



Національний університет  
водного господарства  
та природокористування

Міністерство освіти і науки України

Національний університет водного господарства  
та природокористування

**О. Тимейчук**

# **МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ ТЕПЛОМАСООБМІНУ**



*Навчальний посібник*

Національний університет  
водного господарства  
та природокористування

Для студентів напряму підготовки  
6.050601 „Теплоенергетика”

Рівне 2010



**УДК 519.87+536.24(075)**

**ББК 22.194.Я7**

**Т 39**

*Затверджено вченою радою Національного університету водного господарства та природокористування.*

*(Протокол № 2 від 26 лютого 2010 р.)*

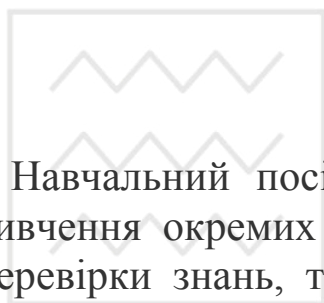
**Рецензенти:**

**О. Рябенко**, доктор технічних наук, професор НУВГП;

**В. Волощук**, канд. техн. наук, доцент НУВГП.

**Тимейчук О. Ю.**

**Т 39** Математичні моделі та оптимізація тепломасообміну: Навчальний посібник. – Рівне: НУВГП, 2010. - 50 с.



Національний університет  
водного господарства  
та природокористування

Навчальний посібник містить типову програму, вказівки щодо вивчення окремих тем, відомості про лабораторні заняття, модулі перевірки знань, тренінгову тестову програму, контрольні вправи, рекомендації щодо самостійної роботи, завдання та порядок виконання розрахункової роботи, термінологічний словник, список рекомендованої літератури.

Посібник призначено для студентів вищих навчальних закладів напряму підготовки 6.050601 „Теплоенергетика”, а також буде корисний спеціалістам, магістрам і аспірантам, які працюють у цій галузі.

**УДК 519.87+536.24(075)**

**ББК 22.194.Я7**

© Тимейчук О.Ю., 2010

© НУВГП, 2010



## ПЕРЕДМОВА

Приєднання України до Болонського процесу передбачає впровадження Європейської кредитно – трансферної системи (ECTS) організації навчального процесу.

Для завершення економічних реформ в країні, інтеграції української економіки в СОТ необхідні глибокі знання при математичному моделюванні та оптимізації тепломасообміну з використанням ЕОМ.

### Опис предмета навчальної дисципліни

#### Денна форма навчання

Курс: підготовка бакалаврів, підвищення кваліфікації, післядипломна освіта	Напрямок, спеціальність, освітньо-кваліфікаційний рівень	Характеристика навчальної дисципліни
1	2	3
<b>Кількість кредитів, відповідних ECTS – 3</b>	<b>Напрямок 6.050601 „Теплоенергетика”</b>	<b>За вибором ВНЗ</b>
<b>Модулів – 2</b>		<b>Рік підготовки: 3-й,</b>
<b>Змістових модулів–2</b>		<b>Семестр: 6-й.</b>
<b>Загальна кількість годин - 108</b>		<b>Лекції – 20 год.</b>
<b>Тижневих годин: аудиторних – 2</b>		<b>Лабораторні – 20 год.</b>
<b>СРС – 4</b>	<b>Освітньо-кваліфікаційний рівень:</b>	<b>Самост. та інд. роб.–68 год.</b>
	<b>Бакалавр</b>	<b>Розрахунк. робота-12 год.</b>
	<b>Термін навч. – 4 роки</b>	<b>Самостійна робота – згідно із завданням - 56 год</b>
		<b>Вид контр.:залік в 6 семестрі</b>

**Примітка:** співвідношення кількості годин аудиторних занять і самостійної та індивідуальної роботи становить 40% до 60%.

#### Заочна форма навчання

1	2	3
<b>Кількість кредитів, відповідних ECTS – 3</b>	<b>Напрямок 6.050601 „Теплоенергетика”</b>	<b>За вибором ВНЗ</b>
<b>Модулів – 2</b>		<b>Рік підготовки: 3-й</b>
<b>Змістових модулів–2</b>		<b>Семестри: 5-й і 6-й</b>
<b>Загальна кількість годин - 108</b>		<b>Лекції – 6 год.,</b>
		<b>Лабораторні – 6 год.</b>
	<b>Освітньо-кваліфікаційний рівень:</b>	<b>Самост. та інд. роб.–96 год.</b>
	<b>Бакалавр</b>	<b>Контр. робота –12 год.</b>
	<b>Термін навч. –5 років</b>	<b>Самостійна робота – згідно завдання - 84 год.</b>
		<b>Вид контр.:залік в 6 семестрі</b>

**Примітка:** співвідношення кількості годин аудиторних занять і самостійної та індивідуальної роботи становить 10% до 90%.



**Метою** курсу „Математичні моделі та оптимізація тепломасообміну” є оволодіння студентами вмінь і навиків застосування основних методів дослідження процесів тепломасообміну з використанням ЕОМ.

У результаті вивчення дисципліни студенти повинні:

✓ **знати** основні способи побудови математичних моделей процесів тепломасообміну, методи їх дослідження і реалізації на ЕОМ; чисельні методи розв'язування диференціальних рівнянь;

✓ **вміти** будувати математичні моделі задач розподілу тепла в твердих тілах і розв'язувати їх чисельними методами.

Навчальна програма розрахована на студентів, які навчаються за освітньо-кваліфікаційними характеристиками підготовки бакалаврів.

Програма побудована за вимогами та узгоджена з орієнтовною структурою змісту навчальної дисципліни, рекомендованою Європейською кредитно-трансферною системою.

### Розподіл балів, що отримує студент при поточному тестуванні та захисті розрахункової роботи

Модуль 1: поточне тестування						Модуль 2: ІРС			Сума	
Змістовий модуль 1						Змістовий модуль 2				
48						24			28	
<i>T1</i>	<i>T2</i>	<i>T3</i>	<i>T4</i>	<i>T5</i>	<i>T6</i>	<i>T7</i>	<i>T8</i>	<i>T9</i>	Розрахункова робота	100
8	8	8	8	8	8	8	8	8	28	

Оцінка виставляється на основі шкали узгодження національної системи оцінювання знань студентів з рекомендаціями ЄКТС (ECTS).

### Шкала узгодження національної системи КМСОНП з ECTS

За шкалою ECTS	За національною шкалою	За шкалою КМСОНП
<i>A</i>	<i>Зараховано</i>	<i>90 – 100</i>
<i>B</i>	<i>Зараховано</i>	<i>82 – 89</i>
<i>C</i>	<i>Зараховано</i>	<i>74 – 81</i>
<i>D</i>	<i>Зараховано</i>	<i>64 – 73</i>
<i>E</i>	<i>Зараховано</i>	<i>60 – 63</i>
<i>FX</i>	<i>Не зараховано</i>	<i>35 – 59</i>
<i>F</i>	<i>Не зараховано</i>	<i>1 – 34</i>

Поточний контроль знань студентів проводиться: на лабораторних заняттях – шляхом захисту лабораторних робіт; на консультаціях – індивідуальним захистом самостійних робіт.



# 1. ТИПОВА ПРОГРАМА НОРМАТИВНОЇ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ „МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ ТМО”

## 1.1. Тематичний план та розподіл навчального часу

Відповідно до „Освітньо-професійної програми підготовки бакалавра, спеціаліста і магістра” напряму 6.050601 „Теплоенергетика”, чинної від 06.06.2002 р. на вивчення дисципліни "Математичні моделі та оптимізація тепломасообміну" передбачено 108 годин (3 кредити).

Таблиця 1.1

Тематичний план та розподіл навчального часу

Назви тем змістових модулів	Кількість годин				
	Лекції	Лабор.	Індивід. робота	Самост. робота	Разом
<b>Змістовий модуль 1. Постановка та чисельне розв'язування диференціальних рівнянь.</b>	12/4	20/6	0/0	36/58	68
<b>Тема 1.</b> Основні типи рівнянь інженерної практики та методи їх розв'язування.	2/1	0/0	0/0	8/9	10
<b>Тема 2.</b> Чисельне розв'язування задачі Коші для ЗДР I-го порядку.	2/1	4/1	0/0	4/8	10
<b>Тема 3.</b> Чисельне розв'язування задачі Коші для ЗДР 2-го порядку.	2/0	4/1	0/0	4/9	10
<b>Тема 4.</b> Чисельне розв'язування задачі Діріхле для диференціальних рівнянь Лапласа і Пуасона.	2/1	4/1	0/0	6/10	12
<b>Тема 5.</b> Чисельне розв'язування змішаної крайової задачі для рівняння теплопровідності.	2/1	4/1	0/0	7/11	13
<b>Тема 6.</b> Чисельне розв'язування крайової задачі для ЗДР 2-го порядку методом прогонки.	2/0	4/2	0/0	7/11	13
<b>Змістовий модуль 2. Постановка та чисельне розв'язування задачі теплопровідності для поздовжніх ребер.</b>	8/2	0/0	12/12	20/26	40
<b>Тема 7.</b> Закономірності переносу теплової енергії та постановка задачі теплопровідності ребер.	2/0	0/0	0/0	6/8	8
<b>Тема 8.</b> Постановка задачі теплопровідності для поздовжніх ребер при постійному коеф. Тепловіддачі на поверхні ребра та теплоізоляції його торця.	2/1	0/0	6/6	7/8	15
<b>Тема 9.</b> Чисельне розв'язув. задачі теплопровідн. для поздовжніх ребер при постійному коеф. тепловіддачі на поверхні ребра та теплоізоляції його торця.	4/1	0/0	6/6	7/10	17
<b>Усього</b>	<b>20/6</b>	<b>20/6</b>	<b>12/12</b>	<b>56/84</b>	<b>108</b>

**Примітка.** Кількість годин : чисельник – денна форма навчання;  
знаменник – заочна форма.



## **1.2. Програмний матеріал блоків змістових модулів** **Змістовий модуль 1. Постановка та чисельне розв'язування диференціальних рівнянь.**

### **Тема 1. Основні типи рівнянь інженерної практики та методи їх розв'язування**

Числові та функціональні рівняння. Диференціальні та інтегральні рівняння. Звичайні диференціальні рівняння та диференціальні рівняння в часткових похідних. Методи розв'язування диференціальних рівнянь.

### **Тема 2. Чисельне розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) 1-го порядку**

Крайові умови (граничні та початкові умови). Задача Коші та числові методи її розв'язування (метод Ейлера, модифікований метод Ейлера та метод Ейлера-Коші, метод Рунге-Кутта).

### **Тема 3. Чисельне розв'язування задачі Коші для ЗДР 2-го порядку**

Системи диференціальних рівнянь. Метод Ейлера.

### **Тема 4. Чисельне розв'язування задачі Діріхле для диференціальних рівнянь Лапласа і Пуассона**

Рівняння математичної фізики (рівняння еліптичного, параболічного та гіперболічного типів). Рівняння Лапласа і Пуассона. Метод сіток розв'язування диференціальних рівнянь з частковими похідними.

### **Тема 5. Чисельне розв'язування змішаної крайової задачі для рівняння теплопровідності**

Змішана крайова задача для рівняння теплопровідності з граничними умовами першого роду. Метод сіток для розв'язування рівняння теплопровідності. Явна та неявна різницеві схеми.

### **Тема 6. Чисельне розв'язування крайової задачі для ЗДР 2-го порядку методом прогонки**

Лінійна крайова задача, однорідні крайові умови. Метод прогонки.

## **Змістовий модуль 2. Постановка та чисельне розв'язування задачі теплопровідності для поздовжніх ребер**

### **Тема 7. Закономірності переносу теплової енергії та постановка задачі теплопровідності ребер**

Види переносу теплоти (теплопровідність, конвекція, теплове випромінювання). Конвективний теплообмін і конвективна тепловіддача. Розвинута поверхня. Ефективність ребра. Температурний напір. Узагальнене диференціальне рівняння теплопровідності для ребра.

### **Тема 8. Постановка задачі теплопровідності для поздовжніх ребер при постійному коефіцієнті тепловіддачі на поверхні ребра та теплоізоляції його торця**

Функція профілю. Рівняння теплопровідності для поздовжніх ребер довільного профілю (прямокутного, трикутного, вгнутого та випуклого параболічного профілів).



## **Тема 9. Чисельне розв'язування задачі теплопровідності для поздовжніх ребер при постійному коефіцієнті тепловіддачі на поверхні ребра та теплоізоляції його торця**

Крайова задача теплопровідності для поздовжніх ребер. Метод прогонки. Рівномірність розподілу температур.

### **2. МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ВИВЧЕННЯ ОКРЕМИХ МОДУЛІВ ТА ТЕМ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ** ***Змістовий модуль 1. Постановка та чисельне розв'язування диференціальних рівнянь.***

#### **Тема 1. Основні типи рівнянь інженерної практики та методи їх розв'язування**

##### **1.1. Основні типи рівнянь інженерної практики**

Всі рівняння інженерної практики можна розділити на два класи:

- **числові рівняння** – описують стаціонарні статичні процеси і їх розв'язком є числа;
- **функціональні рівняння** – описують нестаціонарні динамічні процеси і їх розв'язком є функції.

Функціональні рівняння діляться на два класи:

- **диференціальні рівняння (ДР)** – функція під знаком диференціала;
- **інтегральні рівняння** – функція під знаком інтеграла.

Диференціальні рівняння можна розділити на два класи:

- **звичайні диференціальні рівняння (ЗДР)** – функція залежить від однієї змінної;
- **диференціальні рівняння в часткових похідних** – функція залежить від двох або більше змінних.

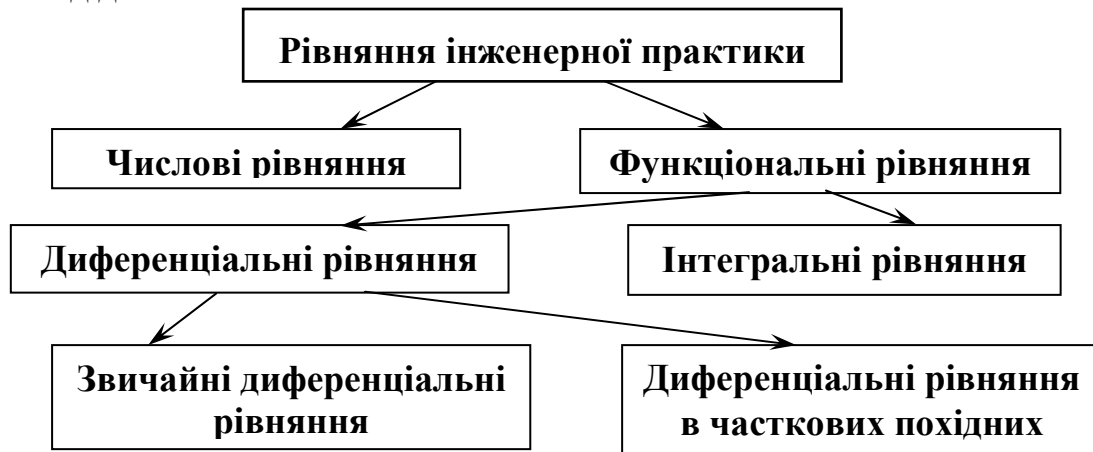


Рис. 1.1. Рівняння інженерної практики

**Порядком ДР** називається найвищий порядок похідної або диференціала, який входить в це рівняння. **Розв'язком ДР** називається функція, підстановка якої в рівняння перетворює його в тотожність.

Існує три типи розв'язків ЗДР:

- **загальний розв'язок** – сімейство розв'язків ЗДР, яке лежить від довільних постійних, кількість яких співпадає з порядком цього рівняння;



**частковий розв'язок** – може бути отриманий із загального розв'язку при певних числових значеннях довільних постійних, які в нього входять;

➤ **особливий розв'язок** – розв'язок, який у всіх своїх точках не задовільняє умову єдиності, тобто в будь-якому околі особливого розв'язку існує хоча б дві інтегральні криві, які проходять через цю точку.

## 1.2. Методи розв'язування диференціальних рівнянь

Серед методів розв'язування ДР можна виділити такі:

❖ **класичні (точні) методи** – дають можливість отримати розв'язки у вигляді формул шляхом аналітичних перетворень і табличного інтегрування елементарних функцій, але ці методи не завжди можна застосувати, а у випадку застосування часто дають складні та громіздкі розв'язки;

❖ **наближені методи:**

а) **графічні методи** – наближений розв'язок у вигляді графіків;

б) **аналітичні методи** – базуються на спрощенні заданих рівнянь так, щоб більш просте рівняння можна було б розв'язати класичними методами, але при цьому виникає питання про достовірність отриманого розв'язку;

❖ **числові методи** – наближені розв'язки дають у вигляді таблиць.

**Числові методи**, на даний час, отримали дуже широке застосування у зв'язку з інтенсивним розвитком обчислювальної техніки. Ідея цих методів базується на заміні диференціальних рівнянь і додаткових умов системою алгебраїчних рівнянь, розв'язок якої отримуємо у табличному вигляді.

