УДК 628.1.147

Куницький С. О., к.т.н. (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

ЗАСТОСУВАННЯ ПОВНОГО ФАКТОРНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ДО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ЗНЕЗАЛІЗНЕННЯ ВОДИ НА ПІНОПОЛІСТИРОЛЬНИХ ФІЛЬТРАХ ПРИ НЕПОВНІЙ ЇХ ПРОМИВЦІ

Наведено математичну модель зростання втрат напору в фільтруючій пінополістирольній засипці. Запропоновано формулу для прогнозування втрат напору у зернистій засипці.
***Ключові слова*: втрати напору, дисперсія, повний факторний експеримент.**

Математичне планування експерименту – це процедура вибору кількості та умов постановки дослідів необхідних і достатніх для вирішення поставленої задачі з потрібною точністю [1-5].

При плануванні експерименту сам експеримент розглядають як об'єкт дослідження та оптимізації. Теорія планування експерименту розробляє різні типи планів, які виключають сліпий пошук під час досліджень, скорочують число необхідних дослідів і дають можливість побудувати модель системи. Перевагою методу планування експерименту є його універсальність та придатність використання для вирішення широкого кола завдань [3, 4].

При експлуатації водоочисних об'єктів важливе місце займає оптимізація режиму процесу, що досягається за рахунок математичних моделей технологічних процесів, тобто залежності втрат напору у фільтруючій засипці при очистці води, яка підлягає обробці, від показників складу вихідної води.

Для вирішення задачі оптимізації був обраний математичний метод обробки експериментальних даних, який дає можливість отримати найбільш достовірні емпіричні залежності при порівняно невеликій кількості дослідів.

Даний метод являє собою поєднання теоретичного і експериментального дослідження об'єкта управління. При цьому вид математичної моделі визначається теоретичним дослідженням, а коефіцієнти моделі розраховуються на основі експериментальних даних і є відображенням експериментальних досліджень.

Розроблена математична модель, при вирішенні задач оптимізації, повинна відповідати адекватності реальному процесу. Використання даного методу оптимального планування експерименту дає можливість варіювати не одним, а декількома факторами відразу. Цінність методу заключається в тому, що оцінюється не тільки вплив кожного фактору, але і відображається інформація про їх взаємодію.

Залежно від того якими, кількісними чи якісними, є чинники будують різні моделі систем і використовують різні типи планів експерименту.

При кількісних чинниках модель системи доцільно будувати на основі регресійного аналізу із використанням плану повного факторного експерименту. Якщо відгук системи є кількісним і всі чинники від якого він залежить також кількісні то використовують регресійну модель для опису системи.

У переважній більшості випадків використовують регресійні моделі поліноміального типу, тобто залежність відгуку від рівнів чинників представляють у вигляді поліному.

Коефіцієнти поліноміальної моделі безпосередньо показують ступінь впливу на величину відгуку. Завдання планування експерименту зводиться до вибору умов проведення дослідів, їх кількості з тим, щоб одержати якомога точнішу регресійну модель, яка адекватно описує систему.

Регресійна модель, яка описує складні функції відгуку, може бути одержана шляхом розкладу функції розкладу в степеневий ряд.

При повному факторному експерименті рівняння регресії приймає вигляд поліному першого степеня.

Математична залежність для повного факторного експерименту типу 2^3 згідно [3] матиме вигляд:

$$y(x_1,...,x_k) = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i \cdot x_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{k} b_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + ... + \sum_{\substack{i,j,...,n=1 \\ i \neq j \neq ... \neq n}} b_{ijn} \cdot x_i \cdot x_j \cdot ... \cdot x_n \qquad (1)$$

де b_0 – вільний член, b_i – лінійні ефекти, b_{ij} – ефекти парної взаємодії, b_{ijn} – ефекти потрійної взаємодії.

Степінь точності математичної моделі визначається діапазоном зміни факторів – для кожного i-ого фактору встановлюється z_i^0 – основний рівень фактору; $z_{i\ max}$, $z_{i\ min}$ – верхній та нижній рівні i-ого фактору, які приймаються під час дослідів; Δz_1 – інтервал варіювання.

