Національний університет
водного господарства
та природокористування

Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства
та природокористування
Кафедра вищої математики

04-02-05

методичні вказівки та завдання

до самостійної роботи із дисципліни вища математика

з розділу

«ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ»

для студентів напрямку підготовки: 6.050202
«Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»
денної форми навчання

Рекомендовано методичною
комісією за напрямом
підготовки 6.050202
«Автоматизація та комп'ютерно-
-інтегровані технології»
протокол № 8 від 29.04.2014 р.

Рівне 2014

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Методичні вказівки і завдання до самостійної роботи із дисципліни вища математика з розділу «Операційне числення» для студентів напрямку підготовки: 6.050202 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» денної форми навчання / **Дейнека О. Ю., Микитин Г. П.** – Рівне: НУВГП, 2014. – 39 с.

Упорядники: **Дейнека О. Ю.**, асистент кафедри вищої математики, **Микитин Г. П.**

Відповідальний за випуск: **Тадеєв П. О.**, кандидат фізико-математичних наук, доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

© Дейнека О. Ю.,
Микитин Г. П., 2014
© НУВГП, 2014

Національний університет водного господарства та природокористування

§1. Перетворення Лапласа та його основні властивості

Основна ідея операційного числення полягає в тому, що між функцією дійсної змінної $f(t)$ та функцією комплексної змінної $F(p)$ $(p=\sigma+i\tau)$ встановлюється відповідність, яка дозволяє операції диференціювання і інтегрування стосовно функції $f(t)$ замінити алгебраїчними діями над функцією $F(p)$.

Співвідношення між $f(t)$ та $F(t)$ визначається формулою

$$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \qquad (1)$$

і позначається наступним чином:

$$f(t)\to F(p).$$

Національний університет водного господарства та природокористування

Перехід від функції $f(t)$ до функції $F(p)$ за формулою (1) називається перетворенням Лапласа. Для того, щоб невласний інтеграл у формулі (1) збігався, достатньо, щоб виконувалися наступні умови:

а) $f(t)\equiv 0$ для $t<0$ (так як інтеграл обчислюється в межах від 0 до $+\infty$, то значення функції $f(t)$ для $t<0$ можуть бути визначені довільним чином).

б) $|f(t)|<M e^{\sigma_0 t}$, де $M>0$ та σ_0 – деякі дійсні сталі, причому $\mathrm{Re}\, p=\sigma\ge\sigma_1>\sigma_0$;

в) $f(t)$ – неперервна для всіх невід'ємних t за виключенням, можливо, скінченної кількості точок розриву першого роду на кожному інтервалі скінченної довжини.

Функція $f(t)$, яка задовольняє три наведені умови, називається ***оригіналом***. Функція $F(p)$, визначена формулою (1) називається ***зображенням*** оригінала $f(t)$, або перетворенням Лапласа функції $f(t)$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Прикладами функцій оригіналів можуть бути такі функції:

1) Одинична функція Хевісайда, визначена наступним чином:

$$\varepsilon(t)=\begin{cases}0, & \text{якщо } t<0,\\ 1, & \text{якщо } t\geq 0.\end{cases}$$

Її графік зображено на рис. 1.

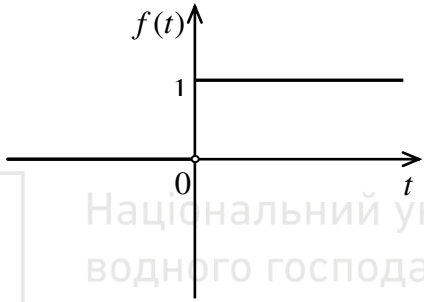


Рис. 1

Національний університет
водного господарства
та природокористування

2) $f(t)=\varepsilon(t)t^n$ $(n\geq 0)$.

3) $f(t)=\varepsilon(t)e^{-at}$, $a\in R$.

Очевидно, добуток кожної функції, що задовольняє умови б) та в), на одиничну функцію Хевісайда $\varepsilon(t)$ є оригіналом.

Наприклад: $\varepsilon(t)e^{-a^2t}$, $\varepsilon(t)\sin at$.

Наведемо приклади функції які не є оригіналами: e^{t^2}, $1/t$.

Визначимо зображення декількох оригіналів.

Приклад 1.

$$f(t)=\varepsilon(t);\quad F(p)=\int_0^{+\infty}e^{-pt}dt=\lim_{\beta\to+\infty}\int_0^{\beta}e^{-pt}dt=$$

$$=\lim_{\beta\to+\infty}\left[-\frac{1}{p}e^{-pt}\right]\Bigg|_0^{\beta}=\lim_{\beta\to+\infty}\left(-\frac{1}{p}e^{-p\beta}\right)+\frac{1}{p}$$

Національний університет водного господарства та природокористування

Але, $|e^{-pt}| = e^{-\sigma t}$. Так як $\sigma \ge \sigma_0 > 0$, то $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\sigma t} = 0$, тобто $\lim\limits_{\beta\to+\infty} e^{-p\beta} = 0$. Тому, і $\lim\limits_{\beta\to+\infty}\left(-\frac{1}{p}e^{-p\beta}\right) = 0$. Отже, $\varepsilon(t) \to \frac{1}{p}$.

Приклад 2.

$$f(t) = e^{-at};\quad F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-pt}dt = \lim_{\beta\to+\infty}\int_0^{\beta} e^{-(a+p)t}dt =$$

$$= \lim_{\beta\to+\infty}\left(-\frac{1}{a+p}e^{-(a+p)t}\right)\Big|_0^{\beta} = \frac{1}{p+a}.$$

Таким чином $e^{-at} \to \frac{1}{p+a}$ $\quad \operatorname{Re} p > -\operatorname{Re} a.$

Національний університет водного господарства та природокористування

Основні властивості перетворення Лапласа

1) Властивість лінійності.

Якщо $f_1(t) \to F_1(p)$, $f_2(t) \to F_2(p)$ і c_1, c_2 – дійсні сталі, то

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \to c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p).$$

І взагалі, $\sum\limits_{k=1}^{n} c_n f_n(t) \to \sum\limits_{k=1}^{n} c_n F_n(p).$

Доведення. Нехай $f(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_n f_n(t)$ і $f(t) \to F(p)$. Тоді за означенням

$$F(p) = \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} c_n f_n(t) e^{-pt}dt = \sum_{k=1}^{n} c_n \int_0^{+\infty} f_n(t)e^{-pt}dt = \sum_{k=1}^{n} c_n F_n(p).$$

Приклад 1. $f(t) = \operatorname{ch} at$. Визначити $F(p)$.

Розв'язок. $\operatorname{ch} at = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}$.

Так як $e^{-at} \to \frac{1}{p+a}$ і $e^{at} \to \frac{1}{p-a}$, то

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$F(p)=\frac{1}{2}\frac{1}{p-a}+\frac{1}{2}\frac{1}{p+a}=\frac{p}{p^2-a^2};\quad \operatorname{Re} p>|\operatorname{Re} a|.$$

Отже, $\operatorname{ch} at \to \frac{p}{p^2-a^2}$.

Приклад 2. $f(t)=\sin t$. Визначити $F(p)$.

Розв'язок. Так як $\sin t=\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}=\frac{1}{2i}e^{it}-\frac{1}{2i}e^{-it}$, то

$\sin t \to \frac{1}{2i}\frac{1}{p-i}-\frac{1}{2i}\frac{1}{p+i}=\frac{1}{p^2+1}$. Тобто, $\sin t \to \frac{1}{p^2+1}$.

2) Теорема подібності.

Якщо $f(t)\to F(p)$ і $a>0$, то $f(at)\to \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Доведення. Нехай $f(at)=\varphi(p)$. Тоді $\Phi(p)=\int_0^{+\infty} f(at)e^{-pt}dt$ і, після заміни $at=\tau$, маємо $\Phi(p)=\int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-\frac{p}{a}t}\frac{1}{a}d\tau=\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$.

Властивість доведена.

Приклад 1. $f(t)=\sin at$. Визначити $F(p)$.

Розв'язок. Так як, $\sin t \to \frac{1}{p^2+1}$, то

$$\sin at \to \frac{1}{a}\frac{1}{\left(\frac{p}{a}\right)^2+1}=\frac{a}{p^2+a^2}$$

3) Теорема зміщення.

Якщо $f(t)\to F(p)$, то при будь-якому комплексному a

$$e^{-at}f(t)\to F(p+a).$$

Доведення. Нехай $\varphi(t)=e^{-at}f(t)$, тоді

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\Phi(p)=\int_0^{+\infty}\varphi(t)e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty}e^{-at}f(t)e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-(p+a)t}dt=F(p+a).$$

Приклад 2.

$f(t)=e^{-at}\sin\omega t$. Знайти $F(p)$.

Розв'язок. Так як, $\sin\omega t\to\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$, то

$e^{-at}\sin\omega t\to\dfrac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$.

4) Теорема запізнення.

Якщо $f(t)\to F(p)$ і $T>0$, то $f(t-T)\to e^{-Tp}F(p)$.

