Міністерство освіти і науки України

Національний університет водного господарства та природокористування

П. М. Грицюк, Т.Ю. Бабич

ГЕОІНФОРМАЦІЙНІ СИСТЕМИ І ТЕХНОЛОГІЇ

Навчальний посібник

Рівне 2014

УДК 004.9 (075)
ББК 32.98:73я7
Г85

Затверджено вченою радою Національного університету водного господарства та природокористування
(Протокол № 5 від 30.05. 2014 р.)

Рецензенти:
Власюк А.П.*,* д-р. техн. наук, професор Міжнародног економіко-гуманітарного університету ім. акад. С. Дем’янчука (м. Рівне)
Бачишин Б.Д., канд. техн. наук, доцент Національного університету водного господарства та природокористування (м. Рівне)

Грицюк П.М., Бабич Т.Ю.
Г85 Геоінформаційні системи і технології: Навч. посібник. — Рівне: НУВГП, 2014. — 239 с.

У навчальному посібнику розглянуто теоретичні основи, технологічні та прикладні аспекти геоінформаційних систем і технологій. Значну увагу приділено математичному підґрунтю та алгоритмічним аспектам розв'язування типових задач геоінформатики, просторового моделювання та геометричної оптимізації.

Розглянуті в посібнику математичні методи та алгоритми проілюстровані на простих прикладах та задачах, розв'язування яких в поєднанні з виконанням лабораторних робіт сприятиме глибшому розумінню суті і змісту геоінформаційного моделювання та його алгоритмічних основ.

Для студентів напряму підготовки 6.040301 «Прикладна математика», а також для аспірантів, викладачів, науковців і практиків — усіх, хто прагне опанувати методи ґеоінформаційного моделювання, просторового аналізу та обчислювальної геометрії, засвоїти методику їх прикладного застосування.

УДК 004.9 (075)
ББК 32.98:73я7

ВСТУП

Визначальною рисою сучасного етапу розвитку людства є перехід до інформаційного суспільства. Інформаційні технології все більше охоплюють різні сфери людського життя. Особливий інтерес для географів, геодезистів, картографів, землевпорядників та представників інших наук, пов'язаних з використанням просторово-координованої інформації, становлять геоінформаційні технології, що дозволяють залучити до практичної діяльності, наукових досліджень та навчання могутній потенціал електронно-обчислювальної техніки і новітніх, у тому числі космічних технологій.

Інтерес до географічних інформаційних систем (ГІС) та геоінформаційних технологій стрімко зростає в останні роки завдяки їх ефективності використання в якості інструмента прийняття рішень в різних областях людської діяльності. З допомогою ГІС розв'язуються локальні, регіональні і глобальні задачі сталого розвитку територій, використання природних ресурсів, охорони довкілля, забезпечення суспільної безпеки. Сучасні геоінформаційні системи розширюють спектр методів дослідження оточуючого світу, надають цифрові інструменти для організації та оперування просторовими даними, моделювання просторових процесів, візуалізації даних та процесів за допомогою комп'ютерних засобів та програм, спеціалізованих засобів обробки та аналізу географічних даних. Широкий суспільний інтерес до цієї теми стимулюється популярними комп'ютерними додатками такими як Google Maps та Google Earth.

За своїм характером геоінформаційні технології являють собою поєднання сучасних інформаційних технологій, використовуваних в геодезії, картографії, геології, екології та багатьох інших природознавчих, інженерних та соціально-економічних науках, що дозволяє істотно розширити їх можливості. Геоінформаційні технології сьогодні також широко використовуються в сільськогосподарських, економічних, суспільних науках, будівництві та архітектурі, військовій і бібліотечній справі, регіональному управлінні, бізнесі тощо.

Теоретичні, технологічні і прикладні аспекти роботи з просторово-координованою інформацією розглядає нова наука - геоінформатика, що сформувалася в останні десятиріччя як результат бурхливого розвитку геоінформаційних систем і технологій. Інформаційні технології (ІТ) засновані на інформаційних процесах, які можна розділити на 3 великі групи: отримання інформації, її обробка і представлення. В науках про Землю інформаційні технології створили нову науку геоінформатику і географічні інформаційні системи (ГІС), причому термін «географічні» визначає в даному випадку не стільки просторовість або територіальність, а швидше комплексність і системність дослідницького наукового підходу. Географічні інформаційні системи (ГІС) – це можливість нового погляду на навколишній світ; це сучасні комп'ютерні технології для картування і аналізу об'єктів реального світу. Ця технологія об'єднує традиційні операції при роботі з базами даних, такими, як запит і статистичний аналіз, з перевагами повноцінної візуалізації і географічного (просторового) аналізу, які надає карта. Ці особливості відрізняють ГІС від інших інформаційних систем і забезпечують унікальні можливості для її застосування в широкому спектрі завдань, пов'язаних з аналізом і прогнозом явищ і подій навколишнього світу, з осмисленням і виділенням головних чинників і причин, а також їх можливих наслідків, з плануванням стратегічних рішень і поточних наслідків дій, що відбуваються.

В даний час ГІС – це багатомільйонна індустрія, в яку залучені мільйони людей у всьому світі. ГІС вивчають в коледжах та університетах. У вищих навчальних закладах України вивчення ГІС-технологій розпочинається з 90-х років XX століття. Цю технологію зараз застосовують практично у всіх сферах людської діяльності, наприклад, для аналізу глобальних проблем перенаселення, забруднення території, скорочення лісових угідь, природної катастроф. Вони використовуються для вирішення більш часткових завдань, таких, як пошук якнайкращого маршруту руху між пунктами, підбір оптимального розташування нового офісу, пошук будинку за його адресою, прокладка трубопроводу або лінії електропередачі на місцевості, різні муніципальні завдання (наприклад, реєстрація земельної власності).

З наукової точки зору, ГІС – це засіб моделювання і пізнання природних і соціально-економічних систем. ГІС застосовується для дослідження всіх тих природних, суспільних і природно-суспільних об'єктів і явищ, які вивчають науки про Землю і суміжні з ними соціально-економічні науки, а також картографія і дистанційне зондування Землі. У технологічному аспекті ГІС-технології предстають як засіб збору, зберігання, перетворення, відображення і розповсюдження просторово-координованої географічної (геологічної, екологічної, економічної) інформації. І нарешті, з виробничої точки зору, ГІС є комплексом апаратних пристроїв і програмних продуктів (ГІС-оболонок), призначених для забезпечення управління і ухвалення рішень, причому найважливіший елемент цього комплексу – автоматичні картографічні системи. Таким чином, ГІС може одночасно розглядатися як інструмент наукового дослідження, технологія і продукт ГІС-індустрії. Це достатньо типова ситуація на сучасному рівні науково-технічного прогресу, що характеризується інтеграцією науки і виробництва.

