

УДК 539.431:624.072

Кундрат М. М., д.т.н., професор (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

## ВІДШАРУВАННЯ НЕРОЗТЯГЛИВОГО ПІДСИЛЕННЯ ПІД НАВАНТАЖЕННЯМ ЗОСЕРЕДЖЕНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ТА ЦИКЛІЧНИХ СИЛ

Отримано значення робочої довжини підсилення залежно від кількості циклів, мінімального та максимального навантаження за цикл, енергії відшарування одиниці довжини, міцнісних та пружних характеристик, відстані до прикладених сил. Виконано розрахунки робочої довжини підсилення для окремих значень характеристик композиції та навантаження.

**Ключові слова:** підсилення, відшарування, зона передруйнування, робоча довжина, кількість циклів.

**Основні зусилля** спеціалістів у галузі циклічної втоми досі зосереджувалися на аналізі тіл з тріщинами, результати яких узагальнено в низці монографій. Серед підходів найефективнішими виявилися енергетичні, в основу яких покладено, що дисипація енергії пластичного деформування у зоні передруйнування біля вершини тріщини дорівнює енергії руйнування на розраховуваній ділянці. З огляду на вищий рівень концентрації напружень поблизу підсилень та особливості розподілу поблизу них полів напружень, процеси деформування та руйнування у таких композиціях мають істотні відмінності від аналогічних явищ у тілах з тріщинами.

**Огляд досліджень.** Поля напружень і переміщень в околі підсилень чи чужорідних включень вивчалися в широкому колі праць, їх подання за сталого навантаження вперше опубліковано в працях [1-3], а повний огляд досліджень виконано в монографії Г. Сулима [4]. Спільною рисою отриманих суто пружних розв'язків є механічно некоректна коренева сингулярність напружень в околі вершин неоднорідності. Дотичні напруження  $\tilde{\sigma}_{xy}$  на нерозтягливому підсиленні та нормальні  $\tilde{\sigma}_{yy}$  на його продовженні (рис. 1, а) містять в околах вершини кореневі сингулярності. Тут і далі  $\sigma_{ij}$  – компоненти тензора напружень,  $\tilde{\sigma}_{ij} \equiv \sigma_{ij} / \tau_s^*$  – їх знерозмірені значення; параметр  $\tau_s^*$  трактуємо як технічну зсувну міцність межі поділу з урахуванням її структурних

недосконалоостей чи за пластичного деформування – як зсувний поріг пластичності.

Внаслідок неоднорідності напруженого стану біля підсилень слід очікувати [3; 5] більших пластичних деформацій, порушення адгезійних зв'язків, розпушення, нелінійного деформування. Дослідні дані свідчать (див., напр., [6; 7]), що пластичне течіння починається біля кутів на торцях підсилення і зі збільшенням навантаження поширюється уздовж поверхні поділу до його центральної частини. Це підтверджують оптичні [8] та мікролазерні [9] дослідження полів напружень біля армувальних елементів. Аналітичні розв'язки плоских задач з локалізованими тонкими зонами передруйнування отримано в працях [10-13]. Особливість напружень в околі вершин у цих розв'язках змінилася із кореневої на логарифмічну, що є певним покращенням фізичної адекватності моделі: дотичні напруження в околі вершини підсилення мають розрив першого роду (рис. 1, *b*), а нормальні – логарифмічну сингулярність.

В працях [14-16] математична модель деформування тіла з підсиленням передбачає двофазну зону передруйнування, яка складається з спричиненого високою концентрацією пружних напружень ділянки розпушення та області пластичного зсуву чи адгезії. Це дало змогу отримати вищий рівень фізичної адекватності моделі та уникнути внаслідок цього сингулярності напружень в околах вершин підсилення, отримавши природним чином (рис. 1, *c*) в усіх точках композиції механічно коректні обмежені напруження. У межах цієї концепції для аналізу гранично рівноважного стану використано відомі [17] положення  $\delta_c$ -моделі. Прийнята схема і результати за нею узгоджуються як з експериментальними даними [18; 6] так і чисельним експериментом [19-21] на основі методу скінченних елементів. Результати дали можливість виявити [15; 16] два найбільш очікуваних механізми локального руйнування залежно від механічних та міцнісних характеристик: розрив підсилення або його відшарування від матриці. Аналізу особливостей втомного відшарування високомодульного включення стосуються праці [22-25].