Доведення. Нехай $f(t-T)=\varphi(t)$. Тоді $\Phi(p)=\int_0^{+\infty}\varphi(t)e^{-pt}dt=$

$=\int_0^{+\infty}f(t-T)e^{-pt}dt$ і, після заміни $t-T=\tau$, отримаємо

$$\Phi(p)=\int_{-T}^{+\infty}f(\tau)e^{-p(T+\tau)}d\tau=\int_{-T}^{0}f(\tau)e^{-p(T+\tau)}d\tau+\int_{-T}^{+\infty}e^{-pT}f(\tau)e^{-p\tau}d\tau.$$

Так як, згідно властивості в) оригінала, $f(\tau)\equiv 0$ для $\tau<0$,

то $\int_{-T}^{0}f(\tau)e^{-p(T+\tau)}d\tau=0$ і $\Phi(p)=e^{-pT}\int_{-T}^{+\infty}f(\tau)e^{-p\tau}d\tau=e^{-pT}F(p).$

Приклад 1.

Нехай $f(t)=\varepsilon(t-a)$, тобто

$$f(t)=\begin{cases}0, & \text{якщо } t-a<0,\\ 1, & \text{якщо } t-a\ge 0.\end{cases}$$

Знайти $F(p)$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Розв'язок. Так як, $\varepsilon(t) \to \frac{1}{p}$, то $F(p) = \frac{e^{-ap}}{p}$ (див. рис. 2).

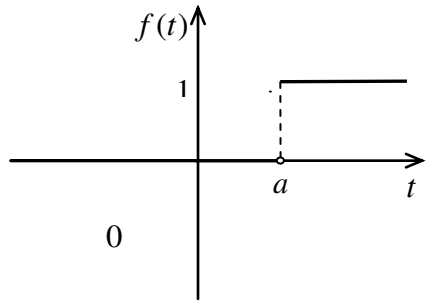


Рис. 2

Приклад 2.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

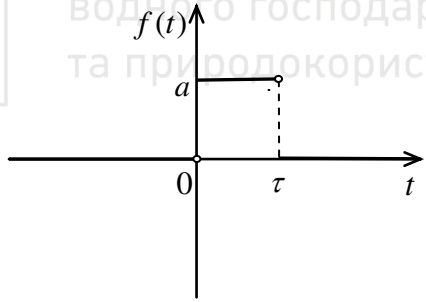


Рис. 3

$$f(t) = \begin{cases} a, & \text{якщо} \quad t \in [0,\ \tau), \\ 0, & \text{якщо} \quad t \notin [0,\ \tau). \end{cases}$$

Знайти $F(p)$.

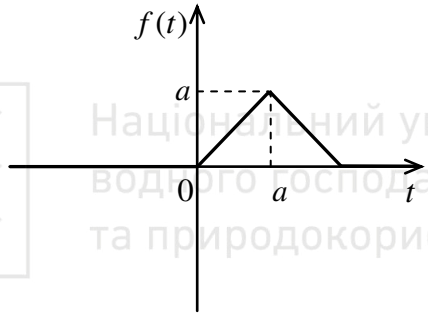
Розв'язок. $f(t)$ за допомогою одиничної функції Хевісайда можна записати наступним чином: $f(t) = a\varepsilon(t) - a\varepsilon(t-\tau)$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Тому, $F(p)=\frac{a}{p}-\frac{ae^{-\tau p}}{p}=\frac{a}{p}(1-e^{-\tau p})$, так як $\varepsilon(t)\to\frac{1}{p}$ і $\varepsilon(t-\tau)\to e^{-\tau p}\frac{1}{p}$ (за теоремою запізнення).

Приклад 3.

$$f(t)=\begin{cases} t, & \text{якщо} \quad t\in[0,\ a),\\ 2a-t & \text{якщо} \quad t\in[a,\ 2a),\\ 0, & \text{якщо} \quad t\notin[0,\ 2a). \end{cases}$$



Національний університет
водного господарства
та природокористування

Рис. 4

Знайти $F(p)$.

Користуючись теоремою запізнення та одиничною функцією Хевісайда, оригінал $f(t)$ можна записати формулою

$$f(t)=t\varepsilon(t)-t\varepsilon(t-a)+(2a-t)\varepsilon(t-a)-(2a-t)\varepsilon(t-2a),$$

або

$$f(t)=t\varepsilon(t)-2(t-a)\varepsilon(t-a)+(t-2a)\varepsilon(t-2a).$$

Зображення функції $f(t)$ дорівнює

$$f(t)\to\frac{1}{p^2}-2\frac{1}{p^2}e^{-ap}+\frac{1}{p^2}e^{-2ap}=\frac{1}{p^2}(1-e^{-ap})^2.$$

Тобто, $F(p)=\frac{1}{p^2}(1-e^{-ap})^2$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Приклад 4.

$$f(t)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad t<a,\\ t-a & \text{якщо} \quad a\le t\le b,\\ b-a, & \text{якщо} \quad t>b.\end{cases}$$

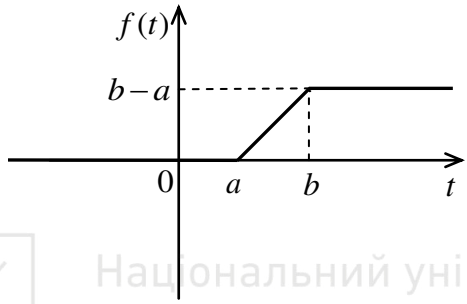


Рис. 5

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Знайти $F(p)$.

Розв'язок.

$$f(t)=(t-a)\varepsilon(t-a)-(t-a)\varepsilon(t-b)+(b-a)\varepsilon(t-b),$$

або

$$f(t)=(t-a)\varepsilon(t-a)-(t-b)\varepsilon(t-b).$$

Зображенням функції $f(t)$ буде

$$f(t)\to\frac{1}{p^2}e^{-ap}-\frac{1}{p^2}e^{-bp}.$$

Таким чином

$$F(p)\to\frac{1}{p^2}(e^{-ap}-e^{-bp}).$$

5) Теорема про диференціювання оригінала.

Нехай $f(t)$ – оригінал, причому $f(t)$ диференційована для $t \neq 0$ і $f'(t)$ також оригінал. Тоді, якщо $f(t) \to F(p)$, то $f'(t) \to pF(p) - f(0)$, $\operatorname{Re} p > \sigma_0$, $f(0) = \lim\limits_{t \to 0} f(t)$. Якщо крім того, $f''(t)$, $f'''(t)$, ..., $f^{(n)}(t)$ – оригінали, то $f^{(n)}(t) \to p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - p^{n-3} f''(0) - ... - f^{(n-1)}(0)$.

Доведення.

Інтегруючи частинами, маємо

$$\int_0^{+\infty} f'(t) e^{-pt} dt = \left(f(t) e^{-pt} \right)\Big|_0^{+\infty} + p \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt = pF(p) - f(0),$$

так як $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) e^{-pt} = 0$ для $\operatorname{Re} p = \sigma > \sigma_0$.

Застосовуючи, вже доведену теорему другий раз, до функції $f'(t)$ отримаємо

$$f''(t) \to p[pF(p) - f(0)] - f'(0) = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0),$$

а після n – кратного її застосування:

$$f^{(n)}(t) \to p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - p^{n-3} f''(0) - ... - f^{(n-1)}(0).$$

Окремий випадок. Якщо $f(0) = f'(0) = ... = f^{(n-1)}(0)$, то диференціювання оригінала відповідає множенню зображення на p, тобто $f^{(n)}(t) \to p^n F(p)$.

Приклад 1.

Відомо, що $\sin \omega t \to \dfrac{\omega}{p^2 + \omega^2}$, знайти зображення $\cos \omega t$.

Розв'язок. $\cos \omega t = \dfrac{1}{\omega} (\sin \omega t)'$, то

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\cos\omega t \to \frac{1}{\omega}\frac{p\omega}{p^2+\omega^2} = \frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

Приклад 2.

$f(t) = t^n$. Знайти $F(p)$.

Так як $f^{(n)}(t) = n!$, $f^{(i)}(0) = 0$ $(i = \overline{0, n-1})$, $f^{(n)}(t) \to p^n F(p)$ і $n! \to \frac{n!}{p}$, то $p^n F(p) = \frac{n!}{p}$, звідки $F(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$, тобто $t^n \to \frac{n!}{p^{n+1}}$.

Приклад 3. Знайти зображення диференціального виразу $x^{IV}(t) - 5x'''(t) - 4x''(t) - x'(t) + 8$ із початковими умовами $x'''(0) = 2,\ x''(0) = -1,\ x'(0) = 0,\ x(0) = 5.$

Розв'язок. $x(t) \to X(p)$, тоді за теоремою диференціювання оригінала маємо:

$$x'(t) \to pX(p) - 5,\ x''(t) \to p^2X(p) - 5p,$$
$$x'''(t) \to p^3X(p) - 5p^2 + 1,\ x^{IV}(t) \to p^4X(p) - 5p^3 + p - 2.$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Звідси за властивістю лінійності отримаємо

$$x^{IV}(t) - 5x'''(t) - 4x''(t) - x'(t) + 8 \to 5p^3 + p - 2 -$$
$$-5(p^3X(p) - 5p^2 + 1) - 4(p^2X(p) - 5p) + 2(pX(p) - 5) -$$
$$- X(p) + \frac{8}{p} = (p^4 - 5p^3 - 4p^2 + 2p - 1)X(p) -$$
$$-5p^3 + 25p^2 + 21p - 17 + \frac{8}{p}.$$

6) Теорема про диференціювання зображення.

