



Національний університет
водного господарства
та природокористування

Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства
та природокористування
Кафедра вищої математики

04-02-08

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ
для самостійної роботи
з дисципліни **"Вища математика"** з розділу

**"ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ
РІВНЯННЯ
ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ"**

для студентів спеціальності
133 "Галузеве машинобудування"
денної форми навчання

Рекомендовано методичною
комісією спеціальності 133
"Галузеве машинобудування"
протокол №4 від 24.02.2016 р.

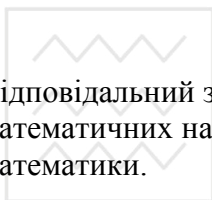
Рівне - 2016



Національний університет

Методичні вказівки та завдання до самостійної роботи з дисципліни «Вища математика» з розділу "Звичайні диференціальні рівняння та їх застосування" для студентів спеціальності 133 "Галузеве машинобудування" денної форми навчання / Івашук Я. Г. - Рівне: НУВГП, 2016. – 50 с.

Упорядник: Івашук Я. Г., кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри вищої математики.



Національний університет
водного господарства та природокористування

Відповідальний за випуск: Івашук Я. Г., кандидат фізико-математичних наук, доцент, в. о. завідувача кафедри вищої математики.

© Івашук Я. Г., 2016

© Національний університет
водного господарства та
природокористування, 2016



Вступ

Перед завданнями для самостійної роботи подано короткі теоретичні відомості з теорії звичайних диференціальних рівнянь, зразки розв'язань багатьох диференціальних рівнянь, систем диференціальних рівнянь, задач технічного та геометричного змісту різної складності у відповідності до навчальної робочої програми. Для самостійної роботи пропонуються такі завдання:

1. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.
2. Задача Коші для диференціального рівняння з відокремлюваними змінними.
3. Однорідні диференціальні рівняння 1-го порядку.
4. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння 1-го порядку.
5. Задача Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння 1-го порядку.
6. Диференціальні рівняння 2-го порядку, що допускають пониження порядку.
7. Задача Коші для диференціального рівняння 2-го порядку.
8. Лінійні однорідні диференціальні рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами.
9. Задача Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами.
10. Задача Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною виду $Ax + B$.
11. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною.
12. Задача Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною.
13. Нормальні системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку.
14. Задача Коші для нормальних систем лінійних диференціальних рівнянь.
15. Задача технічного змісту, що розв'язується з допомогою диференціального рівняння першого порядку.
16. Задача геометричного змісту, що розв'язується з допомогою диференціального рівняння першого порядку.



Приклади розв'язання диференціальних рівнянь

Диференціальне рівняння виду

$$\varphi(y)dy = f(x)dx, \quad (1)$$

в якому множник при dx є функцією, яка залежить лише від x , а множник при dy є функцією, яка залежить лише від y , називають диференціальним рівнянням з **відокремленими змінними**.

Оскільки рівняння (1) містить тотожно рівні диференціали, то відповідні невизначені інтеграли відрізняються між собою на сталу величину, тобто

$$\int \varphi(y)dy = \int f(x)dx + C.$$

Диференціальні рівняння виду

$$f_1(x)\varphi_1(y)dx = f_2(x)\varphi_2(y)dy,$$

у якому коефіцієнти при диференціалах розкладаються на множники, які залежать тільки від x і тільки від y , називаються диференціальними рівняннями з **відокремлюваними змінними**.

Для відокремлення змінних у цьому рівнянні досить обидві його частини поділити на функцію $\varphi_1(y)f_2(x)$, отримаємо:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy.$$

Приклад 1. Розв'язати рівняння $x(1+y^2) + y(1+x^2)\frac{dy}{dx} = 0$.

Розв'язання. Подамо дане диференціальне рівняння у вигляді:

$$x(1+y^2)dx + y(1+x^2)dy = 0$$

Поділивши обидві частини цього рівняння на добуток $(1+x^2)(1+y^2)$, отримаємо рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{x dx}{1+x^2} + \frac{y dy}{1+y^2} = 0.$$

Послідовно інтегруючи його знайдемо розв'язок:

$$\int \frac{x dx}{1+x^2} + \int \frac{y dy}{1+y^2} = c_1,$$



$$\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2} \ln(1+y^2) = \frac{1}{2} \ln c, \text{ де } \frac{1}{2} \ln c = c_1$$

Звідси $(1+x^2)(1+y^2) = c$ - загальний інтеграл заданого диференціального рівняння.

Диференціальне рівняння першого порядку $y' = f(x, y)$ **називається однорідним**, якщо функцію $f(x, y)$ можна подати як

функцію залежну тільки від відношення $\frac{y}{x}$, тобто $f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

. Однорідні диференціальні рівняння зводять до рівнянь з відокремлюваними змінними з допомогою підстановки: $\frac{y}{x} = t$.

Звідки $y = xt$, а $y' = t + xt'$, або $dy = x dt + t dx$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $y - x y' = y \ln \frac{x}{y}$.

Розв'язання. Спочатку переконаємося, що дане диференціальне рівняння є однорідним:

$$x y' = y - y \ln \frac{x}{y} \Rightarrow y' = \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x} \Rightarrow y' = \frac{y}{x} \left(1 + \ln \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Застосовуючи підстановку $\frac{y}{x} = t$, або $y = xt$, де $y' = t + xt'$ отримаємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$t + xt' = t + t \ln t, \text{ або } x \frac{dt}{dx} = t \ln t.$$

Домножимо обидві частини на $\frac{dx}{x t \ln t}$: $\frac{dt}{t \ln t} = \frac{dx}{x}$.

Інтегруємо отримане рівняння: $\int \frac{dt}{t \ln t} = \int \frac{dx}{x}$. Отримаємо

$$\ln |\ln t| = \ln |x| + \ln c.$$

Звідси $\ln |\ln t| = \ln |cx| \Rightarrow \ln t = cx$.



Потенціюємо і знаходимо t : $t = e^{cx}$, або $\frac{y}{x} = e^{cx}$.

Звідси $y = x e^{cx}$ - загальний розв'язок диференціального рівняння.

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння виду:

$$y' + p(x)y = f(x),$$

де $p(x)$ і $f(x)$ - задані і неперервні на деякому проміжку функції. Функція $y(x)$ і її похідна входять до рівняння у першому степені, тобто лінійно.

Одним із методів інтегрування рівняння є метод Бернуллі, який полягає в тому, що розв'язок цього рівняння шукають у вигляді добутку двох функцій:

$$y(x) = u(x) \cdot v(x) = u v,$$

де $u = u(x)$, $v = v(x)$ - невідомі функції змінної x .

Знаходячи похідну $y' = u'v + uv'$ і підставляючи значення u і y' в лінійне диференціальне рівняння, дістанемо:

$$u'v + uv' + p(x)uv = f(x), \text{ або } u'v + u(v' + p(x)v) = f(x).$$

Користуючись довільністю у виборі функції $v(x)$, доберемо її так, щоб

$$v' + p(x)v = 0.$$

В такому разі $u'v = f(x)$. Отримали два диференціальних рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'язавши їх, знайдемо функції $v(x)$ та $u(x)$, а заодно і функцію $y(x) = uv$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x}$.

Розв'язання. Зведемо рівняння до виду:

$$y' + \frac{x+1}{x}y = 3xe^{-x}.$$

З нього видно, що $p(x) = \frac{x+1}{x}$, а $f(x) = 3xe^{-x}$. Нехай $y = uv$,

тоді $y' = u'v + uv'$.



Підставимо значення u та v в диференціальне рівняння:

$$u'v + uv' + \frac{x+1}{x} uv = 3xe^{-x}, \text{ або } u'v + u\left(v' + \frac{x+1}{x}v\right) = 3xe^{-x}.$$

Доберемо функцію v так, щоб $v' + \frac{x+1}{x}v = 0$, тоді $u'v = 3xe^{-x}$.

Відокремлюємо змінні в першому з цих рівнянь і інтегруємо його:

$$\frac{dv}{v} = -\left(1 + \frac{1}{x}\right)dx, \quad \ln|v| = -x - \ln|x|, \quad \ln|v| + \ln|x| = -x,$$

$$\ln|vx| = -x, \quad vx = e^{-x}, \quad v = \frac{1}{x}e^{-x}.$$

Тут при інтегруванні стала $c = 0$, оскільки функція $v(x)$ вибирається довільно.

Знайдемо функцію $u(x)$ з рівняння $u'v = 3xe^{-x}$:

$$u' \frac{1}{x} e^{-x} = 3xe^{-x}.$$

Звідси $u' = 3x^2$, а функція $u(x) = \int 3x^2 dx = x^3 + c$.

Таким чином, загальний розв'язок заданого лінійного диференціального рівняння має вигляд: $y = uv = (x^3 + c) \frac{1}{x} e^{-x}$.

Рівняння виду $y^{(n)} = f(x)$ інтегрується в квадратурах і його загальний розв'язок знаходять шляхом n -кратного інтегрування враховуючи щоразу, що $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$, тобто

$$y^{(n-1)} = \int y^{(n)} dx + C_1 = \int f(x) dx + C_1,$$

де C_1 - стала інтегрування, і т. д.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $y''' = \sin x$.

Розв'язання. $y'' = \int y''' dx = \int \sin x dx = -\cos x + C_1$,

$$y' = \int y'' dx = \int (-\cos x + C_1) dx = -\sin x + C_1 x + C_2,$$



$$y = \int y' dx = \int (-\sin x + C_1 x + C_2) dx = \cos x + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3.$$

Диференціальне рівняння другого порядку, яке не містить явно функцію y виду $F(x, y', y'') = 0$ зводиться до диференціального рівняння першого порядку за допомогою підстановки $y' = p = p(x)$. Звідси $y'' = p'$.

Після заміни отримаємо рівняння $F(x, p', p) = 0$.

Приклад 5. Розв'язати диференціальне рівняння $xy'' = y'$.

