

Мартинюк П. М., д.т.н., професор; Остапчук О. П., к.т.н, доцент; Мічута О. Р., к.т.н., доцент; Мельничук О. В., студент (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне, p.m.martyniuk@nuwm.edu.ua, o.p.ostapchuk@nuwm.edu.ua, o.r.michuta@nuwm.edu.ua, melnychuk.o_ak21@nuwm.edu.ua)

МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ В НЕЛІНІЙНІЙ ЗАДАЧІ ПРУЖНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ З УМОВАМИ СПРЯЖЕННЯ

Результатом проведених досліджень є застосування методу скінченних елементів до розв'язання нелінійної задачі пружної фільтрації з використанням класичного та нелінійного законів Дарсі. Розроблено програмне забезпечення для прогнозування процесу фільтрації в пористому середовищі з метою моделювання розподілу напорів при різних граничних умовах та значеннях вхідних параметрів. Проведено чисельні експерименти для різних типів ґрунтів, за їх результатами проаналізовано вплив нелінійності на результати прогнозного моделювання.

Ключові слова: пружна фільтрація; нелінійний закон Дарсі; метод скінченних елементів; алгоритм; Python.

Природні пористі середовища, як правило, є неоднорідними. В цій статті сфокусовано увагу на неоднорідностях у вигляді тонких включень. Тонкі включення в ґрунтах можуть мати і штучне походження. Вони використовуються у гідротехнічному будівництві [3], в агровиробництві [1], а також при будівництві захисних геобар'єрів в сховищах твердих побутових відходів [13]. Технологічно такі включення використовуються з метою мінімізації фільтраційних потоків, а тому створюються із слабо проникних матеріалів. Слабопроникність для фільтраційних потоків часто означає перехід лінійного закону фільтрації в нелінійний. Тому в математичному моделюванні фільтраційних процесів при наявності цих включень виникає два ключові питання: урахування нелінійного закону фільтрації та розвиток ефективних методів для розв'язання таких задач з метою отримання якісних прогнозів.

Один з найефективніших методів розв'язування нелінійних задач фільтрації, коли фільтраційний процес не є стаціонарним та залежить від часу, полягає в застосуванні методу скінченних



елементів (МСЕ). Основна його ідея – це дискретизація всієї області фільтрації на скінченну кількість елементів, та подальша заміна крайових задач для різних диференціальних рівнянь системами лінійних або нелінійних алгебраїчних рівнянь.

Особливо важливо, що МСЕ, який ґрунтується на проєкційному методі Бубнова – Гальоркіна, дозволяє шукати узагальнені розв'язки крайової задачі. Ця властивість є визначальною для вирішення задач фільтрації, в яких необхідно враховувати умови спряження між різними компонентами системи [9]. Такі задачі стають вкрай складними й потребують використання інших підходів та розширення самого методу МСЕ. Врахування цих умов спряження вимагає більш комплексної додаткової математичної обробки та розробки більш складних відповідних алгоритмів, що повинні забезпечити високу точність та надійність результатів моделювання.

Отже, **метою** нашої роботи є моделювання процесу нелінійної фільтрації рідкої речовини через пористий ґрунт при наявності тонких включень з використанням методу скінченних елементів.

Розглянемо області Ω_1 та Ω_2 (рис. 1), які містять кварц (SiO_2) як основний компонент ґрунту і графіт (C) $_{\omega}$, як тонке включення товщиною d , яке розміщене на глибині $x = \xi$ [10; 17].

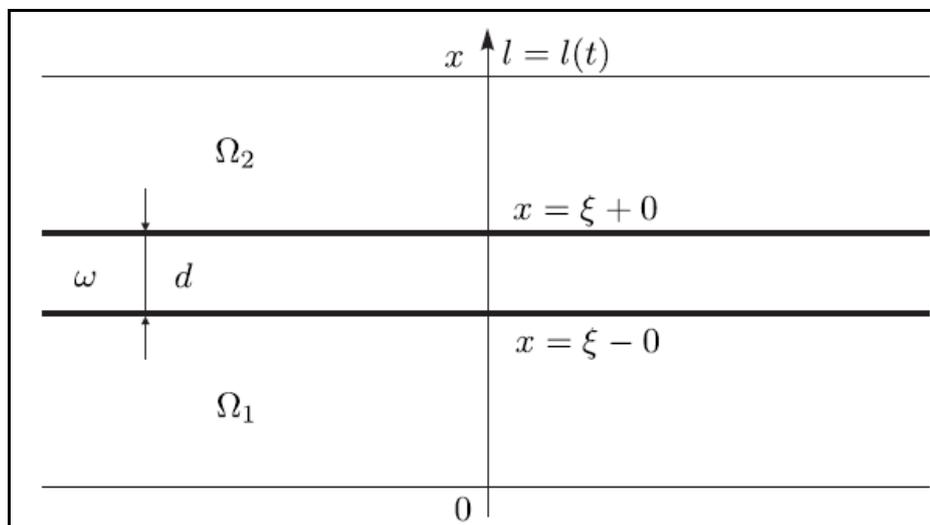


Рис. 1. Шар ґрунту товщиною l з тонким включенням ω товщиною d

Землетрус викликає потік ґрунтових вод, які під впливом перепадів напорів проникають через пори ґрунту. Цей процес відомий як фільтрація. Однак, внаслідок неоднорідності ґрунту (присутності графіту), швидкість фільтрації може бути непропорційною до градієнта напору, що призводить до посилення

нелінійних ефектів в законі фільтрації. Це може викликати збільшення напорів у деяких областях, що призводить до можливості подальших землетрусів або зсувів ґрунту. Вплив графіту може змінити динаміку зміни напорів, що може вплинути на стійкість масиву пористого середовища [6; 14].