Нехай $\operatorname{Re} p > \sigma_0$, тоді як відомо із теорії функцій комплексної змінної, $F(p)$ є аналітичною функцією на площині

Національний університет
водного господарства

$\operatorname{Re} p > \sigma_0$, тобто має там неперервні похідні всіх порядків. Якщо $F(p) \leftarrow f(t)$, то $F'(p) \leftarrow -t\,f(t)$, а $F^{(n)}(p) \leftarrow (-t)^n f(t)$.

Доведення. Із $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ диференціюванням за параметром p отримаємо

$$F'(p) = \frac{d}{dp}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} -t\,f(t)e^{-pt}dt \leftarrow -t\,f(t),$$

звідси

$$F^{(n)}(p) \leftarrow (-t)^n f(t).$$

Приклад 1. $f(t) = t\cos at$. Знайти $F(p)$.

Розв'язок. Так як $\cos at \to \frac{p}{p^2+a^2}$, то

$$t\cos at \to -\left(\frac{p}{p^2+a^2}\right)'_p = \frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}.$$

Таким чином $t\cos at \to \frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$

Приклад 2. $f(t) = t\sin at$. Знайти $F(p)$.

Розв'язок. Так як $\sin at \to \frac{a}{p^2+a^2}$, то

$$t\sin at \to -\left(\frac{a}{p^2+a^2}\right)'_p, \text{ або } t\sin at \to \frac{2pa}{(p^2+a^2)^2}.$$

7) Теорема про інтегрування оригінала.

Якщо $f(t) \to F(p)$, $\operatorname{Re} p > \sigma_0$, то функція $\varphi(t) = \int_0^t f(t)dt$ є також оригінал і $\int_0^t f(t)dt \to \frac{F(p)}{p}$ (тут враховано, що $\varphi(0) = 0$).

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Доведення. Нехай $\varphi(t)=\int_0^t f(t)dt$, а також $\varphi(t)\to\Phi(p)$, $\varphi'(t)=f(t)\to F(p)$. Але $\varphi'(t)\to p\Phi(p)$, тому $p\Phi(p)=F(p)$ і $\int_0^t f(t)dt\to\frac{F(p)}{p}$.

Приклад. $\varphi(t)=\int_0^t e^{-at}\cos\omega t\,dt$. Знайти $\Phi(p)$.

Розв'язок. Нехай $e^{-at}\cos\omega t=f(t)$, Тоді $F(p)=\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$.

Так як $\varphi(t)=\int_0^t f(t)dt$, то $\Phi(p)=\frac{F(p)}{p}=\frac{p+a}{p[(p+a)^2+\omega^2]}$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

8) Теорема про інтегрування зображення.

Якщо $\int_0^{+\infty}F(p)dp$ існує, то $\int_0^{+\infty}F(p)dp\leftarrow\frac{f(t)}{t}$.

Доведення. Нехай шлях інтегрування $\int_p^{+\infty}F(p)dp$ повністю лежить в на півплощині $\operatorname{Re} p>\sigma_0>\sigma$. Тоді, замінюючи $F(p)$ на $\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}dt$, отримаємо $\int_p^{+\infty}F(p)dp=\int_p^{+\infty}dp\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}dt$ або, змінюючи порядок інтегрування, $\int_p^{+\infty}F(p)dp=\int_0^{+\infty}f(t)dt\int_p^{+\infty}e^{-pt}dp$.

Оскільки, $\int_p^{+\infty}e^{-pt}dp=\frac{e^{-pt}}{-t}\Big|_p^{+\infty}=\frac{e^{-pt}}{t}$, то $\int_p^{+\infty}F(p)dp=\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}e^{-pt}dt$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Функція $\frac{f(t)}{t}$ є оригіналом, Таким чином, інтегрування зображення $F(p)$ зводиться до ділення функції $f(t)$ на t, тобто $\int_0^{+\infty} F(p)dp \leftarrow \frac{f(t)}{t}$.

Приклад. $f(t)=\frac{e^{-at}\sin t}{t}$. Знайти $F(p)$.

Розв'язок. Нехай $\varphi(t)=e^{-at}\sin\omega t$, тоді $\varphi(t)\to\Phi(p)=$ $=\frac{1}{(p+a)^2+1}$. Так як $f(t)=\frac{\varphi(t)}{t}$, то $f(t)\to F(p)=$ $=\int_p^{+\infty}\Phi(p)dp=\int_p^{+\infty}\frac{dp}{(p+a)^2+1}=\operatorname{arctg}(p+a)\Big|_p^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(p+a)=$ $=\operatorname{arcctg}(p+a)$. Після елементарних перетворень отримуємо, що $F(p)=\operatorname{arctg}\frac{1}{p+a}$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Питання та вправи для самоконтролю.

1) За допомогою властивості лінійності із $e^{-at}\to\frac{1}{p+a}$ отримати, що $\operatorname{sh}at\to\frac{a}{p^2-a^2}$, $\operatorname{Re}p>|\operatorname{Re}a|$.

2) За допомогою теореми про диференціювання зображення довести, що $t\cos at\to\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$.

3) Довести, що $\sin^2 at\to\frac{2a^2}{p(p^2+4a^2)}$.

4) За допомогою теореми про запізнення довести, що

$$\varepsilon(t-a)-\varepsilon(t-b)\to\frac{e^{-ap}-e^{-bp}}{p}\ (0<a<b).$$

Національний університет водного господарства та природокористування

Нижче наводиться таблиця оригіналів та їх зображень, які найчастіше зустрічаються.

Таблиця перетворень Лапласа

№	$f(t)$	$F(p)$	№	$f(t)$	$F(p)$
1	$\varepsilon(t)$	$\frac{1}{p}$	**9**	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
2	$\sin \alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$ $(\mathrm{Re}\, p > \lvert \mathrm{Im}\, \alpha \rvert)$	**10**	$t \sin \alpha t$	$\frac{2p\alpha}{(p^2+\alpha^2)^2}$
3	$\cos \alpha t$	$\frac{p}{p^2+\alpha^2}$ $(\mathrm{Re}\, p > \lvert \mathrm{Im}\, \alpha \rvert)$	**11**	$t \cos \alpha t$	$\frac{p^2-\alpha^2}{(p^2+\alpha^2)^2}$
4	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$ $(\mathrm{Re}\, p > -\mathrm{Re}\, \alpha)$	**12**	$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$
5	$\mathrm{sh} \alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$ $(\mathrm{Re}\, p > \lvert \mathrm{Re}\, \alpha \rvert)$	**13**	$\cos^2 \alpha t$	$\frac{p^2+2\alpha^2}{p(p^2+4a^2)}$
6	$\mathrm{ch} \alpha t$	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$ $(\mathrm{Re}\, p > \lvert \mathrm{Re}\, \alpha \rvert)$	**14**	$\sin^2 \alpha t$	$\frac{2\alpha^2}{p(p^2+4a^2)}$
7	$e^{-\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$ $(\mathrm{Re}\, p > -\mathrm{Re}\, \alpha)$	**15**	$\mathrm{ch}^2 \alpha t$	$\frac{p^2-2\alpha^2}{p(p^2-4a^2)}$
8	$e^{-\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$ $(\mathrm{Re}\, p > -\mathrm{Re}\, \alpha)$	**16**	$\mathrm{sh}^2 \alpha t$	$\frac{2\alpha^2}{p(p^2-4a^2)}$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

§2. Визначення оригінала за його зображенням

Для визначення оригінала за його зображенням існує так звана обернена формула (Рімана- Мелліна):

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{pt}F(p)dp=\frac{1}{2\pi i}\lim_{s\to+\infty}\int\limits_{\sigma-is}^{\sigma+is}e^{pt}F(p)dp\,.$$

Якщо $F(p)$ – правильна дробово-раціональна функція, то для визначення оригінала $f(t)\to F(p)$ функцію $F(p)$ необхідно розкласти на простіші дроби. Якщо знаменник не має кратних комплексних коренів, то можуть виникати простіші дроби таких типів:

$$\frac{A}{p-a},\ \frac{B}{(p-a)^k},\ \frac{Cp+D}{p^2+mp+n}\,.$$

Ці дроби мають наступні оригінали:

$$\frac{A}{p-a}\leftarrow Ae^{at},\ \frac{B}{(p-a)^k}\leftarrow\frac{Bt^{k-1}e^{at}}{(k-1)!},$$

$$\frac{Cp+D}{p^2+mp+n}=\frac{C\left(p+\frac{m}{2}\right)+D-C\frac{m}{2}}{\left(p+\frac{m}{2}\right)^2+n-\frac{m^2}{4}}\leftarrow Ce^{-\frac{m}{2}t}\cos\sqrt{n-\frac{m^2}{4}}\,t+$$

$$+\frac{D-C\frac{m}{2}}{\sqrt{n-\frac{m^2}{4}}}e^{-\frac{m}{2}t}\sin\sqrt{n-\frac{m^2}{4}}\,t.$$

У випадку кратних комплексних коренів знаменника простіші дроби необхідно писати у вигляді:

$$\frac{A}{(p-\alpha-i\beta)^k}\ \text{та}\ \frac{A}{(p-\alpha+i\beta)^k},$$

а потім визначати оригінали таким самим чином, як і у випадку кратних дійсних коренів.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Приклад 1. $F(p)=\dfrac{p^2-2a^2}{p(p^2-4a^2)}$. Знайти $f(t)$.