Розв'язання. Позначимо $y' = p$. Звідси $y'' = p'$. Після підстановки, отримаємо диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними: $xp' = p$.

$$\text{Розв'яжемо його: } x \frac{dp}{dx} = p \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруючи останнє рівняння, отримаємо:

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|p| = \ln|x| + \ln|C_1| \Rightarrow \ln|p| = \ln|C_1 x| \Rightarrow p = C_1 x.$$

Повертаючись до підстановки отримаємо: $y' = C_1 x$. Звідси

$$y = \int y' dx = \int C_1 x dx = \frac{C_1}{2} x^2 + C_2.$$

Диференціальне рівняння другого порядку, яке не має явно незалежної змінної x виду $F(y, y', y'') = 0$ зводиться до диференціального рівняння першого порядку з допомогою підстановки

$$y' = \frac{dy}{dx} = p = p(y), \text{ тут } p \text{ є функцією від } y.$$

$$\text{Тоді } y'' = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}.$$

Після підстановки отримаємо диференціальне рівняння першого порядку

$$F(y, p, p \frac{dp}{dy}) = 0.$$

Приклад 6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $yy'' = (y')^2$.



Розв'язання. Застосовуємо підстановку $y' = p$, $y'' = p \frac{dp}{dy}$ і

$$\text{отримуємо рівняння } y p \frac{dp}{dy} = p^2 \Rightarrow y p \frac{dp}{dy} - p^2 = 0 \Rightarrow p(y \frac{dp}{dy} - p) = 0$$

$$\Leftrightarrow p = 0, \text{ або } y' = 0. \text{ Звідси } y = C. \text{ Або } y \frac{dp}{dy} - p = 0. \text{ Це є дифе-}$$

ренціальне рівняння з відокремлюваними змінними.

$$y \frac{dp}{dy} = p \Rightarrow \int \frac{dp}{p} = \int \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|p| = \ln|y| + \ln|C_1|$$

$$\Rightarrow \ln|p| = \ln|C_1 y| \Rightarrow p = y' = C_1 y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = C_1 y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = C_1 \int dx$$

$$\Rightarrow \ln|y| = C_1 x + \ln|C_2| \Rightarrow \ln\left|\frac{y}{C_2}\right| = C_1 x \Rightarrow y = C_2 e^{C_1 x}$$

Диференціальне рівняння виду

$$y'' + p y' + q y = 0,$$

де p, q - дійсні числа є лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Швейцарський математик Ейлер запропонував шукати частинні розв'язки цього рівняння у вигляді

$$y = e^{kx},$$

де k - стала (дійсна чи комплексна), яку треба знайти.

Підставивши функцію $y = e^{kx}$ в рівняння, дістанемо

$$e^{kx} (k^2 + p k + q) = 0.$$

Оскільки $e^{kx} \neq 0$, то

$$k^2 + p k + q = 0.$$

Це квадратне рівняння називається характеристичним рівнянням.

Якщо корені характеристичного рівняння дійсні і різні: $k_1 \neq k_2$, то загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

Якщо корені характеристичного рівняння дійсні і рівні:



$k_1 = k_2 = k$, то загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 e^{kx}.$$

Якщо корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені: $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$, то загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x).$$

Приклад 7. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 4y' + 29y = 0$.

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння

$$k^2 - 4k + 29 = 0.$$

Коренями цього рівняння будуть комплексно-спряжені числа

$$k_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 116}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-100}}{2} = 2 \pm 5i.$$

Звідки $\alpha = 2$, $\beta = 5$, тому загальний розв'язок

$$y = e^{2x} (C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x)$$

Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння
 $y'' + py' + qy = f(x)$, де p, q - задані дійсні числа, $f(x) \neq 0$ - задана функція, неперервна на деякому проміжку, має загальний розв'язок $y = \bar{y} + y^*$, що складається із суми двох розв'язків: $\bar{y}$ - загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння $y'' + py' + qy = 0$, і y^* - частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференційного рівняння $y'' + py' + qy = f(x)$.

Якщо права частина диференціального рівняння $y'' + py' + qy = f(x)$ має спеціальний вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + R_m(x) \sin \beta x),$$

де $P_n(x)$ - многочлен степеня n , $R_m(x)$ - многочлен степеня m ; α та β - дійсні числа, то частинний розв'язок цього рівняння треба шукати у вигляді

$$y^* = x^r e^{\alpha x} (Q_s(x) \cos \beta x + L_s(x) \sin \beta x),$$

де $Q_s(x)$ та $L_s(x)$ - многочлени степеня s з невизначеними коефіцієнтами; s - найвищий ступінь многочленів $R_m(x)$ та $P_n(x)$, тобто $s = \max(n, m)$; r - число коренів характеристичного рівняння



Наприклад, якщо $f(x) = a \cos \beta x + b \sin \beta x$, де a, b - відомі дійсні числа, то частинний розв'язок y^* треба шукати у вигляді

$$y^* = x^r (A \cos \beta x + B \sin \beta x),$$

де A, B - невідомі коефіцієнти; r - число кратності кореня βi характеристичного рівняння.

Приклад 8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' + 16y = 8 \cos 4x$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння $y'' + 16y = 0$. Характеристичне рівняння має вигляд $k^2 + 16 = 0$. Коренями цього рівняння є комплексно-спряжені числа $k_{1,2} = \pm 4i$, тому загальний розв'язок однорідного рівняння $y'' + 16y = 0$ має вигляд

$$\bar{y} = c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x.$$

Права частина $f(x) = 8 \cos 4x = 8 \cos 4x + 0 \cdot \sin 4x$ є функцією виду $a \cos \beta x + b \sin \beta x$, де $a = 8, b = 0, \beta = 4$. Крім того, число $\beta i = 4i$ збігається з одним із коренів характеристичного рівняння, тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y^* = x(A \cos 4x + B \sin 4x)$$

Знаходимо похідні $(y^*)'$ та $(y^*)''$, підставляємо їх в дане рівняння, після спрощень, дістанемо:

$$(y^*)' = A \cos 4x + B \sin 4x + x(-4A \sin 4x + 4B \cos 4x),$$

$$(y^*)'' = -4A \sin 4x + 4B \cos 4x + (-4A \sin 4x + 4B \cos 4x) +$$

$$+ x(-16A \cos 4x - 16B \sin 4x) = -8A \sin 4x + 8B \cos 4x +$$

$$+ x(-16A \cos 4x - 16B \sin 4x).$$

Підставляючи значення другої похідної і функції в задане рівняння, отримуємо рівність: $-8A \sin 4x + 8B \cos 4x = 8 \cos 4x$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\sin 4x$ і $\cos 4x$ в лівій і правій частині цієї рівності, отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} -8A = 0 \\ 8B = 8 \end{cases}, \text{ звідси } A = 0, B = 1.$$



Отже, $y^* = x \sin 4x$, а $y = \bar{y} + y^* = c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x + x \sin 4x$ - загальний розв'язок заданого диференціального рівняння.

Система диференціальних рівнянь першого порядку називається нормальною, якщо в лівій частині рівнянь системи стоять похідні першого порядку, а праві частини рівнянь зовсім не містять похідних.

З допомогою методу виключення змінної нормальну систему диференціальних рівнянь першого порядку зводять до рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Проілюструємо метод виключення змінних на прикладі.

Приклад 9. Розв'язати систему рівнянь.

$$\begin{cases} x'(t) = 2x - y, \\ y'(t) = 4x + 6y. \end{cases}$$

Розв'язання. Диференціюємо по t перше рівняння системи:

$$x'' = 2x' - y'$$

В отримане рівняння замість y' підставляємо $4x + 6y$:

$$x'' = 2x' - 4x - 6y$$

З першого рівняння системи знаходимо y : $y = 2x - x'$ і підставляємо в останнє рівняння $x'' = 2x' - 4x - 6(2x - x')$. Зведемо подібні члени і отримаємо однорідне диференціальне рівняння другого порядку відносно змінної x :

$$x'' - 8x' + 16x = 0.$$

Розв'яжемо його, склавши попередньо характеристичне рівняння $k^2 - 8k + 16 = 0$, або $(k - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow k_1 = k_2 = 4$.

$$\text{Тоді } x(t) = c_1 e^{4t} + c_2 t e^{4t}.$$

Оскільки $y = 2x - x'$, то підставляючи в останню рівність замість x і x' їхні значення, отримаємо:

$$\begin{aligned} y &= 2x - x' = 2(c_1 e^{4t} + c_2 t e^{4t}) - (4c_1 e^{4t} + c_2 e^{4t} + 4c_2 t e^{4t}) = \\ &= 2c_1 e^{4t} + 2c_2 t e^{4t} - 4c_1 e^{4t} - c_2 e^{4t} - 4c_2 t e^{4t} = \\ &= -2c_1 e^{4t} - c_2 e^{4t} - 2c_2 t e^{4t} = (-2c_1 - c_2) e^{4t} - 2c_2 t e^{4t}. \end{aligned}$$

Отже, функції



$$x(t) = c_1 e^{4t} + c_2 t e^{4t},$$

$$y(t) = (-2c_1 - c_2) e^{4t} - 2c_2 t e^{4t}.$$

є загальним розв'язком заданої системи диференціальних рівнянь. Якби для даної системи диференціальних рівнянь були б задані початкові умови, наприклад такі: $x(0)=1$, $y(0)=0$, ми змогли б визначити сталі C_1 і C_2 так, щоб виконувалися ці початкові умови:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 \cdot 0 = 1 \\ -2c_1 - c_2 - 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -2 \end{cases}.$$

Тоді частинним розв'язком задачі Коші будуть такі функції:

$$x(t) = e^{4t} - 2t e^{4t} = (1 - 2t) e^{4t},$$

$$y(t) = 4t e^{4t}.$$

Деякі застосування диференціальних рівнянь

В природі та в різних сферах людської діяльності відбуваються різноманітні процеси (фізичні, хімічні, біологічні і т. д.) та явища. Дослідників чи інженерів цікавлять певні функціональні характеристики цих процесів, тобто залежності одних величин від інших, наприклад залежність температури тіла, яке охолоджується від часу. Якщо повна інформація про хід цього процесу є достатньою, то можна спробувати побудувати його математичну модель. У багатьох випадках такою моделлю буде диференціальне рівняння, одним із розв'язків якого є шукана функціональна залежність.