На сьогодні в світі розроблена велика кількість програмних продуктів ГІС. Даний посібник не переслідує мети знайомства з ними (за винятком короткого знайомства з пакетом ArcGIS). В основу методики викладу матеріалу нами часто кладеться алгоритмічний принцип. Адже знаючи алгоритм розв'язування задачі хороший програміст завжди напише відповідну програму. Такий підхід сприяє знайомству з алгоритмічними механізмами, зашитими у сучасних ГІС-пакетах. Представлені в посібнику алгоритми можуть бути реалізовані студентами в курсі лабораторних робіт в одному з двох варіантів: ручний розрахунок (електронні таблиці Excel) або ж програмування на одній з мов, якими володіє студент. Варіант розв'язування задачі вибирає сам студент в залежності від рівня своєї підготовки. Наш посібник побудований з розрахунку на те, що студенти вже мають підготовку з комп'ютерних дисциплін, основ алгоритмізації та програмування, технології роботи з базами даних, математичних методів і математичного моделювання.

Посібник складається з двох частин. В першій викладені теоретичні основи геоінформаційних систем і технологій. Тут подані основні концепції, положення, поняття, принципи побудови і функціонування географічних інформаційних систем. Розглянуті математичні методи, моделі та алгоритми, які використовуються при розв’язуванні задач геоінформатики. Друга частина посібника представляє лабораторний практикум, покликаний закріпити теоретичні основи дисципліни шляхом комп’ютерного програмування, моделювання та розрахунків. Крім того є додаток, присвячений методиці організації контролю знань студентів.

Пропонований посібник до навчальної дисципліни «Геоінформаційні системи і технології» в першу чергу призначений для студентів за напрямом підготовки «Прикладна математика». Для майбутніх користувачів, наладчиків ГІС та програмістів важливим є розуміння математичних методів та алгоритмів, використаних в ГІС. Геоінформаційні технології є одним із напрямків та яскравою ілюстрацією застосування математичних методів до сучасних комп’ютерних технологій. У зв’язку з цим розгляд більшості тем у посібнику проводиться в площині математичного забезпечення відповідних задач геоінформатики, через розкриття методики математичної та алгоритмічної основи вирішення найбільш типових задач гоінформатики. Посібник також може представляти інтерес для фахівців в галузях управління територіями, земельними ресурсами і нерухомістю, комунальним господарством, транспортною інфраструктурою, в галузях енергетики, екології, розробки складних просторових комплексів, а також для студентів, які навчаються за відповідними спеціальностями.

Тема 7. ВИКОРИСТАННЯ ГРАФІВ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ В ГІС

7.1. Географічні мережі

Багато технічних, економічних і природних структур можуть бути подані у вигляді мереж: залізнична мережа, мережі автомобільних доріг або вулиць, інженерні трубопровідні або кабельні мережі, гідрографічна мережа тощо. Для моделювання мереж у середовищі ГІС розроблена спеціальна структура мережних даних, а також різні методи мережного аналізу. На основі моделі мережі і мережного аналізу можна створювати різні прикладні ГІС, наприклад:

- для складання розкладу пасажирських і вантажних перевезень залізницею;
- для доставки поштових відправлень за адресами;
- для технічного обслуговування електромереж і трубопроводів, пошуку причин несправності і планування ремонту;
- для екологічного моніторингу поверхневих вод, пошуку джерела забруднення;
- для планування будівництва і ремонту автодоріг;
- для оптимізації маршрутів руху міського транспорту;
- для пошуку оптимального маршруту з використанням системи супутникового визначення координат.

Модель географічної мережі в базі даних ГІС складається з двох взаємозалежних блоків - геометричної мережі і логічної мережі.

Геометрична мережа є набором просторових об'єктів, що моделюють ребра мережі та їх з'єднання (вузли). **Логічна ме-**

режа являє собою набір таблиць, у яких зберігається інформація про зв'язаність мережі, а також атрибути ребер і вузлів. Правила зв'язаності мережі визначають властивості конкретних елементів мережі (наприклад, визначається обов'язкова наявність перехідників і перемикачів на ділянках приєднання електричних кабелів з різним перетином; наявність трансформаторів на з'єднаннях ділянок електромережі з різною напругою; наявність вентилів на відводах від магістрального водопроводу тощо). Атрибутами ребер мережі можуть бути діаметр трубопроводу або перетин кабелю; робочий тиск або напруга, кількість смуг руху і пропускна здатність машин у годину; напрямок руху. Для з'єднань (вузлів) задаються пропускна здатність для кожного приєднаного ребра, коефіцієнти перетворення тиску або напруги, напрямок пропуску, заборона або дозвіл пропуску у визначеному напрямку та інші характеристики.

7.2. Основні поняття теорії графів

Управління багатьма системами можна ефективно оптимізувати використовуючи математичний апарат, який носить назву **теорія графів**. Сюди відносять управління водопровідними, електричними, транспортними та іншими мережами міського господарства.

Графом G(V,E) називається система, яка складається з двох множин: **вершин (Vertices)** і **ребер**, що їх з’єднують **(Edges)**. Вершина і ребро називають **інцидентними**, якщо ця вершина є одним з кінців ребра. Дві вершини, які з’єднані ребром, називають **суміжними**. Ребра, які мають спільну вершину, теж називають суміжними. Скінченна послідовність суміжних ребер називають **маршрутом**. Маршрут, у якому всі ребра різні, називається **ланцюгом**. Ланцюг, у якого всі вершини різні, називається простим ланцюгом. Граф G називається **зв'язним**, якщо будь-які дві його вершини можна сполучити хоча б одним ланцюгом. Ланцюг, у якого початкова і кінцева вершини збігаються, називається **циклом**. Зв'язний граф, який не має циклів, називається **деревом**. Для кожного з графів можна побудувати дерево, яке містить всі його вершини. Таке дерево називають покриваючим, або **покриттям графа**. Якщо кожне ребро графа має напрямок, граф називають **орієнтованим (орграфом)**. Напрямлене ребро називають **дугою**. **Мережею** називають орграф, кожна дуга якого має певне числове значення (вагу).

Граф можна задавати у вигляді рисунка чи переліком вершин і ребер. Проте найзручніший спосіб задання графа в плані комп'ютерної обробки є задання за допомогою матриць. Наприклад, нехай маємо граф, представлений на рис. 7.1. Він же може бути заданий за допомогою наступної матриці інцидентності. Кожен рядок цієї матриці відповідає вершині, а стовпець – дузі. У кожному стовпці такої матриці є одна 1 (вхід), одна –1 (вихід), а решта елементів дорівнюють нулю.