Розв'язок. $\dfrac{p^2-2a^2}{p(p^2-4a^2)}=\dfrac{A}{p}+\dfrac{B}{p-2a}+\dfrac{C}{p+2a}$.

Помножимо обидві частини на спільний знаменник. Тоді

$p^2-2a^2=A(p-2a)(p+2a)+Bp(p+2a)+Cp(p-2a).$

Надаючи для p часткові значення, визначимо A, B, C.

Якщо $p=a$, то $-2a^2=-4a^2A$, звідки $A=0,5$;

якщо $p=2a$, то $2a^2=8a^2B$, звідки $B=0,25$;

якщо $p=-2a$, то $2a^2=8a^2A$, звідки $C=0,25$.

Таким чином,

$$\frac{p^2-2a^2}{p(p^2-4a^2)}=\frac{0,5}{p}+\frac{0,25}{p-2a}+\frac{0,25}{p+2a}.$$

Далі, використовуючи таблицю оригіналів та зображень, знаходимо

$$f(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{2at}+\frac{1}{4}e^{-2at}=\frac{(e^{at}+e^{-at})^2}{4}=\mathrm{ch}^2at.$$

Приклад 2. $F(p)=\dfrac{p+1}{p^2(p-1)(p+2)}$. Знайти $f(t)$.

Розв'язок. $\dfrac{p+1}{p^2(p-1)(p+2)}=\dfrac{A}{p}+\dfrac{B}{p^2}+\dfrac{C}{p-1}+\dfrac{D}{p+2}$.

$p+1=Ap(p-1)(p+2)+B(p-1)(p+2)+Cp^2(p+2)+Dp^2(p-1).$

Знаходимо коефіцієнти A, B, C, D.

$$p=0:\quad 1=-2B,\quad B=-\frac{1}{2};$$

$$p=1:\quad 2=3C,\quad C=\frac{2}{3};$$

$$p=-2:\quad -1=-12D,\quad D=\frac{1}{12}.$$

Національний університет
водного господарства

Прирівнюємо коефіцієнти правої та лівої частини при p^3

$0 = A + C + D, \quad A = -C - D, \quad A = -\frac{3}{4}$. Таким чином,

$$\frac{p+1}{p^2(p-1)(p+2)} = -\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p} + -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p-1} + \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{p+2}.$$

Використовуючи таблицю, знаходимо $f(t)$

$$f(t) = -\frac{3}{4} - \frac{1}{2}t + \frac{2}{3}e^{t} + \frac{1}{12}e^{-2t}.$$

Приклад 3. $F(p) = \frac{a^3}{(p^2+a^2)^2}$. Знайти $f(t)$.

Розв'язок. $$\frac{a^3}{(p^2+a^2)^2} = \frac{A}{(p+ai)^2} + \frac{B}{p+ai} + \frac{C}{(p-ai)^2} + \frac{D}{p-ai}.$$

Помножимо обидві частини на спільний знаменник і отримаємо

$$a^3 = A(p-ai)^2 + B(p+ai)(p-ai)^2 + C(p+ai)^2 + D(p+ai)^2(p-ai);$$

$$p = ai: \quad a^3 = -4a^2C, \quad C = -\frac{a}{4};$$

$$p = -ai: \quad a^3 = -4a^2A, \quad A = -\frac{a}{4}.$$

Прирівнюючи вільні коефіцієнти та коефіцієнти при p^3, маємо

$$p^3: \quad 0 = B + D;$$

$$p^0: \quad a^3 = -Aa^2 - Ba^3i - Ca^2 + Da^3i.$$

Надаючи вже відомих значень A і C, та скорочуючи на a^3, отримаємо систему

$$\begin{cases} B + D = 0, \\ B - D = \frac{i}{2}, \end{cases}$$

із якої знаходимо: $B = \frac{i}{4}$; $D = -\frac{i}{4}$.

Таким чином,

Національний університет водного господарства та природокористування

$$\frac{a^3}{(p^2+a^2)^2} = -\frac{a}{4}\cdot\frac{1}{(p+ai)^2} + \frac{i}{4}\cdot\frac{1}{p+ai} - \frac{a}{4}\cdot\frac{1}{(p-ai)^2} - \frac{i}{4}\cdot\frac{1}{p-ai};$$

$$f(t) = -\frac{a}{4}\cdot te^{-ait} + \frac{i}{4}\cdot e^{-ait} - \frac{a}{4}\cdot te^{ait} - \frac{i}{4}\cdot e^{ait} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{ait}-e^{-ait}}{2i} - \frac{at}{2}\cdot\frac{e^{ait}+e^{-ait}}{2} = \frac{1}{2}\sin at - \frac{at}{2}\cos at.$$

Якщо $F(p)$ не є дробово-раціональною функцією, але регулярна в околі нескінченно віддаленої точки, то її можна подати у вигляді ряду, розкладеного за від'ємними степенями p:

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{p^k},$$

причому цей ряд збігається для всіх p, що задовольняють нерівність $|p| > \rho$ (ρ – деяке додатне число). Так як за формулою (із таблиці) $\frac{a_k}{p^k} \leftarrow \frac{a_k t^{k-1}}{(k-1)!}$, то $F(p) \leftarrow \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k t^k}{k!}$.

Національний університет водного господарства та природокористування

Приклад 4. Знайти оригінал, що відповідає зображенню

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2+\lambda^2}}.$$

Якщо $|p| > \rho$, то $F(p) = \frac{1}{p\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{p^2}}} = \frac{1}{p}\left(1+\frac{\lambda^2}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}} =$

$$= \frac{1}{p}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{p^2} + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{\lambda^2}{p^2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(\frac{\lambda^2}{p^2}\right)^3 + \ldots\right] =$$

$$= \frac{1}{p} - \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{p^3} + \frac{3!!}{2!2^2}\left(\frac{\lambda^2}{p^2}\right)^2\frac{1}{p} - \frac{5!!}{2!2^3}\left(\frac{\lambda^2}{p^2}\right)^3\frac{1}{p} + \ldots$$

$$+ (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2!2^n}\left(\frac{\lambda^2}{p^2}\right)^n\frac{1}{p} + \ldots.$$

Так як $\frac{1}{p^{2n+1}} \leftarrow \frac{t^{2n}}{(2n)!}$, то

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$F(p) \leftarrow f(t) = 1 - \frac{\lambda^2 t^2}{2 \cdot 2!} + \frac{3!!\lambda^4 t^4}{2!2^2 4!} - \frac{5!!\lambda^6 t^6}{3!2^3 6!} + \ldots +$$

$$+ (-1)^n \frac{(2n-1)!!\lambda^{2n} t^{2n}}{n!2^n (2n)!} + \ldots = 1 - \frac{\left(\frac{\lambda t}{2}\right)^2}{(1!)^2} + \frac{\left(\frac{\lambda t}{2}\right)^4}{(2!)^2} + \ldots +$$

$$+ (-1)^n \frac{\left(\frac{\lambda t}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2} + \ldots ((2n)! = (2n-1)!!2^n n!).$$

Останній вираз є розкладом в ряд функції Бесселя $J_0(\lambda t)$. Таким чином $\frac{1}{\sqrt{p^2 + \lambda^2}} \leftarrow J_0(\lambda t)$ для $| p | > \lambda$.

§3. Розв'язування лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами за допомогою перетворення Лапласа

В процесі розв'язання прикладних задач, які приводять до лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами, як правило необхідно знаходити не загальний, а розв'язок, що задовольняє певним початковим умовам. Для знаходження цього часткового розв'язку, спочатку за допомогою звичайних методів математичного аналізу знаходять загальний розв'язок даного диференціального рівняння, а вже потім, накладаючи на цей загальний розв'язок початкові умови, визначають довільні постійні і, таким чином, знаходять необхідний частковий розв'язок.

Операційне числення дає можливість знаходити частковий розв'язок лінійного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами, уникаючи знаходження його загального розв'язку, що значно скорочує роботу. Крім того, операційне числення дозволяє розв'язувати лінійні диференціальні рівняння з розривною правою частиною, які часто зустрічаються в застосуваннях.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Наведені нижче методи, застосовні до розв'язання лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами довільного порядку, але для простоти викладення ми обмежимось розглядом рівнянь другого порядку.

Нехай необхідно про інтегрувати рівняння

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(t) \tag{1}$$

із початковими умовами $y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0'$.