Таким чином, на першому етапі розв'язування задачі з практичним змістом треба вміти скласти диференціальне рівняння для шуканої функції. Кожна задача потребує індивідуального підходу, який ґрунтується на знанні відповідних законів, наприклад, у механіці це можуть бути закони Ньютона, або закони Ома і т. д.

Розглянемо кілька конкретних прикладів (див. [11], с. 446-449).

Приклад 10. (Про витікання рідини з циліндра). Циліндричний резервуар, у дні якого є отвір, заповнений рідиною. Знайти залежність рівня h рідини в резервуарі від часу t , а також знайти час t_0 , за який рідина витече з резервуару, якщо висота стовпа рідини дорівнює H , радіус циліндра – R , площа отвору – S .



Законом Торрічеллі відомо, що швидкість v витікання рідини в той момент, коли висота її рівня дорівнює h визначається за формулою:

$$v = k \sqrt{2gh},$$

де h – висота стовпа, $g \approx 9,81 \text{ м/с}^2$ – прискорення вільного падіння, k – коефіцієнт швидкості витікання рідини через отвір. Для води $k=0,62$, для керосину $k=0,6$.

Нехай в момент часу t висота рідини дорівнювала h_i за час dt зменшилась на dh .

Вважаючи, що протягом часу dt швидкість витікання була сталою і дорівнювала $k \sqrt{2gh}$, знайдемо об'єм dV рідини яка витікає за час dt :

$$dV = Sv dt = Sk \sqrt{2gh} dt.$$

З іншого боку, рівень рідини понизився на dh , тому

$$dV = -\pi R^2 dh \text{ (див. рис. 1).}$$

Прирівнюючи елементарні об'єми, дістанемо диференціальне рівняння:

$$Sk \sqrt{2gh} dt = -\pi R^2 dh,$$

$$\text{звідки } dt = -\frac{\pi R^2}{Sk \sqrt{2g}} \frac{dh}{\sqrt{h}}.$$

Інтегруючи дане диференціальне рівняння, маємо:

$$t = -\frac{2\pi R^2}{Sk \sqrt{2g}} \sqrt{h} + c.$$

Рис.1.

$$\text{З умови } h(0) = H \text{ знаходимо сталу } c : c = \frac{2\pi R^2}{Sk \sqrt{2g}} \sqrt{H}, \text{ тому}$$



$$t = \frac{2\pi R^2}{Sk\sqrt{2g}} (\sqrt{H} - \sqrt{h}).$$

Ця формула виражає залежність часу t витікання рідини з резервуару через отвір у дні від рівня h рідини в резервуарі.

Час t_0 , за який витікає вся рідина знайдемо з умови $h = 0$:

$$t_0 = \frac{2\pi R^2}{Sk\sqrt{2g}} \sqrt{H} = \frac{\pi R^2}{kS} \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Залежність рівня h рідини в резервуарі від часу t знаходять з формули:

$$h = \left(\sqrt{H} - \frac{Sk\sqrt{2g}}{2\pi R^2} t \right)^2. \quad \blacksquare$$

Приклад 11.(Про охолодження тіла). Нагріте до температури T_0 тіло помістили в середовище, температура якого стала і дорівнює T_1 , причому $T_1 < T_0$. Знайти залежність температури тіла від часу t .

☐дно із законом Ньютона, швидкість охолодження тіла пропорційна різниці між температурою тіла і температурою навколишнього середовища.

В момент часу $t = 0$ температура тіла дорівнює $T(0) = T_0$, а в будь-який момент часу $t \neq 0$ температура T тіла дорівнює $T(t)$. За

умовою задачі маємо, що швидкість $\frac{dT}{dt}$ зміни температури тіла:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_1),$$

де $k > 0$ - коефіцієнт пропорційності. Знак мінус вказує на зменшення температури. Відокремлюємо змінні та інтегруємо:

$$\begin{aligned} \int \frac{dT}{T - T_1} &= -k \int dt + \ln c, \Rightarrow \ln |T - T_1| - \ln c = -kt, \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln \left| \frac{T - T_1}{c} \right| &= -kt, \Rightarrow T - T_1 = c e^{-kt} \Rightarrow T = T_1 + c e^{-kt}. \end{aligned}$$

Оскільки при $t = 0$ температура T тіла дорівнює T_0 , то із цієї



умови знаходимо значення сталої c :

$$T_0 = T_1 + c \Rightarrow c = T_0 - T_1.$$

Таким чином, залежність температури T тіла від часу t виражається формулою:

$$T = T_1 + (T_0 - T_1) e^{-kt}. \quad \blacksquare$$

Приклад 12.(Про розчин солі). У резервуарі знаходиться a літрів водного розчину солі, причому в розчині міститься b кг солі. З деякого моменту часу починає неперервно подаватися в резервуар m літрів за секунду чистої води і одночасно витікає з резервуару щосекунди n літрів розчину ($m > n$). При цьому рідина неперервно перемішується. Як змінюється з часом кількість солі в резервуарі?

☐ *Концентрацією c даної речовини називається її кількість, яка міститься в одиниці об'єму. Якщо концентрація рівномірна, то кількість речовини в об'ємі V дорівнює cV .*

Нехай $x = x(t)$ - кількість солі, яка залишилася в розчині після того, як розпочався процес зміни її концентрації в резервуарі, тобто через t секунд від початку процесу. Кількість суміші в резервуарі буде $a + mt - nt = a + (m - n)t$, тому концентрація:

$$c = \frac{x}{a + (m - n)t}.$$

За час dt з резервуару витікає $n dt$ літрів розчину, який містить $cn dt$ кг солі. Тому величина dx кількості солі в резервуарі задовольняє рівняння $-dx = c n dt$, або $-dx = \frac{x n dt}{a + (m - n)t}$.

Знак мінус вказує на зменшення кількості солі в розчині з часом. Відокремлюючи змінні та інтегруючи, дістанемо:

$$-\frac{dx}{x} = \frac{n dt}{a + (m - n)t} \Rightarrow -\frac{dx}{x} = \frac{n}{m - n} \cdot \frac{(m - n) dt}{a + (m - n)t} \Rightarrow$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\frac{n}{m - n} \int \frac{d(a + (m - n)t)}{a + (m - n)t} + \ln |c_1| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln |x| = -\frac{n}{m - n} \ln |a + (m - n)t| + \ln |c_1| \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \ln |x| = \ln \left| \frac{c_1}{(a + (m-n)t)^{\frac{n}{m-n}}} \right| \Rightarrow x(t) = \frac{c_1}{(a + (m-n)t)^{\frac{n}{m-n}}}.$$

Сталу c_1 визначимо з умови $x(0) = b$:

$$b = \frac{c_1}{a^{\frac{n}{m-n}}} \Rightarrow c_1 = b a^{\frac{n}{m-n}}.$$

Отже, кількість солі в резервуарі змінюється за законом:

$$x(t) = b \left(\frac{a}{a + (m-n)t} \right)^{\frac{n}{m-n}}.$$



Приклад 13.(Про швидкість човна). Моторний човен у спокійній воді рухається з швидкістю $v_0 = 20 \text{ м/с}$. Визначити швидкість човна через 20 хвилин після зупинки двигуна, якщо за 40 секунд вона зменшилася до величини $v_1 = 8 \text{ м/с}$. Опір води пропорційний швидкості руху човна.

☐ Нехай швидкість човна в момент часу t дорівнює v . Сила опору води, що діє на човен $F = -k v$.

За другим законом Ньютона, $F = m a = m \frac{dv}{dt}$, тому рівняння

руху човна матиме вигляд: $m \frac{dv}{dt} = -k v$, або $\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m} v$.

Отримали диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними, загальний розв'язок якого буде таким:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{v} &= -\frac{k}{m} dt, \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} \int dt, \Rightarrow \ln |v| = -\frac{k}{m} t + \ln |c|, \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln \left| \frac{v}{c} \right| = -\frac{k}{m} t \Rightarrow v(t) = c e^{-\frac{k}{m} t}. \end{aligned}$$

Сталу c знайдемо з початкової умови: $v_0 = 20 \text{ м/с}$ при $t = 0$:

$$20 = c e^{-\frac{k}{m} \cdot 0}, \Rightarrow c = 20.$$

Таким чином, швидкість моторного човна після зупинки двигуна



визначається за формулою:

$$v(t) = 20 e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Знайдемо значення сталої $e^{-\frac{k}{m}}$. Для цього скористаємося тим, що за час $t = 40 \text{ с} = \frac{1}{90} \text{ хв}$ швидкість човна стала рівною

$$v = v_1 = 8 \text{ м/с} : 8 = 20 e^{-\frac{k}{m} \cdot \frac{1}{90}}, \Rightarrow e^{-\frac{k}{m}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{90}.$$

Знайдемо швидкість човна через $t = 2 \text{ хв} = \frac{1}{30} \text{ год}$. після зупинки двигуна:

$$v\left(\frac{1}{30}\right) = 20 \left(\left(\frac{2}{5}\right)^{90}\right)^{\frac{1}{30}} = 20 \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{160}{125} = \frac{32}{25} = 1,28 \text{ м/с}.$$

Приклад 14. (Геометрична задача) Знайти криві, в яких відрізок дотичної, що знаходиться між координатними осями, в точці дотику поділяється навпіл.

□ Нехай шукана крива $L: y = f(x)$ має вигляд, як показано на рис. 2. Візьмемо на кривій довільну точку $M(x, y)$ і в цій точці проведемо дотичну AB . (X, Y) - довільна точка дотичної до цієї кривої. Запишемо рівняння дотичної, проведеної до цієї кривої в точці M : $Y - y = y'(X - x)$.