## Тема 2. Чисельне розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) 1-го порядку

### 2.1. Постановка задач для звичайних диференціальних рівнянь

Для всіх фізичних задач характерним є наявність межі  $\Gamma$  області  $G$ , в якій вивчається той чи інший процес. Ці межі можуть бути скінченними або нескінченними. Оскільки математична модель повинна адекватно описувати певне фізичне явище в даному виділеному середовищі, то вона включає в себе не тільки диференціальне рівняння або систему диференціальних рівнянь, але й **додаткові** або **крайові умови**, які задаються у вигляді значень шуканої функції або її похідних для деяких значень незалежних змінних, тобто в окремих точках, або у вигляді залежностей шуканої функції та її похідних на деякій області.

**Додаткові (крайові) умови** – це сукупність **граничних** і **початкових умов**. **Граничні умови** задають режим фізичного процесу на межі  $\Gamma$  області  $G$ , а **початкові умови** накладають обмеження на функцію  $u$  та її похідні по часу до  $(n-1)$ -го порядку в деякий початковий момент  $t=t_0$ . Для знаходження **часткового розв'язку** диференціального рівняння необхідно задати **додаткові (крайові) умови**, кількість яких повинна бути не меншою, ніж порядок рівняння.





В залежності від способу задання **додаткових (крайових) умов** для відшукування часткового розв'язку диференціального рівняння розглядають **задачу Коші** та **крайову задачу**.

Якщо ці умови відносяться до однієї точки, то задача називається **задачею Коші**, додаткові умови – **початковими умовами**, а сама точка – **початковою**. Якщо ж ці умови відносяться до більш, ніж однієї точки, то така задача називається **крайовою задачею**, а відповідні умови – **граничними умовами**.

**1. Задача Коші.** Знайти функцію  $y=y(x)$ , яка задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right), \quad (2.1)$$

і початкові умови:

$$y(x_0) = y_0, \quad \frac{dy(x_0)}{dx} = y'_0. \quad (2.2)$$

При постановці задачі Коші для ЗДР  $n$ -го порядку задається значення функції  $y(x)$  в деякій точці, а також значення похідних цієї функції в цій точці до  $(n-1)$ -го порядку включно.

**2. Крайова задача.** Знайти на деякому проміжку  $[a, b]$  функцію  $y=y(x)$ , яка задовольняє в середині відрізка диференціальному рівнянню

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right), \quad (2.3)$$

а на кінцях відрізка – граничними умовам:

$$g_1(y(a), y'(a)) = 0, \quad g_2(y(b), y'(b)) = 0. \quad (2.4)$$

## 2.2. Методи розв'язування задачі Коші для ЗДР

Нехай задана задача Коші для ЗДР першого порядку

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), & (2.5) \\ y(x_0) = y_0, & (2.6) \end{cases}$$

на проміжку  $[x_0, b]$ .

Необхідно знайти функцію  $y=y(x)$ , яка є розв'язком рівняння (2.5) і задовольняє початкову умову (2.6).

На проміжку  $[x_0, b]$  з допомогою точок  $x_i = x_0 + i \cdot h$ ,  $i = \overline{0, k}$ , побудуємо рівномірну різницеву сітку з  $(k+1)$  вузлом, відстань між якими дорівнює  $h$ :

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k, \quad (2.7)$$

Задача полягає у знаходженні значень  $y$  у вузлах сітки (2.7) шуканої функції  $y(x)$ , яка є розв'язком задачі Коші (2.5)-(2.6)

$$y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2, \dots, y(x_{k-1}) = y_{k-1}, y(x_k) = y_k. \quad (2.8)$$



Одним з найбільш простих та універсальних числових методів розв'язування диференціальних рівнянь є метод скінченних різниць, який базується на розкладі шуканої функції  $y(x)$  в ряд Тейлора в  $h$ -околі точки  $x = x_i, i = \overline{0, k-1}$

$$y(x+h) = y(x) + y'(x) \cdot h + \frac{y''(x) \cdot h^2}{2!} + \frac{y'''(x) \cdot h^3}{3!} + \frac{y^{IV}(x) \cdot h^4}{4!} + \frac{y^V(x) \cdot h^5}{5!} + \dots \quad (2.9)$$

### 2.2.1. Метод Ейлера

З розкладу (2.9) беремо перші два члени

$$y(x+h) = y(x) + y'(x) \cdot h + O(h^2), \quad (2.10)$$

що, з використанням (2.8), можна записати у вигляді

$$y_{i+1} = y_i + y'_i \cdot h + O(h^2). \quad (2.11)$$

У відповідності з (2.5) це рівносильно

$$y(x+h) = y(x) + h \cdot f(x, y(x)) + O(h^2), \quad (2.12)$$

або

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i) + O(h^2), \quad (2.13)$$

де  $O(h^2)$  – залишковий член.

З (2.13) отримаємо різницеву схему, яка апроксимує в точках (2.7) розв'язок задачі Коші та має вигляд рекурентних формул

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + h \cdot f(x_i, \hat{y}_i), \quad i = \overline{0, k-1}, \quad (2.14)$$

де

$$\hat{y}_0 = y_0. \quad (2.15)$$

Коли розв'яжемо систему числових рівнянь, то отримаємо значення

$$\hat{y}_0, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_{k-1}, \hat{y}_k, \quad (2.16)$$

що відповідають шуканим значенням (2.8).

З (2.12) випливає, що метод Ейлера має перший порядок точності  $O(h^2)$  і з віддаленням від початкової точки похибка накопичується. На практиці частіше використовують різні модифікації методу Ейлера, які дають більш високу точність.

### 2.2.2. Модифіковані методи Ейлера та Ейлера-Коші

Якщо з розкладу (2.9) взяти перші три члени, то отримаємо розрахункові формули для модифікованих методів Ейлера та Ейлера-Коші, які мають другий порядок точності  $O(h^3)$ , що при малих  $h$  забезпечує більш високу точність, ніж метод Ейлера.

Ці методи можна представити такими рекурентними формулами:



### модифікований метод Ейлера

$$\begin{cases} \hat{y}_0 = y_0 . \\ \hat{y}_{i+1/2} = \hat{y}_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i, \hat{y}_i), \\ \hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, \hat{y}_{i+1/2}), \end{cases} \quad i = \overline{0, k-1} . \quad (2.17)$$

### модифікований метод Ейлера-Коші

$$\begin{cases} \hat{y}_0 = y_0 . \\ \hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + h \cdot f(x_i, \hat{y}_i), \\ \hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{h}{2} \cdot [f(x_i, \hat{y}_i) + f(x_{i+1}, \hat{y}_{i+1})], \end{cases} \quad i = \overline{0, k-1} . \quad (2.18)$$

### 2.2.3. Метод Рунге-Кутта

Якщо з розкладу (2.9) взяти перші п'ять членів, то отримаємо розрахункові формули для методу Рунге-Кутта, який має четвертий порядок точності  $O(h^5)$ , що забезпечує більш високу точність, ніж розглянуті раніше, які фактично є методами Рунге-Кутта відповідно I-го і II-го порядків.

Цей метод можна представити такими рекурентними формулами:

$$\begin{cases} \hat{y}_0 = y_0 . \\ k_1 = h \cdot f(x_i, \hat{y}_i), \\ k_2 = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, \hat{y}_i + \frac{k_1}{2}), \\ k_3 = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, \hat{y}_i + \frac{k_2}{2}), \\ k_4 = h \cdot f(x_i + h, \hat{y}_i + k_3), \\ \hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{1}{6} \cdot [k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4], \end{cases} \quad i = \overline{0, k-1} . \quad (2.19)$$

### 2.3. Приклад розв'язування задачі Коші для ЗДР I-го порядку

Знайти чисельний розв'язок задачі Коші для ЗДР I-го порядку

$$y' - 2 \cdot y - 6 \cdot x + 7 = 0$$

з постійним кроком  $h=0.2$  на проміжку  $[0; 2]$  і початковою умовою  $y(0)=3$ .

#### Розв'язання

Запишемо рівняння у вигляді  $y' = 2 \cdot y + 6 \cdot x - 7$ , тобто  $f(x, y) = 2 \cdot y + 6 \cdot x - 7$ .

Знайдемо чисельні розв'язки задачі Коші різними методами (таблиці 2.1-2.4).



**Зауваження.**

Для даної задачі Коші існує точний розв'язок  $y^* = e^{2x} - 3 \cdot x + 2$  (передостання графа табл. 2.1-2.4), який можна порівняти з чисельними розв'язками. Значення різниць  $|y_i - y_i^*|$  (остання графа таблиць 2.1-2.4) свідчать про те, що чим вищий порядок методу, тим чисельний розв'язок ближчий до точного.

Таблиця 2.1

Метод Ейлера

$i$	$x_i$	$y_i$	$\Delta y_i = h \cdot f(x_i, y_i)$	$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$	$y_i^*$	$ y_i - y_i^* $
0	0	3.0000	-0.2000	2.8000	3.0000	0.0000
1	0.2	2.8000	-0.0400	2.7600	2.8918	0.0918
2	0.4	2.7600	0.1840	2.9440	3.0255	0.2655
3	0.6	2.9440	0.4976	3.4416	3.5201	0.5761
4	0.8	3.4416	0.9366	4.3782	4.5530	1.1114
5	1.0	4.3782	1.5513	5.9295	6.3891	2.0108
6	1.2	5.9295	2.4118	8.3414	9.4232	3.4936
7	1.4	8.3414	3.6165	11.9579	14.2446	5.9033
8	1.6	11.9579	5.3032	17.2610	21.7325	9.7746
9	1.8	17.2610	7.6644	24.9255	33.1982	15.9372
10	2.0	24.9255	—	—	50.5982	25.6727

Таблиця 2.2

Модифікований метод Ейлера

$i$	$x_i$	$y_i$	$\Delta y_i = h/2 \cdot f(x_i, y_i)$	$y_{i+1/2} = y_i + \Delta y_i$	$x_{i+1/2} = x_i + h/2$	$\Delta y_{i+1/2} = h \cdot f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})$	$y_{i+1} = y_{i+1/2} + \Delta y_{i+1/2}$	$y_i^*$	$ y_i - y_i^* $
0	0	3.0000	-0.100	2.9000	0.1	-0.1200	2.8800	3.0000	0.0000
1	0.2	2.8800	-0.004	2.8760	0.3	0.1104	2.9904	2.8918	0.0118
2	0.4	2.9904	0.1381	3.1285	0.5	0.4514	3.4418	3.0255	0.0351
3	0.6	3.4418	0.3484	3.7902	0.7	0.9561	4.3979	3.5201	0.0783
4	0.8	4.3979	0.6596	5.0574	0.9	1.7030	6.1008	4.5530	0.1552
5	1.0	6.1008	1.1202	7.2210	1.1	2.8084	8.9092	6.3891	0.2882
6	1.2	8.9092	1.8018	10.7111	1.3	4.4444	13.3536	9.4232	0.5140
7	1.4	13.3536	2.8107	16.1644	1.5	6.8657	20.2194	14.2446	0.8910
8	1.6	20.2194	4.3039	24.5233	1.7	10.4493	30.6687	21.7325	1.5131
9	1.8	30.6687	6.5137	37.1824	1.9	15.7530	46.4217	33.1982	2.5295
10	2.0	46.4217	—	—	—	—	—	50.5982	4.1765



Модифікований метод Ейлера-Коші

$i$	$x_i$	$y_i$	$\Delta y_i = h \cdot f(x_i, y_i)$	$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$	$x_{i+1} = x_i + h$	$\Delta y_{i+1/2} = h/2 * [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]$	$y_{i+1} = y_i + \Delta y_{i+1/2}$	$y_i^*$	$ y_i - y_i^* $
0	0	3.0000	-0.2000	2.8000	0.2	-0.1200	2.8800	3.0000	0.0000
1	0.2	2.8800	-0.0080	2.8720	0.4	0.1104	2.9904	2.8918	0.0118
2	0.4	2.9904	0.2762	3.2666	0.6	0.4514	3.4418	3.0255	0.0351
3	0.6	3.4418	0.6967	4.1385	0.8	0.9561	4.3979	3.5201	0.0783
4	0.8	4.3979	1.3191	5.7170	1.0	1.7030	6.1008	4.5530	0.1552
5	1.0	6.1008	2.2402	8.3411	1.2	2.8084	8.9092	6.3891	0.2882
6	1.2	8.9092	3.6037	12.5129	1.4	4.4444	13.3536	9.4232	0.5140
7	1.4	13.3536	5.6215	18.9751	1.6	6.8657	20.2194	14.2446	0.8910
8	1.6	20.2194	8.6078	28.8271	1.8	10.4493	30.6687	21.7325	1.5131
9	1.8	30.6687	13.0275	43.6962	2.0	15.7530	46.4217	33.1982	2.5295
10	2.0	46.4217	—	—	—	—	—	50.5982	4.1765

Метод Рунге-Кутта

Таблица 2.4

$i$	$x_i$	$y_i$	$k_1 = h \cdot f(x_i, y_i)$	$x_{i+1/2} = x_i + h/2$	$\Delta y_{k1} = y_i + k_1/2$	$k_2 = h \cdot f(x_{i+1/2}, \Delta y_{k1})$	$\Delta y_{k2} = y_i + k_2/2$	$k_3 = h \cdot f(x_{i+1/2}, \Delta y_{k2})$
0	0	3.0000	-0.2000	0.1	2.9000	-0.1200	2.9400	-0.1040
1	0.2	2.8917	-0.0033	0.3	2.8901	0.1160	2.9497	0.1399
2	0.4	3.0253	0.2901	0.5	3.1703	0.4681	3.2593	0.5037
3	0.6	3.5195	0.7278	0.7	3.8834	0.9934	4.0162	1.0465
4	0.8	4.5518	1.3807	0.9	5.2422	1.7769	5.4403	1.8561
5	1.0	6.3868	2.3547	1.1	7.5642	2.9457	7.8596	3.0638
6	1.2	9.4191	3.8077	1.3	11.3230	4.6892	11.7637	4.8655
7	1.4	14.2376	5.9750	1.5	17.2251	7.2900	17.8826	7.5530
8	1.6	21.7205	9.2082	1.7	26.3246	11.1698	27.3054	11.5622
9	1.8	33.1781	14.0312	1.9	40.1937	16.9575	41.6568	17.5427
10	2.0	50.5647	—	—	—	—	—	—

Продовження табл. 2.4

$\Delta y_{k3} = y_i + k_3$	$x_{i+1} = x_i + h$	$k_4 = h \cdot f(x_{i+1}, \Delta y_{k3})$	$\Delta y_i = (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$	$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$	$y_i^*$	$ y_i - y_i^* $
2.8960	0.2	-0.0016	-0.1083	2.8917	3.0000	0.0000
3.0316	0.4	0.2927	0.1335	3.0253	2.8918	0.0001
3.5290	0.6	0.7316	0.4942	3.5195	3.0255	0.0003
4.5660	0.8	1.3864	1.0323	4.5518	3.5201	0.0006
6.4079	1.0	2.3632	1.8350	6.3868	4.5530	0.0012
9.4506	1.2	3.8203	3.0323	9.4191	6.3891	0.0023
14.2846	1.4	5.9938	4.8185	14.2376	9.4232	0.0040
21.7906	1.6	9.2363	7.4829	21.7205	14.2446	0.0070
33.2827	1.8	14.0731	11.4576	33.1781	21.7325	0.0120
50.7208	2.0	21.2883	17.3867	50.5647	33.1982	0.0202
—	—	—	—	—	50.5982	0.0334



## Тема 3. Чисельне розв'язування задачі Коші для ЗДР 2-го порядку

### 3.1. Постановка задачі

Диференціальні рівняння n-го порядку

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (3.1)$$

за допомогою заміни

$$y_1 = y', \quad y_2 = y'', \quad \dots, \quad y_{n-1} = y^{(n-1)} \quad (3.2)$$

зводяться до системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y_1, \\ \frac{dy_1}{dx} = y_2, \\ \dots \dots \dots \\ \frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1}, \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} = f(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}). \end{cases} \quad (3.3)$$

### 3.2. Метод Ейлера розв'язування задачі Коші для ЗДР 2-го порядку

Нехай задана задача Коші для ЗДР другого порядку

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'. \end{cases} \quad (3.5)$$

на проміжку  $[x_0, b]$ .

Необхідно знайти функцію  $y=y(x)$ , яка є розв'язком рівняння (3.4) і задовольняє початкові умови (3.5).

За допомогою підстановки  $y' = z$ ,  $y'' = z'$  замінимо рівняння (3.4) системою рівнянь

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, z), \\ z' = f_2(x, y, z), \end{cases} \quad (3.6)$$

а початкові умови (3.5) матимуть вигляд

$$y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0. \quad (3.7)$$

Наближені значення  $y_i = y(x_i)$ ,  $z_i = z(x_i)$  обчислюються за рекурентними формулами

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h \cdot f_1(x_i, y_i, z_i), \\ z_{i+1} = z_i + h \cdot f_2(x_i, y_i, z_i), \end{cases} \quad i = \overline{0, k-1}. \quad (3.8)$$



### 3.3. Приклад розв'язування задачі Коші для ЗДР 2-го порядку

Знайти чисельний розв'язок задачі Коші для ЗДР 2-го порядку

$x \cdot y'' + 2y' - 3y = 2e^x$  з постійним кроком  $h=0.1$  на проміжку  $[1; 2]$  і початковими умовами  $y(1)=1, y'(1)=-2$ .