Необхідно математично та комп'ютерно змоделювати таку задачу з різними граничними умовами та використати нелінійний закон Дарсі [5; 7; 10; 15], дослідити розподіл напору $h(x,t)$ рідини у зоні фільтрації по часу в різних шарах ґрунту та визначити, як впливає тонке включення графіту на напір. Це дасть можливість в подальшому використати вихідні дані для моделювання зміни концентрацій хімічних речовин, температури, маси мікроорганізмів чи інших параметрів в подібних задачах.

Сформульована вище фізична постановка задачі описується наступною крайовою задачею [10; 17], математична модель якої включає рівняння пружної фільтрації, відповідні крайові умови та умови спряження

$$\beta \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k^*(h, I) \frac{\partial h}{\partial x} \right), \quad x \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad t \in (0, T], \quad (1)$$

$$h(x, t)|_{x=0} = \tilde{h}_0(t), \quad t \in (0, T], \quad (2)$$

$$u(x, t)|_{x=l} = \left(-k^*(h, I) \frac{\partial h}{\partial x} \right) \Big|_{x=l} = 0, \quad t \in (0, T], \quad (3)$$

$$h(x, 0) = h_0(x), \quad x \in \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}, \quad (4)$$

$$u^\pm \Big|_{x=\xi} = \left(-k^*(h, I) \frac{\partial h}{\partial x} \right)^\pm \Big|_{x=\xi} = - \frac{[h]}{\int_0^d \frac{dx}{k_\omega^*(h, I_\omega)}}, \quad (5)$$

$$u = -k^*(h, I) \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (6)$$

Тут враховується нелінійний закон Дарсі [10] з

$$k^*(h, I) = k(h) \left(1 - \frac{I}{(i + \varepsilon^2)^\gamma \left(\frac{1}{\alpha} \right)^\gamma \left(\frac{i}{I^*} \right)^\alpha} \right),$$



де $\overline{\Omega}_1 = [0; \xi]$, $\overline{\Omega}_2 = [\xi; l]$, $0 < \xi < l$, $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$;

$T > 0$ – заданий інтервал часу;

$\tilde{h}_0(t)$, $h_0(x)$ – відомі функції;

β – коефіцієнт пружної ємності ґрунту;

$$i = \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right|;$$

l – абсолютне значення градієнта напору, нижче якого порушується лінійність закону Дарсі;

$$I^* = \frac{\alpha}{\gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)} I, \text{ де } \gamma(\alpha), \gamma(\alpha, x) \text{ – гамма-функція та нижня}$$

неповна гамма-функція;

h – напір рідини;

k_w, k – коефіцієнт фільтрації тонкого включення та основного ґрунту;

u – швидкість фільтрації, яка обраховується за формулою (6);

u^\pm – значення швидкості фільтрації при $x = \xi - 0$ та $x = \xi + 0$;

$[h] = h^+ - h^-$ – зміна напорів на тонкому включенні.

Чисельний розв'язок нелінійної задачі фільтрації (1)–(6) з умовами спряження знайдено методом скінченних елементів [2; 11].

Розглянемо замикання $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$ і покриємо його скінченноелементною сіткою із загальною кількістю вузлів N .

Важливо відзначити, що в точці $x = \xi$ має бути подвійна нумерація вузлів: зліва та справа від $x = \xi$. В цьому контексті, базисні функції методу скінченних елементів (МСЕ) допускають розрив першого роду в точці $x = \xi$ і є поліномами степеня m [9; 10].

Наближений узагальнений розв'язок початково-крайової задачі (1)–(6) знайдено у вигляді

$$\hat{h}(x, t) = \sum_{i=1}^N h_i(t) \varphi_i(x), \quad (7)$$

де $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^N$ – це базисні функції МСЕ;

$h_i(t)$, $i = \overline{1, N}$ – це невідомі коефіцієнти, які залежать лише від часу.

Використовуючи слабке формулювання задачі (1)-(6), враховуючи (7), отримуємо задачу Коші [10] для системи нелінійних диференціальних рівнянь

$$\mathbf{M}(\mathbf{H}) \frac{d\mathbf{H}}{dt} + \mathbf{L}(\mathbf{H})\mathbf{H}(t) = 0, \quad (8)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}\mathbf{H}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}, \quad (9)$$