Позначимо невідому функцію через $y(t)$ і нехай

$$y(t) \to Y(p) \quad \text{та} \quad f(t) \to F(t).$$

Перейдемо в даному диференціальному рівнянні від функцій-оригіналів, що до нього входять, до їх зображень.

Так як $y'(t) \to pY(p) - y_0$ і $y''(t) \to p^2 Y(p) - py_0 - y_0'$, то диференціальному рівнянню (1) буде відповідати наступне диференціальне рівняння:

$$p^2 Y(p) - py_0 - y' + a_1(pY(p) - y_0) + a_2 Y(p) = F(p),$$

або

$$(p^2 + a_1 p + a_2)Y(p) = F(p) + (p + a_1)y_0 + y_0',$$

звідки

$$Y(p) = \frac{F(p) + (p + a_1)y_0 + y_0'}{p^2 + a_1 p + a_2}.$$

Залишається визначити за зображенням $Y(p)$, оригінал $y(t)$.

Приклад 1. Знайти частковий розв'язок рівняння

$$y'' + 3y' - 10y = 47\cos 3t - \sin 3t,$$

що задовольняє початковим умовам $y(0) = 3, \quad y'(0) = -1$.

Розв'язок.

Так як

$$y(t) \to Y(p), \quad y'(t) \to pY(p) - 3, \quad y''(t) \to p^2 Y(p) - 3p + 1,$$

$$\cos 3t \to \frac{p}{p^2 + 9}, \quad \sin 3t \to \frac{3}{p^2 + 9},$$

Національний університет водного господарства та природокористування

то даному диференціальному рівнянню відповідає наступне операторне рівняння

$$p^2Y(p)-3p+1+3pY(p)-9-10Y(p)=47\frac{p}{p^2+9}-\frac{3}{p^2+9},$$

або

$$(p^2+3p-10)Y(p)=3p-1+9+47\frac{p}{p^2+9}-\frac{3}{p^2+9},$$

звідки

$$Y(p)=\frac{3p^3+8p^2+74p+69}{(p^2+9)(p^2+3p-10)}.$$

Для знаходження оригінала розкладемо праву частину останньої рівності на простіші дроби.

$$\frac{3p^3+8p^2+74p+69}{(p^2+9)(p^2+3p-10)}=\frac{3p^3+8p^2+74p+69}{(p^2+9)(p+5)(p-2)}=$$

$$=\frac{Ap+B}{p^2+9}+\frac{C}{p+5}+\frac{D}{p-2}.$$

Визначаємо, як зазвичай, коефіцієнти

$$3p^3+8p^2+74p+69=(Ap+B)(p+5)(p-2)+C(p-2)(p^2+9)+$$
$$+D(p+5)(p^2+9).$$

$$p=-5:\quad -375+200-370+69=-238C,\quad C=2;$$
$$p=2:\qquad 24+52+148+69=91D,\quad D=3.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при p^3 і p^0, отримаємо

$$p^3:\qquad 3=A+C+D,\qquad A=-2;$$
$$p^0:\qquad 69=-10B-18C+45D,\quad B=3.$$

Таким чином, $Y(p)=\dfrac{-2p+3}{p^2+9}+\dfrac{2}{p+5}+\dfrac{3}{p-2}$.

Звідси, за таблицею маємо $y(t)=-2\cos 3t+\sin 3t+2e^{-5t}+3e^{2t}$.

Визначення часткового розв'язку лінійного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами є винятково простим, у випадку, коли $y(0)=y'(0)=0$. Тоді ліва частина операторного

Національний університет водного господарства та природокористування

рівняння дорівнює добутку зображення невідомої функції на характеристичний многочлен рівняння відносно p.

Приклад 2. Знайти частковий розв'язок рівняння

$$y''' + y'' + y' = e^{-t},$$

що задовольняє початковим умовам $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$

Розв'язок.

$$y''' \to p^3Y(p) - p^2y(0) - py'(0) - y''(0) = p^3Y(p);$$
$$y'' \to p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p);$$
$$y' \to pY(p) - y(0) = pY(p);$$
$$e^{-t} \to \frac{1}{p+1}.$$

Складемо операторне рівняння $(p^3 + p^2 + p)Y(p) = \frac{1}{p+1}$;

знаходимо $Y(p) = \frac{1}{(p+1)(p^3 + p^2 + p)}$.

Національний університет водного господарства та природокористування

Розкладаємо праву частину на простіші дроби

$$\frac{1}{(p^3 + p^2 + p)(p+1)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p} + \frac{Cp + D}{p^2 + p + 1}.$$

Звільнившись від знаменника, маємо

$$1 = Ap(p^2 + p + 1) + B(p+1)(p^2 + p + 1) + (Cp + D)(p+1)p$$

Надаючи послідовно значень $p = -1$ і $p = 0$, маємо $A = -1$, $B = 1$.

Для визначення інших коефіцієнтів прирівняємо коефіцієнти при p^3 та p^0.

$$p^3: \quad 0 = A + B + C;$$
$$p^0: \quad 0 = A + 2B + D.$$

Звідки, $C = 0$ та $D = -1$.

Таким чином

$$\frac{1}{(p^3 + p^2 + p)(p+1)} = -\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2 + p + 1}.$$

Так як

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\frac{-1}{p+1} \leftarrow -e^{-t}, \quad \frac{1}{p} \leftarrow 1, \quad \frac{-1}{p^2+p+1} = \frac{1}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \leftarrow \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{t}{2}} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t,$$

то $y(t) = 1 - e^{-t} - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{t}{2}} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Приклад 3. Знайти частковий розв'язок рівняння

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2t}(\cos t + 2\sin t),$$

що задовольняє початковим умовам $y(0) = -1, \ y'(0) = 1$.

Розв'язок.

Так як

$$y(t) \to Y(p), \ y'(t) \to pY(p) + 1, \ y''(t) \to p^2Y(p) + p - 1,$$

$$e^{-2t}\cos t \to \frac{p+2}{(p+2)^2+1}, \qquad e^{-2t}\sin 3t \to 2\frac{1}{(p+2)^2+1}.$$

Операторне рівняння буде мати вид

$$p^2Y(p) + p - 1 + 4pY(p) + 4 + 4Y(p) = \frac{p+4}{(p+2)^2+1}.$$

Звідси

$$Y(p) = \frac{p^3+7p^2+16p+11}{((p+2)^2+1)(p+2)^2}.$$

Розкладемо зображення на простіші дроби.

$$\frac{p^3+7p^2+16p+11}{((p+2)^2+1)(p+2)^2} = \frac{Ap+B}{(p+2)^2+1} + \frac{C}{(p+2)^2} + \frac{D}{p+2}.$$

Звідки,

$$p^3+7p^2+16p+11 = (Ap+B)(p+2)^2 + C((p+2)^2+1) + \\ + D((p+2)^2+1)(p+2).$$

Надаючи значення $p = -2$, маємо $C = 1$.

Для визначення інших коефіцієнтів прирівняємо коефіцієнти при p^3, p^2 та p^0.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$p^3: \quad -1 = A + D;$$
$$p^2: \quad -7 = 4A + 6D + \text{B} + 1;$$
$$p^0: \quad -11 = 4B + 5 + 10D.$$

Враховуючи першу рівність виключимо з другого рівняння A і складемо систему із другого та третього рівнянь $\begin{cases} -4 - 4D + B + 6D = -8 \,|\times 2 \\ 2B + 5D = -8 \end{cases}$, або $\begin{cases} 2B + 4D = -8 \\ 2B + 5D = -8 \end{cases}$.

Звідки, $D = 0$, $B = -4$ і $A = -1 - D = -1$.

Запишемо зображення $Y(p)$

$$Y(p) = \frac{p+2}{(p+2)^2 + 1} + \frac{1}{(p+2)^2},$$

або

$$Y(p) = -\frac{p+2}{(p+2)^2 + 1} - \frac{2}{(p+2)^2 + 1} + \frac{1}{(p+2)^2}.$$

Звідси, за властивістю лінійності та теоремою зміщення, отримаємо розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{p+2}{(p+2)^2 + 1} \leftarrow e^{-2t}\cos t, \; 2\frac{1}{(p+2)^2 + 1} \leftarrow e^{-2t}\sin 3t, \; \frac{1}{(p+2)^2} \leftarrow \frac{e^{-2t}t}{1!},$$

тому $Y(t) = e^{-2t}(t - \cos t - 2\sin t)$.

За допомогою операційного числення можна знаходити і загальний розв'язок диференціального рівняння. Для цього потрібно в початкових умовах вважати

$$y(0) = C_0, \; y'(0) = C_1, \; ..., \; y^{(n-1)}(0) = C_{n-1}$$

і вважати їх при $x = 0$ за довільні постійні.

Операційний метод розв'язування диференціальних рівнянь застосовується до рівнянь, права частина яких є кусково-неперервною функцією.

Неперервну функцію будемо вважати розв'язком такого роду рівнянь, якщо підстановка такої функції в рівняння перетворює його в тотожність при всіх значеннях аргументна, коли функція неперервна.

Приклад 4. Знайти при $t > 0$ розв'язок рівняння $x' + x = f(t)$.