#### Розв'язання

Запишемо рівняння у вигляді  $y'' = \frac{-2y' + 3y + 2e^x}{x}$  і за допомогою підста-

новки  $y' = z, y'' = z'$  замінимо його системою рівнянь

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = \frac{-2z + 3y + 2e^x}{x}, \end{cases}$$

з початковими умовами  $y(1)=1, z(1)=-2$ , тобто

$$f_1(x, y, z) = z, \quad f_2(x, y, z) = \frac{-2z + 3y + 2e^x}{x}.$$

Знайдемо чисельний розв'язок задачі Коші для ЗДР 2-го порядку методом Ейлера (таблиця 3.1).

Національний університет

Таблиця 3.1

Чисельний розв'язок задачі Коші для ЗДР 2-го порядку методом Ейлера

$i$	$x_i$	$y_i$	$f_1=z_i$	$\Delta y_i=h \cdot f_1$	$y_{i+1}=y_i+\Delta y_i$	$f_2=z'_i$	$\Delta z_i=h \cdot f_2$	$z_{i+1}=z_i+\Delta z_i$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1,000	-2,000	-0,200	0,800	12,437	1,244	-0,756
1	1.1	0,800	-0,756	-0,076	0,724	9,019	0,902	0,146
2	1.2	0,724	0,146	0,015	0,739	7,102	0,710	0,856
3	1.3	0,739	0,856	0,086	0,824	6,034	0,603	1,459
4	1.4	0,824	1,459	0,146	0,970	5,475	0,548	2,007
5	1.5	0,970	2,007	0,201	1,171	5,241	0,524	2,531
6	1.6	1,171	2,531	0,253	1,424	5,224	0,522	3,053
7	1.7	1,424	3,053	0,305	1,729	5,361	0,536	3,589
8	1.8	1,729	3,589	0,359	2,088	5,616	0,562	4,151
9	1.9	2,088	4,151	0,415	2,503	5,966	0,597	4,747
10	2.0	2,503	—	—	—	—	—	—

## Тема 4. Чисельне розв'язування задачі Діріхле для диференціальних рівнянь Лапласа і Пуасона

### 4.1. Основні типи рівнянь математичної фізики

Лінійні диференціальні рівняння з частковими похідними (найчастіше другого порядку) називають *рівняннями математичної фізики*. Ці рівняння описують реальні фізичні процеси і до них відносяться *рівняння еліптичного, параболічного та гіперболічного типів*.

Нехай  $\Delta$  – диференціальний оператор Лапласа (*лапласіан*):  $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ .



Типи рівнянь математичної фізики в канонічній формі

№ з/п	Тип рівняння	Назва рівняння	Канонічна форма рівняння	Які реальні процеси описують
1	Еліптичний	Пуассона	$\Delta u = F(\vec{x})$	Стаціонарні та квазістаціонарні потенціальні гідро-газодинамічні потоки, електромагнітні поля, форми поверхонь мембран; $F(\vec{x})$ – інтенсивність дії внутрішніх джерел поля.
		Лапласа	$\Delta u = 0$	
2	Параболічний	дифузії, переносу	$\frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + F(\vec{x}, t)$	Нестаціонарні процеси дифузії, переносу тепла, дифузійні процеси масопереносу.
3	Гіперболічний	хвильове	$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + F(\vec{x}, t)$	Нестаціонарні процеси поширення коливання струн, стержнів, мембран, об'ємів; акустичні та електромагнітні коливання.

4.2. Чисельне розв'язування крайових задач для рівнянь еліптичного типу

Одним з найбільш простих та універсальних чисельних методів розв'язування диференціальних рівнянь з частковими похідними є метод сіток або метод скінченних різниць.

Ідея цього методу полягає в заміні похідних або диференціалів функції їх кінцево-різницевиими співвідношеннями.

4.2.1. Апроксимація похідних

Нехай в площині  $xOy$  задана деяка область  $G$  з межею  $\Gamma$  (рис. 4.1). Проведемо дві сім'ї паралельних прямих паралельно до осей координат:

$$x_i = i \cdot h_1, \quad i = \overline{0, n}, \quad y_j = j \cdot h_2, \quad j = \overline{0, m},$$

і отримаємо різницеву сітку з кроками  $h_1$  і  $h_2$ .

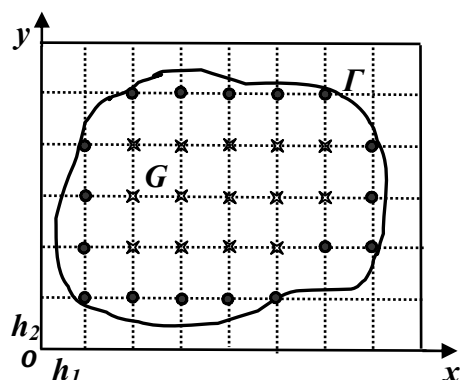


Рис. 4.1. Сіткова область для неперервної області  $G$

Точки перетину прямих називаються **вузлами**. Вузли, для яких всі чотири сусідніх вузли належать області  $G$  називаються **внутрішніми вузлами** (на рис. 4.1 позначені хрестиками), а решта виділених вузлів називають **граничними вузлами**.





В кожному внутрішньому вузлі сітки заміно часткові похідні функції  $u(x,y)$  їх **різницевиими співвідношеннями**:

правосторонні: 
$$\frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{h_1}, \quad \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial y} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{h_2},$$

лівосторонні: 
$$\frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x} \approx \frac{u_{ij} - u_{i-1,j}}{h_1}, \quad \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial y} \approx \frac{u_{ij} - u_{i,j-1}}{h_2},$$

центральні: 
$$\frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2 \cdot h_1}, \quad \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial y} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2 \cdot h_2},$$

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2 \cdot u_{ij} + u_{i-1,j}}{h_1^2}, \quad \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2 \cdot u_{ij} + u_{i,j-1}}{h_2^2}. (*)$$

Ці заміни часткових похідних їх різницевиими співвідношеннями в кожному вузлі сітки дозволяють звести розв'язок рівнянь з частковими похідними до розв'язку системи різницевих рівнянь.

#### 4.2.2. Різницева апроксимація задачі Діріхле для рівнянь Лапласа і Пуасона

**Задача Діріхле** для рівняння Пуасона формулюється так:

знайти функцію  $u=u(x, y)$ , що задовольняє в області  $G$  рівняння

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (4.1)$$

а на межі  $\Gamma$  задовольняє граничним умовам –  $u|_{\Gamma} = \varphi(x, y)$ . (4.2)

Нехай область  $G$  – прямокутник з розмірами  $a \times b$ . Виберемо кроки  $h_1$  по  $x$  та  $h_2$  по  $y$  і побудуємо сітку (рис. 4.2):

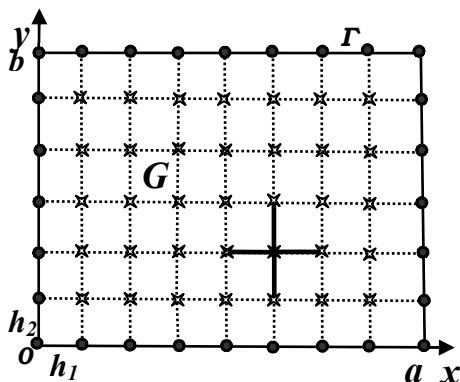


Рис. 4.2. Прямокутна область розв'язування задачі Діріхле

$$x_i = i \cdot h_1, \quad i = \overline{0, n}, \quad y_j = j \cdot h_2, \quad j = \overline{0, m}.$$

Виберемо п'ятиточковий шаблон „хрест” (рис. 4.2) і отримаємо **задачу Діріхле** на цьому шаблоні. Заміни часткові похідні в рівнянні (1) їх різницевиими співвідношеннями (\*)

$$\frac{u_{i+1,j} - 2 \cdot u_{ij} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2 \cdot u_{ij} + u_{i,j-1}}{h_2^2} = f_{ij}. \quad (4.3)$$

Рівняння (4.3) разом із значеннями  $u_{ij}$  в граничних вузлах утворюють систему лінійних алгебричних рівнянь.

Найбільш простий вигляд ця система має для прямокутної області і для  $h_1 = h_2 = h$ . У цьому випадку маємо система різницевих рівнянь (4.3) матиме

такий вигляд: 
$$\frac{u_{i+1,j} - 2 \cdot u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2 \cdot u_{ij} + u_{i,j-1}}{h^2} = f_{ij}.$$



Після нескладних перетворень отримаємо

$$u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4 \cdot u_{ij} = h^2 \cdot f_{ij}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, m-1}. \quad (4.4)$$

Граничні умови (4.2) матимуть такий вигляд:

$$\begin{cases} u_{i0} = \varphi_{i0}, & u_{im} = \varphi_{im}, & i = \overline{1, n-1}, \\ u_{0j} = \varphi_{0j}, & u_{nj} = \varphi_{nj}, & j = \overline{1, m-1}. \end{cases} \quad (4.5)$$

Систему різницевих рівнянь (4.4) та граничні умови (4.5) називають **різницевою апроксимацією** або **різницевою схемою** крайової задачі (4.1)-(4.2), яка є системою  $(n-1) \times (m-1)$  лінійних алгебричних рівнянь.

**Зауваження 1.** При  $f(x, y) \equiv 0$  рівняння (4.1) називається **рівнянням Лапласа** і різницеві рівняння (4.4) матимуть вигляд

$$u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4 \cdot u_{ij} = 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, m-1}. \quad (4.6)$$

#### 4.2.3. Чисельний метод розв'язування різницевої схеми

Розв'яжемо різницеву схему (4.4)-(4.5) ітераційним методом з усередненням Лібмана. Систему (4.4) запишемо у вигляді

$$u_{ij} = \frac{1}{4} (u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}) - \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot f_{ij}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, m-1}. \quad (4.7)$$

Відповідно методу Лібмана обчислення будемо вести так:

1) виберемо деяке початкове наближення  $u_{ij}^{(0)}$  як середнє арифметичне значення в чотирьох сусідніх граничних вузлах

$$u_{ij}^{(0)} = \frac{1}{4} (u_{i0} + u_{im} + u_{0j} + u_{nj}), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, m-1}. \quad (4.8)$$

2) послідовні наближення  $u_{ij}^{(k+1)}$ , з використанням (4.7), будемо шукати за ітераційною формулою

$$u_{ij}^{(k+1)} = \frac{1}{4} (u_{i-1,j}^{(k)} + u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)}) - \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot f_{ij}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, m-1}. \quad (4.9)$$

#### 4.2.4. Алгоритм ручного рахунку задачі Діріхле

1. Задану область  $G$  покрити квадратною сіткою з кроком  $h$ .
2. Обчислити значення функції  $\varphi(x, y)$  в граничних вузлах сітки.
3. Обчислити початкові наближення  $u_{ij}^{(0)}$  за формулою (4.8).
4. Обчислювати послідовні наближення  $u_{ij}^{(k+1)}$  в кожному внутрішньому вузлі сітки, за формулою (4.9), до виконання умови між двома сусідніми ітераціями

$$|u_{ij}^{(k+1)} - u_{ij}^{(k)}| \leq \varepsilon, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, m}.$$



**Зауваження 2.** Ітераційний процес буде збігатися значно швидше, якщо при обчисленнях наступних середніх арифметичних використовувати не тільки значення попередніх наближень, але й знову знайдені значення.

### 4.3. Приклад розрахунку стаціонарного розподілу температури в плоскій пластині

Провести чисельний розрахунок стаціонарного розподілу температури  $T(x, y)$  у внутрішніх точках прямокутної пластини довжиною  $a=4$  і  $b=3$  ( $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ ), який описується рівнянням Лапласа  $\Delta T \equiv 0$  в області  $G$  і задовольняє такі граничні умови:

на нижній ( $y=0$ ) та верхній ( $y=b$ ) сторонах пластини підтримується постійна температура:  $T(x, 0) = T_1$ ,  $T(x, b) = T_2$ ,

на бічних сторонах ( $x=0$  та  $x=a$ ) температура змінюється за такими законами:

$$T(0, y) = \frac{T_2 - T_1}{b} \cdot y + T_1, \quad T(a, y) = \frac{T_2 - T_1}{b^2} \cdot y^2 + T_1.$$

#### Розв'язання

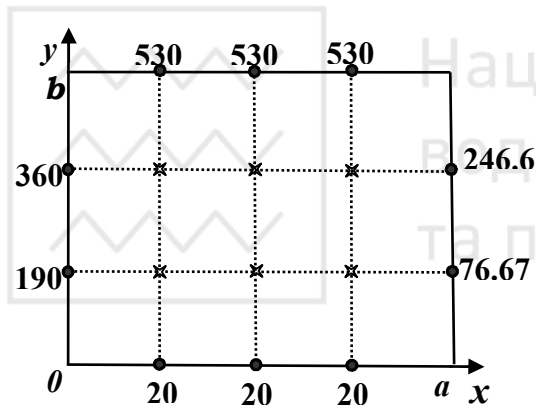


Рис. 4.3. Прямокутна пластинка розв'язування задачі Діріхле

Нехай  $T_1 = 20^\circ C$ ,  $T_2 = 530^\circ C$  і точність обчислення температури  $\mathcal{E} = 0.5$ .

1. Задану область  $G$  покриємо квадратною сіткою з кроком  $h=1$  (рис. 4.3).

2. Обчислимо значення температури в граничних вузлах сітки (на сторонах пластини):

нижня сторона:

$$T_{i0}^{(0)} = 20^\circ C, \quad i = \overline{1,3},$$

верхня сторона:

$$T_{i3}^{(0)} = 530^\circ C, \quad i = \overline{1,3},$$

ліва сторона:

$$T_{01}^{(0)} = \frac{(530-20)}{3} \cdot 1 + 20 = 190^\circ C, \quad T_{02}^{(0)} = \frac{(530-20)}{3} \cdot 2 + 20 = 360^\circ C,$$

права сторона:

$$T_{41}^{(0)} = \frac{(530-20)}{3^2} \cdot 1^2 + 20 = 76.67^\circ C, \quad T_{42}^{(0)} = \frac{(530-20)}{3^2} \cdot 2^2 + 20 = 246.67^\circ C.$$

3. Обчислимо початкові наближення  $T_{ij}^{(0)}$  за формулою (4.9) і запишемо в перший рядок таблиці 4.1:

$$T_{11}^{(0)} = \frac{1}{4} (T_{10}^{(0)} + T_{13}^{(0)} + T_{01}^{(0)} + T_{41}^{(0)}) = \frac{1}{4} (20 + 530 + 190 + 76.67) = 204.17^\circ C,$$

$$T_{21}^{(0)} = \frac{1}{4} (T_{20}^{(0)} + T_{23}^{(0)} + T_{01}^{(0)} + T_{41}^{(0)}) = \frac{1}{4} (20 + 530 + 190 + 76.67) = 204.17^\circ C,$$



$$T_{31}^{(0)} = \frac{1}{4}(T_{30}^{(0)} + T_{33}^{(0)} + T_{01}^{(0)} + T_{41}^{(0)}) = \frac{1}{4}(20 + 530 + 190 + 76.67) = 204.17 \text{ } ^\circ\text{C},$$

$$T_{12}^{(0)} = \frac{1}{4}(T_{10}^{(0)} + T_{13}^{(0)} + T_{02}^{(0)} + T_{42}^{(0)}) = \frac{1}{4}(20 + 530 + 360 + 246.67) = 289.17 \text{ } ^\circ\text{C},$$

$$T_{22}^{(0)} = \frac{1}{4}(T_{20}^{(0)} + T_{23}^{(0)} + T_{02}^{(0)} + T_{42}^{(0)}) = \frac{1}{4}(20 + 530 + 360 + 246.67) = 289.17 \text{ } ^\circ\text{C},$$

$$T_{32}^{(0)} = \frac{1}{4}(T_{30}^{(0)} + T_{33}^{(0)} + T_{02}^{(0)} + T_{42}^{(0)}) = \frac{1}{4}(20 + 530 + 360 + 246.67) = 289.17 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

4. Обчислюємо і записуємо в таблицю 4.2 послідовні наближення  $T_{ij}^{(k+1)}$  в кожному внутрішньому вузлі сітки, за формулою (4.9), до виконання умови між двома сусідніми ітераціями:

$$|T_{ij}^{(k+1)} - T_{ij}^{(k)}| \leq \varepsilon = 0.5, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, m}.$$

При цьому використовуємо зауваження 2 (див. пункт 4.2.4).

Таблиця 4.2

Розрахунок стаціонарного розподілу температури

№ з/п	$T_{11}^{(k)}$	$T_{21}^{(k)}$	$T_{31}^{(k)}$	$T_{12}^{(k)}$	$T_{22}^{(k)}$	$T_{32}^{(k)}$
0	204.17	204.17	204.17	289.17	289.17	289.17
1	175.83	172.29	139.53	338.75	332.55	312.19
2	180.26	168.09	144.24	350.70	340.24	315.29
3	182.20	171.67	145.91	353.11	342.52	316.27
4	183.69	173.03	146.49	354.05	343.34	316.62
5	184.27	173.53	146.70	354.40	343.64	316.75
6	184.48	173.71	146.78	354.53	343.75	316.80

Після шести кроків ітерацій отримали стаціонарний розподіл температури  $T(x, y)$  у внутрішніх точках прямокутної пластини (абсолютна різниця температур на п'ятому та шостому кроках ітерації у всіх внутрішніх точках пластини менша або дорівнює  $\varepsilon = 0.5$ ).