де

$$\tilde{\mathbf{F}} = (\tilde{f}_i)_{i=1}^N, \quad \tilde{\mathbf{M}} = (\tilde{m}_{ij})_{i,j=1}^N, \quad \tilde{m}_{ij} = \int_0^l \varphi_i \varphi_j dx, \quad \mathbf{M} = (m_{ij})_{i,j=1}^N, \quad \mathbf{L} = (l_{ij})_{i,j=1}^N,$$

$$\mathbf{H} = (h_i(t))_{i=1}^N, \quad \mathbf{H}^{(0)} = (h_i(0))_{i=1}^N, \quad m_{ij} = \int_0^l \beta \varphi_i \varphi_j dx,$$

$$l_{ij} = \int_0^l k^*(\hat{h}, I) \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_j}{dx} dx + \frac{[\varphi_i][\varphi_j]}{\int_0^l \frac{dx}{k_\omega^*(\hat{h}, I_\omega)}}.$$

Виходячи з того, що (8), (9) – це задача Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку, то її розв'язання вимагає використання відповідних схем дискретизації. Для цього можна використати схему Кранка – Ніколсона [9; 10]

$$\mathbf{M} \left(\frac{1}{2} (\mathbf{H}^{j+1} + \mathbf{H}^j) \right) \frac{\mathbf{H}^{j+1} - \mathbf{H}^j}{\tau} + \mathbf{L} \left(\frac{1}{2} (\mathbf{H}^{j+1} + \mathbf{H}^j) \right) \frac{1}{2} (\mathbf{H}^{j+1} + \mathbf{H}^j) = 0, \\ j = \overline{0, m_\tau - 1}.$$

Тут часовий інтервал $[0, T]$ розбитий на m_τ рівних частин з кроком

$$\tau = \frac{T}{m_\tau}; \quad \mathbf{H}^{(j)} - \text{наближений розв'язок задачі Коші (8), (9) при } t = j\tau.$$

Однак, практична реалізація схеми Кранка – Ніколсона, пов'язана з нелінійною задачею Коші (8), (9), вимагає використання ітерацій. Замість схеми Кранка – Ніколсона також можна використовувати схему предиктор-коректор [9; 10]

$$\mathbf{M}(\mathbf{H}^{(j)}) \frac{\mathbf{W}^{(j+1)} - \mathbf{H}^{(j)}}{\tau} + \mathbf{L}(\mathbf{H}^{(j)}) \frac{1}{2} (\mathbf{W}^{(j+1)} + \mathbf{H}^{(j)}) = 0, \\ \mathbf{M} \left(\frac{1}{2} (\mathbf{W}^{(j+1)} + \mathbf{H}^{(j)}) \right) \frac{\mathbf{H}^{(j+1)} - \mathbf{H}^{(j)}}{\tau} + \mathbf{L} \left(\frac{1}{2} (\mathbf{W}^{(j+1)} + \mathbf{H}^{(j)}) \right) \times \\ \times \frac{1}{2} (\mathbf{H}^{(j+1)} + \mathbf{H}^{(j)}) = 0, \quad j = \overline{0, m_\tau - 1},$$



де $\mathbf{W}^{(j+1)}$ – допоміжні вектор-функції.

Для більш простішої реалізації може підійти повністю неявна лінеаризована різницева схема [10]. Для системи рівнянь (8) вона має такий вигляд:

$$\mathbf{M}(\mathbf{H}^{(j)}) \frac{\mathbf{H}^{(j+1)} - \mathbf{H}^{(j)}}{\tau} + \mathbf{L}(\mathbf{H}^{(j)}) \mathbf{H}^{(j+1)} = 0, \quad j = \overline{0, m_\tau - 1}.$$

Програмна реалізація обчислювального алгоритму здійснювалася в середовищі Visual Studio Code (VS Code) з використанням мови програмування Python [4; 8; 12; 16]. Головна форма програми має вигляд відображений на рис. 2.

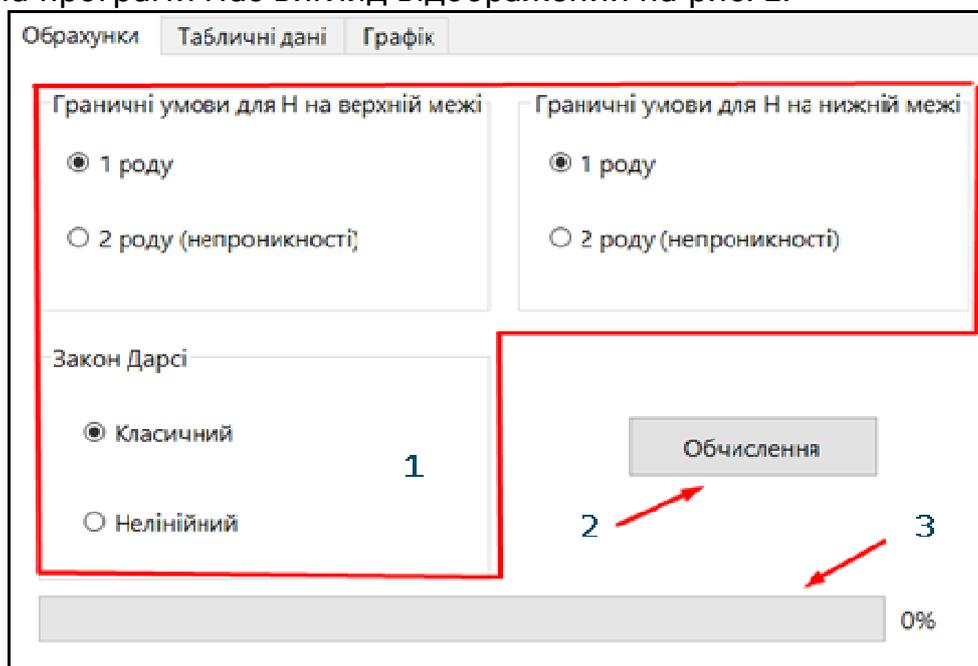


Рис. 2. Головне меню програми

Здійснити перегляд і аналіз отриманих значень для напору можна за допомогою вкладки «Табличні дані» (рис. 3).

