheless, considering their influence, it is unnecessary to "solve the problem from scratch" – it is sufficient to introduce adjustments to the simplified problem solution (ignoring the damping effect). The study proposes a method for optimizing the motion of a single-link manipulator robot with relatively minor damping spring influence. A mathematical model of the manipulator robot is described, accounting for the elastic properties of damping springs and their impact on system dynamics. The solution is presented as an asymptotic series, incorporating first-order corrections to minimize the time required for cyclical operations. It was found that these corrections do not affect the overall time for cyclical operations when springs with identical characteristics are used, due to their balancing effect: one provides the initial thrust, while the other slows the motion at the endpoint. As a result, the efficiency of the manipulator's operation only partially depends on the stiffness of the springs. Proper selection of spring parameters ensures smooth motion but does not shorten operation time when springs with identical characteristics are used. The asymptotic solution method has proven effective in finding optimal manipulator trajectories, particularly under conditions where the impact of elastic forces is minor. This approach allowed for the consideration of complex system dynamics without requiring excessively complicated calculations.



The practical application of the results can be beneficial for improving the energy efficiency and productivity of single-link manipulators in industrial processes, especially in cases requiring high precision for cyclical operations.

***Keywords:* optimization; single-link robot; damping springs; asymptotic method; mathematical modeling.**