## **Тема 5 Чисельне розв'язування змішаної крайової задачі для рівняння теплопровідності**

### **5.1. Метод сіток для розв'язування рівняння теплопровідності**

Проілюструємо чисельне розв'язання методом сіток першої крайової задачі для найпростішого рівняння теплопровідності

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right). \quad (5.1)$$

При постійних  $\lambda$ ,  $c$  і  $\rho$  рівняння (5.1) можна записати у вигляді



$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (5.2)$$

де  $a^2 = \lambda / (c \cdot \rho)$  – коефіцієнт теплопровідності.

Рівняння (5.2) описує процес поширення тепла в стержні довжиною  $l$  (одновимірний випадок). Оскільки температурний режим досліджуємо протягом часу  $t_1$ , то область задання рівняння (5.2) є фазова область  $G = \{(x, t): 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq t_1\}$  (рис. 5.1).

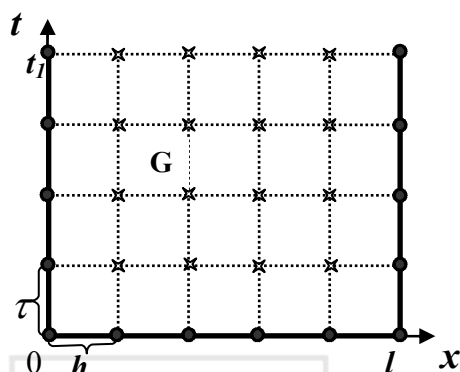


Рис. 5.1. Область задання рівняння теплопровідності

Нехай відомо розподіл температур в стержні  $[0, l]$  в початковий момент часу  $t=0$

$$T(x, 0) = f(x), \quad (5.3)$$

а на кінцях стержня підтримується задана температура, яка може змінюватись з часом

( $0 \leq t \leq t_1$ ) за відомим законом

$$\begin{cases} T(0, t) = \varphi(t), \\ T(l, t) = \phi(t), \end{cases} \quad (5.4)$$

Сформульована крайова задача (5.2)-(5.4) є **змішаною крайовою задачею для рівняння теплопровідності** з граничними умовами першого роду (перша крайова задача для рівняння теплопровідності).

Покриємо область  $G$  різницевою сіткою. Проведемо дві сім'ї паралельних прямих паралельно до осей координат:

$x_i = i \cdot h, i = \overline{1, n-1}, t_k = k \cdot \tau, k = \overline{1, m-1}$ , де  $h = l/n, \tau = t_1/m$  – відповідно кроки по осях  $Ox$  та  $Oy$ .

Введемо позначення у вузлах сітки:

$$T(x_i, t_k) = T_i^k, \quad f(x_i) = f_i, \quad \varphi(t_k) = \varphi_k, \quad \phi(t_k) = \phi_k. \quad (5.5)$$

Апроксимуємо часткові похідні різницевиими співвідношеннями:

$$а) \quad \frac{\partial^2 T(x_i, t_k)}{\partial x^2} = \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_i^k \approx \frac{T_{i-1}^k - 2 \cdot T_i^k + T_{i+1}^k}{h^2}, \quad (5.6)$$

$$б) \quad \frac{\partial T(x_i, t_k)}{\partial t} = \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_i^k \approx \frac{T_i^k - T_i^{k-1}}{\tau}, \quad (\text{неявна різницева схема}) \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial T(x_i, t_k)}{\partial t} = \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_i^k \approx \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\tau}. \quad (\text{явна різницева схема}) \quad (5.8)$$



## 5.2. Явна різницева схема

Підставимо різницеві співвідношення (5.6) і (5.8) в рівняння (5.2)

$$\frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\tau} = a^2 \frac{T_{i-1}^k - 2 \cdot T_i^k + T_{i+1}^k}{h^2}.$$

Знайдемо з цього рівняння  $T_i^{k+1}$

$$\begin{aligned} T_i^{k+1} &= \frac{a^2 \cdot \tau}{h^2} (T_{i-1}^k - 2 \cdot T_i^k + T_{i+1}^k) + T_i^k = -2 \cdot \frac{a^2 \cdot \tau}{h^2} \cdot T_i^k + T_i^k + \frac{a^2 \cdot \tau}{h^2} (T_{i-1}^k + T_{i+1}^k) = \\ &= \left(1 - 2 \cdot \frac{a^2 \cdot \tau}{h^2}\right) \cdot T_i^k + \frac{a^2 \cdot \tau}{h^2} (T_{i-1}^k + T_{i+1}^k). \end{aligned}$$

Нехай  $\sigma = \frac{a^2 \cdot \tau}{h^2}$ , тоді **явна різницева схема** змішаної задачі (5.2)-(5.4) має

тиме вигляд

$$\begin{cases} T_i^{k+1} = (1 - 2 \cdot \sigma) \cdot T_i^k + \sigma \cdot (T_{i-1}^k + T_{i+1}^k), & i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, m-1}, \\ T_i^0 = f_i, & i = \overline{0, n}, \\ T_0^k = \varphi_k, & k = \overline{1, m}, \\ T_n^k = \phi_k, & k = \overline{1, m}. \end{cases} \quad (5.9)$$

Доведено, що **явна різницева схема (5.9) є стійкою при  $0 < \sigma \leq 0.5$** .

Розглянемо два випадки:

$$\sigma = \frac{1}{2}: \quad T_i^{k+1} = \frac{1}{2} (T_{i-1}^k + T_{i+1}^k); \quad (5.10)$$

$$\sigma = \frac{1}{6}: \quad T_i^{k+1} = \frac{1}{6} (T_{i-1}^k + 4 \cdot T_i^k + T_{i+1}^k); \quad (5.11)$$

Різницева схема (5.9) з використанням (5.11) дає більш високу точність чисельного розв'язку, ніж з використанням (5.10).

При наявності теплових джерел в області  $G$  рівняння теплопровідності (5.2) має вигляд

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + F(x, t). \quad (5.12)$$

Різницеве рівняння з використанням явної різницевої схеми має вигляд

$$T_i^{k+1} = (1 - 2 \cdot \sigma) \cdot T_i^k + \sigma \cdot (T_{i-1}^k + T_{i+1}^k) + \tau \cdot F_{ik}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, m-1}. \quad (5.13)$$

$$\text{При} \quad \sigma = \frac{1}{2}: \quad T_i^{k+1} = \frac{1}{2} (T_{i-1}^k + T_{i+1}^k) + \tau \cdot F_{ik}; \quad (5.14)$$

$$\sigma = \frac{1}{6}: \quad T_i^{k+1} = \frac{1}{6} (T_{i-1}^k + 4 \cdot T_i^k + T_{i+1}^k) + \tau \cdot F_{ik}. \quad (5.15)$$



### 5.3. Алгоритм розв'язування змішаної крайової задачі для рівняння теплопровідності за явною різницевою схемою

1. Обчислити коефіцієнт температуропровідності  $a^2 = \frac{\lambda}{c \cdot \rho}$ .
2. Вибрати  $n$  – число поділу відрізка  $[0, l]$ .
3. Обчислити крок розбиття відрізка  $[0, l]$ :  $h = \frac{l}{n}$ .
4. Обчислити крок по часу при  $\sigma = \frac{1}{6}$ :  $\tau = \frac{\sigma \cdot h^2}{a^2} = \frac{h^2}{6 \cdot a^2}$ .
5. При заданому  $t_1$  обчислити кількість кроків по часу  $m = \left\lceil \frac{t_1}{\tau} \right\rceil$ , або задати  $m$ , якщо  $t_1$  не задано.
6. Покрити область  $G = \{ (x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq t_1 \}$  прямокутною різницевою сіткою з кроками  $h$  і  $\tau$ .
7. Використовуючи початкову умову (5.3) обчислити  $T_i^0, i = \overline{0, n}$ .
8. Використовуючи граничні умови (5.4) обчислити  $T_0^k, T_n^k, k = \overline{1, m}$ .
9. Використовуючи рекурентну формулу (5.11) обчислити температуру  $T_i^{k+1}, i = \overline{1, n-1}, k = \overline{1, m}$ , у внутрішніх вузлах сітки і результати розрахунків занести в таблицю.
10. Побудувати графіки часових та просторових розгортки температури.

### 5.4. Приклад розрахунку розподілу температури в стержні за допомогою явної різницевої схеми

Знайти розподіл температури  $T(x, t)$ , який задовольняє рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

в чавунному стержні довжиною  $l = 0.1$  м.

На кінцях стержня підтримуються такі температури:

$$T(0, t) = T_1 = 1000^\circ \text{C}, \quad T(l, t) = T_2 = 400^\circ \text{C},$$

а розподіл температури в початковий момент часу здійснюється за неліній-

ним законом:

$$T(x, 0) = \frac{T_2 - T_1}{l^2} \cdot x^2 + T_1.$$

#### Розв'язання

1. За таблицями теплофізичних величин знайдемо:

$$\lambda = 63 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}, \quad c = 0.5 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}, \quad \rho = 7220 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3},$$



і обчислимо коефіцієнт теплопровідності:

$$a^2 = \frac{\lambda}{c \cdot \rho} = \frac{63}{0.5 \cdot 7220} = 0.0175 (\text{м}^2 / \text{с}).$$

2. Виберемо  $n = 5$  – число поділу відрізка  $[0, l]$ .

3. Обчислимо крок розбиття відрізка  $[0, l]$ :  $h = \frac{l}{n} = \frac{0.1}{5} = 0.02 (\text{м}).$

4. Обчислимо крок по часу при  $\sigma = \frac{1}{6}$ :

$$\tau = \frac{\sigma \cdot h^2}{a^2} = \frac{h^2}{6 \cdot a^2} = \frac{0.02^2}{6 \cdot 0.0175} \approx 0.0038 (\text{с}).$$

5. Задамо кількість кроків по часу  $m = 3$ .

6. Покриємо область  $G = \{ (x, t): 0 < x < l, 0 < t < t_1 \}$  прямокутною різницевою сіткою з кроками  $h = 0.02 (\text{м})$  і  $\tau = 0.0038 (\text{с})$  і отримаємо фазову область розподілу температури в стержні (рис. 5.2).

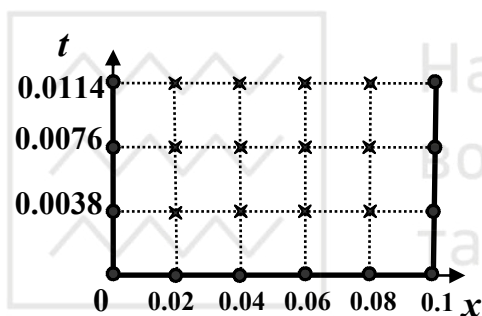


Рис. 5.2. Фазова область розподілу температури в стержні

Явна різницєва схема даної задачі:

$$\begin{cases} T_i^{k+1} = \frac{1}{6} (T_{i-1}^k + 4 \cdot T_i^k + T_{i+1}^k), & i = \overline{1, 4}, \quad j = \overline{1, 3}, \\ T_i^0 = \frac{T_2 - T_1}{l^2} \cdot x_i^2 + T_1, & i = \overline{0, 5}, \\ T_0^k = T_1, & k = \overline{1, 3}, \\ T_n^k = T_2, & k = \overline{1, 3}. \end{cases}$$

7. Використовуючи початкову умову (5.3) обчислимо  $T_i^0, i = \overline{0, 5}$  (табл. 5.1,  $k = 0$ ).

8. Використовуючи граничну умову (5.4) обчислимо  $T_0^k, T_n^k, k = \overline{1, m}$  (табл. 5.1,  $i = 0$  та  $i = 5$ ).

9. Використовуючи формулу (5.11) обчислимо  $T_i^{k+1}, i = \overline{1, n-1}, k = \overline{1, m}$ , у внутрішніх вузлах сітки (табл. 5.1,  $i = \overline{1, 4}, k = \overline{1, 3}$ ).

Таблиця 5.1

Розрахунок розподілу температури в стержні

		i						
		0	1	2	3	4	5	
k	t	h	0	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1
	0	0		1000	976	904	784	616
1	$\tau = 0.0038$		1000	968	896	776	608	400
2	$2\tau = 0.0076$		1000	961.33	888	768	601.33	400
3	$3\tau = 0.0114$		1000	955.56	880.22	760.22	595.56	400





**10.** Побудуємо часові та просторові розгортки температури у вигляді графіків (рис. 5.3 – при постійних значеннях  $x_{\otimes}$  та рис. 5.4 – при постійних значеннях  $t_{\otimes}$ ).

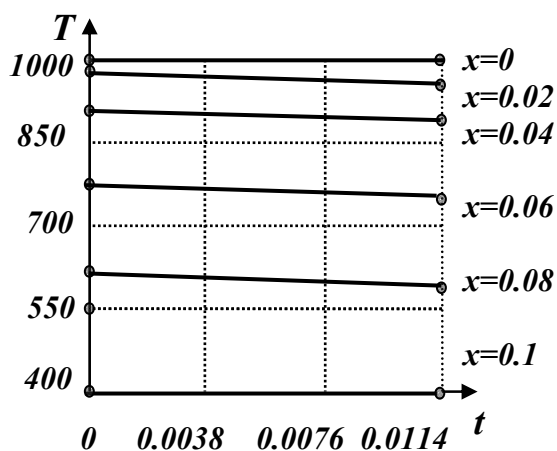


Рис. 5.3. Графіки  $T=T(x_{\otimes}, t)$

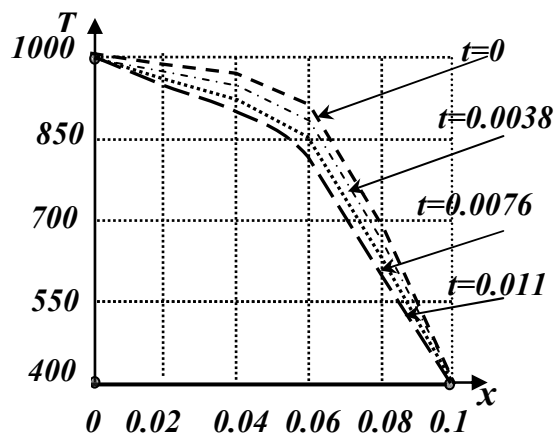


Рис. 5.4. Графіки  $T=T(x, t_{\otimes})$

## Тема 6. Чисельне розв'язування крайової задачі для ЗДР 2-го порядку методом прогонки

### 6.1 Постановка задачі

Нехай задане ЗДР 2-го порядку

$$F(x, y, y', y'') = 0. \quad (6.1)$$

Крайова задача для рівняння (6.1) формулюється так: знайти функцію  $y = y(x)$ , яка на відрізку  $[a, b]$  задовольняє рівняння (6.1), а на кінцях відрізка — крайові умови:

$$\begin{cases} \varphi_1[y(a), y'(a)] = 0, \\ \varphi_2[y(b), y'(b)] = 0. \end{cases} \quad (6.2)$$

Якщо рівняння (6.1) та граничні умови (6.2) є лінійними, то крайова задача (6.1)-(6.2) називається лінійною крайовою задачею і має такий вигляд:

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = f(x), \quad (6.3)$$

$$\begin{cases} \alpha_0 \cdot y(a) + \alpha_1 \cdot y'(a) = \gamma_1, \\ \beta_0 \cdot y(b) + \beta_1 \cdot y'(b) = \gamma_2, \end{cases} \quad (6.4)$$

де  $p(x), q(x), f(x)$  — відомі неперервні функції на відрізку  $[a, b]$ ;

$\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \gamma_0, \gamma_1$  — задані постійні величини, причому  $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$  та  $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$ .

Якщо  $\gamma_0 = \gamma_1 = 0$ , то крайові умови (6.4) називаються однорідними.



## 6.2. Метод прогонки

Замінімо рівняння (6.3) та крайові умови (6.4) центральними різницевиими співвідношеннями і отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \cdot \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i \cdot y_i = f_i, & i = \overline{1, n-1}, \\ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \cdot \frac{y_1 - y_0}{h} = \gamma_0, & \beta_0 y_n + \beta_1 \cdot \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} = \gamma_1. \end{cases} \quad (6.5)$$

Розв'яжемо систему рівнянь (6.5) методом прогонки.