	1	2	3	4	5	6
1	19.9999	19.9999	19.9999	19.9999	19.9999	19.9998
2	19.9991	19.9991	19.9991	19.9991	19.999	19.999
3	19.9967	19.9967	19.9966	19.9966	19.9965	19.9963
4	19.9911	19.9911	19.991	19.9909	19.9907	19.9903
5	19.9808	19.9807	19.9806	19.9803	19.9799	19.9793
6	19.9639	19.9639	19.9636	19.9631	19.9625	19.9616
7	19.9392	19.9391	19.9388	19.938	19.9372	19.9357
8	19.9055	19.9054	19.9049	19.9039	19.9028	19.9008
9	19.8623	19.8622	19.8615	19.8602	19.8588	19.8563
10	19.8093	19.8091	19.8083	19.8067	19.805	19.8019
11	19.7464	19.7462	19.7453	19.7434	19.7414	19.7377
12	19.6742	19.6739	19.6729	19.6707	19.6683	19.6641
13	19.6020	19.6016	19.6015	19.600	19.5963	19.5916

Рис. 3. Таблиця значень напорів $h(x,t)$

За допомогою вкладки «Графік» є можливість обрати кількість часових шарів, переглянути відображення останнього моделювання та графік різниць при використанні лінійного та нелінійного законів Дарсі (рис. 4).

Обрахунки	Табличні дані	Графік
Тип рисування ліній графіка		
<input type="radio"/> 10 часових проміжків		
<input checked="" type="radio"/> Кастомізовано		
Введіть кількість часових шарів від 0 до 100		
<input type="text" value="5"/>		
<input type="button" value="Згенерувати таблицю"/>		
<input type="button" value="Відобразити графік"/>		
<input type="button" value="Різницевий графік"/>		
Значення		
1	1	
2	20	
3	40	
4	60	
5	99	

Рис. 4. Вкладка «Графік»



В якості прикладу розглянуто задачу фільтраційної консолідації як частковий випадок загальної задачі пружної фільтрації. Тоді коефіцієнт пружної ємності ґрунту $\beta = \frac{\gamma a}{1+e}$, де e – коефіцієнт пористості ґрунту, a – коефіцієнт стискуваності ґрунту, γ – питома вага порової рідини.

Для проведення чисельних експериментів використано наступні вхідні параметри:

– кількість діб проведення експерименту: 100;

– коефіцієнт стискуваності ґрунту: $5,12 \times 10^{-6} \text{ м}^2/\text{Н}$;

– емпіричні параметри для визначення значень порогового градієнту через проникність ґрунту: $A = 4 \times 10^{-12}$, $B = -0,78$;

– питома вага порової води: $1 \times 10^4 \text{ Н}/\text{м}^3$;

– в'язкість води при температурі 25 градусів за Цельсієм: $1,03 \times 10^{-7} \text{ Па}/\text{доба}$;

– параметри напорів: $h(0,t) = 1 \text{ м}$; $h(x,0) = 20 \text{ м}$;

– параметри масиву ґрунту: $l = 10 \text{ м}$; $\xi = 5 \text{ м}$; $d = 0,2 \text{ м}$.

Для першого чисельного експерименту як основний шар ґрунту розглядався суглинок

$$n_0 = 0,38, k_0 = 0,0288 \text{ м}/\text{доба},$$

а як тонке включення – графіт в перемішку з суглинком

$$n_{0\omega} = 0,46, k_{0\omega} = 0,0048 \text{ м}/\text{доба}.$$

Чисельні експерименти було проведено, якщо на нижній межі задавалася гранична умова другого роду, а на верхній – першого роду (рис. 5, рис. 6).