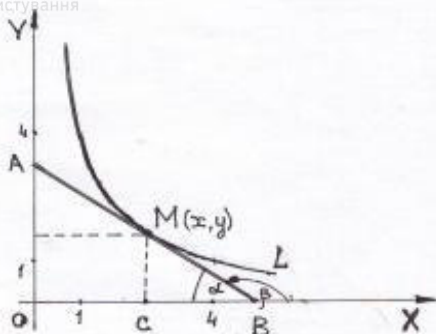


Рис. 2

Оскільки за умовою $AM = MB$, то і $OC = CB$, звідки $OB = 2OC$, тобто абсциса X точки B дорівнює подвоєній абсцисі x точки C : $X = 2x$. У точці B дотична перетинає вісь Ox , тому з рівняння дотичної при $Y = 0$ знайдемо абсцису X точки B :

$$-y = y'(X - x), \Rightarrow X - x = \frac{-y}{y'}, \Rightarrow X = x - \frac{y}{y'}.$$

Враховуючи рівність $X = 2x$, дістанемо рівняння: $-\frac{y}{y'} = x$.

Відокремлюємо змінні, інтегруємо це рівняння та знаходимо загальний розв'язок:

$$-\frac{y dx}{dy} = x, \Rightarrow -\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \Rightarrow -\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y}, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\ln|x| = \ln|y| - \ln|C|, \Rightarrow \ln|y| = \ln\left|\frac{C}{x}\right| \Rightarrow y = \frac{C}{x}.$$

Отже, шуканими кривими є сім'я гіпербол, що залежить від одного параметра C .

Отримати диференціальне рівняння цієї задачі можна ще й з таких міркувань: згідно з умови задачі, відрізок $CB = x$. Тому з прямокутного трикутника MBC маємо

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(180^\circ - \beta) = -\operatorname{tg} \beta.$$



Враховуючи те, що $\operatorname{tg} \beta = y'$, дістанемо диференціальне рівняння

даної задачі: $y' = -\frac{y}{x}$.

Щоб дістати окрему гіперболу, треба задати початкову умову. За початкову умову, в даному випадку, візьмемо точку (x_0, y_0) , через яку проходить шукана крива. Якщо в умові задачі додати, що крива проходить через точку $(1, 4)$, то, підставивши в загальний розв'язок координати цієї точки, знаходимо $C = 4$. Отже, гіпербола

$$y = \frac{4}{x}$$

і є тою кривою, що проходить через точку $(1, 4)$. 

Варіант 1

Знайти загальні інтеграли, або загальні розв'язки, або частинні розв'язки диференціальних рівнянь:

1. $4x dx - 3y dy = 3x^2 y dy - 2x y^2 dx$.

2. $(x^2 y - x^2) y' = y^2 + x y^2$, $y(1) = 2$.

3. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 4 \frac{y}{x} + 2$.

4. $(4 - x^2) y' + x y = 4$.

5. $x y' - y = x^3$,

$y(1) = 0$.

6. $x y'' = y' + x \sin \frac{y'}{x}$.

7. $y'' y^3 + 1 = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

8. $y'' - 4y' + 29y = 0$.

9. $y'' - 8y' + 15y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -4$.

10. $y'' - y = 7x - 3$, $y(0) = 6$, $y'(0) = 0$.

11. $y'' - y' - 2y = e^{-2x}$.

12. $y'' - 2y' - 8y = 16x^2 + 2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$.

Розв'язати системи диференціальних рівнянь:



$$13. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases} \quad 14. \begin{cases} x' = x - 2y, & x(0) = 1, \\ y' = 3x + 6y, & y(0) = -1 \end{cases}.$$

15. Швидкість охолодження двигуна в повітрі пропорційна різниці між температурою двигуна та температурою повітря. Температура повітря 20°C . Двигун протягом 20 хв. охолоджується від 100°C до 60°C . Знайти залежність температури двигуна від часу. Через який час температура двигуна знизиться до 30°C ? (див. [4], с. 149, задача 35).

16. Скласти рівняння лінії, що проходить через точку $A(1;0)$ і має дотичну, кутовий коефіцієнт якої в кожній точці дорівнює 2. (див.[6], с. 381, задача 60).

Варіант 2

Знайти загальні інтеграли, або загальні розв'язки, або частинні розв'язки диференціальних рівнянь:

$$1. x\sqrt{1+y^2} + y y' \sqrt{1+x^2} = 0.$$

$$2. (1+e^x)y' = e^x y, \quad y(0) = 4.$$

$$3. x y' = y(\ln y - \ln x) \quad 4. y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^3 x}.$$

$$5. x^2 + x y' = y, \quad y(1) = 0.$$

$$6. x \ln x y'' = y'.$$

$$7. 2 y y'' = 1 + (y')^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

$$8. y'' - 4y' + 4y = 0.$$

$$9. y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1.$$

$$10. y'' + 16y = x + 32, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{1}{16}.$$

$$11. 4 y'' + 8 y' = x \sin x.$$

$$12. y'' - y' - 2y = 4e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Розв'язати системи диференціальних рівнянь:



13.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = x + t^2. \end{cases}$$

14.
$$\begin{cases} x' = 2x - y, & x(0) = 2, \\ y' = 3x - 2y, & y(0) = 4. \end{cases}$$

15. За який час вода витече через отвір площею $0,5 \text{ см}^2$ на дні конічної лінійки висотою 10 см з кутом при вершині $\alpha = 60^\circ$? (див. [4], с. 149, задача 35).

16. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку $A(0;3)$, якщо кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної у будь-якої її точці менший за ординату точки дотику на 2 одиниці. Побудуйте знайдену криву.

Варіант 3

Знайти загальні інтеграли, або загальні розв'язки, або частинні розв'язки диференціальних рівнянь:

1. $\sqrt{4+y^2} dx - y dy = x^2 y dy.$

2. $y' = (2y+1) \operatorname{ctg} x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}.$

3. $y' = \frac{x+y}{x-y}.$

4. $y' - \frac{y}{x} = x.$

5. $y' + y \cos x = 0,5 \sin 2x, \quad y(0) = 0.$

6. $2x y' y'' = (y')^2 - 1.$

7. $2y y'' = (y')^2, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 2.$

8. $y'' - 6y' + 34y = 0.$

9. $y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 5.$

10. $y'' + 5y' - 14y = 14x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

11. $y'' + y = 4e^x.$

12. $y'' + 4y = 3 \cos x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

Розв'язати системи диференціальних рівнянь:



13.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x. \end{cases}$$

14.
$$\begin{cases} x' = 4x + 2y, & x(0) = -3, \\ y' = -x + y, & y(0) = 2. \end{cases}$$

15. Чан циліндричної форми з вертикальною віссю заввишки 6 см і діаметром 4 см має отвір в дні радіуса $1/12$ м. Знайти залежність рівня води від часу t (див. [5], с. 43, задача 1.46).

16. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку $A(2; -4)$ у якій відрізок, що відтинає дотична на осі Oy від початку координат дорівнює кубу абсциси точки дотику. Побудуйте знайдену криву.

Варіант 4

Знайти загальні інтеграли, або загальні розв'язки, або частинні розв'язки диференціальних рівнянь:

1. $y^{-3} \ln \ln x dx + x e^{y^2} dy = 0.$

2. $y'(x^2 + 1) = 2xy, \quad y(1) = 4.$

3. $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$

4. $y' + \frac{y}{x} = \frac{e^{-x}}{x}.$

5. $y' \cos x - y \sin x = 2x,$

$y(0) = 0$

6. $xy'' = y' \ln \left(\frac{y'}{x} \right).$

7. $y''y^3 = 1.$

$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

8. $y'' - 8y' + 25y = 0.$

9. $y'' - 7y' = 0,$

$y(0) = 3, \quad y'(0) = 7$

10. $y'' - 8y' + 15y = 30x - 1,$

$y(0) = 4,$

$y'(0) = 9$

11. $y'' + 5y' + 6y = 10(1 - x)e^{-2x}.$

12. $y'' - 2y' = 2x + 1,$

$y(0) = 1,$

$y'(0) = 1.$

Розв'язати системи диференціальних рівнянь.



13.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases}$$

14.
$$\begin{cases} x' = x + y, & x(0) = 3, \\ y' = 3x - y. & y(0) = -1. \end{cases}$$

15. Визначити шлях S , пройдений тілом за час t , якщо його швидкість пропорційна пройденому шляху, і якщо тіло проходить 100м за 10с, а 200м за 15 с (див. [6], с. 382, задача 67).

16. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку $A(2;4)$, якщо кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій точці кривої у два рази менший за кутовий коефіцієнт прямої, що з'єднує цю точку з початком координат. Побудуйте знайдену криву.

Варіант 5

Знайти загальні інтеграли, або загальні розв'язки, або частинні розв'язки диференціальних рівнянь:

1. $(1+x^2)y' + y\sqrt{1+x^2} = xy.$

2. $y' \sin x = y \cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

3. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y.$ 4. $xy' + y = xy^2 \ln x.$

5. $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x, \quad y(-1) = 1,5.$

6. $y'' = \sqrt{1 - (y')^2}.$

7. $xy'' - y' - x^2 = 0, \quad y(1) = 4/3, \quad y'(1) = 3.$

8. $y'' - 4y' + 8y = 0.$

9. $y'' - 2y' + y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 7.$

10. $y'' + 9y' + 20y = 20x + 29, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 8.$

11. $y'' + 2y' = 4e^x (\sin x + \cos x).$

12. $y'' - y' - 6y = 6x^2 - 4x - 3, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 5.$



Розв'язати системи диференціальних рівнянь:

$$13. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases} \quad 14. \begin{cases} x' = 3x + 8y, & x(0) = 6, \\ y' = -x - 3y. & y(0) = -2. \end{cases}$$

15. Цегляна стіна ($k = 0,0015$) має 30см товщини. Знайти залежність температури стіни від віддалі точки до зовнішнього краю стіни, якщо температура на внутрішньому боці дорівнює 20^0C , а на зовнішньому боці - 0^0C (див. [7], с. 31, задача 111).

16. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку $A(1; -1)$, якщо кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій точці кривої дорівнює квадрату ординати точки дотику. Побудуйте знайдену криву.





Варіант 6

Знайти загальні інтеграли, або загальні розв'язки, або частинні розв'язки диференціальних рівнянь:

1. $x\sqrt{3+y^2}dx - y\sqrt{2+x^2}dy = 0$.