Для цього перші (n-1)-рівняння системи (6.5) запишемо у вигляді

$$y_{i+1} + m_i \cdot y_i + k_i \cdot y_{i-1} = \varphi_i, \quad (6.6)$$

де 
$$m_i = \frac{2h^2 q_i - 4}{2 + hp_i}, \quad k_i = \frac{2 - hp_i}{2 + hp_i}, \quad \varphi_i = \frac{2h^2 f_i}{2 + hp_i}. \quad (6.7)$$

Зведемо рівняння (6.6) до вигляду

$$y_i = c_i \cdot (d_i - y_{i+1}), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (6.8)$$

де коефіцієнти  $c_i, d_i$  обчислюються за такими формулами:

а) при  $i = 1$ :

$$\begin{cases} c_1 = \frac{\alpha_1 - \alpha_0 h}{m_1(\alpha_1 - \alpha_0 h) + k_1 \alpha_1}, \\ d_1 = \varphi_1 - \frac{\gamma_0 h}{\alpha_1 - \alpha_0 h}, \end{cases} \quad (6.9)$$

б) при  $i = \overline{2, n}$ :

$$\begin{cases} c_i = \frac{1}{m_i - k_i c_{i-1}}, \\ d_i = \varphi_i - k_i \cdot c_{i-1} \cdot d_{i-1}. \end{cases} \quad (6.10)$$

Алгоритм обчислень методом прогонки складається з прямого та зворотнього ходів:

- а) прямий хід:
- 1) обчислюємо значення  $x_i = x_0 + i \cdot h, \quad i = \overline{1, n}$  ;
  - 2) обчислюємо значення  $p(x_i), q(x_i), f(x_i), \quad i = \overline{1, n}$  ; ;
  - 3) за формулами (6.7) обчислюємо  $m_i, k_i, \varphi_i, \quad i = \overline{1, n}$  ;
  - 4) за формулами (6.9) обчислюємо  $c_1, d_1$  ;
  - 5) за рекурентною формулою (6.10) послідовно обчислюємо  $c_i, d_i, \quad i = \overline{2, n}$  ;

б) зворотній хід:

- 1) використовуючи останнє рівняння системи (6.5) обчислюємо



$$y_n = \frac{2\gamma_1 h - \beta_1(d_n - c_{n-1} \cdot d_{n-1})}{2\beta_0 h + \beta_1(c_{n-1} - \frac{1}{c_n})};$$

- 2) за формулою (6.8) обчислюємо значення  $y_i$ ,  $i = \overline{n-1, 1}$  ;  
3) використовуючи передостаннє рівняння системи (6.5) обчислюємо

$$y_0 = \frac{\alpha_1 y_1 - \gamma_0 h}{\alpha_1 - \alpha_0 h}.$$

### 6.3. Приклад розв'язування крайової задачі для ЗДР 2-го порядку методом прогонки

Методом прогонки знайти чисельні розв'язки рівняння  $y'' - 2xy' + 2y = 3x$ , що задовольняють на проміжку  $[0;1]$  крайовим умовам

$$\begin{cases} y(0) + 2 \cdot y'(0) = 0, \\ 3 \cdot y(1) - y'(1) = -1. \end{cases}$$

#### Розв'язання

Нехай  $h=0,1$ . Порівнюючи рівняння та крайові умови з (6.3)-(6.4) маємо:

$$p(x) = -2x, \quad q(x) = 2, \quad f(x) = 3x, \\ \alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = 2, \quad \beta_0 = 3, \quad \beta_1 = -1, \quad \gamma_0 = 0, \quad \gamma_1 = -1.$$

Всі обчислення заносимо в таблицю 6.1.

Таблиця 6.1

#### Чисельне розв'язування крайової задачі для ЗДР 2-го порядку методом прогонки

$i$	$x_i$	$p(x_i)$	$q(x_i)$	$f(x_i)$	$m_i$	$k_i$	$\varphi_i$	Прямий хід		Зворотній хід
								$c_i$	$d_i$	$y_i$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	—	—	—	—	—	—	—	—	-0,435
1	0,1	-0,2	2,0	0,3	-2,000	1,020	0,003	-1,080	0,003	-0,413
2	0,2	-0,4	2,0	0,6	-2,020	1,041	0,006	-1,115	0,010	-0,379
3	0,3	-0,6	2,0	0,9	-2,041	1,062	0,009	-1,167	0,021	-0,330
4	0,4	-0,8	2,0	1,2	-2,063	1,083	0,013	-1,253	0,038	-0,263
5	0,5	-1,0	2,0	1,5	-2,084	1,105	0,016	-1,430	0,069	-0,171
6	0,6	-1,2	2,0	1,8	-2,106	1,128	0,019	-2,023	0,131	-0,051
7	0,7	-1,4	2,0	2,1	-2,129	1,151	0,023	5,026	0,326	0,106
8	0,8	-1,6	2,0	2,4	-2,152	1,174	0,026	-0,124	-1,900	0,305
9	0,9	-1,8	2,0	2,7	-2,176	1,198	0,030	-0,493	-0,253	0,560
10	1,0	-2,0	2,0	3,0	-2,200	1,222	0,033	-0,626	-0,119	0,881



## **Змістовий модуль 2. Постановка та чисельне розв'язування задачі теплопровідності для поздовжніх ребер**

### **Тема 7. Закономірності переносу теплової енергії та постановка задачі теплопровідності ребер**

#### **7.1. Види переносу теплової енергії**

Розрізняють три види переносу енергії у вигляді теплоти: теплопровідність, конвекцію і теплове випромінювання

**Теплопровідність** — молекулярний перенос теплоти в неперервному середовищі, що виникає за рахунок різниці температур. Основним законом теплопровідності є закон Фур'є, згідно з яким тепловий потік прямо пропорційний градієнту температури та площі поверхні ортогональної до напрямку розповсюдження теплового потоку.

Для одномірного випадку цей закон описується таким рівнянням:

$$Q = -\lambda \cdot \frac{dT}{dx} \cdot F, \quad (7.1)$$

де  $Q$  — тепловий потік, Вт;  $\lambda$  — коефіцієнт теплопровідності, Вт/(м·К);  $\frac{dT}{dx}$  — градієнт температури, К/м;  $F$  — площа поперечного перерізу тіла, м<sup>2</sup>.

**Конвекція** — процес переносу теплоти при переміщенні об'ємів рідини або газу із зони з однією температурою в зону з іншою температурою, при цьому перенос теплоти нерозривно пов'язаний з переносом самого середовища.

**Теплове випромінювання** — процес розповсюдження теплової енергії за допомогою електромагнітних хвиль.

Сумісний процес переносу теплоти конвекцією та теплопровідністю в рідині або газі називається **конвективним теплообміном**. Конвективний теплообмін між поверхнею тіла та потоками рідини або газу називають **конвективною тепловіддачею**, для розрахунку якої використовується рівняння Ньютона-Ріхмана

$$Q = \alpha \cdot F \cdot (T - T_c), \quad (T > T_c), \quad (7.2)$$

де  $Q$  — тепловий потік, Вт;  $\alpha$  — коефіцієнт тепловіддачі, що характеризує інтенсивність теплообміну між поверхнею тіла та навколишнім середовищем, Вт/(м<sup>2</sup>·К);  $T$  та  $T_c$  — температури поверхні тіла та середовища.

Одним з основних способів інтенсифікації теплообміну при відведенні тепла є використання розвинутих поверхонь. **Розвинутою поверхнею** називають гладку поверхню разом з виступами, які називають ребрами. Ребра бувають поздовжніми та радіальними різних профілів (прямокутні, трикутні, трапецевидні, вгнуті, випуклі). Якщо ребра мають конічну, або циліндричну форму, їх називають шипами.

**Ефективність ребра** — це відношення теплового потоку, дійсно відведеного ребром, до потоку, що відвело б ідеально провідне ребро ( $\lambda = \infty$ ). Для ідеального ребра температура по його висоті залишається незмінною і дорівнює температурі в основі ребра. Ефективність ребра залежить від його форми, розмірів, матеріалу та коефіцієнта тепловіддачі на поверхні ребра.



## 7.2. Узагальнене диференціальне рівняння теплопровідності для ребра

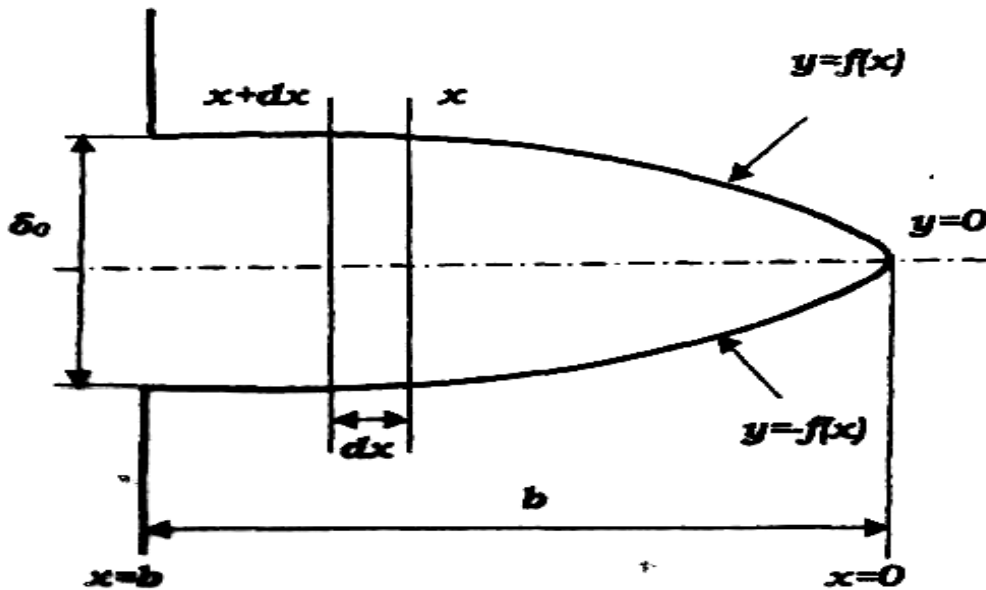


Рис. 7.1. Поздовжнє ребро довільного профілю

Диференціальне рівняння теплопровідності, що описує розподіл температури вздовж ребра (рис. 7.1), отримують шляхом розгляду стаціонарного теплового балансу нескінченно малого елемента ребра висотою  $dx$ , замкненого між площинами  $x$  та  $x+dx$ , що паралельні основи, та кривими  $\pm f(x)$ , що обмежують профіль ребра.

Для зручності подальших викладок відлік температури в ребрі  $T$  будемо вести від температури навколишнього середовища  $T_c$ , тобто надмірну температуру або *температурний напір* в поточному перерізі ребра позначимо через  $\theta$

$$\theta = T - T_c, \quad (7.3)$$

Для елемента ребра з температурою  $\theta$  та коефіцієнтом теплопровідності  $\lambda$  різниця теплового потоку, що надходить в елемент через переріз  $x+dx$  та теплового потоку, що покидає його через переріз  $x$  за рахунок теплопровідності дорівнює

$$dQ = \lambda \frac{d}{dx} \left[ F(x) \frac{d\theta}{dx} \right] dx. \quad (7.4)$$

Процес розподілу температури стаціонарний, тому різниця (7.4) повинна дорівнювати тепловому потоку, що відводиться з бокової поверхні елемента ребра в навколишнє середовище

$$dQ = \alpha \cdot u(x) \cdot \theta \cdot dx, \quad (7.5)$$

де  $\alpha$  — коефіцієнт тепловіддачі, Вт/(м<sup>2</sup>·К);  $u(x)$  — функція периметру, м.



Так як ліві частини співвідношень (7.4) і (7.5) рівні між собою, то можна прирівняти праві частини

$$\lambda \frac{d}{dx} \left[ F(x) \frac{d\theta}{dx} \right] dx = \alpha \cdot u(x) \cdot \theta \cdot dx. \quad (7.6)$$

Після нескладних перетворень отримаємо диференціальне рівняння теплопровідності для ребра

$$F(x) \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{dF(x)}{dx} \frac{d\theta}{dx} - \frac{\alpha \cdot u(x) \cdot \theta}{\lambda} = 0. \quad (7.7)$$

Диференціальне рівняння теплопровідності та граничні умови дають повне математичне формулювання крайової задачі теплопровідності для ребра при  $\alpha = const$ .

### 7.3. Основні допущення при постановці та розв'язуванні задачі теплопровідності ребер

При постановці задачі теплопровідності ребер використовують певні допущення, що дозволяють чітко означити і обмежити задачу, а часто і спростити її розв'язок. Аналіз теплопровідності ребер трьох основних типів (поздовжніх, радіальних та шипів) базується на таких допущеннях:

1. Тепловий потік і розподіл температури по довжині ребра є стаціонарними.
2. Товщина ребра мала у порівнянні з його висотою, тому температурними градієнтами можна знехтувати і процес розподілу температури є одномірним.
3. Теплопровідність матеріалу постійна і дорівнює середньому значенню робочих температур.
4. Внутрішні джерела теплоти в ребрі відсутні.
5. Температура навколишнього середовища та температура основи ребра постійні.
6. Коефіцієнт тепловіддачі  $\alpha$  в загальному випадку є функцією відстані  $x$  від основи ребра та температурного напору  $\theta$  між ребром та навколишнім середовищем в поточному перерізі ребра.

## Тема 8. Постановка задачі теплопровідності для поздовжніх ребер при постійному коефіцієнті тепловіддачі на поверхні ребра та теплоізоляції його торця

### 8.1. Загальна постановка задачі

Розглянемо постановку задачі теплопровідності поздовжніх ребер різного профілю з відведенням теплоти конвекцією при постійному коефіцієнті тепловіддачі  $\alpha$  на поверхні ребра та теплоізоляції його торця. Замінімо в рівнянні (7.7) (див. тему 7, розділ 7.2) функцію поперечного перерізу для одиниці ребра  $F(x)$  подвоєною функцією профілю  $2 \cdot f(x)$  і отримаємо рівняння теплопровідності для поздовжніх ребер довільного профілю

$$2 \cdot f(x) \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{2 \cdot d[f(x)]}{dx} \frac{d\theta}{dx} - \frac{2 \cdot \alpha}{\lambda} \cdot \theta = 0. \quad (8.1)$$

Граничні умови у випадку теплоізоляції торця ребра мають такий вигляд:

$$\text{при } x = 0: \quad \frac{d\theta}{dx} = 0, \quad (8.2)$$

$$\text{при } x = b: \quad \theta = \theta_0. \quad (8.3)$$

Узагальнена функція профілю  $f(x)$  для поздовжніх ребер записується так:

$$f(x) = \frac{\delta_0}{2} \cdot \left(\frac{x}{b}\right)^{(1-2n)/(1-n)}, \quad (8.4)$$

де  $\delta_0$  – товщина ребра в основі,  $b$  – висота ребра.

## 8.2. Постановка задачі теплопровідності для поздовжніх ребер

### 8.2.1. Поздовжнє ребро прямокутного профілю

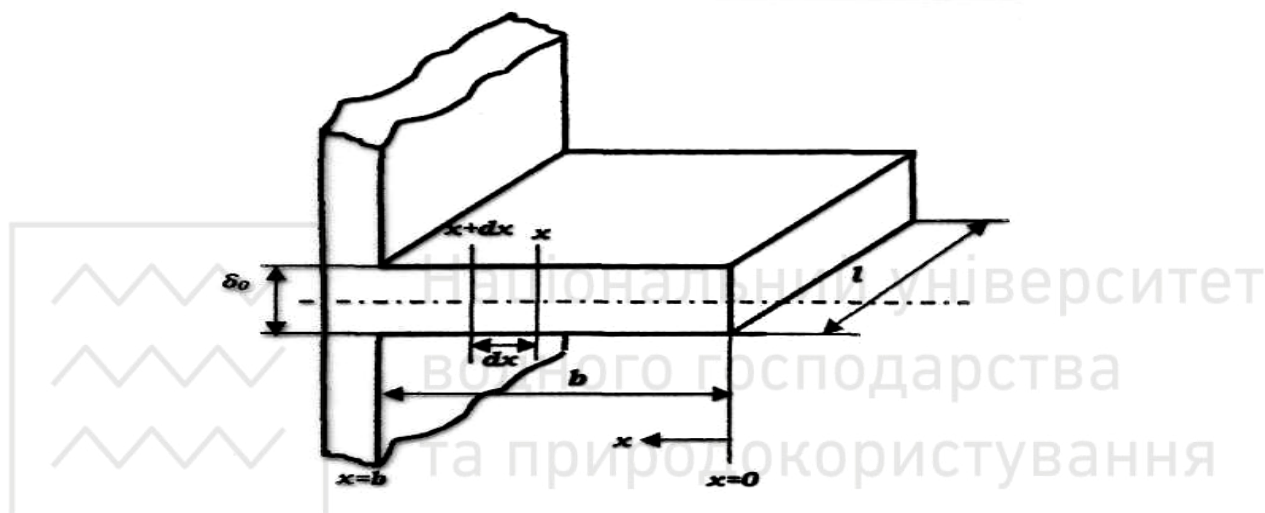


Рис. 8.1. Поздовжнє ребро прямокутного профілю.

Для ребра показаного на рис. 8.1 показник степеня узагальненої функції профілю ребра (8.4) дорівнює  $n=1/2$ .