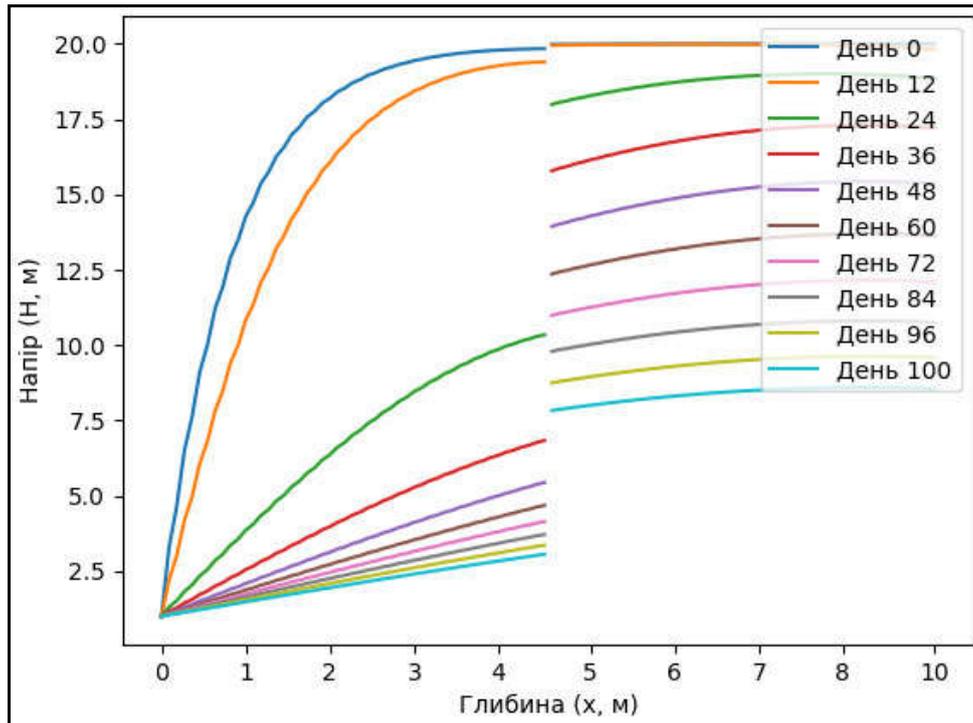


Рис. 5. Розподіл напорів в суглинку з використанням нелінійного закону Дарсі

На рис. 6 можна спостерігати зростання стрибка різниці напорів на тонкому включенні з часом при використанні класичного і нелінійного законів Дарсі. Однак самі напори, як видно з рис. 5, в процесі консолідації масиву пористого середовища з часом зменшуються. Пояснення ситуації, коли самі напори спадають, але значення їх стрибка на включенні зростає, полягають в аналізі нелінійності закону Дарсі. Особливість нелінійності полягає в наявності порогового градієнта напорів, нижче якого особливо починають проявлятися нелінійності в законі Дарсі. Стрибок напорів на включенні буде зростати до моменту, поки його значення не наблизиться до порогового значення.

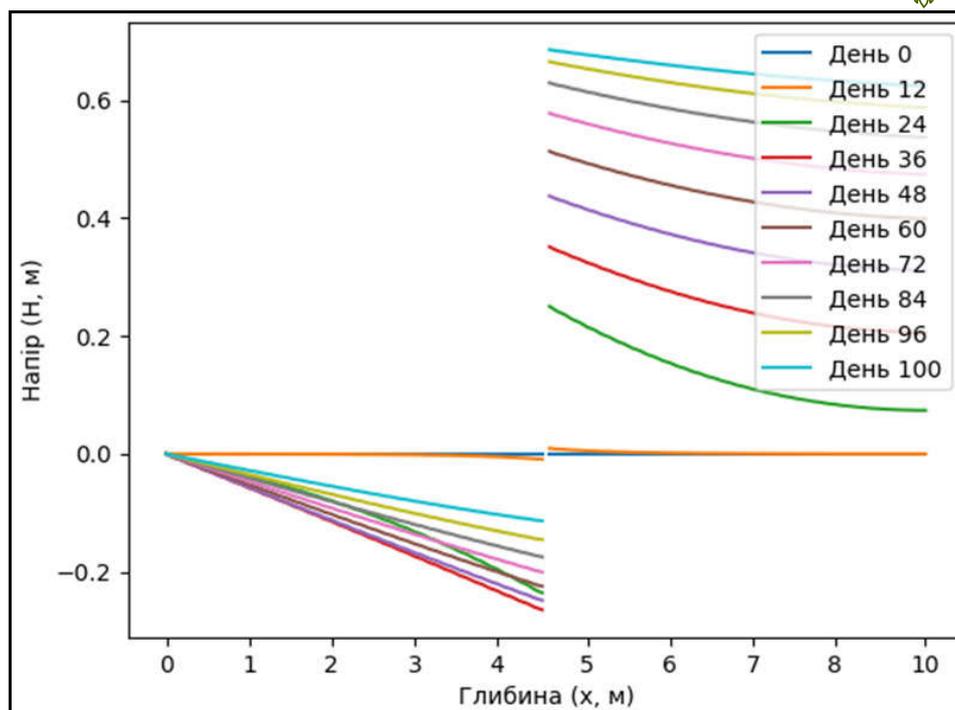


Рис. 6. Різниця напорів в суглинку при використанні класичного та нелінійного законів Дарсі

Для другого чисельного експерименту як основний шар ґрунту розглядався пісок як основний компонент, а як тонке включення – пісок, змішаний з графітом

$$n_0 = 0,38, k_0 = 0,05 \text{ м/доба},$$
$$n_{0\omega} = 0,4, k_{0\omega} = 0,007 \text{ м/доба}.$$

На рис. 7, 8 зображено графічні дані при моделюванні, коли на нижній межі задано граничну умову другого роду, а на верхній – першого роду. Якісно картина рис. 7, 8 співпадає із розподілами надлишкових напорів та їх стрибків на рис. 5, 6.

Порівнюючи графіки з першого та другого експериментів (рис. 5, рис. 6 та рис. 7, рис. 8), можна помітити, що швидкість просочування змінюється з типом матеріалу тонкого включення. При цьому стрибок напорів збільшується на 36,2% для першого та на 7,2% для другого експериментів на випадок нелінійності в законі Дарсі.