7.3. Мережний аналіз

Методи мережного аналізу поділяються на ряд категорій, серед яких найбільш розробленим є аналіз інженерних комунікацій і аналіз транспортних мереж. У транспортній мережі аналізовані об'єкти (автомобілі з водіями) мають власний інтелект і можуть змінювати напрямок руху; вода в трубопроводі тектиме в заданому напрямку, визначеному роботою насосів і станом розподільних пристроїв. Визначення напрямку потоку і його характеристик є основою аналізу мереж інженерних комунікацій.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

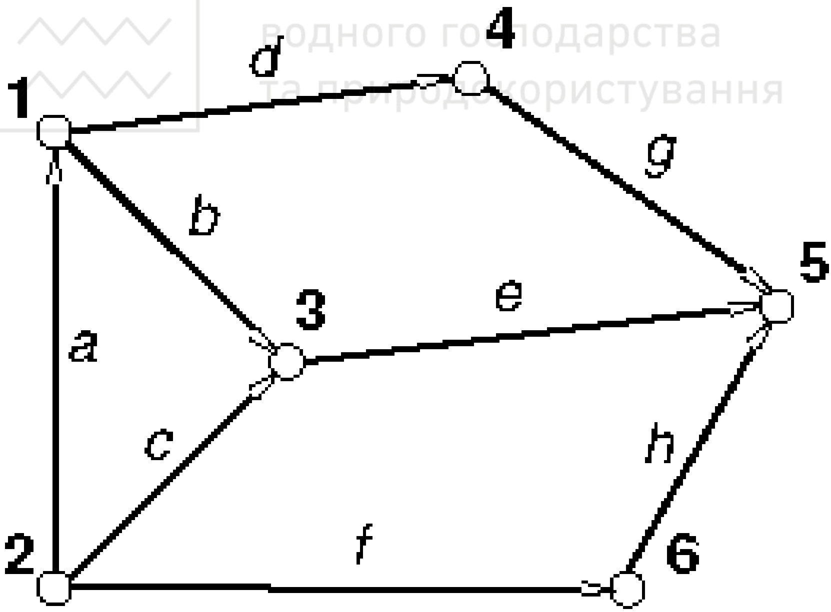

Рис. 7.1. Приклад орієнтованого графа

Для аналізу потоку в мережі трубопроводів установлюється джерело (водозабір, насос) і стік (резервуар, водоспуск), відносно яких ведеться розрахунок. Напрямок потоку задається встановленням атрибута «закрито» або «відкрито» на відповідному з'єднанні. При аналізі потрібно з'ясовувати, які просторові об'єкти знаходяться вище чи нижче за течією потоку від чи до визначеного місця. Пропускна здатність мережі визначається вагами ребер і з'єднань, що характеризують діаметр труби або вентиля, максимальний тиск, довжину ділянки тощо.

Для мережного аналізу в різних ГІС-пакетах розроблено ряд спеціальних алгоритмів. Перед початком аналізу користувач повинен провести підготовку мережі - установити початкові і кінцеві точки для розрахунку напрямку потоку; встановити стан перемикачів, що забороняють рух у визначеному напрямку; встановити проміжні пункти руху на ребрах або з'єднаннях.

На основі стандартних функцій (визначення пройденої відстані, визначення напрямку руху, опору при русі та ін.) в ГІС, як правило, реалізовані такі алгоритми мережного аналізу:

- визначення найкоротшого маршруту руху транспорту між двома і більше точками;
- визначення оптимального маршруту руху транспорту між двома і більше точками (враховується довжина і час проходження ребер);
- визначення витрат на рух транспорту, нарахування дорожніх зборів (враховується довжина і час проходження ребер залежно від атрибута, що характеризує опір руху);

- визначення зони транспортної досяжності з початкової точки за певний відрізок часу (ураховуються довжина і час проходження ребер залежно від атрибута, що характеризує опір руху);
- визначення тиску чи температури у водопровідній або газовій мережі (враховуються довжина і діаметр труб, пропускна здатність вентилів, тиск або температура на виході з джерела та у кінцевого користувача);
- визначення спадання напруги в електричній мережі (ураховуються довжина, перетин і опір ребер, коефіцієнти передачі й опору на з'єднаннях).

У процесі аналізу проводиться трасування мережі від початкової до кінцевої точки, зазначеної користувачем. Залежно від поставленої мети будуть обрані і відповідним чином позначені ребра і з'єднання, що знаходяться на маршруті руху, у табличному вигляді подані відстані і витрати на подолання маршруту (витрати часу, палива; витрати продукту або електричної напруги); списки проміжних об'єктів на маршруті.

7.4. Знаходження найкоротшого шляху у мережі

Перейдемо до розгляду прикладних задач оптимізаційного аналізу графів і мереж. Нехай нам задана дорожна мережа, яка складається з дев'яти вершин (населених пунктів), з'єднаних ребрами (дорогами) так, як це показано на рис. 7.2. Необхідно знайти найкоротший шлях від вершини 1 до інших вершин мережі.

Одним із методів розв'язування задачі є **алгоритм Дейкстри**. Алгоритм задачі використовує три масиви з n (n - кількість вершин) чисел кожний.

Перший масив a містить мітки з двома значеннями: 0 (вершина ще не розглянута) і 1 (вершина уже розглянута). Другий масив b містить відстані - біжучі найкоротші відстані від початкової вершини V_i до іншої вершини V_k. Третій масив c містить номери вершин - k-ий елемент c_k є номером передостанньої вершини на біжучому найкоротшому шляху з V_i до V_k. Матриця відстаней D_{ik} задає довжини ребер d_{ik}; якщо такого ребра немає, то d_{ik} присвоюється значення дуже великого числа M, яке дорівнює "машинній нескінченності".