Функція профілю такого ребра має вигляд

$$f(x) = \frac{\delta_0}{2}. \quad (8.5)$$

Диференціал цієї функції:

$$\frac{df(x)}{dx} = 0. \quad (8.6)$$

Підставимо співвідношення (8.5) і (8.6) в (8.1):

$$2 \cdot \frac{\delta_0}{2} \frac{d^2\theta}{dx^2} + 2 \cdot 0 \cdot \frac{d\theta}{dx} - \frac{2 \cdot \alpha}{\lambda} \cdot \theta = 0.$$

Після нескладних перетворень отримаємо диференціальне рівняння теплопровідності для поздовжнього ребра прямокутного профілю

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{2 \cdot \alpha}{\lambda \cdot \delta_0} \cdot \theta = 0. \quad (8.7)$$



### 8.2.2. Поздовжнє ребро трикутного профілю

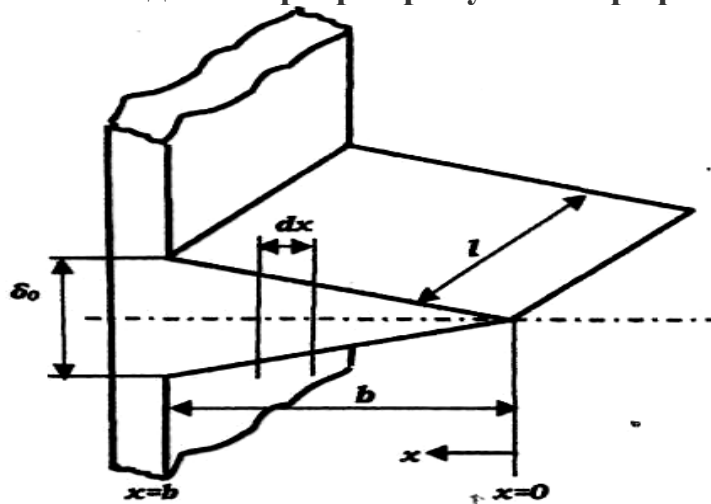


Рис. 8.2. Поздовжнє ребро трикутного профілю.

Для ребра показаного на рис. 8.2 показник степеня узагальненої функції профілю (8.4) дорівнює  $n=0$ .

Функція профілю такого ребра має вигляд

$$f(x) = \frac{\delta_0}{2} \cdot \frac{x}{b} = \frac{\delta_0 x}{2b} \quad (8.8)$$

Диференціал цієї функції:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{\delta_0}{2b} \quad (8.9)$$

Підставимо співвідношення (8.8) і (8.9) в (8.1):

$$2 \cdot \frac{\delta_0 x}{2b} \frac{d^2 \theta}{dx^2} + 2 \cdot \frac{\delta_0}{2b} \cdot \frac{d\theta}{dx} - \frac{2 \cdot \alpha}{\lambda} \cdot \theta = 0.$$

Після нескладних перетворень отримаємо диференціальне рівняння теплопровідності для поздовжнього ребра трикутного профілю

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d\theta}{dx} - \frac{2 \cdot \alpha}{\lambda \cdot \delta_0} \cdot \frac{b}{x} \theta = 0. \quad (8.10)$$

### 8.2.3. Поздовжнє ребро вгнутого параболічного профілю

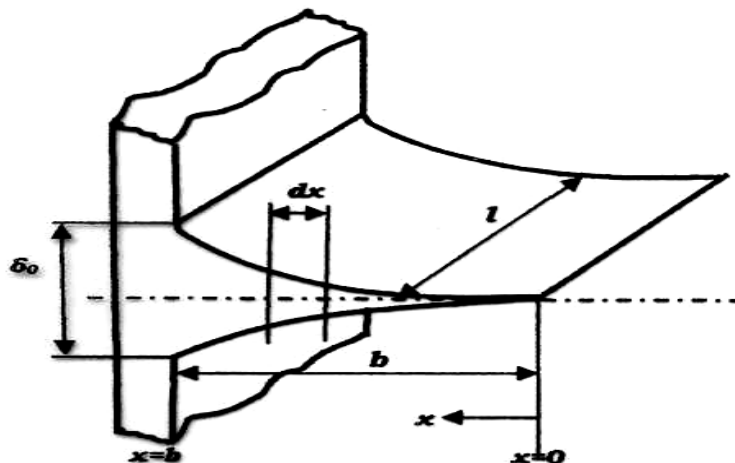


Рис. 8.3. Поздовжнє ребро вгнутого параболічного профілю.





Для ребра показаного на рис. 8.3 показник степеня узагальненої функції профілю (8.4) дорівнює  $n=\infty$ .

Функція профілю такого ребра має вигляд

$$f(x) = \frac{\delta_0}{2} \cdot \left(\frac{x}{b}\right)^2 = \frac{\delta_0 x^2}{2b^2}. \quad (8.11)$$

Диференціал цієї функції:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{\delta_0 x}{b^2}. \quad (8.12)$$

Підставимо співвідношення (8.11) і (8.12) в (8.1):

$$2 \cdot \frac{\delta_0 x^2}{2b^2} \frac{d^2\theta}{dx^2} + 2 \cdot \frac{\delta_0 x}{b^2} \cdot \frac{d\theta}{dx} - \frac{2 \cdot \alpha}{\lambda} \cdot \theta = 0.$$

Після нескладних перетворень отримаємо диференціальне рівняння теплопровідності для поздовжнього вгнутого параболічного ребра

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{2}{x} \cdot \frac{d\theta}{dx} - \frac{2 \cdot \alpha}{\lambda \cdot \delta_0} \cdot \frac{b^2}{x^2} \theta = 0. \quad (8.13)$$

#### 8.2.4. Поздовжнє ребро випуклого параболічного профілю

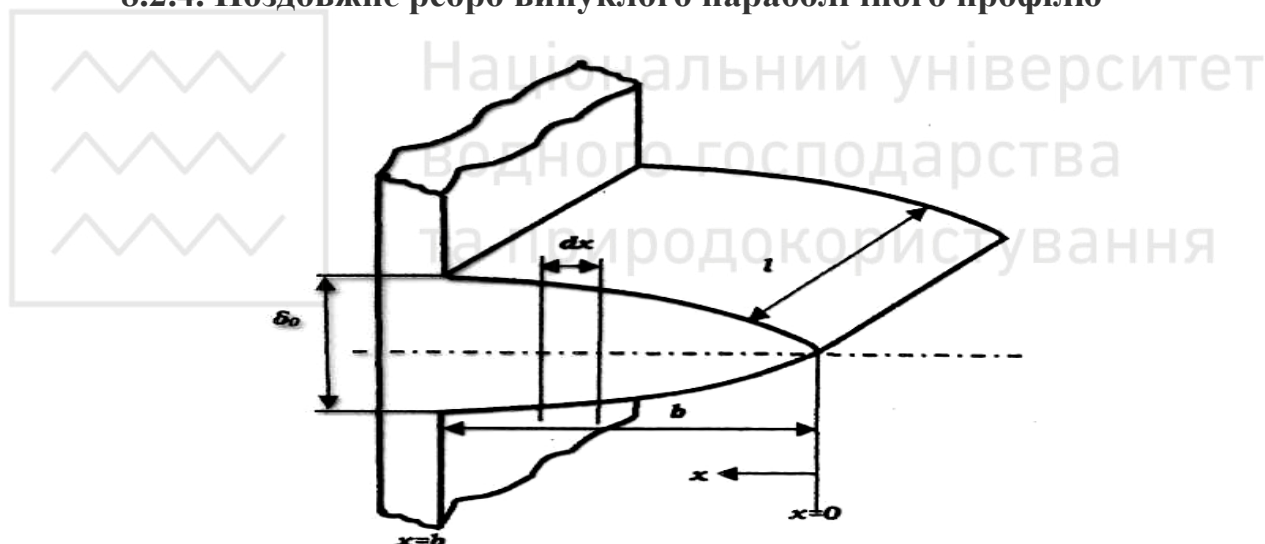


Рис. 8.4. Поздовжнє ребро випуклого параболічного профілю.

Для ребра показаного на рис. 8.4 показник степеня  $n$  узагальненої функції профілю (8.4) дорівнює  $n=1/3$ .

Функція профілю такого ребра має вигляд

$$f(x) = \frac{\delta_0}{2} \cdot \left(\frac{x}{b}\right)^{1/2} = \frac{\delta_0 \sqrt{x}}{2\sqrt{b}}. \quad (8.14)$$

Диференціал цієї функції:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{\delta_0}{4\sqrt{b \cdot x}}. \quad (8.15)$$

Підставимо співвідношення (8.14) і (8.15) в (8.1):

$$2 \cdot \frac{\delta_0 \sqrt{x}}{2\sqrt{b}} \frac{d^2\theta}{dx^2} + 2 \cdot \frac{\delta_0}{4\sqrt{b \cdot x}} \cdot \frac{d\theta}{dx} - \frac{2 \cdot \alpha}{\lambda} \cdot \theta = 0.$$



Після нескладних перетворень отримаємо диференціальне рівняння теплопровідності для поздовжнього випуклого параболічного ребра

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{1}{2x} \cdot \frac{d\theta}{dx} - \frac{2 \cdot \alpha}{\lambda \cdot \delta_0} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{x}} \theta = 0. \quad (8.16)$$

## **Тема 9. Чисельне розв'язування задачі теплопровідності для поздовжніх ребер при постійному коефіцієнті тепловіддачі на поверхні ребра та теплоізоляції його торця**

### **1. Постановка задачі**

Загальна постановка крайової задачі теплопровідності для ребер (див. тему 6, розділ 6.1) має такий вигляд: знайти функцію  $\theta = \theta(x)$ , яка на відрізку  $[a, b]$  задовольняє рівняння

$$\theta'' + p(x) \cdot \theta' + q(x) \cdot \theta = r(x), \quad (9.1)$$

а на кінцях відрізка — крайові умови:

$$\begin{cases} \alpha_0 \cdot \theta(a) + \alpha_1 \cdot \theta'(a) = \gamma_0, \\ \beta_0 \cdot \theta(b) + \beta_1 \cdot \theta'(b) = \gamma_1. \end{cases} \quad (9.2)$$

Порівнюючи крайову задачу (9.1)-(9.2) з крайовою задачею (8.1)-(8.3), постановка якої наведена в темі 8 (розділ 8.1), отримаємо крайову задачу теплопровідності для поздовжніх ребер при постійному коефіцієнті тепловіддачі на поверхні ребра та теплоізоляції його торця яка формулюється так: знайти функцію  $\theta = \theta(x)$ , яка на відрізку  $[0, b]$  задовольняє рівняння

$$2 \cdot f(x) \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{2 \cdot d[f(x)]}{dx} \frac{d\theta}{dx} - \frac{2 \cdot \alpha}{\lambda} \cdot \theta = 0.$$

або

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{1}{f(x)} \frac{d[f(x)]}{dx} \frac{d\theta}{dx} - \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{\alpha}{\lambda} \cdot \theta = 0. \quad (9.3)$$

а на кінцях відрізка — крайові умови:

$$\begin{cases} \theta'(0) = 0, \\ \theta(b) = \theta_0. \end{cases} \quad (9.4)$$

Якщо порівняти крайові задачі (9.1)-(9.2) та (9.3)-(9.4), то можна помітити, що відомі неперервні функції на відрізку  $[0, b]$  та задані постійні величини відповідно дорівнюють:

$$p(x) = \frac{1}{f(x)} \frac{d[f(x)]}{dx}, \quad q(x) = -\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{\alpha}{\lambda}, \quad r(x) = 0,$$

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 1, \quad \beta_0 = 1, \quad \beta_1 = 0, \quad \gamma_0 = 0, \quad \gamma_1 = 0.$$



## 9.2. Чисельне розв'язування задачі теплопровідності для поздовжніх ребер при постійному коефіцієнті тепловіддачі на поверхні ребра та теплоізоляції його торця

Поздовжнє ребро товщиною в основі  $\delta_0=0.02$  м і висотою  $b=0.1$  м, що виготовлене зі сталі (коефіцієнт теплопровідності  $\lambda=35$  Вт/(м·К)), відводить теплоту конвекцією ( $\alpha=const$ ) в навколишнє середовище, температура якого  $T_c=20^\circ\text{C}$ . Температура ребра в основі  $T_0=90^\circ\text{C}$ , а коефіцієнт тепловіддачі  $\alpha=50$  Вт/(м<sup>2</sup>·К). Необхідно знайти розподіл температур в ребрі при теплоізоляції його торця.

### 9.2.1. Поздовжнє ребро прямокутного профілю

Постановка задачі сформульована в темі 8 (розділ 8.2.1).

Знайдемо методом прогонки чисельні розв'язки рівняння

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{2 \cdot \alpha}{\lambda \cdot \delta_0} \cdot \theta = 0, \quad (9.5)$$

що задовольняє на проміжку  $[0, b]$  крайові умови: 
$$\begin{cases} \theta'(0) = 0, \\ \theta(b) = \theta_0. \end{cases} \quad (9.6)$$

Розв'язками рівняння (9.5) будуть температурні напори в ребрі. Коли додамо ці напори до температури середовища  $T_c$ , то отримаємо розподіл температури в ребрі.

Знайдемо температурний напір в основі ребра

$$\theta_0 = T_0 - T_c = 90 - 20 = 70^\circ\text{C}.$$

Підставимо значення коефіцієнтів

$$\frac{2 \cdot \alpha}{\lambda \cdot \delta_0} = \frac{2 \cdot 50}{35 \cdot 0.02} = \frac{100}{0.7} = 142.857; \quad b = 0.1; \quad \theta_0 = 70;$$

в (9.5)-(9.6) і отримаємо крайову задачу: знайти чисельні розв'язки рівняння (температурні напори)

$$\theta'' - 142.857 \cdot \theta = 0, \quad (9.7)$$

що задовольняє на проміжку  $[0; 0.1]$  крайові умови: 
$$\begin{cases} \theta'(0) = 0, \\ \theta(0.1) = 70. \end{cases} \quad (9.8)$$

Порівнюючи крайові задачі (9.7)-(9.8) та (9.1)-(9.2) маємо

$$p(x) = 0, \quad q(x) = -142.857, \quad r(x) = 0,$$

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 1, \quad \beta_0 = 1, \quad \beta_1 = 0, \quad \gamma_0 = 0, \quad \gamma_1 = 70.$$

Нехай кількість кроків розбиття ребра по довжині дорівнює  $k=10$ , тоді крок  $h=b/k=0.1/10=0.01$ .

Всі обчислення, отримані методом прогонки (див. тему 6, розділи 6.2 і 6.3), заносимо в таблицю 9.1.



Таблиця 9.1

Метод прогонки для ребра прямокутного профілю

i	x <sub>i</sub>	p(x <sub>i</sub> )	q(x <sub>i</sub> )	r(x <sub>i</sub> )	m <sub>i</sub>	k <sub>i</sub>	φ <sub>i</sub>	Прямий хід		Зворот- ний хід	Темпе- ратура
								c <sub>i</sub>	d <sub>i</sub>	θ <sub>i</sub>	T <sub>i</sub> = θ <sub>i</sub> +T <sub>c</sub>
0	0	—	—	—	—	—	—	—	—	40.865	60.865
1	0.01	0	-142.857	0	-2.014	1	0	-0.986	0	40.865	60.865
2	0.02	0	-142.857	0	-2.014	1	0	-0.972	0	41.449	61.449
3	0.03	0	-142.857	0	-2.014	1	0	-0.960	0	42.625	62.625
4	0.04	0	-142.857	0	-2.014	1	0	-0.948	0	44.410	64.410
5	0.05	0	-142.857	0	-2.014	1	0	-0.938	0	46.829	66.829
6	0.06	0	-142.857	0	-2.014	1	0	-0.929	0	49.917	69.917
7	0.07	0	-142.857	0	-2.014	1	0	-0.922	0	53.719	73.719
8	0.08	0	-142.857	0	-2.014	1	0	-0.915	0	58.287	78.287
9	0.09	0	-142.857	0	-2.014	1	0	-0.910	0	63.689	83.689
10	0.10	0	-142.857	0	-2.014	1	0	-0.905	0	70.000	90.000

9.2.2. Поздовжнє ребро трикутного профілю

Постановка задачі сформульована в темі 8 (розділ 8.2.2).

Знайдемо методом прогонки чисельні розв'язки рівняння

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d\theta}{dx} - \frac{2 \cdot \alpha \cdot b}{\lambda \cdot \delta_0 \cdot x} \cdot \theta = 0. \quad (9.9)$$

що задовольняє на проміжку  $[0, b]$  крайові умови: 
$$\begin{cases} \theta'(0) = 0, \\ \theta(b) = \theta_0. \end{cases} \quad (9.10)$$

Підставимо значення коефіцієнтів

$$\frac{2 \cdot \alpha \cdot b}{\lambda \cdot \delta_0} = \frac{2 \cdot 50 \cdot 0.1}{35 \cdot 0.02} = \frac{10}{0.7} = 14.286; \quad b = 0.1; \quad \theta_0 = 70;$$

в (9.9)-(9.10) і отримаємо крайову задачу: знайти чисельні розв'язки рівняння (температурні напори)

$$\theta'' + \frac{1}{x} \cdot \theta' - \frac{14.286}{x} \cdot \theta = 0, \quad (9.11)$$

що задовольняє на проміжку  $[0; 0.1]$  крайові умови: 
$$\begin{cases} \theta'(0) = 0, \\ \theta(0.1) = 70. \end{cases} \quad (9.12)$$

Порівнюючи крайові задачі (9.11)-(9.12) та (9.1)-(9.2) маємо:

$$p(x) = \frac{1}{x}, \quad q(x) = -\frac{14.286}{x}, \quad r(x) = 0,$$

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 1, \quad \beta_0 = 1, \quad \beta_1 = 0, \quad \gamma_0 = 0, \quad \gamma_1 = 70.$$

Нехай кількість кроків розбиття ребра по довжині дорівнює  $k=10$ , тоді крок  $h=b/k=0.1/10=0.01$ .