Національний університет водного господарства та природокористування

Функція $f(t)$ задана графіком. Початкова умова $x(0)=0$.

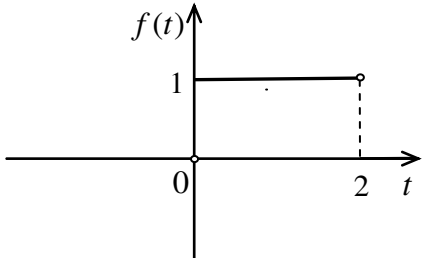


Рис. 6

Розв'язок. Визначимо $f(t)$ аналітично. З графіка випливає

$$f(t)=\begin{cases}1, & \text{якщо } t\in[0;\ 2),\\ 0, & \text{якщо } t\notin[0;\ 2).\end{cases}$$

Національний університет водного господарства та природокористування

За допомогою функції Хевісайда можна $f(t)$ подати так:

$$f(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2).$$

Складемо операторне рівняння

$$x'\to pX(p)-x(0),\quad x\to X(p),\quad \varepsilon(t)=1/p,$$

$$\varepsilon(t-2)\to e^{-2p}\frac{1}{p}\ \text{(за теоремою запізнення)},$$

$$pX(p)+X(p)=\frac{1-e^{-2p}}{p},\ \text{звідки}\ X(p)=\frac{1-e^{-2p}}{p(p+1)}.$$

Функцію $\dfrac{1}{p(p+1)}$ розкладемо на суму простих дробів.

$$\frac{1}{p(p+1)}=\frac{1+p-p}{p(p+1)}=\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}.$$

Тоді, $X(p)=\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p+1}-\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p+1}\right)e^{-2p}$.

Перейдемо до оригіналу, користуючись теоремою запізнення

$$x(t)=(1-e^{-t})\varepsilon(t)-(1-e^{-(t-2)})\varepsilon(t-2),$$

або $x(t)=1-e^{-t}-(1-e^{-(t-2)})\varepsilon(t-2)$.

Національний університет водного господарства та природокористування

§ 4. Розв'язання систем лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами.

Систем лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами також можна розв'язувати за допомогою операційного метода. Таке розв'язування аналогічне інтегруванню одного рівняння. На прикладах покажемо перехід до системи операторних рівнянь.

Приклад 1. Розв'язати систему диференціальних рівнянь.

$$\begin{cases} y' = x + y, \\ y' - x' = te^t, \end{cases}$$

якщо $x(0) = 1,\ y(0) = 0.$

Розв'язок. Перейдемо до операторних рівнянь

$$y' \to pY(p), \quad y \to Y(p), \quad x \to X(t), \quad x' \to pX(p) - 1.$$

Система операторних рівнянь набуде вигляду

$$\begin{cases} py(p) - x(p) - y(p) = 0, \\ py(p) - px(p) + 1 = \dfrac{1}{(p-1)^2}, \end{cases} \text{ або}$$

$$\begin{cases} (p-1)y(p) - x(p) = 0, \\ py(p) - px(p) = -1 + \dfrac{1}{(p-1)^2}. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему за формулами Крамера

$$Y(p) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{1-(p-1)^2}{(p-1)^2} & -p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p-1 & -1 \\ p & -p \end{vmatrix}} = \frac{\dfrac{1-(p-1)^2}{(p-1)^2}}{-p^2 + p + p} = \frac{1}{(p-1)^2},$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$X(p)=\frac{\begin{vmatrix} p-1 & 0 \\ p & \dfrac{1-(p-1)^2}{(p-1)^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p-1 & -1 \\ p & -p \end{vmatrix}}=\frac{\dfrac{1-(p-1)^2}{p-1}}{-p^2+p+p}=\frac{1}{p-1}.$$

Отримаємо:

$$\begin{cases} X(p)=\dfrac{1}{p-1}, \\ Y(p)=\dfrac{1}{(p-1)^2}. \end{cases}$$

Переходячи від зображень до оригіналів маємо:

$$\begin{cases} x(t)=e^t, \\ y(t)=te^t. \end{cases}$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Приклад 2. Розв'язати систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x'=x-2y-2z, \\ y'=2x+7y+5z, \\ z'=-2x-4y-2z, \end{cases}$$

якщо $x(0)=0,\ y(0)=3,\ z(0)=-2.$

Розв'язок. Якщо $x(t)\to X(p),\ y(t)\to Y(p),\ z(t)\to Z(p)$, то

$$x'\to pX(p)-x(0),\quad y'\to pY(p)-y(0),\quad z'\to pZ(p)-z(0).$$

І ми отримуємо наступну систему операторних рівнянь:

$$\begin{cases} pX(p)=X(p)-2Y(p)-2Z(p), \\ pY(p)-3=2X(p)+7Y(p)+5Z(p), \\ pZ(p)+2=-2X(p)-4Y(p)-2Z(p), \end{cases}$$

або

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\begin{cases}(p-1)X(p)+2Y(p)+2Z(p)=0,\\ 2X(p)+(7-p)Y(p)+5Z(p)=-3,\\ 2X(p)+4Y(p)+(p+2)Z(p)=-2.\end{cases}$$

Звідси за формулами Крамера

$$\Delta=\begin{vmatrix}p-1 & 2 & 2\\ 2 & 7-p & 5\\ 2 & 4 & p+2\end{vmatrix}=(p-2)(p-1)(3-p),$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}0 & 2 & 2\\ -3 & 7-p & 5\\ -2 & 4 & p+2\end{vmatrix}=2(p-2),\qquad X(p)=\frac{-2}{(p-3)(p-1)},$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}p-1 & 0 & 2\\ 2 & -3 & 5\\ 2 & -2 & p+2\end{vmatrix}=-3p^2+7p,\quad Y(p)=\frac{3p^2-7p}{(p-2)(p-1)(p-3)},$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}p-1 & 2 & 0\\ 2 & 7-p & -3\\ 2 & 4 & -2\end{vmatrix}=2p^2-4p-2,$$

$$Z(p)=\frac{-2p^2+4p+2}{(p-2)(p-1)(p-3)}.$$

Праві частини $X(p), Y(p), Z(p)$ розкладемо на простіші дроби

$$X(p)=\frac{-2}{(p-3)(p-1)}=\frac{p-3-(p-1)}{(p-3)(p-1)}=-\frac{1}{p-3}+\frac{1}{p-1};$$

$$Y(p)=\frac{3p^2-7p}{(p-2)(p-1)(p-3)}=\frac{A}{p-2}+\frac{B}{p-1}+\frac{C}{p-3},$$

Національний університет водного господарства

$$3p^2-7p=A(p-1)(p-3)+B(p-2)(p-3)+C(p-2)(p-1),$$

$p=2:\quad 12-14=-A,\quad A=2,$

$p=1:\quad 3-7=2B,\quad B=-2,$

$p=3:\quad 27-21=2C,\quad C=3,$

$$Y(p)=\frac{2}{p-2}-\frac{2}{p-1}+\frac{3}{p-3};$$

$$Z(p)=\frac{-2p^2+4p+2}{(p-2)(p-1)(p-3)}=\frac{A}{p-2}+\frac{B}{p-1}+\frac{C}{p-3},$$

$$-2p^2+4p+2=A(p-1)(p-3)+B(p-2)(p-3)+C(p-2)(p-1),$$

$p=2:\quad -8+8+2=-A,\quad A=-2,$

$p=1:\quad -2+2+2=2B,\quad B=2,$

$p=3:\quad -18+12+12=2C,\ C=-2,$

$$Z(p)=\frac{-2}{p-2}+\frac{2}{p-1}-\frac{2}{p-3}.$$

Тепер від $X(p), Y(p), Z(p)$ переходимо до оригіналів

$$\begin{cases} x(t)=-e^{3t}+e^{t}, \\ y(t)=2e^{2t}-2e^{3t}+3e^{t}, \\ z(t)=-2e^{2t}+2e^{3t}-2e^{t}. \end{cases}$$

Національний університет водного господарства та природокористування

ВПРАВИ

I. Розв'язати задачу Коші:

1. $x''-x'+x=t,$ якщо $x(0)=x'(0)=0.$
2. $x'''+4x'=e^{-t},$ якщо $x'(0)=0,\ x''(0)=0.$
3. $x''-x'-15x=\sin t,$ якщо $x(0)=1,\ x'(0)=-1.$
4. $x'''-2x''+x'=0,$ якщо $x(0)=1,\ x'(0)=x''=0.$
5. $x''-x'-12x=0,$ якщо $x(0)=x'(0)=1.$
6. $x'''+x=1,$ якщо $x(0)=x'(0)=x''(0)=0.$
7. $x''+x'-2x=0,$ якщо $x(0)=1,\ x'(0)=0.$
8. $x''-x'-6x=2,$ якщо $x(0)=1,\ x'(0)=0.$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