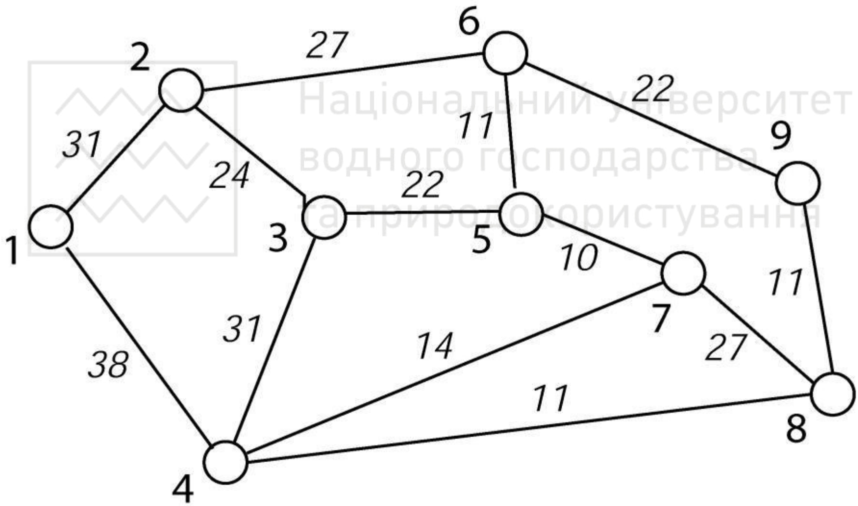

Рис. 7.2. Дорожня мережа

Алгоритм знаходження найкоротших шляхів у мережі вперше був описаний Дейкстрою (1959). Він складається з трьох кроків і має вигляд:

1. <u>*Ініціалізація*</u>. Всім елементам масиву a крім a_i (початок маршруту) присвоїти значення 0. $a_i := 1$. Всім елементам ма-

сиву b присвоїти значення відстаней з i-го рядка матриці D_{ik}. Всім елементам масиву c (крім c_i) присвоїти значення i (номер початкової вершини). $c_i := 0$.

2. <u>*Основна частина*</u>. Знайти найменшу відстань b_j серед непомічених стовпців (тобто для тих j, для яких $a[j]=0$). Присвоїти $a[j]:=1$ (помітити вершину). Розглянути всі маршрути, які проходять з вершини i через вершину j до вершини k. Обчислити їх довжини b_k. Якщо $b_k > b_j + d_{jk}$ (довжина нового маршруту менша від довжини старого), то присвоюємо $b_k := b_j + d_{jk}$; $c_k := j$. Якщо $b_k < b_j + d_{jk}$ (новий маршрут довший за старий) – ніяких змін у k-ий стовпець не вносимо. Основна частина повторюється до того часу, поки в масиві a залишається один нуль. Процес розв’язування проілюстрований у таблиці 7.1.

3.<u>*Відповідь*</u>. Структуру найкоротших маршрутів та їх довжину знаходимо з останньої таблиці. Довжина найкоротшого шляху від вершини V_i до вершини V_k дорівнює b_k (другий рядок останньої таблиці). Тепер потрібно перерахувати вершини, які входять в найкоротший шлях від V_i до V_k. Для цього служить масив c. Остання вершина – V_k, їй передує вершина з номером c_k, перед нею буде вершина, номер якої знаходиться у масиві c на місці c_k тощо. Для виконання алгоритму потрібно n раз переглянути масив b з n елементів, тобто алгоритм Дейкстри має квадратичний рівень складності.

Таблиця 7.1

Знаходження найкоротших маршрутів за алгоритмом Дейкстри

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Min b_k
A	1	0	0	0	0	0	0	0	0	31
B	0	31	M	38	M	M	M	M	M	
C	0	1	1	1	1	1	1	1	1	

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	Min b_k
A	1	1	0	0	0	0	0	0	0	38
B	0	31	**55**	38	M	**58**	M	M	M	
C	0	1	2	1	1	2	1	1	1	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	Min b_k
A	1	1	0	1	0	0	0	0	0	49
B	0	31	55	38	M	58	**52**	**49**	M	
C	0	1	2	1	1	2	4	4	1	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	Min b_k
A	1	1	0	1	0	0	0	1	0	52
B	0	31	55	38	62	58	52	49	60	
C	0	1	2	1	7	2	4	4	8	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	Min b_k
A	1	1	1	1	0	0	1	1	0	55
B	0	31	55	38	62	58	52	49	60	
C	0	1	2	1	7	2	4	4	8	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	Min b_k
A	1	1	0	1	0	1	1	1	0	58
B	0	31	55	38	62	58	52	49	60	
C	0	1	2	1	7	2	4	4	8	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	Min b_k
A	1	1	0	1	0	1	1	1	1	60
B	0	31	55	38	62	58	52	49	60	
C	0	1	2	1	7	2	4	4	8	

7.5. Задача про найкоротшу дорожню мережу

Задача Пріма – Краскала. Є декілька міст, які необхідно з’єднати мережею доріг. Для кожної пари міст відома довжина дороги, що їх з’єднує. Приймається спрощуюче припущення про те, що вартість будівництва є пропорційною до довжини дороги. Задача полягає в тому, щоб побудувати найдешевшу з можливих дорожніх мереж. Аналогічні задачі можна сформулювати для мереж ліній електропередач, водо- або газопроводів.

Якщо розглядати мережу доріг як граф, а вартість будівництва вважати пропорційною до довжини ребра, що з'єднує відповідні вершини, то приходимо до задачі про побудову графа мінімальної довжини. Граф мінімальної довжини завжди є деревом, бо якби граф містив цикл, то можна було б видалити одне з ребер циклу не порушивши зв'язності графа. Отже нам необхідно побудувати покриваюче дерево мінімальної довжини. Розв'язок задачі дає алгоритм Пріма – Краскала (жадібний алгоритм) – рис. 7.3.

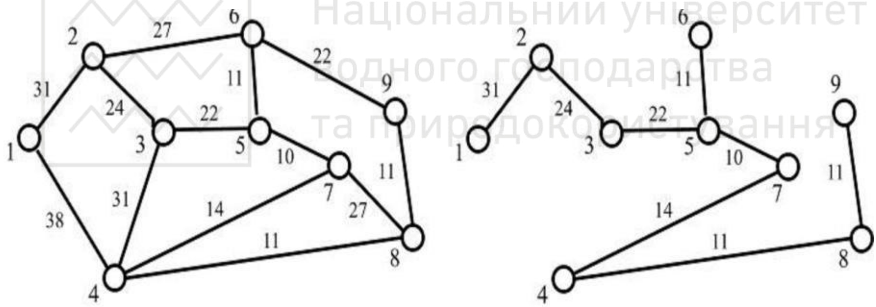

Рис.7.3. Мінімальне покриття графа

Алгоритм Пріма – Краскала.

1. Вибираємо ще не розглядуване ребро мінімальної довжини.
2. Приєднуємо його до раніше вибраних ребер при умові, що не утвориться цикл.
3. Після перегляду всіх ребер утворюється покриваюче дерево, яке і буде деревом мінімальної довжини.

Загальна довжина покриваючого дерева становить 134 км.

Близькою до розглянутої вище задачі є **задача Пріма**. Є N населених пунктів заданих декартовими координатами на площині (**x_i, y_i**) (рис.7.4).