Всі обчислення, отримані методом прогонки (див. тему 6, розділи 6.2 і 6.3), заносимо в таблицю 9.2.

Таблиця 9.2

Метод прогонки для ребра трикутного профілю

i	x <sub>i</sub>	p(x <sub>i</sub> )	q(x <sub>i</sub> )	r(x <sub>i</sub> )	m <sub>i</sub>	k <sub>i</sub>	φ <sub>i</sub>	Прямий хід		Зворотній хід	Температура
								c <sub>i</sub>	d <sub>i</sub>		
0	0	—	—	—	—	—	—	—	—	28.949	48.949
1	0.01	100.000	-1428.571	0	-1.429	0.333	0	-0.913	0	28.949	48.949
2	0.02	50.000	-714.286	0	-1.657	0.600	0	-0.901	0	31.706	51.706
3	0.03	33.333	-476.190	0	-1.755	0.714	0	-0.900	0	35.173	55.173
4	0.04	25.000	-357.143	0	-1.810	0.778	0	-0.901	0	39.084	59.084
5	0.05	20.000	-285.714	0	-1.844	0.818	0	-0.904	0	43.367	63.367
6	0.06	16.667	-238.095	0	-1.868	0.846	0	-0.906	0	47.997	67.997
7	0.07	14.286	-204.082	0	-1.886	0.867	0	-0.909	0	52.971	72.971
8	0.08	12.500	-178.571	0	-1.899	0.882	0	-0.911	0	58.290	78.290
9	0.09	11.111	-158.730	0	-1.910	0.895	0	-0.914	0	63.962	83.962
10	0.10	10.000	-142.857	0	-1.918	0.905	0	-0.916	0	70.000	90.000

9.2.3. Поздовжнє ребро вгнутого параболічного профілю

Постановка задачі сформульована в тема 8 (розділ 8.2.3).

Знайдемо методом прогонки чисельні розв'язки рівняння

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{2}{x} \cdot \frac{d\theta}{dx} - \frac{2 \cdot \alpha}{\lambda \cdot \delta_0} \cdot \frac{b^2}{x^2} \theta = 0. \quad (9.13)$$

що задовольняє на проміжку  $[0, b]$  крайові умови: 
$$\begin{cases} \theta'(0) = 0, \\ \theta(b) = \theta_0. \end{cases} \quad (9.14)$$

Підставимо значення коефіцієнтів

$$\frac{2 \cdot \alpha \cdot b^2}{\lambda \cdot \delta_0} = \frac{2 \cdot 50 \cdot 0.1^2}{35 \cdot 0.02} = \frac{1}{0.7} = 1.429; \quad b = 0.1; \quad \theta_0 = 70;$$

в (9.13)-(9.14) і отримаємо крайову задачу: знайти чисельні розв'язки рівняння (температурні напори)

$$\theta'' + \frac{2}{x} \cdot \theta' - \frac{1.429}{x^2} \cdot \theta = 0, \quad (9.15)$$

що задовольняє на проміжку  $[0; 0.1]$  крайові умови: 
$$\begin{cases} \theta'(0) = 0, \\ \theta(0.1) = 70. \end{cases} \quad (9.16)$$

Порівнюючи крайові задачі (9.15)-(9.16) та (9.1)-(9.2) маємо:

$$p(x) = \frac{2}{x}, \quad q(x) = -\frac{1.429}{x^2}, \quad r(x) = 0, \\ \alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 1, \quad \beta_0 = 1, \quad \beta_1 = 0, \quad \gamma_0 = 0, \quad \gamma_1 = 70.$$



Нехай кількість кроків розбиття ребра по довжині дорівнює  $k=10$ , тоді крок  $h=b/k=0.1/10=0.01$ .

Всі обчислення, отримані методом прогонки (див. тему 6, розділи 6.2 і 6.3), заносимо в таблицю 9.3.

Таблиця 9.3

Метод прогонки для ребра вгнутого параболічного профілю

i	$x_i$	$p(x_i)$	$q(x_i)$	$r(x_i)$	$m_i$	$k_i$	$\varphi_i$	Прямий хід		Зворотний хід	Температура
								$c_i$	$d_i$		
0	0	—	—	—	—	—	—	—	—	11.403	31.403
1	0.01	200.00	-14285.71	0	-1.714	0.000	0	-0.583	0	11.403	31.403
2	0.02	100.00	-3571.429	0	-1.571	0.333	0	-0.726	0	19.548	39.548
3	0.03	67.667	-1587.302	0	-1.619	0.500	0	-0.796	0	26.917	46.917
4	0.04	50.000	-892.857	0	-1.671	0.600	0	-0.838	0	33.806	53.806
5	0.05	40.000	-571.429	0	-1.714	0.667	0	-0.865	0	40.354	60.354
6	0.06	33.333	-396.825	0	-1.748	0.714	0	-0.885	0	46.641	66.641
7	0.07	28.571	-291.545	0	-1.776	0.750	0	-0.899	0	52.718	72.718
8	0.08	25.000	-223.214	0	-1.798	0.778	0	-0.911	0	58.621	78.621
9	0.09	22.222	-176.367	0	-1.816	0.800	0	-0.920	0	64.375	84.375
10	0.10	20.000	-142.857	0	-1.831	0.818	0	-0.927	0	70.000	90.000

#### 9.2.4. Поздовжнє ребро випуклого параболічного профілю

Постановка задачі сформульована в темі 8 (розділ 8.2.4).

Знайдемо методом прогонки чисельні розв'язки рівняння

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{1}{2x} \cdot \frac{d\theta}{dx} - \frac{2 \cdot \alpha}{\lambda \cdot \delta_0} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{x}} \theta = 0. \quad (9.17)$$

що задовольняє на проміжку  $[0, b]$  крайові умови: 
$$\begin{cases} \theta'(0) = 0, \\ \theta(b) = \theta_0. \end{cases} \quad (9.18)$$

Підставимо значення коефіцієнтів

$$\frac{2 \cdot \alpha \cdot \sqrt{b}}{\lambda \cdot \delta_0} = \frac{2 \cdot 50 \cdot \sqrt{0.1}}{35 \cdot 0.02} = \frac{31.623}{0.7} = 45.175; \quad b = 0.1; \quad \theta_0 = 70;$$

в (9.17)-(9.18) і отримаємо крайову задачу: знайти чисельні розв'язки рівняння (температурні напори)

$$\theta'' + \frac{1}{2 \cdot x} \cdot \theta' - \frac{45.175}{\sqrt{x}} \cdot \theta = 0, \quad (9.19)$$

що задовольняє на проміжку  $[0; 0.1]$  крайові умови: 
$$\begin{cases} \theta'(0) = 0, \\ \theta(0.1) = 70. \end{cases} \quad (9.20)$$

Порівнюючи крайові задачі (9.19)-(9.20) та (9.1)-(9.2) маємо:



$$p(x) = \frac{1}{2 \cdot x}, \quad q(x) = -\frac{45.175}{\sqrt{x}}, \quad r(x) = 0,$$

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 1, \quad \beta_0 = 1, \quad \beta_1 = 0, \quad \gamma_0 = 0, \quad \gamma_1 = 70.$$

Нехай кількість кроків розбиття ребра по довжині дорівнює  $k=10$ , тоді крок  $h=b/k=0.1/10=0.01$ .

Всі обчислення, отримані методом прогонки (див. тему 6, розділи 6.2 і 6.3), заносимо в таблицю 9.4.

Таблиця 9.4

Метод прогонки для ребра випуклого параболічного профілю

i	$x_i$	$p(x_i)$	$q(x_i)$	$r(x_i)$	$m_i$	$k_i$	$\varphi_i$	Прямий хід		Зворотний хід	Температура
								$c_i$	$d_i$	$\theta_i$	$T_i = \theta_i + T_c$
0	0	—	—	—	—	—	—	—	—	35.805	55.805
1	0.01	50.000	-451.754	0	-1.636	0.600	0	-0.965	0	35.805	55.805
2	0.02	25.000	-319.438	0	-1.806	0.778	0	-0.947	0	37.099	57.099
3	0.03	16.667	-260.820	0	-1.870	0.846	0	-0.936	0	39.159	59.159
4	0.04	12.500	-225.877	0	-1.904	0.882	0	-0.928	0	41.845	61.845
5	0.05	10.000	-202.031	0	-1.924	0.905	0	-0.922	0	45.104	65.104
6	0.06	8.333	-184.428	0	-1.938	0.920	0	-0.918	0	48.921	68.921
7	0.07	7.143	-170.747	0	-1.948	0.931	0	-0.915	0	53.298	73.298
8	0.08	6.250	-159.719	0	-1.955	0.939	0	-0.913	0	58.253	78.253
9	0.09	5.556	-150.585	0	-1.961	0.946	0	-0.912	0	63.809	83.809
10	0.10	5.000	-142.857	0	-1.965	0.951	0	-0.911	0	70.000	90.000

Якщо проаналізувати розподіл температур в ребрах різного профілю (див. останню графу табл. 9.1-9.4), то можна зробити такий висновок побачити, що більш рівномірного розподілу температур можна добитися з використанням поздовжніх ребер прямокутного профілю (табл. 9.1) та випуклого параболічного профілю (табл. 9.4), а поздовжні ребра вгнутого параболічного профілю (табл. 9.3) та трикутного профілю (табл. 9.2) дають менш рівномірний розподіл температур, тому їх можна використовувати у випадку, коли потрібно відвести більше теплоти від оребреної поверхні.



### 3. ВІДОМОСТІ ПРО ЛАБОРАТОРНІ ЗАНЯТТЯ

№ з/п	Теми лабораторних занять	Кількість годин	
		Денна форма	Заочна форма
1.	Вступ. Проведення інструктажу з ТБ. <b>Лабораторна робота №1.</b> Чисельне розв'язування задачі Коші для ЗДР I-го порядку.	4	1
2.	<b>Лабораторна робота №2.</b> Чисельне розв'язування задачі Коші для ЗДР 2-го порядку.	4	1
3.	<b>Лабораторна робота №3.</b> Чисельне розв'язування задачі Діріхле для диференціальних рівнянь Лапласа і Пуасона.	4	1
4.	<b>Лабораторна робота №4.</b> Чисельне розв'язування змішаної крайової задачі для рівняння теплопровідності.	4	1
5.	<b>Лабораторна робота №5.</b> Чисельне розв'язування крайової задачі для ЗДР 2-го порядку методом прогонки.	4	2
<b>Усього</b>		<b>20</b>	<b>6</b>

### 4. МОДУЛІ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ

#### **Змістовий модуль 1. Постановка та чисельне розв'язування диференціальних рівнянь.**

1. Крайові умови (граничні та початкові умови).
2. Задача Коші та числові методи її розв'язування.
3. Рівняння математичної фізики.
4. Рівняння еліптичного типу.
5. Метод сіток (метод скінченних різниць) розв'язування диференціальних рівнянь з частковими похідними.
6. Змішана крайова задача для рівняння теплопровідності з граничними умовами першого роду.
7. Метод сіток для розв'язування рівняння теплопровідності.
8. Явна та неявна різницеві схеми.
9. Метод прогонки для розв'язування ЗДР 2-го порядку.

#### **Змістовий модуль 2. Постановка та чисельне розв'язування задачі теплопровідності для поздовжніх ребер**

1. Види переносу теплової енергії.
2. Узагальнене диференціальне теплопровідності для ребра.
3. Функція профілю для поздовжніх ребер різної конфігурації.
4. Метод прогонки для розв'язування задачі теплопровідності для поздовжніх ребер.





## 5. САМОСТІЙНА ТА ІНДИВІДУАЛЬНА РОБОТА

### 5.1. Тематика та завдання для самостійної роботи

Підсумком самостійної роботи над вивченням дисципліни „Математичні моделі та оптимізація тепло-масообміну” складання письмових звітів за результатами виконання самостійної роботи по кожному змістовому модулю.

#### Змістовий модуль 1

СРС-1. „Порівняння точності чисельних методів розв’язування ЗДР”.

#### Змістовий модуль 2

СРС-2. „Моделювання температурних режимів в поздовжніх ребрах різної конфігурації.”.

#### Завдання для самостійної роботи

№	Тема самостійної роботи	Короткий зміст
<b><i>Змістовий модуль 1. Постановка та чисельне розв’язування диференціальних рівнянь.</i></b>		
1.	Чисельне розв’язування задачі Коші для ЗДР 1-го порядку.	Порівняння точності різних методів розв’язування ЗДР.
2.	Чисельне розв’язування задачі Коші для ЗДР 2-го порядку.	Точність метода Ейлера.
3.	Чисельне розв’язування задачі Ді-ріхле для диференціальних рівнянь Лапласа і Пуасона.	Вплив внутрішнього джерела тепла на розподіл температур в обмеженій області.
4.	Чисельне розв’язування змішаної крайової задачі для рівняння теплопровідності.	Умова стійкості явної різницевої схеми.
5.	Чисельне розв’язування крайової задачі для ЗДР 2-го порядку методом прогонки.	Прямий та зворотній хід прогонки.
<b><i>Змістовий модуль 2. Постановка та чисельне розв’язування задачі теплопровідності для поздовжніх ребер</i></b>		
6.	Постановка задачі теплопровідності для поздовжніх ребер при постійному коефіцієнті тепловіддачі на поверхні ребра та теплоізоляції його торця.	Функція профілю для поздовжніх ребер різної конфігурації
7.	Чисельне розв’язування задачі теплопровідн. для поздовжніх ребер при постійному коеф. тепловіддачі на поверхні ребра та теплоізоляції його торця.	Вибір оптимального ребра для найшвидшого відводу температур.

Самостійна робота студентами денної форми навчання виконується в 6 семестрі і обсяг її складає 8 сторінок формату А5.



## 5.2. Індивідуальне завдання (розрахункова робота)

Індивідуальне навчально – дослідне завдання передбачено навчальним планом у вигляді розрахункової роботи, на виконання якої відводиться 12 години навчального навантаження.

Мета цього завдання – закріпити знання, набуті студентами при вивченні теоретичного курсу, розвивати навички з самостійного розв’язування конкретних практичних задач. Розрахункова робота студентами денної форми навчання виконується в 6 семестрі, а заочної форми – в 5 семестрі. Обсяг її складає 8 сторінок формату А5.

**Розрахункова робота** має таку структуру:

1. Постановка задачі теплопровідності для поздовжніх ребер при постійному коефіцієнті тепловіддачі на поверхні ребра та теплоізоляції його торця.
2. Чисельне розв’язування задачі теплопровідності для поздовжніх ребер при постійному коефіцієнті тепловіддачі на поверхні ребра та теплоізоляції його торця.

## 6. КОНТРОЛЬНА ТЕСТОВА ПРОГРАМА

Контрольна тестова програма має такий склад:

**змістовий модуль 1** – 20 теоретичних запитань та 3 контрольних вправи;  
**змістовий модуль 2** – 8 теоретичних запитань.

**Змістовий модуль 1. Постановка та чисельне розв’язування диференціальних рівнянь.**  
Знайдіть одну правильну відповідь.

1. *В диференціальних рівняннях із звичайними похідними шукана функція залежить від:*
  - а) однієї змінної;
  - б) двох змінних;
  - в) двох або більше змінних.
2. *В диференціальних рівняннях з частковими похідними шукана функція залежить від:*
  - а) однієї змінної;
  - б) двох змінних;
  - в) двох або більше змінних.
3. *Класичні методи дають розв’язки у вигляді:*
  - а) формул;
  - б) таблиць;
  - в) графіків.
4. *Наближені (графічні) методи дають розв’язки у вигляді:*
  - а) формул;
  - б) таблиць;
  - в) графіків.



**5. Числові методи дають розв'язки у вигляді:**

- а) формул;
- б) таблиць;
- в) графіків.

**6. Під крайовими умовами розуміють:**

- а) граничні умови;
- б) початкові умови;
- в) сукупність початкових і граничних умов.

**7. В задачі Коші додаткові умови відносяться:**

- а) до однієї точки;
- б) до двох точок;
- в) більше, ніж до двох точок.

**8. В крайовій задачі додаткові умови відносяться:**

- а) до однієї точки;
- б) до двох точок;
- в) до двох і більше.

**9. Метод Ейлера має:**

- а) перший порядок точності;
- б) другий порядок точності;
- в) четвертий порядок точності.

**10. Метод Ейлера-Коші має:**

- а) перший порядок точності;
- б) другий порядок точності;
- в) четвертий порядок точності.

**11. Метод Рунге-Кутта має:**

- а) перший порядок точності;
- б) другий порядок точності;
- в) четвертий порядок точності.

**12. Рівняння Лапласа і Пуассона належать до рівнянь:**

- а) параболічного типу;
- б) еліптичного типу;
- в) гіперболічного типу.

**13. Рівняння дифузії та переносу належать до рівнянь:**

- а) параболічного типу;
- б) еліптичного типу;
- в) гіперболічного типу.

**14. Хвильові рівняння належать до рівнянь:**

- а) параболічного типу;
- б) еліптичного типу;
- в) гіперболічного типу.

**15. Рівняння еліптичного типу описують:**

- а) стаціонарні та квазістаціонарні процеси гідро-газодинамічних потоків;
- б) нестаціонарні процеси тепло- та масопереносу;
- в) нестаціонарні процеси поширення коливань.