Знаючи $z_i^{\max}$, $z_i^{\min}$ значення фактору можна визначити координати центру плану, так званий основний рівень z_i^0, а також інтервал варіювання через Δz_i.

$$z_i^0 = \frac{z_i^{\max} + z_i^{\min}}{2}, \text{ де } i = 1,2,3 \dots k. \qquad (2)$$

$$\Delta z_i = z_i^{max} - z_i^0, \text{ де } i = 1,2,3 \dots k . \qquad (3)$$

При проведенні експериментів використовуються кодовані значення рівнів факторів. При цьому, основний рівень приймається рівним нулю, верхній +1, нижній -1.

Від системи координат $z_1,\dots,z_k$ необхідно перейти до нової безрозмірної системи координат $x_1, \dots, x_k$ з допомогою лінійного перетворення:

$$x_i = \frac{z_i + z_i^0}{\Delta z_i}, \text{ де i = 1,2,3 … k.} \tag{4}$$

На основі повного факторного експерименту розраховуються коефіцієнти регресії за формулами:

$$b_0 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_1 , \tag{5}$$

$$b_i = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_y y_1 , \tag{6}$$

$$b_{\ln} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_y x_{in} y_i \quad (\text{де } l \neq n). \tag{7}$$

Для встановлення значень коефіцієнтів треба насамперед розрахувати оцінку дисперсії, з якої вони визначаються:

$$S_b^2 = \frac{S_y^2}{m}. \tag{8}$$

Варто відмітити, що з допомогою коефіцієнтів повного факторного експерименту всі коефіцієнти визначаються з однаковою похибкою.

Прийнято вважати, що коефіцієнт регресії являється важливим, якщо виконується умова

$$|b| \geq S_b t , \tag{9}$$

де t – значення критерію Стьюдента [2-4].

Отримавши рівняння регресії, потрібно перевірити його адекватність, тобто значення похибки апроксимації.

Для встановлення адекватності потрібно розрахувати експериментальне значення критерію Фішера – F_p і порівняти його з теоретичним F_m , яке приймається при потрібної довіреної вірогідності P = 0,95 згідно [2, 3].

Критерій Фішера являє собою наступне відношення:

$$F_p = \frac{\max(S_{ад}^2, S_y^2)}{\min(S_{ад}^2, S_y^2)} , \tag{10}$$

де $S_{ад}^2$ – оцінка дисперсії адекватності.

Оцінку дисперсії адекватності слід вираховувати за формулою

$$S_{ад}^2 = \frac{1}{m-B}\sum_{i=1}^{m}(y_i^e - y_i^p)^2, \qquad (11)$$

де m – кількість дослідів повного факторного експерименту;

B – кількість коефіцієнтів регресії, включаючи b вільний член;

y_i^e та y_i^p – експериментальне і розрахункове значення функції відгуку в i-ому досліді.

З оцінкою адекватності пов'язано число степенів свободи:

$$f_{ад} = m - B. \qquad (12)$$

Рівняння регресії є адекватним, якщо виконується умова:

$$F_p \le F_T. \qquad (13)$$

Функціональна залежність функції відгуку у загальному вигляді має вигляд:

$$Y = f(X_1, X_2, X_3). \qquad (14)$$

Такий математичний апарат (1-14) експерименту дозволяє описати варіювання трьох факторів на двох рівнях. Тому постановка за таким планом називається повним факторним експериментом типу 2^3. Рівні фактори представляють собою границі досліджуваної області за даним параметром.

Даний метод доцільно використати в питаннях знезалізнення води для прогнозування зростання втрат напору протягом певного часу роботи фільтрів.

Експериментальні дослідження процесу знезалізнення води проводилися на лабораторній установці з використання модельного розчину. Як фільтруючий матеріал фільтра використовувалася зерниста засипка еквівалентним діаметром 2,8 мм.

Дослідження проводилися для фільтрів з неповною промивкою фільтруючої засипки.

В якості контрольованих параметрів для моделювання процесу знезалізнення води можна використати вхідну концентрацію заліза $C_{вх}$, швидкість фільтрування $V_ф$ та тривалість фільтроциклу $T_ф$. В якості неконтрольованого досліджуваного параметру (функції відгуку) є втрати напору у фільтруючій засипці H [6].

Для виявлення статистичної взаємодії вищезгаданих чинників було проведено ряд фільтроциклів тривалістю 8 год з різною вхідною концентрацією заліза у модельному розчині (1,0…2,0 мг/дм^3).

Дослідження втрат напору проводилися в діапазоні зміни швидкостей фільтрування від 5 до 7 м/год.