2. $xy(1+x^2)dy = (1+y^2)dx$, $y(2) = 2$.

3. $xy' = y - x e^{\frac{y}{x}}$; 4. $y' - \frac{3y}{x} = x$.

5. $y' - \frac{1}{x+1}y = e^x(x+1)$, $y(0) = 1$.

6. $y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}$.

7. $2y'' - 3y'^2 = 0$, $y(-2) = 1$, $y'(-2) = 1$.

8. $y'' - 4y' + 5y = 0$.

9. $y'' + 9y = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 3$.

10. $y'' - 11y' + 24y = 48x + 22$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$.

11. $y'' + 2y' + y = -2$;

12. $y'' - 4y' + 3y = 8e^{5x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 7$.

Розв'язати системи диференціальних рівнянь:

13. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} x' = -3x - y, \\ y' = x - y, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = -1. \end{cases}$

15. Встановлений вертикально чан циліндричної форми має отвір у дні. Половина води з повного чана витікає за 5 хвилин. За який час витече вся вода?(див. [5], с. 42, задача 1.45)

16. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку $A(1;2)$, якщо кутовий коефіцієнт дотичної у будь-якій точці кривої на оди-ницю більший за подвоєне значення абсциси точки дотику. Побудуйте знайдену криву.



Варіант 7

Знайти загальні інтеграли, або загальні розв'язки, або частинні розв'язки диференціальних рівнянь:

1. $(e^{5x} + 5) dy + ye^{5x} dx = 0.$

2. $xy' + y \ln y = 0, y(1) = e.$

3. $(y^2 - 2xy) dx + x^2 dy = 0.$ 4. $x^2 y' + xy + 1 = 0.$

5. $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2, y(1) = 3.$

6. $2y y'' - (y')^2 = 1.$

7. $y'' = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}, y(0) = 0, y'(0) = 0.$

8. $y'' - 4y' + 20y = 0.$

9. $y'' - 6y' + 5y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 7.$

10. $y'' + y' - 6y = -18x - 3, y(0) = 10, y'(0) = -4.$

11. $y'' - y' = e^x \sin x.$

12. $y'' - 2y' = 6x^2 - 6x - 2, y(0) = 1, y'(0) = 1.$

Розв'язати системи диференціальних рівнянь:

13. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + y, \\ \frac{dy}{dt} = y - 2x. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} x' = x + y, & x(0) = 1, \\ y' = 3x - y. & y(0) = 2. \end{cases}$

15. За який час температура тіла нагрітого до 100°C , знизиться до 25°C , якщо температура приміщення дорівнює 20°C і за перші 10 хвилин тіло охолодилося до 60°C (див. [4], с. 149, задача 35).

16. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку $A(1;2)$ у якій відрізок дотичної, що лежить між точкою дотику і віссю Ox ділиться навпіл в точці перетину з віссю Oy . Побудуйте знайдену



Варіант 8

Знайти загальні інтеграли або загальні розв'язки, або частинні розв'язки диференціальних рівнянь:

1. $y' y \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = 0$.

2. $(1+x^2)y' = -x y$, $y(0)=1$.

3. $x y' = y \ln \frac{y}{x}$.

4. $y' + \frac{y}{x} = \sin x$.

5. $y' = \frac{x y}{2(1-x^2)} + x y^2$, $y(0)=1$.

6. $3 y'' = (1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}$;

7. $x y'' + y' = 4 x^3$, $y(1)=0,25$, $y'(1)=2$.

8. $y'' - 4y' + 13y = 0$.

9. $y'' - 5y' = 0$, $y(0)=4$, $y'(0)=5$.

10. $y'' - 2y' - 32y = 32x - 30$, $y(0)=9$, $y'(0)=13$.

11. $y'' + 4y' + 5y = 10 e^{-2x}$.

12. $y'' + 16y' = 7 \cos 3x$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

Розв'язати системи диференціальних рівнянь:

13. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y - x + 1, \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 2y. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x' = 2x + 2y, & x(0)=2, \\ y' = x + 3y, & y(0)=0. \end{cases}$

15. Човен уповільнює свій рух під дією опору води, який пропорційний швидкості човна. Початкова швидкість 2 м/с, а через 4 с його швидкість буде 1 м/с. Через який час швидкість зменшиться до 0,25 м/с? Який шлях може пройти човен до зупинки?(див. [5], с. 35, задача 1.36).

16. Знайти криві, для яких відрізок, що відтинає дотична на осі Ox від початку координат, пропорційний квадратові абсциси точки



Варіант 9

Знайти загальні інтеграли, або загальні розв'язки, або частинні розв'язки диференціальних рівнянь:

1. $6x dx - 6y dy = 3x^2 y dy - 2x y^2 dx$.

2. $y' \operatorname{ctg} x + y = 2$, $y(0) = -1$.

3. $x y' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$.

4. $y' + 2xy = 3x^2 e^{-x^2}$.

5. $y' + \frac{y}{2x} = x^2$, $y(1) = 1$.

6. $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$

7. $x y'' - y' = x^2 \cos x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

8. $y'' - 2y' + 17y = 0$.

9. $y'' + 7y' + 12y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

10. $y'' + 6y' + 9y = 9x + 24$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$.

11. $y'' - y = 2e^x - x^2$.

12. $y'' - 2y' + y = e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

Розв'язати системи диференціальних рівнянь:

13. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x' = 2x + y, & x(0) = 0, \\ y' = 3x + 4y, & y(0) = 3. \end{cases}$

15. Швидкість витікання води із посудини через малий отвір визначається формулою $v = 0,6 \sqrt{2gh}$, де h – висота рівня води над отвором, $g \approx 10 \text{ м/с}^2$. За який час витече вся вода із циліндричної бочки діаметром 1м і висотою 1,5 м через отвір в дні діаметром 0,05м?

16. Скласти рівняння кривої, у якої кутовий коефіцієнт дотичної в довільній точці пропорційні абсцисі точки дотику (див. [4], с. 148, задача 25).



Варіант 10

Знайти загальні інтеграли, або загальні розв'язки, або частинні розв'язки диференціальних рівнянь:

1. $x dx + y e^{x+y} dy = 0$.

2. $y' \arctg x = \frac{y}{1+x^2}$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$.

3. $y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$.

4. $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = x^2$.

5. $y' + xy = xy^3$, $y(0) = 2$.

6. $xy'' = y' + x \tg\left(\frac{y'}{x}\right)$.

7. $y'' = x e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

8. $y'' - 2y' + 26y = 0$.

9. $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

10. $y'' + 2y' - 8y = 16x + 4$, $y(0) = 6$, $y'(0) = -6$.

11. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$.

12. $y'' - 3y' - 4y = 17 \sin x$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 0$.

Розв'язати системи диференціальних рівнянь:

13. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} x' = x - y, & x(0) = 2, \\ y' = 4x - 3y, & y(0) = 2. \end{cases}$

15. Згідно закону Ньютона швидкість охолодження тіла пропорційна різниці між температурою тіла T_0 . За скільки часу тіло, яке нагріте до 100°C охолоне до температури 25°C в кімнаті з температурою 20°C , якщо до 60°C воно охолоджується за 10 хвилин. (див. [4], с. 149, задача 35).

16. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку $A(2;3)$, а відрізок будь-якої дотичної до кривої, що лежить між осями коор-

**Варіант 11**

Знайти загальні інтеграли, або загальні розв'язки, або частинні розв'язки диференціальних рівнянь:

1. $y(4 + e^x)dy - e^x dx = 0.$

2. $(1 - y)xy' = (1 + x)y, y(1) = 1.$

3. $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}.$

4. $2x^3 y' = y(2x^2 - y^2).$

5. $y' + y \cos x = e^{-\sin x}, y(0) = 1.$

6. $yy'' - (y')^2 = 0.$

7. $y'' - e^y y' = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1.$

8. $y'' - 6y' + 10y = 0.$

9. $y'' + 2y' = 0, y(0) = 2, y'(0) = -2.$

10. $y'' + 3y' + 2y = 14x + 1, y(0) = -7, y'(0) = 2.$

11. $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}.$

12. $y'' + y = 2 \cos x, y(0) = 0, y'(0) = 1.$

Розв'язати системи диференціальних рівнянь:

13.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 1. \end{cases}$$

14.
$$\begin{cases} x' = x + 5y, & x(0) = 0, \\ y' = -x - 3y, & y(0) = 1. \end{cases}$$

15. Рух пароплава уповільнюється силою опору води, пропорційною швидкості пароплава V . Початкова швидкість пароплава

$V_0 = 10$ м/с, через 5 с падає до 8 м/с. Через який час швидкість зменшиться до 1 м/с?(див. [5], с. 35, задача 1.36).

16. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку $A(2;1)$, і для якої відрізок, що відтинає дотична на осі Ox від початку коор-



динат, дорівнює подвоєній абсцисі точки дотику. Побудуйте знайдену криву.

Варіант 12

Знайти загальні інтеграли, або загальні розв'язки, або частинні розв'язки диференціальних рівнянь:

1. $(x - y^2 x) dx + (y - x^2 y) dy = 0$.

2. $(1 + e^x) y' = e^x \cos^2 y$, $y(0) = \frac{\pi}{4}$.

3. $(y + \sqrt{xy}) dx = x dy$.

4. $x^2 y' + x y = 1$.

5. $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x} e^x$, $y(1) = e$.

6. $y y'' + 4 = (y')^2$.

7. $y'' - y' \operatorname{ctg} x = \sin x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

8. $y'' - 6y' + 13y = 0$.

9. $y'' + 7y' - 30y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -17$.

10. $y'' - 9y' + 18y = 36x$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 14$.

11. $y'' - 3y' + 2y = x \cos x$.

12. $y'' + y = -2x + 2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Розв'язати системи диференціальних рівнянь:

13. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = x. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = x + 2y, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = 3. \end{cases}$

15. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю, пропорційною часу руху. Знайти рівняння руху тіла, якщо від початку руху воно пройшло 20 м за 10 с, а 35 м - за 20 с. Який шлях пройде тіло за 1хв. 40с. (див. [6], с. 382, задача 68)?