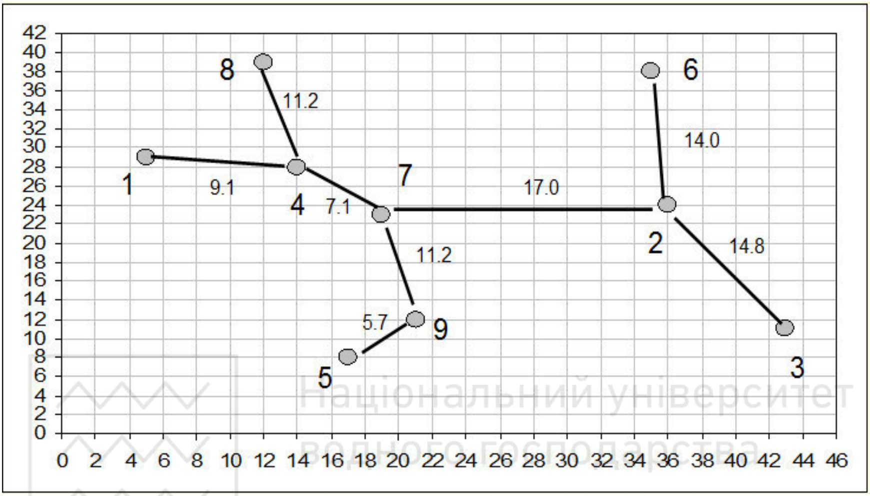

Рис. 7.4. Задача Пріма про побудову найкоротшої дорожньої мережі

Відстань між пунктами визначається за формулою

$$D_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}\,. \qquad (7.1)$$

Вартість будівництва дороги вважається пропорційною до її відстані **D_{ij}**. Необхідно побудувати дорожну мережу мінімальної вартості. Алгоритм розв’язування має наступний вигляд.

1. Будуємо матрицю відстаней (табл. 7.2), використовуючи формулу (7.1).
2. Використовуючи алгоритм Пріма – Краскала будуємо мінімальне покриваюче дерево.

Таблиця 7.2

Відстані між пунктами мережі

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	31.4	42.0	9.1	24.2	31.3	15.2	12.2	23.3
2	31.4	0	14.8	22.4	24.8	14.0	17.0	28.3	19.2
3	42.0	14.8	0	33.6	26.2	28.2	26.8	41.8	22.0
4	9.1	22.4	33.6	0	20.2	23.3	7.1	11.2	17.5
5	24.2	24.8	26.2	20.2	0	35.0	15.1	31.4	**5.7**
6	31.3	14.0	28.2	23.3	35.0	0	21.9	23.0	29.5
7	15.2	17.0	26.8	7.1	15.1	21.9	0	17.5	11.2
8	12.2	28.3	41.8	11.2	31.4	23.0	17.5	0	28.5
9	23.3	19.2	22.0	17.5	**5.7**	29.5	11.2	28.5	0

7.6. Задачі про розміщення

Задача про розміщення школи.

Задана дорожня мережа, яка з'єднує дев'ять населених пунктів (Рис. 7.2). Кількість учнів у населених пунктах відома і становить: 20, 40, 60, 80, 10, 30, 50, 70, 90. Необхідно оптимальним чином вибрати місце для розміщення нової школи.

В основу розв'язування задачі покладено міркування: сумарний шлях, пройдений всіма учнями по дорозі до школи повинен бути мінімальним. Доведена теорема, яка твердить, що школа повинна бути розміщена у населеному пункті.

Перш за все необхідно побудувати матрицю найкоротших відстаней, тобто матрицю, яка містить довжини найкоротших ланцюгів, які зв'язують всі пункти мережі один з одним. Для цього використовується **алгоритм Флойда**, в основу якого покладена операція трикутника: якщо $d[i, k] + d[k, j] < d[i, j]$

то d[i, j]:=d[i, k]+d[k, j] (рис. 7.5). Ця операція заміняє маршрут [i j] на маршрут [i k j] , якщо він є коротшим.

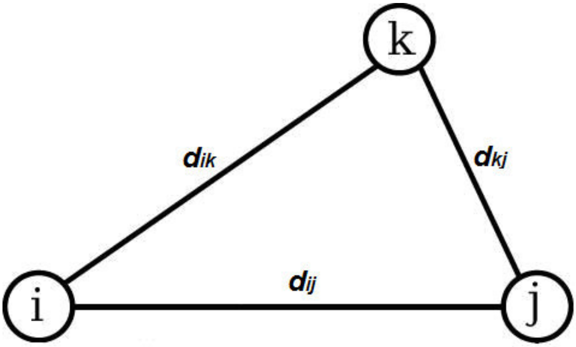

Рис. 7.5. Операція трикутника

Стандартним методом побудови матриці найкоротших відстаней для заданої мережі є алгоритм Флойда.

Алгоритм Флойда*.** ***for k := 1 to n do

for i := 1 to n do

for j := 1 to n do

d [i,j] := min (d [i,j], d [i,k] + d [k,j]);

Початковим етапом алгоритму Флойда є ініціалізація. Матриця d[i, j] ініціалізується наступним чином. Якщо вершини i та j безпосередньо зв'язані, d[i, j] дорівнює відстані між вершинами, інакше d[i, j] дорівнює M (машинна нескінченність). Після завершення роботи алгоритму матриця d[i, j] містить шукані значення довжини найкоротших ланцюгів.

У випадку невеликих мереж найкоротші маршрути між вершинами можна визначити вручну методом **перебору варіантів**. Розрахуємо матрицю найкоротших маршрутів (табл. 7.3) для мережі, зображеної на рис. 7.2.

Таблиця 7.3

Матриця найкоротших відстаней для рис. 7.2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	к-сть учнів
1	0	31	55	38	62	58	52	49	60	20
2	31	0	24	55	38	27	48	60	49	40
3	55	24	0	31	22	33	32	42	53	60
4	38	55	31	0	24	35	14	11	22	80
5	62	38	22	24	0	11	10	37	33	10
6	58	27	33	35	11	0	21	33	22	30
7	52	48	32	14	10	21	0	27	38	50
8	49	60	42	11	37	33	27	0	11	70
9	60	49	53	22	33	22	38	11	0	90
	21370	18660	15060	9560	12390	12470	12040	10480	11760	

До отриманої матриці приєднаємо ще один стовпчик, який містить кількості учнів p_j у населених пунктах. Приєднаємо також додатковий рядок, який містить суми виду

$$f_i = \sum_{i=1}^{n} d_{ij} p_j \, . \qquad (7.2)$$

Найменша з цих сум (четвертий населений пункт) і вказує оптимальне місце для розташування нової школи. Оскільки у формулі (7.2) мінімізується сума, задача про розміщення школи називається міні сумною

$$n = \arg \min_i \sum_{i=1}^{m} k_i d_{ij} \, . \qquad (7.3)$$

Задача про розміщення пожежної частини у населеному пункті.