Показник величини втрат напору знімався тричі під час кожного фільтроциклу.

Функціональна залежність зростання втрат напору у натуральному вигляді:

$$H = f\left(C^{'}_{вх}, V^{'}_{ф}, T^{'}_{ф}\right). \quad (15)$$

Таким чином, в якості основних факторів в натуральній величині, які впливають на зростання втрат напору у фільтруючій засипці під час процесу знезалізненя води, були обрані наступні комбінації факторів:

Z_1 – вхідна концентрація заліза, $C_{вх}$, мг/л, ($C_{вх}$ = 1…2 мг/дм^3);

Z_2 – швидкість фільтрування, $V_ф$, м/год, ($v_ф$ = 5…7 м/год);

Z_3 – тривалість фільтроциклу, $T_ф$, год, ($T_ф$ = 0…8,0 год);

$$z_1^0 = \frac{z_{\max} + z_{\min}}{2} = \frac{2{,}0 + 1{,}0}{2} = 1{,}5;$$

$$\Delta z_1 = z_{\max} - z_1^0 = 2 - 1{,}5 = 0{,}5;$$

$$z_2^0 = \frac{7{,}0 + 5{,}0}{2} = 6{,}0;$$

$$\Delta z_2 = 7{,}0 - 6{,}0 = 1{,}0;$$

$$z_3^0 = \frac{8{,}0 + 0}{2} = 4{,}0;$$

$$\Delta z_3 = 8{,}0 - 4{,}0 = 4{,}0;$$

$$x_1 = \frac{C_{вх} - 1{,}5}{0{,}5};$$

$$x_2 = \frac{V_ф - 6{,}0}{1{,}5};$$

$$x_3 = \frac{T_ф - 4{,}0}{4{,}0}.$$

Фактори впливу утворюють незалежну систему аргументів, варіювання яких на двох рівнях (табл. 1) дозволило сформулювати і реалізувати матрицю планування, яка описує вплив вищеперелічених параметрів на втрати напору у фільтруючій засипці.

Варіюванню по трьох факторах в натуральній величині приводимо в таблиці 2. Також вносимо в таблицю 2 значення функції відгуку та виводимо середнє арифметичне значення.

Розрахунок вибіркових дисперсій доцільно проводити в табличній формі 3 з використанням даних таблиці 2.

Після розрахунку дисперсії розраховуємо коефіцієнти рівняння регресії b_0, b_1, b_2, b_3, b_{12}, b_{13}, b_{23} ,b_{123} .

Згідно формул (5-7) розраховуємо коефіцієнти у вигляді таблиці 4.

Таблиця 1

Розширена матриця факторів у безрозмірній величині

№ досліду	X_0	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	$X_1X_2X_3$	Y
1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	Y_1
2	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	Y_2
3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	Y_3
4	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	Y_4
5	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	Y_5
6	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	Y_6
7	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	Y_7
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	Y_8
b_n	b_0	b_1	b_2	b_3	b_{12}	b_{13}	b_{23}	b_{123}	Y

Таблиця 2

Повний факторний експеримент для трьох факторів
в натуральній величині

№ з/п	Фактори в натуральній величині			Вихідний параметр			$\overline{y_j}$
	$С_{вх}$	$V_ф$	$T_ф$	Y_1	Y_1	Y_1	
1	1	5	0	5,5	5,3	5,1	5,3
2	2	5	0	5,4	5,2	4,9	5,2
3	1	7	0	7,2	7,4	7,2	7,3
4	2	7	0	7,6	7,5	7,5	7,5
5	1	5	8	6,5	6,3	6,7	6,5
6	2	5	8	6,4	6,7	6,4	6,5
7	1	7	8	9,1	9,4	9,4	9,3
8	2	7	8	10	9,8	10,1	10,0

Таблиця 3

Розрахунок вибіркових дисперсії для трьох факторів

$\left(y_{j1}-\overline{y_j}\right)^2$	$\left(y_{j2}-\overline{y_j}\right)^2$	$\left(y_{j3}-\overline{y_j}\right)^2$	S_j^2
0,04	0,00	0,04	0,04
0,05	0,00	0,07	0,06
0,00	0,02	0,00	0,01
0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,04	0,04	0,04
0,01	0,04	0,01	0,03
0,04	0,01	0,01	0,03
0,00	0,03	0,02	0,02

Таблиця 4

Коефіцієнти рівняння регресії

b_0	b_1	b_2	b_3	$b_{1,2}$	$b_{1,3}$	$b_{2,3}$	$b_{1,2,3}$
7,19	0,10	1,33	0,88	0,13	0,07	0,24	0,03

Перевірка відтворюваності за критерієм Кохрена визначається:

$$K_{кр} = \frac{0,06}{0,22} = 0,27 \cdot$$

Теоретичне значення Кохрена рівне $K_{кт}=0,516$, що взяте при наступних параметрах: P=0,95, N=8, f=2.