16. Крива $y = f(x)$ проходить через точку $(0;1)$ і в кожній її точці тангенс кута нахилу дотичної до цієї кривої дорівнює под.-



воєному добутку координат точки дотику. Знайти рівняння кривої та побудувати її (див. [12], с. 40, задача 1.26).

Варіант 13

Знайти загальні інтеграли, або загальні розв'язки, або частинні розв'язки диференціальних рівнянь:

1. $2x dx - 2y dy = x^2 y dy - 2xy^2 dx$.

2. $y(1+x^2)y' = x(1+y^2)$, $y(0) = 0$.

3. $(4x-3y)dx + (2y-3x)dy = 0$.

4. $y' + \frac{y}{x} = e^x$.

5. $xy' + y = y^2$, $y(1) = \frac{1}{2}$.

6. $y'' \cos y + (y')^2 \sin y = y'$.

7. $2(y')^2 = (y-1)y''$, $y(0) = 0$,

8. $y'' - 6y' + 18y = 0$.

9. $y'' - 6y' = 0$,

$y(0) = 1$, $y'(0) = 12$.

10. $y'' - 3y' - 10y = 20x - 4$, $y(0) = 8$, $y'(0) = 5$.

11. $y'' + y = 4xe^x$;

12. $y'' - 5y' + 6y = 2 \sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Розв'язати системи диференціальних рівнянь:

13. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = t. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = x + 2y, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

15. Знайти форму дзеркала, яке б усі промені, що виходять із однієї і тієї ж точки О, відбивало паралельно заданому напрямку (див. [4], с. 151, задача 56).

16. Матеріальна точка рухається вздовж прямої із швидкістю, яка обернено пропорційна пройденого шляху. У початковий момент руху точка знаходилася на відстані 4 м від початку відліку шляху і



$v_0 = 10 \text{ м/с}$. Знайти пройдений шлях і швидкість точки через 16 с після початку руху (див. [8], с. 211, задача 4).

Варіант 14

Знайти загальні інтеграли, або загальні розв'язки, або частинні розв'язки диференціальних рівнянь:

1. $x\sqrt{4+y^2} dx + y\sqrt{1+x^2} dy = 0$.

2. $y' = (2y-1)\operatorname{ctg} x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

3. $(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0$, 4. $y' + 2y = 4x$.

5. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}$, $y(1) = 4$.

6. $y'' = xe^x$.

7. $y''(x^2 + 1) - 2xy' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

8. $y'' - 6y' + 25y = 0$.

9. $2y'' + 3y' - 9y = 0$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 3$.

10. $y'' - 2y' + 8y = 48x + 4$, $y(0) = 10$, $y'(0) = 8$.

11. $y'' + y = x$.

12. $y'' - 5y' + 6y = 2e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Розв'язати системи диференціальних рівнянь:

13. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + 8t, \\ \frac{dy}{dt} = 5x - y. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} x' = x - y, & x(0) = 0, \\ y' = x + 3y, & y(0) = 1. \end{cases}$

15. Вода у відкритому резервуарі спочатку мала температуру 70°C , через 10 хвилин температура води стала 65°C . Температура середовища, що оточує резервуар дорівнює 15°C . Знайти температуру води в резервуарі через 30 хвилин від початкового моменту? (див. [6], с. 385, задача 77).

16. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку $(4; 4)$, а відрізок будь-якої її дотичної, що лежить між точкою дотику і

**Варіант 15**

Знайти загальні інтеграли, або загальні розв'язки, або частинні розв'язки диференціальних рівнянь:

1. $\frac{y dx}{\sqrt{1+x}} + \frac{x dy}{\sqrt{1-y}} = 0.$

2. $(1+x^2 y') = \cos^2 y, y(0) = \frac{\pi}{4}.$

3. $y^2 + x^2 y' = x y y', 4. x y' + y = x \cos x.$

5. $y' + \frac{2}{x} y = x^3, y(1) = -\frac{5}{6}$

6. $xy'' + y' - x^2 - 1 = 0.$

7. $y y'' = (y')^2, y(0) = 1, y'(0) = 2.$

8. $y'' - 2y' + 10y = 0.$

9. $6y'' - 13y' - 15y = 0, y(0) = 8, y'(0) = 1.$

10. $y'' - 4y' - 5y = 15x - 3, y(0) = 1, y'(0) = -25.$

11. $y'' - 9y = e^{3x} \cos x.$

12. $y'' - 3y' = 3x, y(0) = 1, y'(0) = -2.$

Розв'язати системи диференціальних рівнянь:

13. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 2t. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} x' = y + e^{3t}, & x(0) = 2, \\ y' = x + 5e^{3t}, & y(0) = 3. \end{cases}$

15. Вода у відкритому резервуарі мала температуру 70°C . Через 10 хвилин температура води стала 65°C . Температура середовища, що оточує резервуар дорівнює 15°C . Через який час температура води в резервуарі буде 20°C ? (див. [6], с. 385, задача 77)

16. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку $A(2;4)$, якщо кутовий коефіцієнт дотичної у будь-якій точці кривої у три



рази більший за кутовий коефіцієнт прямої, що з'єднує цю точку з початком координат. Побудуйте знайдену криву.

Варіант 16

Знайти загальні інтеграли, або загальні розв'язки, або частинні розв'язки диференціальних рівнянь:

1. $x(1+y^2) + (1+y^3)y' = 0$.

2. $\frac{x dx}{1+y} = \frac{y dy}{1+x}, y(0)=1$.

3. $(x+s)dx - (x-s)ds = 0$. 4. $tx' + (1+t)x = 3t^2 e^{-t}$.

5. $y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x, y(0) = -1$.

6. $y'' - 2y' \operatorname{tg} x = \sin x$.

7. $(y-2)y'' = 2(y')^2, y(0)=3, y'(0)=1$.

8. $y'' + 4y' + 29y = 0$.

9. $3y'' - y' - 10y = 0, y(0)=10, y'(0)=-2$.

10. $y'' - 2y' - 8y = 31x + 30, y(0)=5, y'(0)=10$.

11. $y'' + 5y' + 6y = 12 \cos 2x$.

12. $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}, y(0)=1, y'(0)=4$.

Розв'язати системи диференціальних рівнянь:

13. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 6y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 2y. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} x' = y + t^2, & x(0)=2, \\ y' = 4x + 2t, & y(0)=3. \end{cases}$

15. Знайти рівняння руху матеріальної точки, якщо прискорення задається формулою: $a = 1,2t$ і, якщо при $t = 0$ віддаль $S = 0$, а при $t = 5$ віддаль $S = 20$.

16. Скласти рівняння кривої, що проходить через точку $(0; -2)$, а



кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій її точці дорівнює координаті цієї точки, збільшеній на три одиниці (див. [4], с.149, задача 26).

Варіант 17

Знайти загальні інтеграли, або загальні розв'язки, або частинні розв'язки диференціальних рівнянь:

1. $e^x(1+t^2)x' - 2t(1+e^x) = 0$.

2. $y' = \frac{y \ln y}{\sin x}$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

3. $(x^2 + y^2)dx - x y dy = 0$. 4. $s' - s \operatorname{tg} x = -s^2 \cos x$.

5. $(1+x^2)y' + y = \operatorname{arctg} x$, $y(0) = 1$.

6. $x y'' + y' = x^3$.

7. $2 y y'' = 3 + (y')^2$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$.

8. $y'' + 4y' + 40y = 0$.

9. $5y'' + 13y' - 6y = 0$, $y(0) = 7$, $y'(0) = -4$.

10. $y'' + y' - 12y = 12x + 11$, $y(0) = 7$, $y'(0) = 9$.

11. $y'' + 4y = e^{-2x}$.

12. $y'' + y' = 6x^2 - 7$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 7$.

Розв'язати системи диференціальних рівнянь:

13. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 8x + y. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} x' = x - 2y, \\ y' = 3x + 6y, \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = -1$.

15. Моторний човен масою 3000 кг рухається зі швидкістю $v = 10 \text{ м/с}$. Опір води пропорційний швидкості і дорівнює 600 Н при швидкості 1 м/с. Скільки часу пройде після зупинки двигуна до того моменту, коли його швидкість стане рівною 2 м/с? (див. [13], с. 341, задача 2967).



16. Скласти рівняння лінії, що проходить через точку $A(1;0)$ і має дотичну, кутовий коефіцієнт якої в кожній точці дорівнює 2.

Варіант 18

Знайти загальні інтеграли, або загальні розв'язки, або частинні розв'язки диференціальних рівнянь:

1. $t\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+t^2} x' = 0.$

2. $(1+x^2)y' = 1+y^2, y(0)=1.$

3. $x \ln \frac{x}{y} dy - y dx = 0.$

4. $s' + s \cos x = \sin x \cos x.$

5. $y'\sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x, y(0)=-1.$

6. $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x.$

7. $y'' = 3\sqrt{1+y}, y(2)=0, y'(2)=2.$

8. $y'' + 6y' + 34y = 0.$

9. $2y'' + 3y' - 2y = 0, y(0)=3, y'(0)=0.$

10. $y'' - 9y' + 20y = 40x + 2, y(0)=1, y'(0)=1.$

11. $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}.$

12. $y'' - 4y' + 3y = e^{2x} \sin x, y(0)=0, y'(0)=\frac{3}{2}.$

Розв'язати системи диференціальних рівнянь:

13. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 5y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x' = x - 3y, & x(0)=1, \\ y' = x + 5y, & y(0)=-1. \end{cases}$

15. Прискорення локомотива, початкова швидкість якого дорівнює V_0 , прямопропорційне силі тяги F і обернено пропорційне масі поїзда m . Сила тяги локомотива $F(t) = b - kV(t)$, де $V(t)$ – швидкість локомотива в момент часу t . Величини b і k – сталі. Визначити залежність сили тяги локомотива



16. Знайти лінію, всі дотичні якої проходять через початок координат.