Необхідно розмістити пожежну частину (підрозділ охорони), яка виїжджає за викликом в один з пунктів мережі (Рис. 7.2). Головною метою є: дістатися до найбільш віддаленого пункту за мінімально можливий час. На відміну від попередньої задачі є два варіанти розв'язування задачі: а) пожежна частина в населеному пункті; б) пожежна частина поза населеним пунктом. Розглянемо перший варіант.

Таблиця 7.4

Задача про розташування пожежної частини.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	0	31	55	38	62	58	52	49	60	62
2	31	0	24	55	38	27	48	60	49	60
3	55	24	0	31	22	33	32	42	53	55
4	38	55	31	0	24	35	14	11	22	55
5	62	38	22	24	0	11	10	37	33	62
6	58	27	33	35	11	0	21	33	22	58
7	52	48	32	14	10	21	0	27	38	52
8	49	60	42	11	37	33	27	0	11	60
9	60	49	53	22	33	22	38	11	0	60

Спочатку будуємо матрицю найкоротших маршрутів. Справа від матриці розташовуємо стовпець, в якому виписуємо найбільше з чисел біжучого рядка (відстань до найбільш віддаленого пункту) – табл. 7.4. Знаходимо найменше серед цих чисел. Це і буде оптимальний варіант розташування пожежної частини. Для нашої задачі це буде пункт 7.

Оскільки в розглянутому алгоритмі знаходиться мінімум серед максимальних відстаней, задача про розміщення пожежної частини називається мінімаксною

$$n = \arg \min_{i} \max_{j} d_{ij}. \tag{7.4}$$

Задача про розміщення пожежної частини поза населеним пунктом.

Розглянемо тепер другий варіант розв'язування: розміщення пожежної частини поза населеним пунктом. Спочатку необхідно виявити, які з ребер мережі є найбільш перспективними для розміщення пожежної частини (виконати нижню оцінку віддаленості ребер від найдальшої вершини).

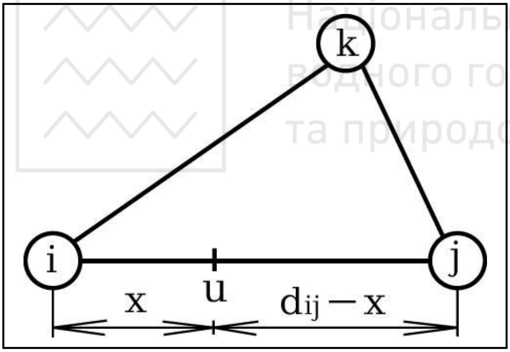

Рис.7.6. Розміщення пожежної частини на ребрі мережі

Нижня оцінка віддаленості ребер від найдальшої вершини.

Розглянемо ребро (ij), що з'єднує вершини i та j, а також деяку іншу вершину k. Нехай x – координата (відстань від вершини i) пожежної частини u на ребрі (ij). Відстань від вершини j до пожежної частини дорівнює d_{ij} – x (d_{ij} – довжина ребра (ij)). Оптимальний маршрут від u до k визначається з умови $d_{uk} = \min (x+d_{ik}, d_{ij}-x+d_{jk})$. Нижня оцінка найбільш віддаленого пункту визначається з умови

$$\delta_{uk} = \max_k \min(d_{ik}, d_{jk}) \,. \qquad (7.5)$$

Отже, ми повинні переглянути всі вершини k ≠ i,j. Для кожної з них необхідно визначити величину δ_{uk} і потім вибрати найбільшу з них. Це і буде нижня оцінка найбільш віддаленого пункту у випадку розташування пожежної частини на ребрі (i,j). Розглянуту операцію необхідно повторити для всіх ребер і вибрати з усіх нижніх оцінок найменшу. Це і буде ребро, на якому найдоцільніше розташувати пожежну частину.

Для ілюстрації вищенаведених міркувань розглянемо приклад. У якості мережі розглянемо ту саму мережу, про яку ми говорили на початку цього параграфа. Використовуючи матрицю найкоротших відстаней побудовану вище, побудуємо таблицю нижніх оцінок (табл.7.5).

Таблиця 7.5.

Таблиця нижніх оцінок віддаленості ребер від найдальшої вершини

Ребро	(1,2)	(1,4)	(2,3)	(2,6)	(3,4)	(3,5)	(4,7)	(4,8)	(5,6)	(5,7)	(6,9)	(7,8)	(8,9)
δ_{uk}	49	35	49	35	38	55	48	55	58	52	58	49	49

Покажемо, наприклад, як було отримано перша оцінка ребра (1,2) – число 49. Порівнюємо пари чисел, одне з яких належить першому, а друге – другому рядку матриці найкоротших відстаней між вершинами графа, побудованої нами раніше. У розгляд не включаються пари, які відповідають першому і другому стовпцю. Знаходимо

δ_{12} = max(min(55,24), min(38,55), min(62,38), min(58,27), min(52,48), min(49,60), min(49,60))= max(24,38,38,27,48,49,49) = 49.

Аналогічно були знайдені нижні оцінки всіх ребер мережі. Аналіз таблиці показує, що найбільш перспективними ребрами для розташування пожежної частини є ребра (1,4) і (2,6), нижня оцінка віддаленості яких дорівнює 35 км. Тепер необхідно проводити аналіз обох ребер на предмет доцільності розміщення пожежної частини.

Алгоритм Хакімі.

Завершальним етапом розв'язування задачі про розміщення пожежної частини на ребрі мережі є визначення оптимальної координати розміщення пожежної частини на ребрі з мінімальною нижньою оцінкою віддаленості. Розв'язати цю задачу дозволяє алгоритм Хакімі. Нехай пожежна частина u розташована на ребрі (i,j) на відстані x від вершини i. Розрахуємо відстані від пожежної частини до всіх вершин мережі. У нашому випадку оптимальним місцем розташування для пожежної частини виступають ребра (1,4) і (2,6). Проаналізуємо другий випадок. Довжина ребра становить 27 км. Отже, якщо відстань від вершини 2 до пожежної частини становить x км, то відстань від вершини 6 до пожежної частини становить 27 – x км.