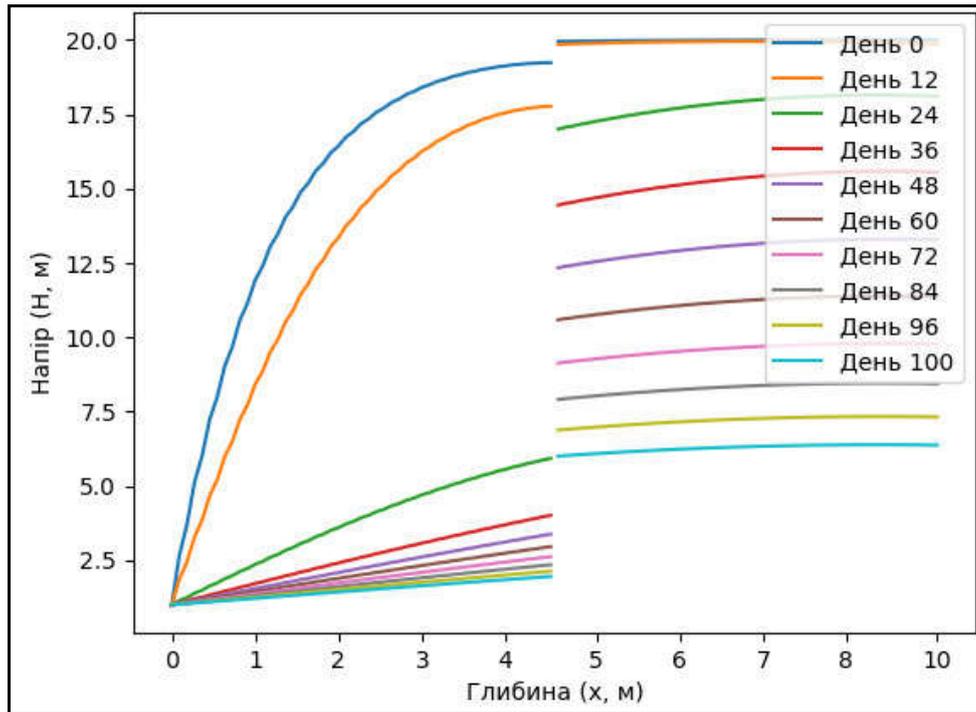


Рис. 7. Розподіл напорів в піску, коли задається на нижній межі гранична умова другого роду, а на верхній – першого з використанням нелінійного закону Дарсі

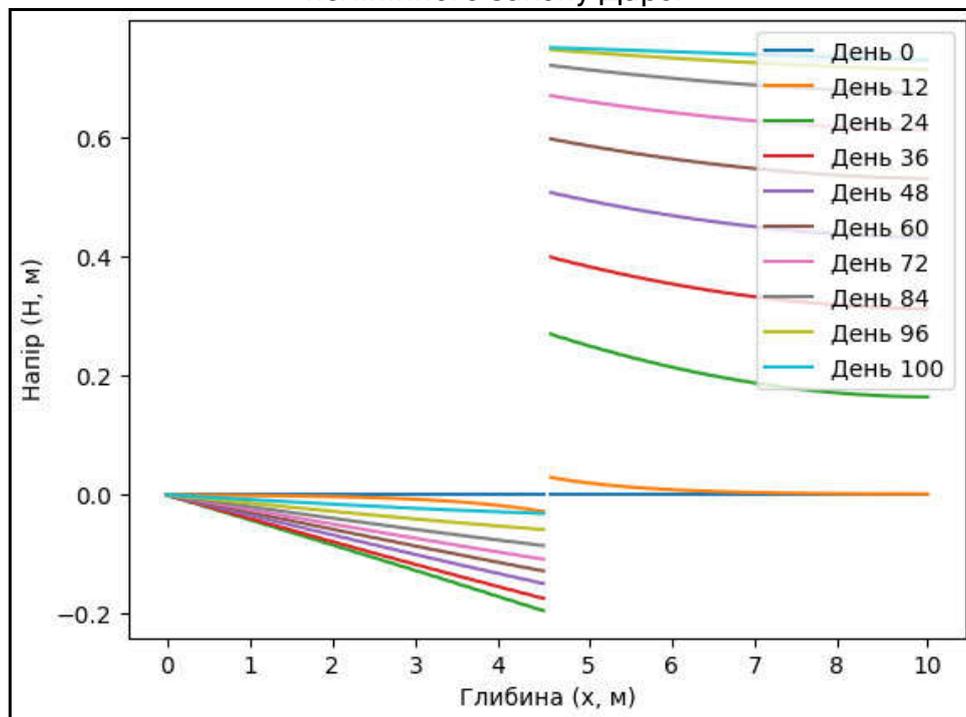


Рис. 8. Розподіл напорів в піску при використанні класичного та нелінійного законів Дарсі, коли на нижній межі задається гранична умова другого роду, а на верхній – першого



Висновки. В роботі сформульовано постановку задачі, розроблено математичну модель задачі та алгоритм для її розв'язання, здійснено програмну реалізацію та детальний аналіз прогнозного розподілу напорів в геологічному середовищі з тонким включенням впродовж певного проміжку часу. В результаті чого встановлено відмінності в отриманих результатах при використанні класичного та нелінійного законів Дарсі.