$K_{кр}$=0,270 < $K_{кт}$ = 0,516 рівняння регресії буде відтворюваним.

Складаємо рівняння регресії в кодованих величинах.

Рівняння регресії в кодованих величинах матиме вигляд:

$$Y = 7,19 + 0,10x_1 + 1,33x_2 + 0,88x_3 + 0,13x_1x_2 + 0,07x_1x_3 + 0,24x_2x_3 + 0,03x_1x_2x_3.$$

Сума елементів дисперсій останнього стовпця:

$$\sum_{j=1}^{8} S_j^2 = 0,22 \cdot$$

Дисперсія відтворюваності:

$$S_{\{y\}}^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} S_j^2 = \frac{1}{8}0,22 = 0,03 \cdot$$

Визначаємо середньоквадратичне відхилення коефіцієнтів $S_{коеф}$.

З таблиці Стьюдента за числом степенів вільності: n(m-1)=8*2=16 при рівні значимості α=0,05 приймається $t_{кр}$=2,12, відповідно $A=t_{кр} \cdot S_{коеф}$=2,12*0,036=0,08

$$S_{коеф} = \sqrt{\frac{0,03}{8 \cdot 3}} = 0,036 \cdot$$

Зрівнявши А з коефіцієнтами рівняння регресії, видно, що:

b_{13} = 0,07, b_{123} = 0,03 менше по модулю за А, отже вони незначимі. Прийнявши b_{13} та b_{123} до 0 виводиться рівняння:

$$Y = 7,19 + 0,10x_1 + 1,33x_2 + 0,88x_3 + 0,13x_1x_2 + 0,24x_2x_3 .$$

Отримане рівняння регресії перевіряється на адекватність за критерієм Фішера, попередньо знайшовши остаточну дисперсію. Для цього знаходиться значення досліджуваного параметра за отриманим рівнянням регресії $\overline{y_i}(j = 1...8)$ шляхом підстановки (-1) замість x_1, x_2, x_3 відповідно до номеру j-експерименту:

$$\overline{y}_1 = 7,19 + 0,10 + 1,33 + 0,88 + 0,13 + 0,24 = 9,87\,;$$

$$\overline{y}_2 = 7,19 - 0,10 + 1,33 + 0,88 - 0,13 + 0,24 = 9,41\,;$$

$$\overline{y}_3 = 7,19 + 0,10 - 1,33 + 0,88 - 0,13 - 0,24 = 6,47;$$
$$\overline{y}_4 = 7,19 - 0,10 - 1,33 + 0,88 + 0,13 - 0,24 = 6,53;$$
$$\overline{y}_5 = 7,19 + 0,10 + 1,33 - 0,88 + 0,13 - 0,24 = 6,88;$$
$$\overline{y}_6 = 7,19 - 0,10 + 1,33 - 0,88 - 0,13 - 0,24 = 7,17;$$
$$\overline{y}_7 = 7,19 + 0,10 - 1,33 - 0,88 - 0,13 + 0,24 = 5,19;$$
$$\overline{y}_8 = 7,19 - 0,10 - 1,33 - 0,88 + 0,13 + 0,24 = 5,25.$$

Остаточна дисперсія $S^2_{ост}$ буде розрахована:

$$S^2_{ост} = \frac{3}{8-7}\begin{bmatrix}(10,0-9,87)^2 + (9,3-9,41)^2 + (6,5-6,47)^2 + (6,5-6,53)^2 + \\ + (7,5-8,09)^2 + (7,3-7,17)^2 + (5,2-5,19)^2 + (5,3-5,25)^2\end{bmatrix} = 0,133.$$

Розрахункове значення Фішера розраховується за формулою

$$F_{розр} = \frac{0,030}{0,133} = 4,38.$$

Табличне значення критерію Фішера знаходиться із таблиць критичних точок розподілу Фішера при рівні значимості $\alpha = 0,05$ на відповідних степенях вільності.