Варіант 19

Знайти загальні інтеграли, або загальні розв'язки, або частинні розв'язки диференціальних рівнянь:

1. $(1+x^2)y^3 + (1-y^2)x^3y' = 0$.

2. $(x^2y - x^2)y' = y^2 + xy^2, y(1) = 2$.

3. $2t^2 dx - (t^2 + x^2) dt = 0$. 4. $s' \cos x + s \sin x = 1$.

5. $y' + 2y \operatorname{tg} 2x = \sin 4x, y(0) = 0$.

6. $(1-x^2)y'' = xy'$.

7. $(y+1)^2 y'' = (y')^3, y(0) = 0, y'(0) = 1$.

8. $y'' + 8y' + 25y = 0$.

9. $4y'' - 5y' - 6y = 0, y(0) = 9, y'(0) = 7$.

10. $y'' + 3y' - 28y = 28x + 25, y(0) = 4, y'(0) = -14$.

11. $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3$.

12. $y'' + y = 4e^x, y(0) = 4, y'(0) = -3$.

Розв'язати системи диференціальних рівнянь:

13. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x - 6y, \\ \frac{dy}{dt} = -4x - 2y. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} x' = 2x + y + \cos t, & x(0) = 2, \\ y' = -x + 3\sin t, & y(0) = -4. \end{cases}$

15. Матеріальна точка рухається по прямій з швидкістю, обернено пропорційній пройденому шляху. В початковий момент руху точка знаходилася на віддалі 5 м від початкового відліку часу і мала швидкість $v_0 = 20 \text{ м/с}$. Визначити пройдений шлях через 10 с після початку руху (див. [5], с. 35, задача 1.35).



16. Знайти криву, що проходить через точку $A(1;0)$, для якої відрізок, що відтинає дотична на осі Oy від початку координат, дорівнює довжині радіус-вектора точки дотику кривої. Побудуйте знайдену криву

Варіант 20

Знайти загальні інтеграли, або загальні розв'язки, або частинні розв'язки диференціальних рівнянь:

1. $xy' - y' - xy = 0$.

2. $y' \sin x - y \cos x = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

3. $xe^{\frac{y}{x}} + y - xy' = 0$. **4.** $s' - \frac{xs}{x^2 - 1} = 1$.

5. $y' + y = -e^{2x} y^2$, $y(0) = 1$.

6. $xy'' - 2y' = 2x^4$, $y(1) = \frac{1}{5}$, $y'(1) = 4$.

7. $x \ln x y'' = y'$.

8. $y'' + 4y' + 8y = 0$.

9. $y'' - y' = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$.

10. $y'' - y' = 2 - 2x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

11. $y'' + 4y' - 12y = 8 \sin 2x$.

12. $y'' + 9y = 3 \cos 3x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

Розв'язати системи диференціальних рівнянь:

13.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 5y, \\ \frac{dy}{dt} = -7x - 3y. \end{cases}$$
 14.
$$\begin{cases} x' = y + e^t, & x(0) = 0, \\ y' = 4x + 2e^t, & y(0) = 0. \end{cases}$$

15. Матеріальна точка рухається по прямій з швидкістю, обернено пропорційній пройденому шляху. В початковий момент руху точка знаходиться на віддалі 5 м від початкового відліку часу і мала швидкість $V_0 = 20$ м/с. Визначити швидкість точки через 10 с після



початку руху (див. [5], с. 35, задача 1.35).

16. Знайти криву, що проходить через точку $A(2;0)$, а всі її нормалі проходять через точку $M_0(2;-3)$. Побудуйте знайдену криву.

(див. [3], с. 377, задача 1077).

Варіант 21

Знайти загальні інтеграли, або загальні розв'язки, або частинні розв'язки диференціальних рівнянь:

1. $y dx - dx + (x+1) dy = 0$.

2. $e^{-x} dy - (y^2 + 1) dx = 0$, $y(0) = 1$.

3. $y' = \frac{2y}{x} + 3$. **4.** $y' + 2xy = 2x e^{-x^2}$.

5. $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$, $y(0) = 0$.

6. $xy'' + y' = x^2 + 1$.

7. $y'' = e^{2y}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

8. $y'' + 4y' + 5y = 0$.

9. $3y'' + 2y' - y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

10. $y'' - 7y' + 6y = 12x + 4$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -19$.

11. $y'' - 2y' + 2y = 2 \cos x$.

12. $y'' - y = 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Розв'язати системи диференціальних рівнянь:

13. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 5y, \\ \frac{dy}{dt} = -4x - 4y. \end{cases}$ **14.** $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x, \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = 1$.

15. Тіло, температура якого 25°C поклали в термостат, в якому підтримується температура 0°C . За який час тіло охолodиться до



10° С, якщо за 20 хвилин воно охолоджується до 20° С?

16. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку $A(1;1)$ у якій відрізок, що відтинає дотична на осі ординат від початку координат дорівнює квадрату абсциси точки дотику. Побудуйте знайдену криву.

Варіант 22

Знайти загальні інтеграли, або загальні розв'язки, або частинні розв'язки диференціальних рівнянь:

1. $(1+x)y dx + (1-y)x dy = 0$.

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$, $y(0)=1$.

3. $(2x+y)dx + y dy = 0$.

4. $y' + \frac{y}{x} = \sin x + \cos x$.

5. $y' + xy = x^3$, $y(0)=-2$.

6. $x^2 y'' + x y' = 1$.

7. $y'' y^3 + 25 = 0$, $y(2)=-5$, $y'(2)=-1$.

8. $y'' + 4y' + 20y = 0$.

9. $2y'' - y' - y = 0$, $y(0)=6$, $y'(0)=0$

10. $y'' - 8y' - 9y = 18x - 2$, $y(0)=0$, $y'(0)=-40$.

11. $7y'' - y' = 14x$.

12. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$, $y(0)=2$, $y'(0)=8$.

Розв'язати системи диференціальних рівнянь:

13. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -5x - 3y. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + t^2, \\ \frac{dy}{dt} = x + e^t, \end{cases} \quad \begin{matrix} x(0)=1, \\ y(0)=1. \end{matrix}$

15. Прискорення прямолінійного руху матеріальної точки задано рівнянням $a = 6t - 4$. Знайдіть рівняння руху точки, якщо $S = 5$ і



16. Крива проходить через точку $A(1;2)$. Кожна дотична до цієї кривої перетинає пряму $y=1$ в точці з абсцисою рівною подвоєній абсцисі точки дотику. Знайдіть криву і побудуйте її. (див. [5], с. 40, задача 1.41).

Варіант 23

Знайти загальні інтеграли, або загальні розв'язки, або частинні розв'язки диференціальних рівнянь:

1. $x y' = y + 1$.

2. $2x(1+y^2)dx + y(1+x^2)dy = 0$, $y(1) = 0$.

3. $(x+y)dy + xdy = 0$. 4. $y' + y \cos x = \sin x \cos x$.

5. $y' + y \tan x = x \cos^2 x$, $y(0) = 1$.

6. $y'' = y'(1+(y')^2)$.

7. $y'' \tan x - y' = -\frac{1}{\sin x}$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

8. $y'' + 4y' + 13y = 0$.

9. $y'' + 4y' = 0$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 6$.

10. $y'' + y' - 30y = 30x - 31$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -2$

11. $y'' - 7y' = (x-1)^2$.

12. $y'' - 3y' + 2y = -4e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Розв'язати системи диференціальних рівнянь:

13. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 2y. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$

15. Матеріальна точка масою 1 кг рухається прямолінійно під дією сили, прямо пропорційної часові і обернено пропорційної швидкості. На початку руху $t=0$. На десятій секунді руху швидкість дорівнює 50 м/с, а сила дорівнює 40 Н. Якою буде



швидкість через хвилину після початку руху? (див. [7], с. 29, задача 98).

16. Знайти криву, яка проходить через точку $A(1;3)$. А кутовий коефіцієнт будь-якої її нормалі дорівнює квадрату абсциси точки дотику. Побудуйте знайдену криву.

Варіант 24

Знайти загальні інтеграли або загальні розв'язки, або частинні розв'язки диференціальних рівнянь:

1. $y' + 2x^2y' + 2xy - 2x = 0$.

2. $2x\sqrt{1+y^2}dx + e^{-x^2}dy = 0, y(0) = 0$.

3. $(x+4y)dx - xdy = 0$. 4. $y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x$.

5. $y' - 2y = e^x - x, y(0) = \frac{1}{4}$.

6. $y'' = \frac{1}{\sqrt{y}}$.

7. $y'' + \frac{y'}{x} = x, y(1) = 1, y'(1) = 1$.

8. $y'' + 2y' + 17y = 0$.

9. $y'' - 4y' = 0, y(0) = 4, y'(0) = -4$.

10. $y'' - 15y' + 56y = 56x - 15, y(0) = 0, y'(0) = 0$

11. $4y'' - y = x^3 - 24x$.

12. $y'' - 2y' = 2e^x, y(1) = -1, y'(1) = 0$.

Розв'язати системи диференціальних рівнянь:

13. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 2y, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$



15. Тіло рухається зі швидкістю $v = \frac{1}{t+2}$. Знайти рівняння руху

тіла, якщо $S = 0$ при $t = 0$.

16. Знайти криву, що проходить через точку $M_0(1; 2)$, авідрізок будь-якої її дотичної, що лежить між точкою одотику і віссю абсцис, ділиться віссю ординат навпіл. Побудуйте знайдену криву (див. [3], с. 365, задача 1067).

Варіант 25

Знайти загальні інтеграли або загальні розв'язки, або частинні розв'язки диференціальних рівнянь:

1. $(y+4)y' = x+2$.

2. $y dx + (\sqrt{xy} - \sqrt{x}) dy = 0$, $y(0) = 1$.

3. $(y + \sqrt{x^2 - y^2}) dx - x dy = 0$. 4. $xy' + y = y^2 \ln x$.

5. $xy' + y = x \cos x$, $y(\pi/2) = 1$.

6. $y'' = \sqrt{1 - (y')^2}$.

7. $xy'' + y' - x^2 = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$.

8. $y'' + 2y' + 26y = 0$.