Основним результатом роботи є створена комп'ютерна програма, яка дозволяє виконувати розрахунки розподілу напорів у одновимірному варіанті з великою кількістю вхідних параметрів. Однак, особливістю цієї програми є не лише можливість представлення отриманих результатів у вигляді таблиць, але й у формі графічних зображень. Це надає користувачеві можливість зручної візуалізації результатів і дозволяє краще зрозуміти розподіл напорів у геологічному середовищі. Отже, проведені дослідження надають інструментарій, який може бути використаний для детального аналізу розподілу напорів у геологічному середовищі з тонкими включеннями. Це дасть змогу краще розуміти, як різні параметри впливають на цей процес, і можливість використовувати ці знання для розробки нових методів впливу на геологічні формації. Результати цієї роботи мають практичне значення для геотехнічної та гідрогеологічної практики, а також для подальших наукових досліджень у галузі інженерної геології.

1. Aimee Grace Uzamurera, Ze-Ying Zhao, Peng-Yang Wang, Yong-Xian Wei, Fei Mo, Rui Zhou, Wen-Li Wang, Fazal Ullah, Aziz Khan, Xiao-Bin Xiong, Meng-Ying Li, Kiprotich Wesly, Wen-Ying Wang, Hong-Yan Tao, You-Cai Xiong. Thickness effects of polyethylene and biodegradable film residuals on soil properties and dryland maize productivity. *Chemosphere*. 2023. Vol. 329. P. 138602.
2. Burden R. L., Faires J. D., Burden. A. M. Numerical Analysis. Cengage Learning, 2015. 912 p.
3. Guzman I. L., Payano C. Jr. Use of repurposed whole textile for enhancement of pavement soils. *Geo-Engineering*. 2023. Vol. 14. P. 12.
4. Harwani D. Mastering GUI Programming with Python: Develop impressive cross-platform GUI applications with PyQt. Packt Publishing, 2019. 542 p.
5. Hui-Hai Liu. Fluid Flow in the Subsurface. History, Generalization and Applications of Physical Laws. Switzerland. Springer Cham, 2017. 220 p.
6. Kutya T. V., Martyniuk P. M. Mathematical Simulation of Humidification of Earth on a Slope and Calculation of Its Safety Factor. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2018. Vol. 91. Pp. 1189–1198.
7. Li Chuan-xun, Wang Chang-jian, Lu Meng-meng, Lu Jian-fei, Xie Kang-he. One-dimensional Large-Strain Consolidation of Soft Clay with Non-Darcian Flow and Nonlinear Compression and Permeability of Soil. *Journal of Central South University*. 2017.

Vol. 24. Pp. 967–976. **8.** Loot S. F. Modern Python Cookbook: 130+ updated recipes for modern Python 3.12 with new techniques and tools. Packt Publishing, 2024. 818 p. **9.** Martyniuk P. M., Michuta O. R., Ulianchuk-Martyniuk O. V. Numerical modeling of surface subsidence due to compaction of soil with fine inclusions. *Mathematical Modeling and Computing*. 2024. Vol. 11, No. 1. Pp. 50–58. **10.** Michuta O. R., Martyniuk P. M. Nonlinear evolutionary problem of filtration consolidation with the non-classical conjugation condition. *Journal of Optimization, Differential Equations and Their Applications*. 2022. Vol. 30, № 1. Pp. 71–87. **11.** Nam-Ho Kim. Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis. Springer, 2014. 428 p. **12.** Ramalho L. Fluent Python: Clear, Concise, and Effective Programming. 2022. 1012 p. **13.** Wenhao Jiang, Jiangshan Li, Shangqi Ge. Numerical study for one-dimensional non-isothermal transport of organic contaminant in the three-layer composite liner containing a defective geomembrane. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2025. Vol. 237. P. 126417. **14.** Wesseling M. P. Principles of Computational Fluid Dynamics. Springer, 2001. 644 p. **15.** Xu-dong Zhao, Wen-hui Gong. Numerical solution of nonlinear large strain consolidation based on non-Darcian flow. *Mathematical Problems in Engineering*. Hindawi, 2019. Vol. 2019. Pp. 1–14. **16.** Зеляк О. Книга Програмування мовою Python. Алгоритмічні структури і стратегії. Теорія та практика. Ліра-К, 2025. 338 с. **17.** Мартинюк П. М., Мічута О. Р., Остапчук О. П., Мельничук О. В. Математична модель нелінійної неізотричної фільтрації з умовами спряження. *Modeling, Control and Information Technologies : VII International Scientific and Practical Conference*. Rivne, 2024. Pp. 300–303.