9. $x'' - x' - 2x = t$, якщо $x(0) = x'(0) = 0$.
10. $x'' - 4x' + 4x = \cos t$, якщо $x(0) = x'(0) = 0$.
11. $x'' + x' + -6x = \sin t$, якщо $x(0) = x'(0) = 0$.
12. $x'' + x' - 2x = te^{-t}$, якщо $x(0) = x'(0) = 0$.
13. $x'' - 2x' - 3x = \sin t$, якщо $x(0) = x'(0) = 0$.
14. $x''' + x = e^{2t}$, якщо $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.
15. $x'' + 3x' + 2x = 0$, якщо $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$.
16. $x'' + 2x' - 3x = e^t \cos t$, якщо $x(0) = x'(0) = 0$.
17. $x'' - 3x' + 2x = e^t \sin t$, якщо $x(0) = x'(0) = 0$.
18. $x'' - 2x' + 5x = te^{-t}$, якщо $x(0) = x'(0) = 0$.
19. $x''' + x = t$, якщо $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.
20. $x''' - x = 0$, якщо $x(0) = x'(0) = 0$, $x''(0) = 1$.
21. $x'' - x' + x = t$, якщо $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.
22. $x'' - x' + x = te^{-t}$, якщо $x(0) = x'(0) = 0$.
23. $x'' + 4x' + 4x = te^{-t}$, якщо $x(0) = x'(0) = 0$.
24. $x'' + x' - 6x = te^{-t}$, якщо $x(0) = x'(0) = 0$.
25. $x'' + 5x' + 6x = e^{-t}$, якщо $x(0) = x'(0) = 0$.
26. $x'' + 2x' + x = e^{-t}$, якщо $x(0) = x'(0) = 0$.
27. $x'' - 3x' + 2x = \sin^2 t$, якщо $x(0) = x'(0) = 0$.
28. $x'' - 4x' + 3x = \cos^2 t$, якщо $x(0) = x'(0) = 0$.
29. $x'' - 2x' + 10x = \sin t$, якщо $x(0) = x'(0) = 0$.
30. $x'' + 2x' + 5x = \cos t$, якщо $x(0) = x'(0) = 0$.

II. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння з заданою правою частиною $f(t)$, якщо $t \geq 0$:

31. $\begin{cases} x'' + x = f(t), \\ x(0) = x'(0) = 1, \end{cases}$ $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } t \in [0; 1), \\ -1, & \text{якщо } t \in [1; 2), \\ 0, & \text{якщо } t \in [2; +\infty). \end{cases}$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

32. $\begin{cases} x''+4x=f(t), \\ x(0)=x'(0)=0, \end{cases}$ $f(t)=\begin{cases} t, & \text{якщо } t\in[0;1), \\ 2-t, & \text{якщо } t\in[1;2), \\ 0, & \text{якщо } t\in[2;+\infty). \end{cases}$

33. $\begin{cases} x''+2x'+x=f(t), \\ x(0)=x'(0)=1, \end{cases}$ $f(t)=\begin{cases} 2, & \text{якщо } t\in[0;2), \\ 1, & \text{якщо } t\in[2;4), \\ 0, & \text{якщо } t\in[4;+\infty). \end{cases}$

34. $\begin{cases} x''+4x'+4x=f(t), \\ x(0)=1,\ \ x'(0)=0, \end{cases}$ $f(t)=\begin{cases} 1, & \text{якщо } t\in[0;2), \\ 2, & \text{якщо } t\in[2;4), \\ 0, & \text{якщо } t\in[4;+\infty). \end{cases}$

35. $\begin{cases} x''-2x'+x=f(t), \\ x(0)=0\ \ x'(0)=1, \end{cases}$ $f(t)=\begin{cases} -1, & \text{якщо } t\in[0;2), \\ 2, & \text{якщо } t\in[2;4), \\ 0, & \text{якщо } t\in[4;+\infty). \end{cases}$

36. $\begin{cases} x''+9x=f(t), \\ x(0)=x'(0)=0, \end{cases}$ $f(t)=\begin{cases} -t, & \text{якщо } t\in[0;1), \\ t-2, & \text{якщо } t\in[1;2), \\ 0, & \text{якщо } t\in[2;+\infty). \end{cases}$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

37. $\begin{cases} x''-4x'+4x=f(t), \\ x(0)=1,\ \ x'(0)=0, \end{cases}$ $f(t)=\begin{cases} 3, & \text{якщо } t\in[0;1), \\ 2, & \text{якщо } t\in[1;3), \\ 0, & \text{якщо } t\in[3;+\infty). \end{cases}$

38. $\begin{cases} x''-4x=f(t), \\ x(0)=x'(0)=0, \end{cases}$ $f(t)=\begin{cases} 2t, & \text{якщо } t\in[0;1), \\ -2t+4, & \text{якщо } t\in[1;2), \\ 0, & \text{якщо } t\in[2;+\infty). \end{cases}$

39. $\begin{cases} x''+9x=f(t), \\ x(0)=x'(0)=0, \end{cases}$ $f(t)=\begin{cases} 2-t, & \text{якщо } t\in[0;1), \\ 1, & \text{якщо } t\in[1;2), \\ 0, & \text{якщо } t\in[2;+\infty). \end{cases}$

40. $\begin{cases} x''-5x'+6x=f(t), \\ x(0)=1,\ \ x'(0)=0, \end{cases}$ $f(t)=\begin{cases} 4, & \text{якщо } t\in[0;1), \\ 1, & \text{якщо } t\in[1;3), \\ 0, & \text{якщо } t\in[3;+\infty). \end{cases}$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

41. $\begin{cases} x'' - 9x = f(t), \\ x(0) = x'(0) = 1, \end{cases}$ $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } t \in [0; 1), \\ -1, & \text{якщо } t \in [1; 2), \\ 0, & \text{якщо } t \in [2; +\infty). \end{cases}$

42. $\begin{cases} x'' - 25x = f(t), \\ x(0) = x'(0) = 0, \end{cases}$ $f(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо } t \in [0; 1), \\ 2 - t, & \text{якщо } t \in [1; 2), \\ 0, & \text{якщо } t \in [2; +\infty). \end{cases}$

43. $\begin{cases} x'' + 6x' + 9x = f(t), \\ x(0) = x'(0) = 1, \end{cases}$ $f(t) = \begin{cases} 2, & \text{якщо } t \in [0; 2), \\ 1, & \text{якщо } t \in [2; 4), \\ 0, & \text{якщо } t \in [4; +\infty). \end{cases}$

44. $\begin{cases} x'' - 3x' + 2x = f(t), \\ x(0) = 1, \ \ x'(0) = 0, \end{cases}$ $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } t \in [0; 2), \\ 2, & \text{якщо } t \in [2; 4), \\ 0, & \text{якщо } t \in [4; +\infty). \end{cases}$

45. $\begin{cases} x'' - 4x' + 3x = f(t), \\ x(0) = 0 \ \ x'(0) = 1, \end{cases}$ $f(t) = \begin{cases} -1, & \text{якщо } t \in [0; 2), \\ 2, & \text{якщо } t \in [2; 4), \\ 0, & \text{якщо } t \in [4; +\infty). \end{cases}$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

46. $\begin{cases} x'' + 16x = f(t), \\ x(0) = x'(0) = 0, \end{cases}$ $f(t) = \begin{cases} -t, & \text{якщо } t \in [0; 1), \\ t - 2, & \text{якщо } t \in [1; 2), \\ 0, & \text{якщо } t \in [2; +\infty). \end{cases}$

47. $\begin{cases} x'' - 2x' - 8x = f(t), \\ x(0) = 1, \ \ x'(0) = 0, \end{cases}$ $f(t) = \begin{cases} 3, & \text{якщо } t \in [0; 1), \\ 2, & \text{якщо } t \in [1; 3), \\ 0, & \text{якщо } t \in [3; +\infty). \end{cases}$

48. $\begin{cases} x'' - 4x' = f(t), \\ x(0) = x'(0) = 0, \end{cases}$ $f(t) = \begin{cases} 2t, & \text{якщо } t \in [0; 1), \\ -2t + 4, & \text{якщо } t \in [1; 2), \\ 0, & \text{якщо } t \in [2; +\infty). \end{cases}$

49. $\begin{cases} x'' + 9x' = f(t). \\ x(0) = x'(0) = 0, \end{cases}$ $f(t) = \begin{cases} 2 - t, & \text{якщо } t \in [0; 1), \\ 1, & \text{якщо } t \in [1; 2), \\ 0, & \text{якщо } t \in [2; +\infty). \end{cases}$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

50. $\begin{cases} x'' + 2x' - 3x = f(t), \\ x(0) = 1, \quad x'(0) = 0, \end{cases}$ $f(t) = \begin{cases} 4, & \text{якщо } t \in [0; 1), \\ 1, & \text{якщо } t \in [1; 3), \\ 0, & \text{якщо } t \in [3; +\infty). \end{cases}$

51. $\begin{cases} x'' + x' = f(t), \\ x(0) = x'(0) = 1, \end{cases}$ $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } t \in [0; 1), \\ -1, & \text{якщо } t \in [1; 2), \\ 0, & \text{якщо } t \in [2; +\infty). \end{cases}$