**16. Рівняння параболічного типу описують:**

- а) стаціонарні та квазістаціонарні процеси гідро-газодинамічних потоків;
- б) нестаціонарні процеси тепло- та масопереносу;
- в) нестаціонарні процеси поширення коливань.

**17. Рівняння гіперболічного типу описують:**

- а) стаціонарні та квазістаціонарні процеси гідро-газодинамічних потоків;
- б) нестаціонарні процеси тепло- та масопереносу;
- в) нестаціонарні процеси поширення коливань.

**18. Рівняння еліптичного типу мають такий вигляд:**

- а)  $\Delta u = F(\vec{x})$ ;
- б)  $\frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + F(\vec{x}, t)$ ;
- в)  $\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + F(\vec{x}, t)$ .

**19. Рівняння параболічного типу мають такий вигляд:**

- а)  $\Delta u = F(\vec{x})$ ;
- б)  $\frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + F(\vec{x}, t)$ ;
- в)  $\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + F(\vec{x}, t)$ .

**20. Рівняння гіперболічного типу мають такий вигляд:**

- а)  $\Delta u = F(\vec{x})$ ;
- б)  $\frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + F(\vec{x}, t)$ ;
- в)  $\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + F(\vec{x}, t)$ .

### КОНТРОЛЬНІ ВПРАВИ

**Вправа 1.** Знайти методом Ейлера чисельний розв'язок задачі Коші для ЗДР 1-

го порядку  $y' - \frac{2y}{x+1} + y^2 = 0$  на проміжку  $[0; 1]$  з постійним кроком  $h = 0.1$  та початковою умовою  $y(0) = 1$ .

**Вправа 2.** Знайти модифікованим методом Ейлера чисельний розв'язок задачі

Коші для ЗДР 1-го порядку  $x^2 y' - 3y - 2x = 0$  на проміжку  $[1; 2]$  з постійним кроком  $h = 0.1$  та початковою умовою  $y(1) = 0$ .

**Вправа 3.** Знайти методом Ейлера чисельний розв'язок задачі Коші для ЗДР 2-

го порядку  $y'' - 2y' + 3xy = 2e^x$  на проміжку  $[1; 2]$  з постійним кроком  $h = 0.1$  та початковою умовою:  $y(1) = -1$ ;  $y'(1) = 0$ .



## **Змістовий модуль 2. Постановка та чисельне розв'язування задачі теплопровідності для поздовжніх ребер**

### **1. Теплопровідністю називається:**

- а) процес переносу теплоти при переміщенні об'ємів рідини або газу із зони з однією температурою в зону з іншою температурою, при цьому перенос теплоти нерозривно пов'язаний з переносом самого середовища;
- б) процес розповсюдження теплової енергії за допомогою електромагн. хвиль;
- в) молекулярний перенос теплоти в неперервному середовищі, що виникає за рахунок різниці температур.

### **2. Конвекцією називається:**

- а) процес переносу теплоти при переміщенні об'ємів рідини або газу із зони з однією температурою в зону з іншою температурою, при цьому перенос теплоти нерозривно пов'язаний з переносом самого середовища;
- б) процес розповсюдження теплової енергії за допомогою електромагн. хвиль;
- в) молекулярний перенос теплоти в неперервному середовищі, що виникає за рахунок різниці температур.

### **3. Тепловим випромінюванням називається:**

- а) процес переносу теплоти при переміщенні об'ємів рідини або газу із зони з однією температурою в зону з іншою температурою, при цьому перенос теплоти нерозривно пов'язаний з переносом самого середовища;
- б) процес розповсюдження теплової енергії за допомогою електромагн. хвиль;
- в) молекулярний перенос теплоти в неперервному середовищі, що виникає за рахунок різниці температур.

### **4. Узагальнена функція профілю прямокутного поздовжнього ребра така:**

а)  $f(x) = \frac{\delta_0 x}{2b}$ ;                      б)  $f(x) = \frac{\delta_0 x^2}{2b^2}$ ;                      в)  $f(x) = \frac{\delta_0}{2}$ .

### **5. Узагальнена функція профілю трикутного ребра така:**

а)  $f(x) = \frac{\delta_0 x}{2b}$ ;                      б)  $f(x) = \frac{\delta_0 x^2}{2b^2}$ ;                      в)  $f(x) = \frac{\delta_0}{2}$ .

### **6. Узагальнена функція профілю вгнутого параболічного ребра така:**

а)  $f(x) = \frac{\delta_0 x}{2b}$ ;                      б)  $f(x) = \frac{\delta_0 x^2}{2b^2}$ ;                      в)  $f(x) = \frac{\delta_0}{2}$ .

### **7. Узагальнена функція профілю випуклого параболічного ребра така:**

а)  $f(x) = \frac{\delta_0 x}{2b}$ ;                      б)  $f(x) = \frac{\delta_0 \sqrt{x}}{2\sqrt{b}}$ ;                      в)  $f(x) = \frac{\delta_0 x^2}{2b^2}$ .

### **8. Для максимального відведення теплоти найкраще використовувати поздовжні ребра:**

- а) прямокутного профілю;
- б) трикутного профілю;
- в) вгнутого параболічного профілю.



## КАРТКА ТЕСТУВАННЯ

Прізвище та ініціали студента \_\_\_\_\_  
 Факультет \_\_\_\_\_  
 Курс, група \_\_\_\_\_  
 Дата тестування \_\_\_\_\_  
 Набрано балів \_\_\_\_\_  
 Загальна оцінка \_\_\_\_\_

### Критерії та аналіз загальної оцінки

Блок змістових модулів	Кількість тестів/вправ	Оцінка одного тесту/вправи	Критерії оцінки			Кількість прав. відпов.	Набрано балів	Оцінка
			“3”	“4”	“5”			
Постановка та чисельне розв’язування дифрівнянь	20/3	3/8	54-64	65-75	76-84			
Постановка та чисельне розв’язув. задачі теплопровідності для поздовжніх ребер	8/0	2/-	6-8	10-12	14-16			
Разом	28/3	—	60-72	75-87	90-100			

Перекресліть навхрест клітину, яка відповідає Вашій відповіді на тестове запитання. За кожен правильну відповідь нараховується: за тести: модуль 1 – 3 бали, модуль 2 – 2 бали; за вправу – 8 балів.

### Змістовий модуль 1. Постанова та чисельне розв’язування дифрівнянь.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
а	а	а	а	а	а	а	а	а	а	а	а	а	а	а	а	а	а	а	а
б	б	б	б	б	б	б	б	б	б	б	б	б	б	б	б	б	б	б	б
в	в	в	в	в	в	в	в	в	в	в	в	в	в	в	в	в	в	в	в

Правильних відповідей \_\_\_\_\_ Набрано балів \_\_\_\_\_ Оцінка \_\_\_\_\_

### Змістовий модуль 2. Постанова та чисельне розв’язування задачі теплопровідності для поздовжніх ребер.

1	2	3	4	5	6	7	8
а	а	а	а	а	а	а	а
б	б	б	б	б	б	б	б
в	в	в	в	в	в	в	в

Правильних відповідей \_\_\_\_\_ Набрано балів \_\_\_\_\_ Оцінка \_\_\_\_\_

### Розв’язок вправ



### Змістовий модуль 1. Постановка та чисельне розв'язування диференціальних рівнянь.

**Числові рівняння** — описують стаціонарні статичні процеси і їх розв'язком є числа.

**Функціональні рівняння** — описують нестаціонарні динамічні процеси і їх розв'язком є функції.

**Диференціальні рівняння (ДР)** — функція під знаком диференціала;

**Інтегральні рівняння** — функція під знаком інтеграла.

**Звичайні диференціальні рівняння (ЗДР)** — функція залежить від однієї змінної;

**Диференціальні рівняння в часткових похідних** — функція залежить від двох або більше змінних.

**Порядок ДР** — найвищий порядок похідної або диференціала, який входить в це рівняння.

**Розв'язок ДР** — функція, підстановка якої в рівняння перетворює його в тотожність.

**Загальний розв'язок ЗДР** — сімейство розв'язків ЗДР, яке залежить від довільних постійних, кількість яких співпадає з порядком цього рівняння.

**Частковий розв'язок ЗДР** — може бути отриманий із загального розв'язку при певних числових значеннях довільних постійних, які в нього входять;

**Особливий розв'язок ЗДР** — розв'язок, який у всіх своїх точках не задовільняє умову єдиності, тобто в будь-якому околі особливого розв'язку існує хоча б дві інтегральні криві, які проходять через цю точку.

**Граничні умови** — задають режим фізичного процесу на межі  $\Gamma$  області  $G$ .

**Початкові умови** — накладають обмеження на функцію  $u$  та її похідні по часу до  $(n-1)$ -го порядку в деякий початковий момент  $t=t_0$ .

**Додаткові (крайові) умови** — це сукупність *граничних* і *початкових умов*.

**Рівняння математичної фізики** — лінійні диференціальні рівняння з частковими похідними (найчастіше другого порядку).

**Рівняння еліптичного типу** — описують стаціонарні та квазістаціонарні потенціальні гідро-газодинамічні потоки, електромагнітні поля.

**Рівняння параболічного типу** — описують нестаціонарні процеси дифузії, переносу тепла, дифузійні процеси масопереносу.

**Рівняння гіперболічного типу** — описують нестаціонарні процеси поширення коливання струн, стержнів, мембран, об'ємів; акустичні та електромагнітні коливання.



## **Змістовий модуль 2. Постановка та чисельне розв'язування задачі теплопровідності для поздовжніх ребер**

**Теплопровідність** — молекулярний перенос теплоти в неперервному середовищі, що виникає за рахунок різниці температур.

**Конвекція** — процес переносу теплоти при переміщенні об'ємів рідини або газу із зони з однією температурою в зону з іншою температурою, при цьому перенос теплоти нерозривно пов'язаний з переносом самого середовища.

**Теплове випромінювання** — процес розповсюдження теплової енергії за допомогою електромагнітних хвиль.

**Конвективний теплообмін** — сумісний процес переносу теплоти конвекцією та теплопровідністю в рідині або газі.

**Конвективна тепловіддача** — конвективний теплообмін між поверхнею тіла та потоками рідини або газу.

**Розвинута поверхня** — гладка поверхня разом з ребрами.

**Ефективність ребра** — це відношення теплового потоку, дійсно відведеного ребром, до потоку, що відвело б ідеально провідне ребро ( $\lambda = \infty$ ).

### ЛІТЕРАТУРА

1. Беляев Н. М. Основы теплопередачи.-К.: Вища школа, 1989. – 344 с.
2. Босий В. В., Мариненко В. І. Моделювання теплових режимів ребер при різних умовах теплообміну: Навч. посібник.-К.: МО України, 1996.- 116 с.
3. Исаченко В. П. и др. Теплопередача.- М.: Энергоиздат, 1981. – 416 с.
4. Калиткин Н. Н. Численные методы.- М.: Наука, 1978. - 512 с.
5. Керн Д., Краус А. Развитие поверхности теплообмена.-М.:Энергия,1977.- 464с.
6. Михеев М. А., Михеев И. М. Основы теплопередачи.-М.: Энергия, 1977.- 342 с.
7. Никитенко Н. И. Исследование процессов тепло- и массообмена методом сеток.- К.: Наукова думка, 1978.- 211 с.
8. Никитенко Н. И. Теория тепло-массопереноса.-К.:Наукова думка,1983.- 352с.
9. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.- М.: Наука, 1977.– 735 с.
10. Лейбович Л. І. Практикум з математичного моделювання та оптимізації процесів теплообміну. – Миколаїв: МУК, 2008.- 44 с.





## ЗМІСТ

<b>ПЕРЕДМОВА.....</b>	<b>3</b>
<b>1. ТИПОВА ПРОГРАМА НОРМАТИВНОЇ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ „МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ ТЕПЛОМАСООБМІНУ”.....</b>	<b>5</b>
1.1. Тематичний план та розподіл навчального часу.....	5
1.2. Програмний матеріал блоків змістових модулів.....	6
<i><b>Змістовий модуль 1. Постановка та чисельне розв’язування диференціальних рівнянь.....</b></i>	<i><b>6</b></i>
<b>Тема 1. Основні типи рівнянь інженерної практики та методи їх розв’язування.....</b>	<b>6</b>
<b>Тема 2. Чисельне розв’язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) 1-го порядку.....</b>	<b>6</b>
<b>Тема 3. Чисельне розв’язування задачі Коші для ЗДР 2-го порядку.....</b>	<b>6</b>
<b>Тема 4. Чисельне розв’язування задачі Діріхле для диференціальних рівнянь Лапласа і Пуасона.....</b>	<b>6</b>
<b>Тема 5. Чисельне розв’язування змішаної крайової задачі для рівняння теплопровідності.....</b>	<b>6</b>
<b>Тема 6. Чисельне розв’язування крайової задачі для ЗДР 2-го порядку методом прогонки.....</b>	<b>6</b>
<i><b>Змістовий модуль 2. Постановка та чисельне розв’язування задачі теплопровідності для поздовжніх ребер.....</b></i>	<i><b>6</b></i>
<b>Тема 7. Закономірності переносу теплової енергії та постановка задачі теплопровідності ребер.....</b>	<b>6</b>
<b>Тема 8. Постановка задачі теплопровідності для поздовжніх ребер при постійному коефіцієнті тепловіддачі на поверхні ребра та теплоізоляції його торця.....</b>	<b>6</b>
<b>Тема 9. Чисельне розв’язування задачі теплопровідності для поздовжніх ребер при постійному коефіцієнті тепловіддачі на поверхні ребра та теплоізоляції його торця.....</b>	<b>7</b>
<b>2. МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ВИВЧЕННЯ ОКРЕМИХ МОДУЛІВ ТА ТЕМ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ.....</b>	<b>7</b>
<i><b>Змістовий модуль 1. Постановка та чисельне розв’язування диференціальних рівнянь.....</b></i>	<i><b>7</b></i>
<b>Тема 1. Основні типи рівнянь інженерної практики та методи їх розв’язування.....</b>	<b>7</b>
<b>Тема 2. Чисельне розв’язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) 1-го порядку.....</b>	<b>8</b>



<b>Тема 3. Чисельне розв'язування задачі Коші для ЗДР 2-го порядку.....</b>	<b>14</b>
<b>Тема 4. Чисельне розв'язування задачі Діріхле для диференціальних рівнянь Лапласа і Пуасона.....</b>	<b>15</b>
<b>Тема 5. Чисельне розв'язування змішаної крайової задачі для рівняння теплопровідності.....</b>	<b>20</b>
<b>Тема 6. Чисельне розв'язування крайової задачі для ЗДР 2-го порядку методом прогонки.....</b>	<b>25</b>
<b><i>Змістовий модуль 2. Постановка та чисельне розв'язування задачі теплопровідності для поздовжніх ребер.....</i></b>	<b>28</b>
<b>Тема 7. Закономірності переносу теплової енергії та постановка задачі теплопровідності ребер.....</b>	<b>28</b>
<b>Тема 8. Постановка задачі теплопровідності для поздовжніх ребер при постійному коефіцієнті тепловіддачі на поверхні ребра та теплоізоляції його торця.....</b>	<b>30</b>
<b>Тема 9. Чисельне розв'язування задачі теплопровідності для поздовжніх ребер при постійному коефіцієнті тепловіддачі на поверхні ребра та теплоізоляції його торця..</b>	<b>34</b>
<b>3. ВІДОМОСТІ ПРО ЛАБОРАТОРНІ ЗАНЯТТЯ.....</b>	<b>39</b>
<b>4. МОДУЛІ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ.....</b>	<b>39</b>
<b><i>Змістовий модуль 1. Постановка та чисельне розв'язування диференціальних рівнянь.....</i></b>	<b>39</b>
<b><i>Змістовий модуль 2. Постановка та чисельне розв'язування задачі теплопровідності для поздовжніх ребер.....</i></b>	<b>40</b>
<b>5. САМОСТІЙНА ТА ІНДИВІДУАЛЬНА РОБОТА.....</b>	<b>40</b>
<b>5.1. Тематика та завдання для самостійної роботи.....</b>	<b>40</b>
<b>5.2. Індивідуальне завдання (розрахункова робота).....</b>	<b>41</b>
<b>6. КОНТРОЛЬНА ТЕСТОВА ПРОГРАМА.....</b>	<b>41</b>
<b><i>Змістовий модуль 1. Постановка та чисельне розв'язування диференціальних рівнянь.....</i></b>	<b>41</b>
<b><i>Змістовий модуль 2. Постановка та чисельне розв'язування задачі теплопровідності для поздовжніх ребер.....</i></b>	<b>44</b>
<b>КАРТКА ТЕСТУВАННЯ.....</b>	<b>46</b>
<b>ТЕРМІНОЛОГІЧНИЙ СЛОВНИК.....</b>	<b>47</b>
<b><i>Змістовий модуль 1. Постановка та чисельне розв'язування диференціальних рівнянь.....</i></b>	<b>47</b>
<b><i>Змістовий модуль 2. . Постановка та чисельне розв'язування задачі теплопровідності для поздовжніх ребер.....</i></b>	<b>48</b>
<b>ЛІТЕРАТУРА.....</b>	<b>48</b>