REFERENCES:

1. Aimee Grace Uzamurera, Ze-Ying Zhao, Peng-Yang Wang, Yong-Xian Wei, Fei Mo, Rui Zhou, Wen-Li Wang, Fazal Ullah, Aziz Khan, Xiao-Bin Xiong, Meng-Ying Li, Kiprotich Wesley, Wen-Ying Wang, Hong-Yan Tao, You-Cai Xiong. Thickness effects of polyethylene and biodegradable film residuals on soil properties and dryland maize productivity. *Chemosphere*. 2023. Vol. 329. P. 138602. **2.** Burden R. L., Faires J. D., Burden. A. M. Numerical Analysis. Cengage Learning, 2015. 912 p. **3.** Guzman I. L., Payano C. Jr. Use of repurposed whole textile for enhancement of pavement soils. *Geo-Engineering*. 2023. Vol. 14. P. 12. **4.** Harwani D. Mastering GUI Programming with Python: Develop impressive cross-platform GUI applications with PyQt. Packt Publishing, 2019. 542 p. **5.** Hui-Hai Liu. Fluid Flow in the Subsurface. History, Generalization and Applications of Physical Laws. Switzerland. Springer Cham, 2017. 220 p. **6.** Kutya T. V., Martyniuk P. M. Mathematical Simulation of Humidification of Earth on a Slope and Calculation of Its Safety Factor. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2018. Vol. 91. Pp. 1189–1198. **7.** Li Chuan-xun, Wang Chang-jian, Lu Meng-meng, Lu Jian-fei, Xie Kang-he. One-dimensional Large-Strain Consolidation of Soft Clay with Non-Darcian



Flow and Nonlinear Compression and Permeability of Soil. *Journal of Central South University*. 2017. Vol. 24. Pp. 967–976. **8.** Loot S. F. Modern Python Cookbook: 130+ updated recipes for modern Python 3.12 with new techniques and tools. Packt Publishing, 2024. 818 p. **9.** Martyniuk P. M., Michuta O. R., Ulianchuk-Martyniuk O. V. Numerical modeling of surface subsidence due to compaction of soil with fine inclusions. *Mathematical Modeling and Computing*. 2024. Vol. 11, No. 1. Pp. 50–58. **10.** Michuta O. R., Martyniuk P. M. Nonlinear evolutionary problem of filtration consolidation with the non-classical conjugation condition. *Journal of Optimization, Differential Equations and Their Applications*. 2022. Vol. 30, № 1. Pp. 71–87. **11.** Nam-Ho Kim. Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis. Springer, 2014. 428 p. **12.** Ramalho L. Fluent Python: Clear, Concise, and Effective Programming. 2022. 1012 p. **13.** Wenhao Jiang, Jiangshan Li, Shangqi Ge. Numerical study for one-dimensional non-isothermal transport of organic contaminant in the three-layer composite liner containing a defective geomembrane. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2025. Vol. 237. P. 126417. **14.** Wesseling M. P. Principles of Computational Fluid Dynamics. Springer, 2001. 644 p. **15.** Xu-dong Zhao, Wen-hui Gong. Numerical solution of nonlinear large strain consolidation based on non-Darcian flow. *Mathematical Problems in Engineering*. Hindawi, 2019. Vol. 2019. Pp. 1–14. **16.** Zeliak O. Knyha Prohramuvannia movoiu Python. Alhorytmichni struktury i stratehii. Teoriia ta praktyka. Lira-K, 2025. 338 s. **17.** Martyniuk P. M., Michuta O. R., Ostapchuk O. P., Melnychuk O. V. Matematychna model neliniinoi neizometrychnoi filtratsii z umovamy spriazhennia. *Modeling, Control and Information Technologies : VII International Scientific and Practical Conference*. Rivne, 2024. Pp. 300–303.

Martyniuk P. M., Doctor of Engineering, Professor; Ostapchuk O. P., Candidate of Engineering (Ph.D.), Associate Professor; Michuta O. R., Candidate of Engineering (Ph.D.), Associate Professor; Melnychuk O. V., Senior Student (National University of Water and Environmental Engineering, Rivne)

FINITE ELEMENT METHOD IN A NONLINEAR PROBLEM OF ELASTIC FILTRATION WITH COUPLING CONDITION

In this work, the problem statement is formulated, a mathematical model of the problem is developed, and an algorithm for its solution is designed. The result of the conducted research is the application of the finite element method to solve a nonlinear problem of elastic filtration using both the classical and nonlinear Darcy's laws. Software has been developed to predict the filtration process in a porous medium, aiming to model the pressure distribution under

different boundary conditions and input parameter values. A series of numerical experiments have been conducted for various types of soils. A detailed analysis of the predicted head distribution in a geological medium with a thin inclusion over a certain period of time has been carried out. As a result, differences in the obtained results when using the classical and nonlinear Darcy's laws have been identified, and the impact of nonlinearity on the predictive modeling results has been established. The main result of this work is the development of a computer program that enables calculations of hydraulic head distribution in a one-dimensional model with a large number of input parameters. However, a key feature of this program is not only its ability to present the obtained results in tabular form but also in graphical representations. This provides users with convenient visualization of results and allows for a better understanding of hydraulic head distribution in a geological medium. Thus, the conducted research provides a tool that can be used for a detailed analysis of hydraulic head distribution in a geological medium with thin inclusions. This will allow for a better understanding of how different parameters influence this process and the possibility of using this knowledge to develop new methods for influencing geological formations. The results of this work have practical significance for geotechnical and hydrogeological applications, as well as for further scientific research in the field of engineering geology.

***Keywords:* elastic filtration; Darcy's nonlinear law; finite element method; algorithm; Python.**