52. $\begin{cases} x'' - 5x' = f(t), \\ x(0) = x'(0) = 0, \end{cases}$ $f(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо } t \in [0; 1), \\ 2 - t, & \text{якщо } t \in [1; 2), \\ 0, & \text{якщо } t \in [2; +\infty). \end{cases}$

53. $\begin{cases} x'' - 6x' + 5x = f(t), \\ x(0) = x'(0) = 1, \end{cases}$ $f(t) = \begin{cases} 2, & \text{якщо } t \in [0; 2), \\ 1, & \text{якщо } t \in [2; 4), \\ 0, & \text{якщо } t \in [4; +\infty). \end{cases}$

54. $\begin{cases} x'' - 3x' + 4x = f(t), \\ x(0) = 1, \quad x'(0) = 0, \end{cases}$ $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } t \in [0; 2), \\ 2, & \text{якщо } t \in [2; 4), \\ 0, & \text{якщо } t \in [4; +\infty). \end{cases}$

55. $\begin{cases} x'' - 6x' - 7x = f(t), \\ x(0) = 0 \;\; x'(0) = 1, \end{cases}$ $f(t) = \begin{cases} -1, & \text{якщо } t \in [0; 2), \\ 2, & \text{якщо } t \in [2; 4), \\ 0, & \text{якщо } t \in [4; +\infty). \end{cases}$

56. $\begin{cases} x'' - 16x = f(t), \\ x(0) = x'(0) = 0, \end{cases}$ $f(t) = \begin{cases} -t, & \text{якщо } t \in [0; 1), \\ t - 2, & \text{якщо } t \in [1; 2), \\ 0, & \text{якщо } t \in [2; +\infty). \end{cases}$

57. $\begin{cases} x'' + 2x' - 8x = f(t), \\ x(0) = 1, \quad x'(0) = 0, \end{cases}$ $f(t) = \begin{cases} 2, & \text{якщо } t \in [0; 1), \\ 3, & \text{якщо } t \in [1; 3), \\ 0, & \text{якщо } t \in [3; +\infty). \end{cases}$

58. $\begin{cases} x'' + 3x' = f(t), \\ x(0) = x'(0) = 0, \end{cases}$ $f(t) = \begin{cases} 2t, & \text{якщо } t \in [0; 1), \\ -2t + 4, & \text{якщо } t \in [1; 2), \\ 0, & \text{якщо } t \in [2; +\infty). \end{cases}$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Національний університет
водного господарства
та природокористування

59. $\begin{cases} x'' + 2x' = f(t); \\ x(0) = x'(0) = 0, \end{cases} \qquad f(t) = \begin{cases} 2 - t, & \text{якщо } t \in [0; 1), \\ 1, & \text{якщо } t \in [1; 2), \\ 0, & \text{якщо } t \in [2; +\infty). \end{cases}$

60. $\begin{cases} x'' + 2x' - 3x = f(t); \\ x(0) = 1, \ x'(0) = 0, \end{cases} \qquad f(t) = \begin{cases} 4, & \text{якщо } t \in [0; 1), \\ 1, & \text{якщо } t \in [1; 3), \\ 0, & \text{якщо } t \in [3; +\infty). \end{cases}$

III. Розв'язати задачу Коші для системи рівнянь:

61. $\begin{cases} y' = x + y, \\ 2x' + y = e^t, \end{cases}$ якщо $x(0) = y(0) = 1.$

62. $\begin{cases} x' + 2y = 0, \\ y' = 2x + 2y, \end{cases}$ якщо $x(0) = y(0) = 1.$

63. $\begin{cases} x' + 2y = 0, \\ x - y' = \cos t, \end{cases}$ якщо $x(0) = 2, \ y(0) = 0.$

64. $\begin{cases} x' - y = 0, \\ y' + x = 0, \\ z' + x = 2t + \sin t, \end{cases}$ якщо $x(0) = z(0) = 0, \ y(0) = 1.$

65. $\begin{cases} x' + 2y = 3t, \\ y' - 2x = 4, \end{cases}$ якщо $x(0) = 2, \ y(0) = 1.$

66. $\begin{cases} x' + 7x - y = 0, \\ y' + 2x + 5 = 0, \end{cases}$ якщо $x(0) = y(0) = 1.$

67. $\begin{cases} x' + 2y + 5x = 0, \\ y' + 7y - x = 0, \end{cases}$ якщо $x(0) = y(0) = 1.$

68. $\begin{cases} x' = x + y + z, \\ y' = x - y + z, \\ z' = x + y + z, \end{cases}$ якщо $x(0) = 1, \ y(0) = z(0) = 0.$

Національний університет водного господарства та природокористування

69. $\begin{cases} x' = y + z, \\ y' = x + z, \\ z' = x + y, \end{cases}$ якщо $x(0) = -1,\ y(0) = 1,\ z(0) = 0.$

70. $\begin{cases} x' = 3y - x, \\ y' = x + y + e^t, \end{cases}$ якщо $x(0) = y(0) = 1.$

71. $\begin{cases} x' = 2x - 4y, \\ y' = x - 3y + e^t, \end{cases}$ якщо $x(0) = y(0) = 1.$

72. $\begin{cases} x' = 2x + 4y, \\ y' = x + 5y - e^t, \end{cases}$ якщо $x(0) = y(0) = 1.$

73. $\begin{cases} x' = 4x - 3y, \\ y' = 3x - 2y + e^t, \end{cases}$ якщо $x(0) = y(0) = 1.$

74. $\begin{cases} x' = 2x - 4y, \\ y' = x - 3y + e^t, \end{cases}$ якщо $x(0) = y(0) = 1.$

Національний університет водного господарства та природокористування

75. $\begin{cases} x' = 5x + y, \\ y' = 3x + 3y + e^{-t}, \end{cases}$ якщо $x(0) = y(0) = 0.$

76. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = x + 2y + \sin t, \end{cases}$ якщо $x(0) = y(0) = 0.$

77. $\begin{cases} x' = y - z, \\ y' = x - z, \\ z' = x - y, \end{cases}$ якщо $x(0) = 1,\ y(0) = -1,\ z(0) = 0.$

78. $\begin{cases} x' = -y + z, \\ y' = -x + z, \\ z' = x - y, \end{cases}$ якщо $x(0) = 2,\ y(0) = 1,\ z(0) = 0.$

79. $\begin{cases} x' = 6x + y, \\ y' = 4x + 3y + \cos t, \end{cases}$ якщо $x(0) = y(0) = 0.$

80. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = x + 2y + \sin t, \end{cases}$ якщо $x(0) = y(0) = 0.$

Національний університет водного господарства та природокористування

81. $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = x + 3y - \sin t, \end{cases}$ якщо $x(0) = y(0) = 1.$

82. $\begin{cases} x' = y + 2z, \\ y' = 2x + z, \\ z' = x + 2y, \end{cases}$ якщо $x(0) = y(0) = 1,\ z(0) = 0.$

83. $\begin{cases} x' = 3x - y, \\ y' = x + y - t, \end{cases}$ якщо $x(0) = y(0) = 1.$

84. $\begin{cases} x' = 7x + 4y, \\ y' = x + 4y + \sin t, \end{cases}$ якщо $x(0) = y(0) = 1.$

85. $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = x + 3y - \sin t, \end{cases}$ якщо $x(0) = y(0) = 1.$

86. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = -x + 4y + 5t, \end{cases}$ якщо $x(0) = y(0) = 1.$

87. $\begin{cases} x' = 2y + 2z, \\ y' = 2x + 2z, \\ z' = 2x + 2y, \end{cases}$ якщо $x(0) = y(0) = z(0) = 0.$

88. $\begin{cases} x' = -x + y + z, \\ y' = x - y + z, \\ z' = x + y - z, \end{cases}$ якщо $x(0) = y(0) = z(0) = 0.$

89. $\begin{cases} x' = 2x + 3y, \\ y' = 2x + 3y + t, \end{cases}$ якщо $x(0) = 2,\ y(0) = 1.$

90. $\begin{cases} x' = 2x + 5y, \\ y' = 3x + 4y - 2t, \end{cases}$ якщо $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

Список використаної літератури

1. Микитин А. П. Методические указания к решению задач по зазделу «Операционное исчисление» для студентов ОТФ. Ровно: УИИВХ, 1977. – 35 с.

2. Араманович И. Г. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости: Учебное пособие / И.Г. Араманович, Г.Л. Лунц, Л.Э. Эльсгольц. – 2-е изд., переработанное и дополненное. – М.: Наука, 1968. – 416 с.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

ЗМІСТ

§1. Перетворення Лапласа та його основні властивості 3

Властивість лінійності 5
Теорема подібності 6
Теорема зміщення 6
Теорема запізнення 7
Теорема про диференціювання оригінала 11
Теорема про диференціювання зображення 12
Теорема про інтегрування оригінала 13
Теорема про інтегрування зображення 14
Питання та вправи для самоконтролю 15
Таблиця перетворень Лапласа 16

§2. Визначення оригінала за його зображенням 17

§3. Розв'язування лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами за допомогою перетворення Лапласа 21

§4. Розв'язання систем лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами 28

В П Р А В И 31

Список використаної літератури 38

Національний університет
водного господарства
та природокористування