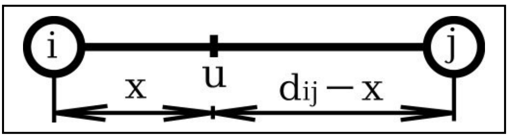

Рис.7.7. Розміщення пожежної частини на ребрі (i,j)

Позначимо du_i – мінімальна відстань від пожежної частини до i-ої вершини. Тоді, наприклад, відстань до першої вершини буде визначатися з умови

$du_1 = \min (x+d_{21}, d_{26} - x+d_{61}) = \min (31+x, 58+27-x) = \min(31+x, 85-x)$. Враховуючи, що $0 \le x \le 27$, отримаємо $du_1 =$

$31 + x$. Аналогічні міркування необхідно провести і для всіх інших вершин мережі. В результаті такого аналізу отримуємо.

$du_2 = x$;

$du_3 = \min(24 + x, 33 + 27 - x) = 24 + x$;

$du_4 = \min(55 + x, 35 + 27 - x) = 62 - x$;

$du_5 = \min(38 + x, 11 + 27 - x) = 38 - x$;

$du_6 = 27 - x$;

$du_7 = \min(48 + x, 21 + 27 - x) = 48 - x$;

$du_8 = \min(60 + x, 25 + 27 - x) = 52 - x$;

$du_9 = \min(49 + x, 22 + 27 - x) = 49 - x$.

Будуємо графіки ліній du_1 – du_9. В результаті отримуємо так звану **діаграму Хакімі** (рис. 7.8). Її аналіз показує, що оптимальне місцерозташування пожежної частини є точкою перетину ліній du_1 і du_4. Розв’яжемо рівняння для визначення невідомої координати x: $31 + x = 62 - x$.

Отримуємо: $x = 15.5$; $\min du_i = 46.5$ км.

Аналогічний аналіз, проведений для ребра (1,4) дає результат $\min du_i = 52$ км. Це означає, що дане ребро не дає виграшу у порівнянні з вибраним раніше сьомим населеним пунктом.

Висновок. При розміщенні пожежної частини у населеному пункті оптимальним варіантом буде сьомий населений пункт. При цьому віддаль до найбільш віддаленого пункту становитиме 52 кілометри.

При розміщенні пожежної частини поза населеним пунктом оптимальним варіантом буде ребро (2,6). Пожежну частину слід розмістити в 15.5 кілометрах від 2-го пункта. При цьому

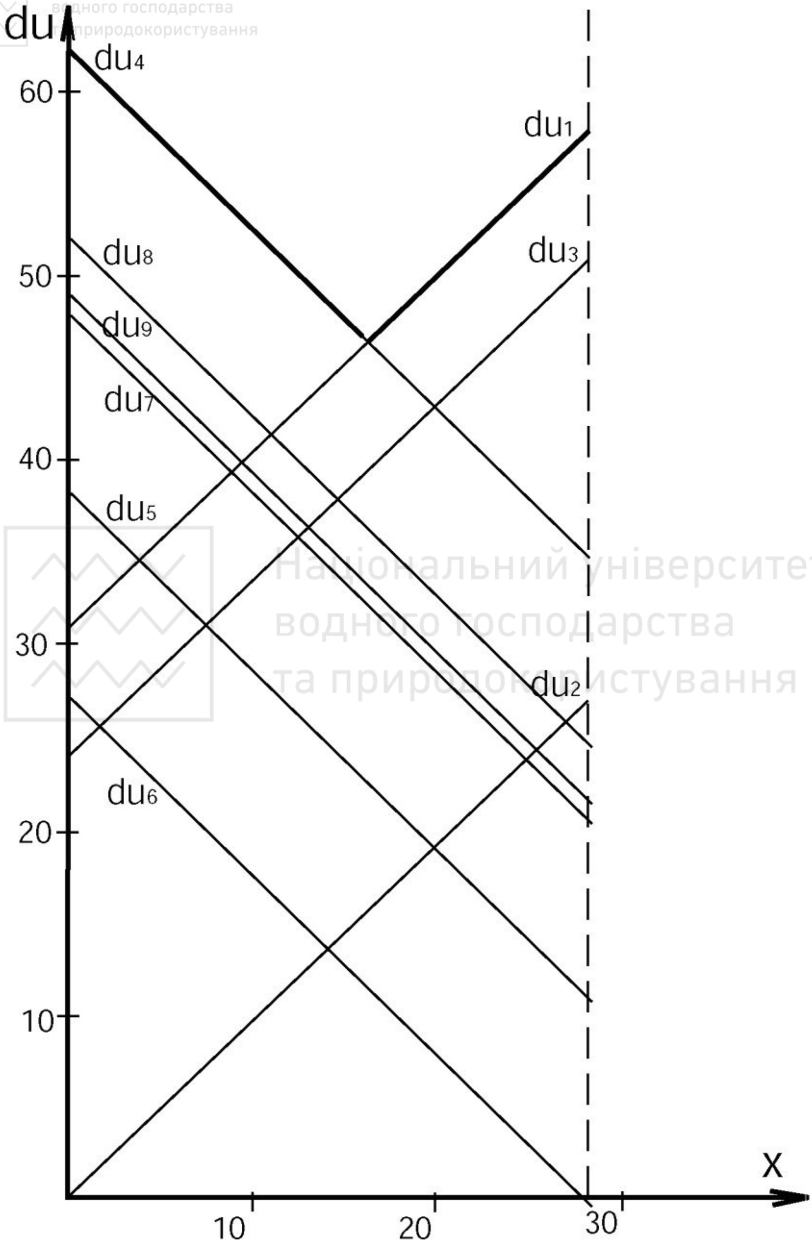

Рис. 7.8. Діаграма Хакімі

віддаль до найбільш віддаленого пункту (1-го або 4-го) становитиме 46.5 кілометрів. Таким чином, у порівнянні з першим варіантом розв'язку ми отримали виграш у 5.5 кілометри. Розміщення пожежної частини на ребрі (1,4) не дає виграшу у порівнянні з розміщенням її у населеному пункті 7.

Зауваження. Слід мати на увазі, що не завжди розміщення пожежної частини на ребрі є більш вигідним від розміщення у вершині графа. У кожному конкретному випадку відповідний висновок можна зробити лише після повного аналізу обох варіантів розв'язування. У випадку, якщо декілька ребер мають однакову мінімальну нижню оцінку віддаленості, слід виконувати аналіз по алгоритму Хакімі для всіх таких ребер.

7.7. Задача про максимальний потік у мережі

Задача. Є мережа трубопроводів, що з'єднують пункти мережі. Позначимо початковий пункт **s**; кінцевий пункт - **t**. Кожна вітка мережі, яка з'єднує вершини **I** та **k** має деяку максимальну пропускну здатність c_{ik} (л/с). Скільки води (нафти, газу) можна прокачати через таку мережу за одиницю часу. Ця і подібні до неї задачі приводять до теорії потоків у мережах.