9. $y'' + 8y' + 16y = 0$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 4$.

10. $y'' + 4y' - 5y = 10x - 8$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$.

11. $y'' - 6y' + 5y = 13e^{2x}$.

12. $y'' - 4y' + 13y = 26x + 5$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Розв'язати системи диференціальних рівнянь:

13. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -7x + 5y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 8y. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -5x - 8y, & x(0) = 0, \\ \frac{dy}{dt} = -3x - 3y, & y(0) = 0. \end{cases}$

15. В залі кубатурою $10\,800\text{ м}^3$ повітря містило після зборів $0,12\%$ вуглекислого газу CO_2 . Скільки метрів кубічних повітря, що містить $0,04\%$ CO_2 треба щохвилини подавати до зали, щоб через 10 хвилин



у ній було 0,06% CO₂? (див. [9], с. 74, задача 1.156).

16. Знайти криву, яка проходить через точку $(1;0)$, якщо відомо, що трикутник, утворений віссю Oy , дотичною до кривої в довільній її точці і радіусом-вектором точки дотику, рівнобедрений, причому основою його є відрізок дотичної від точки дотику до осі Oy . (див. [11], с. 432, задача 2)

Варіант 26

Знайти загальні інтеграли, або загальні розв'язки, або частинні розв'язки диференціальних рівнянь:

1. $x dy + y^2 dx - dx = 0$.

2. $2x(1 + y^2)dx + y(1 + x^2)dy = 0, y(1) = 0$.

3. $y' - \frac{y}{x} = -tg \frac{y}{x}$.

4. $y' - y = 2x - x^2$.

5. $y' + xy = x^3, y(0) = -2$.

6. $y'' + y'tg x = \sin x \cos x$.

7. $y'' + \frac{y'}{x} = 4x^2, y(1) = \frac{1}{4}, y'(1) = 2$.

8. $y'' + 6y' + 10y = 0$.

9. $y'' + 2y' + y = 0, y(0) = -2, y'(0) = 5$.

10. $y'' - 3y' - 18y = -18x - 3, y(0) = 7, y'(0) = -2$

11. $y'' - y' - 6y = 6e^{4x}$.

12. $y'' + 2y' + y = \cos x, y(0) = 0, y'(0) = 0$.

Розв'язати системи диференціальних рівнянь:

13. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 8x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = -3x + 15y. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} x' = 0, & x(0) = 0, \\ y' = 4x, & y(0) = 0. \end{cases}$

15. За який час T вода витече через отвір площею $0,5 \text{ см}^2$ в дні



конічної лійки висотою 10 см з кутом при вершині $\alpha = 60^\circ$ (див. [4], с. 149, задача 36)?

16. Скласти рівняння кривої, яка проходить через точку $(2; -1)$, якщо відомо, що кутовий коефіцієнт дотичної в довільній точці пропорційний квадрату ординати точки дотику. Коефіцієнт пропорційності дорівнює 6.

Варіант 27

Знайти загальні інтеграли, або загальні розв'язки, або частинні розв'язки диференціальних рівнянь:

1. $2x dy - dx = y dx - 3 dy$.

2. $y' + y \operatorname{tg} x = 0$, $y(0) = 2$.

3. $y dx - (x + y) dy = 0$.

4. $y' - 3y - 2e^{4x} = 0$.

5. $y' = 2xy + x$, $y(1) = 0$.

6. $y''(x^2 + 1) = 2xy'$.

7. $y'' = \sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

8. $y'' + 6y' + 13y = 0$.

9. $y'' - 9y = 0$, $y(0) = 7$,

$y'(0) = 9$.

10. $y'' - 7y' + 10y = 20x - 4$,

$y(0) = 0$,

$y'(0) = 2$.

11. $y'' - y' = 40e^{5x}$.

12. $y'' - 4y' = \cos x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Розв'язати системи диференціальних рівнянь:

13. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - 1, \\ \frac{dy}{dt} = x + 1. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 9y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 8y, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

15. Знайти таку криву, для якої кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій точці в 3 рази більший кутового коефіцієнта



прямої, що з'єднує цю точку з початком координат (див. [4], с. 149, задача 28).

16. Знайти криву, що проходить через точку $A(3;4)$. У якої відрізок будь-якої дотичної, що лежить між осями координат, ділиться в точці дотику навпіл. Побудуйте знайдену криву (див. [3], с. 377, задача 1078).

Варіант 28

Знайти загальні інтеграли, або загальні розв'язки, або частинні розв'язки диференціальних рівнянь:

1. $x(y+1)dx - y(x-1)dy = 0$.

2. $(1+x^2)dy - 2xydx = 0$, $y(-1) = 4$.

3. $(x+3y)dx - xdy = 0$. 4. $y' - y = 2e^x \sin x$.

5. $y' - 2y + 3e^{2x} = 0$, $y(0) = 1$.

6. $y'' - y' = 2x$.

7. $y'' = 1 - x^{-2}$, $y(1) = -1$, $y'(1) = 1$.

8. $y'' + 6y' + 18y = 0$.

9. $y'' - 8y' + 16y = 0$, $y(0) = -2$, $y'(0) = -1$.

10. $y'' + 6y' + 13y = 26x - 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

11. $y'' + 6y' + 25y = 4e^x$.

12. $y'' - 2y' + y = 2x - 4$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Розв'язати системи диференціальних рівнянь:

13. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = 1$.

15. Нехай матеріальна точка M з масою m падає в середовищі без опору вздовж вертикальної прямої під дією сили земного тяжіння. Нехай у початковий момент часу, $t=0$, задана точка зна-



ходиться над поверхнею Землі на висоті $h_0 = 314$ і її початкова швидкість $v_0 = 0$. Знайти залежність висоти h падіння точки від часу t . Через скільки секунд тіло впаде на Землю (див. [8], с. 186, задача 1)?

16. Знайти криву, що проходить через точку $(0; -2)$, а кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій точці дорівнює ординаті цієї точки, збільшеній на дві одиниці (див. [4], с. 149, задача 26).

Варіант 29

Знайти загальні інтеграли, або загальні розв'язки, або частинні розв'язки диференціальних рівнянь:

1. $y' + y^2 = 1$.

2. $2xy y' = 1 + x^2$,

$y(1) = 0$.

3. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} + 1$.

4. $y' - 4y = \cos x$.

5. $y' + \frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2}$,

$y(1) = 2$.

6. $x^2 y'' = (y')^2$.

7. $(y'')^2 = y'$,

$y(0) = \frac{2}{3}$, $y'(0) = 1$.

8. $y'' + 6y' + 25y = 0$.

9. $y'' + 16y' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

10. $y'' + 2y' + y = x$, $y(0) = -1$,

$y'(0) = 3$.

11. $y''' - y = 3x + x^2$.

12. $y'' + y' - 2y = \sin x$,

$y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Розв'язати системи диференціальних рівнянь:



13.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 3y. \end{cases}$$

14.
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + t, \\ \frac{dy}{dt} = x + e^t, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

15. Швидкість радіоактивного розпаду пропорційна кількості речовини. За який час розпадеться половина речовини (див. [5], с. 33, задача 1.32)?

16. Знайти рівняння кривої, для якої довжина відрізка дотичної дорівнює відстані від точки перетину цієї дотичної з віссю Ox до початку координат.

Варіант 30

Знайти загальні інтеграли, або загальні розв'язки, або частинні розв'язки диференціальних рівнянь:

1. $y dx - (x + 2) dy = 0.$

2. $y' = 2xy + x, \quad y(0) = 1.$

3. $x + y + x y' = 0.$ 4. $y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x.$

5. $y' - y = \frac{e^x}{x^2}, \quad y(1) = e.$

6. $y'' = y' + x.$

7. $y'' = 2 - y, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2.$

8. $y'' + 2y' + 5y = 0.$

9. $y'' + 10y' + 25y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 6.$

10. $y'' + y' - 12y = 12x + 11, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$

11. $y'' + y' = 2 \sin x.$

12. $y'' + 4y = 5e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

Розв'язати системи диференціальних рівнянь:



$$13. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 6y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 3y. \end{cases} \quad 14. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = x, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

15. В резервуарі є 100 л водного розчину, який містить 10 кг солі. Чиста вода вливається в резервуар з швидкістю 3 л за 1 хв., а суміш витікає з бочки з швидкістю 2 л за 1 хв., причому концентрація розчину підтримується шляхом перемішування. Скільки солі буде міститися в резервуарі через 1 год. (див. [11], с. 448, задача 8)?

16. Кутовий коефіцієнт дотичної до кривої в кожній її точці заданий функцією $\cos x$. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку $\left(\frac{\pi}{2}; 2\right)$.

Література:

1. Кузнецов Л. А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты).— М.: Высшая школа, 1983. — 176 с.
2. Гудименко Ф. С., Павлюк І. А., Волкова В. О. Збірник задач з диференціальних рівнянь.— К.: Вища школа, 1972. — 156 с.
3. Запорожец Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу.— М.: Высшая школа, 1961. — 404 с.
4. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление.— М.: Наука, 1976.— Т. 2. — 576 с.
5. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи.— К.: Вища школа, 1984. — 408 с.
6. Лисичкин В. Т., Соловейчик И. Л. Математика: Учеб. пособие для техникумов.— М.: Высшая школа, 1991. — 480 с.
7. Киселев А. И., Краснов М. А., Макаренко Г. И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Высшая школа, 1965. — 236 с.
8. Шкіль М. І., Колесник Т. В. Вища математика: Визначений інтеграл, функції багатьох змінних, диференціальні рівняння, ряди.— К.: Вища школа, 1986. — книга 2. — 512 с.
9. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разде-



водного господарства
та природокористування

лы математического анализа. Под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. — М.: Наука, 1981. — Т. 2. — 368 с.

10. Шкіль М. І., Сотніченко М. А. Звичайні диференціальні рівняння. — К.: Вища школа, 1992. — 303 с.

11. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика: Навчальний посібник. — К.: А.С.К., 2006. — 648 с.

12. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах. — К.: Вища школа, 1994. — 454 с.