Табличне значення Фішера буде рівним $F_{табл} = 4,49$.

$F_{розр} = 4,38 < F_{табл} = 4,49$ – рівняння регресії адекватне.

Інтерпретація отриманої моделі в натуральних величинах буде мати вигляд:

$$H' = 7,19 + 0,10\left(\frac{C^{вх} - 1,5}{0,5}\right) + 1,33\left(\frac{V_ф - 6,0}{1,0}\right) + 0,88\left(\frac{T_ф - 4,0}{4,0}\right) - $$
$$+ 0,13\left(\frac{C_{вх} - 1,5}{0,5}\right)\cdot\left(\frac{V_ф - 6,0}{1,0}\right) + 0,24\left(\frac{V_ф - 6,0}{1,0}\right)\cdot\left(\frac{T_ф - 4,0}{4,0}\right).$$

Після розкриття дужок рівняння набуде вигляду:

$$H' = 7,19 + 0,2C^{вх} - 0,3 + 1,33V_ф - 7,98 + 0,22T_ф - 0,88 +$$
$$+ 0,26C^{вх}V_ф - 1,56C^{вх} - 0,39V_ф + 2,34 + 0,06V_фT_ф - 0,24V_ф -$$
$$- 0,36T_ф + 1,44.$$

Після спрощення кінцеве рівняння регресії для визначення втрат напору у фільтруючій пінополістирольній засипці:

$$H' = 1,81 - 1,36C_{вх} + 0,7V_ф - 0,14T_ф + 0,26C_{вх}V_ф + 0,06V_фT_ф. \qquad (16)$$

Залежність (16) можна використовувати для прогнозування зростання втрат напору з часом в пінополістирольній фільтруючій засипці з підвищеною крупністю гранул при неповній її промивці в діапазоні швидкостей від 5 до 7 м/год та концентрації заліза у вихідній воді від 1,0 до 2,0 мг/дм^3.

1. Математическое моделирование / Дж. Эндрюс и др. – М. : Мир, 1979. **2.** Математическое моделирование и експеримент / Любарский Г. Я. и др. – Київ : Наукова думка, 1987. **3.** Горский В. Г. Планирование промышленных экспериментов / В. Г. Горский, Ю. П. Адлер – М. : Металургия, 1974. – 264 с. **4.** Гусейнов Ф. Г. Планирование эксперимента в задачах электротехники / Ф. Г. Гусейнов, О. С. Мамедяров. – М. : Энергоатомиздат, 1988. – 151 с. **5.** Бродский Б. З. Таблицы планов эксперимента для факторных и полиномиальных моделей / Б. З. Бродский, Л. И. Бродский, Т. И. Голикова – М. : Металлургия, 1982. – 752 с. **6.** Очищення природної води на пінополістирольних фільтрах. Монографія / В. О. Орлов, С. Ю. Мартинов, А. М. Орлова, В. О. Зощук, Н. Л. Мінаєва, С. О. Куницький та ін.; за заг. ред. В. О. Орлова. – Рівне : НУВГП, 2012. – 172 с.: іл.

Рецензент: д.т.н., професор Орлов В. О. (НУВГП)

Kunytskyi S. O., Candidate of Engineering (National University of Water Management and Nature Resources Use, Rivne)

FULL FACTORIAL EXPERIMENT APPLICATION TO THE MODELING OF WATER ON POLYSTYRENE IRON REMOVAL FILTERS WHEN THEIR INCOMPLETE WASHING

The matematic model for the increase of head loss in the expanded polystyrene filter was proposed. A formula for predicting the pressure drop was proposed.
***Keywords*: pressure drop, dispersion, full factorial exeperiment.**

Куницкий С. О., к.т.н. (Национальный университет водного хозяйства и природопользования, г. Ровно)

ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛНОГО ФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА К МОДЕЛИРОВАНИЮ ПРОЦЕССА ОБЕЗЖЕЛЕЗИВАНИЯ ВОДЫ НА ПЕНОПОЛИСТИРОЛЬНЫХ ФИЛЬТРАХ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИХ ПРОМЫВКЕ

Приведена математическая модель роста потерь напора в фильтрующей пенополистирольной загрузке. Предложена формула для прогнозирования потерь напора в зернистой загрузке.
***Ключевые слова*: потери напора, дисперсия, полный факторный эксперемент.**