Транспортною мережею називають зв'язний орграф з такими властивостями:

1. Існує одна і лише одна вершина **s** , в яку не входить жодна стрілка з інших вершин – вхід мережі.
2. Існує одна і лише одна вершина **t,** з якої не виходить жодна стрілка – вихід мережі.
3. Кожна дуга графа має цілочисельну характеристику c_{ik} - пропускну здатність дуги.

Однією з основних характеристик мережі є **потік**. Розглянемо довільну вершину **i**. Позначимо u_i^- - множина дуг, які заходять в **I**; u_i^+ - множина дуг, які виходять з **I**. **Потоком** по мережі f називається функція, яка має наступні властивості:

$$1. \qquad 0 \le f_{ik} \le c_{ik};$$

$$2. \qquad \sum_{u_i^-} f_{ik} = \sum_{u_i^+} f_{ik}. \qquad (7.4)$$

Перша умова означає, що потік по дузі не може перевищувати пропускну здатність дуги. Друга умова стверджує: скільки води надходить у вершину, стільки і виходить. При вивченні питань, пов'язаних з розподілом потоків, зокрема при визначенні максимального потоку через мережу, важливу роль відіграє поняття розрізу транспортної мережі.

Розрізом транспортної мережі називається така множина **P** вершин і дуг, які заходять в ці вершини, але не виходять з них, причому $t \in P, \quad s \notin P$. Якщо з транспортної мережі вилучити дуги довільного її розрізу, то потік припиниться. Пропускною здатністю розрізу називається сума пропускних здатностей всіх дуг, які йому належать. Розглянемо приклади розрізів мережі, представленої на рис. 7.9.

	P	U_P^-
1	(1; 4)	(0;1) (3;4) (2;4)
2	(3; 4)	(1;3) (1;4) (2;3) (2;4)
3	(1; 2; 4)	(0;1) (0;2) (3;4)

Розрізи представлені у таблиці мають наступні пропускні здатності: 3 + 2 + 1 = 6; 1 + 2 + 1 + 1 = 5; 3 + 2 + 2 = 7.

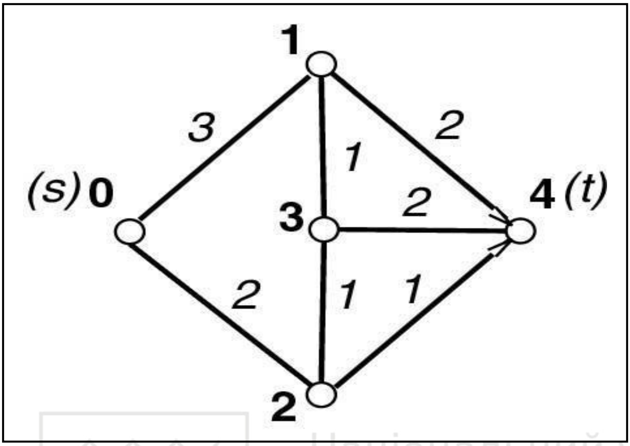

Рис. 7.9. Розрізи мережі.

Розріз, який має мінімальну пропускну здатність називається *мінімальним розрізом*.

Теорема. *Максимальна величина потоку, який можна пропустити через мережу, дорівнює пропускній здатності мінімального розрізу*.

Для побудови максимального потоку використовують **алгоритм Форда – Фалкерсона**, який складається з трьох етапів:

1. Побудова довільного потоку.
2. Побудова повного потоку (потоку при якому кожен маршрут від **s** до **t** містить хоча б одну насичену дугу).
3. Побудова максимального потоку.

7.8. Транспортна задача у мережній постановці

Поряд із задачею відшукання максимального потоку велике практичне значення має задача, названа транспортною (ТЗ). Ця задача має два варіанти постановки: мережний і безмережний. У мережній постановці ТЗ необхідно отримати найбільш економічно вигідний розподіл потоку по дугах мережі. Введемо позначення:

c_{ik} - пропускна здатність дуги (ij);

d_{ik} - вартість проходження одиниці потоку по дузі (ij);

f_{ik} - фактичний потік по дузі (ij).

Вартість проходження потоку f_{ik} по дузі (ij) дорівнює $D_{ij} = d_{ij} f_{ij}$. Будемо розглядати величину D_{ij} як довжину дуги (ij). Тоді задача зводиться до відшукання найкоротшого маршруту від вершини **s** (вхід) до вершини **t** (вихід). Якщо немає обмежень на пропускну здатність дуг, то таким чином ми отримуємо оптимальний розв'язок задачі.

При наявності обмежень на пропускну здатність задача розв'язується в декілька етапів. Позначимо f - потік, який необхідно пропустити по мережі. Алгоритм розв'язування буде наступним.

1. Будується найкоротший маршрут від **s** до **t**.
2. Знаходиться $m = \min(c_{ij})$ - дуга з найменшою пропускною здатністю, яка належить до найкоротшого маршруту. Якщо $m \geq f$ - задача розв'язана.
3. Якщо $m < f$, вилучаємо з найкоротшого маршруту всі дуги, пропускна здатність яких $c_{ij} < f$. Зменшуємо потік до величини $f := f - m$. Переходимо до пункту 1.

Після декількох повторів пп. 1 – 3 задача або буде розв’язана, або ж ми прийдемо до висновку про неможливість її розв’язання.

Питання до теми 7

1. Географічні мережі та їх моделювання у ГІС.
2. Дайте означення графа, інцидентності, суміжності.
3. Дайте означення маршруту, ланцюга, цикла, дерева.
4. Дайте означення орграфа, мережі.
5. Назвіть основні способи задання графів.
6. Дайте поняття про мережний аналіз.
7. Які масиви використовують у алгоритмі Дейкстри?
8. Сформулюйте задачу Пріма – Краскала.
9. Опишіть «жадібний» алгоритм.
10. Сформулюйте задачу Пріма.
11. Опишіть метод розв’язування задачі Пріма.
12. Опишіть алгоритм Флойда.
13. Покажіть на прикладі метод перебору варіантів.
14. Які задачі розв’язуть на основі мінісумного принципу?
15. Які задачі розв’язуть на основі мінімаксного принципу?
16. Дайте означення транспортної мережі.
17. Дайте означення потоку.
18. Дайте означення розрізу мережі.
19. Сформулюйте теорему про мінімальний розріз.
20. Опишіть структуру алгоритма Форда-Фалкерсона.
21. Опишіть алгоритм розв’язування транспортної задачі у мережній постановці