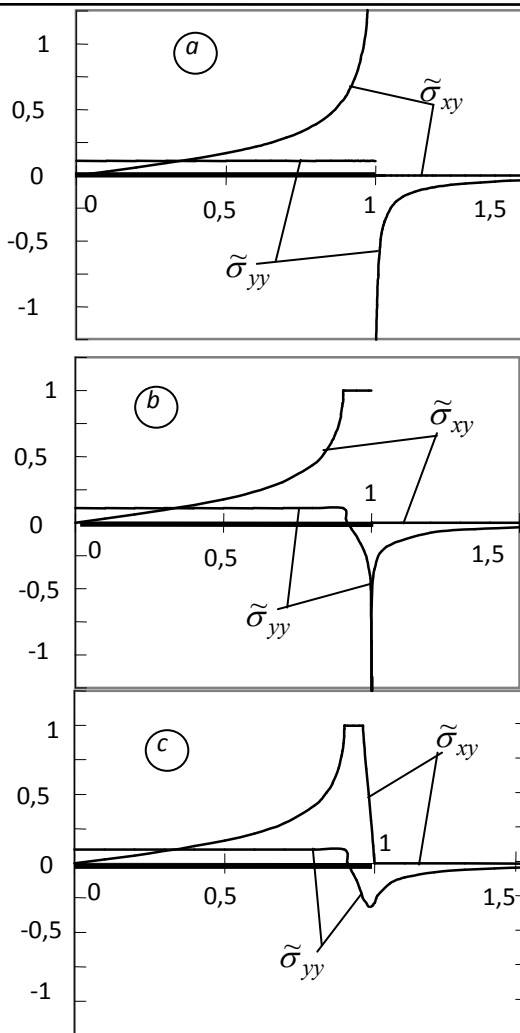


Рис. 1. Контактні дотичні  $\tilde{\sigma}_{xy}$  і нормальні  $\tilde{\sigma}_{yy}$  напруги на межі уздовж правої половини  $[0;1]$  та продовженні підсилення за розтягу  $q/(2\tau_s^*) = 0,25$ :  
 (a) – за пружним розв’язком; (b) – за результатами [10; 13]; (c) – двофазна [14; 15] зона передруйнування

**Постановка задачі.** Розглядаємо в умовах плоскої задачі композицію з пружнопластичної матриці та лінійного підсилення завдовжки  $2a$  ( $2a < 2a_{cr}^*$ ), віднесена до системи координат  $xOy$  (рис. 2, а). Обмеження на довжину підсилення виключає можливість його руйнування способом розриву. Композиція навантажена у точках  $x = \pm l$ ,  $y = 0$  зосередженими циклічними силами  $Q = Q_0 + \Delta Q \sin \omega t$  ( $Q \geq 0$ ) на продовженні лінії підсилення,  $\omega$  – кругова частота. Впливом зон нелінійності біля точок прикладання сил нехтуємо, що допустимо при достатньому їх віддаленні від кінців підсилення. Вважаємо, що інерційні та теплотворні ефекти неістотні.

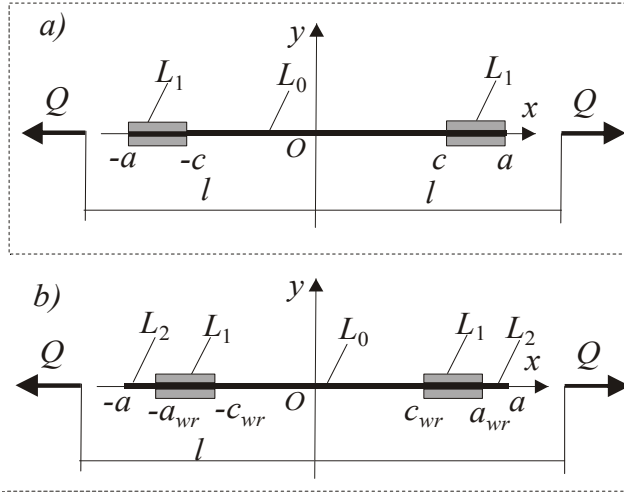


Рис. 2. Схема відшарування підсилення

Приймаємо, що за певної комбінації значень величини амплітуди та числа циклів навантаження підсилення відшаровується від матриці способом розвитку в околах його вершин тріщин ковзання вздовж межі розділу за механізмом поперечного зсуву. Довжину підсилення без відшарованих на кінцях частин позначаємо через  $2a_{wr}$  і називаємо робочою довжиною підсилення (рис. 2, б). Коефіцієнт тертя на ділянках  $L_2 \approx a_{wr} < |x| \leq a$ , де відбулося розшарування приймаємо рівним нулю.

Необхідно знайти (рис. 2, б) аналітичні залежності зміни робочої довжини підсилення  $a_{wr} = a_{wr}(n, Q_{\min}, Q_{\max}, \tau_s^*, G, \nu, l)$  у залежності від кількості циклів  $n$ , мінімального  $Q_{\min}$  та максимального  $Q_{\max}$  наван-

таження за цикл, енергії відшарування одиниці довжини  $\gamma_\tau^*$ , міцнісної  $\tau_s^*$  та пружних  $\nu$ ,  $G$  характеристик, відстані до точок прикладання сил  $l$ . Отримані в підсумку розрахункові формули будуть справедливими при допущенні суперпозиції зовнішніх силових, температурних та інших чинників.

**Навантаження стале.** Спочатку розглядаємо відповідну крайову задачу для композиції з підсиленням ( $a_{wr} = a$ ) за дії сталих зосереджених сил  $Q$ , крайові умови якої формулюємо наступним чином. На проміжку  $L_1 \approx |x| \leq c_{wr}$  ( $c_{wr} = c$ ) підсилення бездефектно зв'язане з матрицею і тому поздовжні деформації там відсутні:

$$\partial u(x)/\partial x = 0 \quad (x \in L_0). \quad (1)$$

У зонах передруйнування дотичні напруження досягають свого граничного значення

$$\sigma_{xy}^+(x) = -\sigma_{xy}^-(x) = \tau_s^* \text{sign}(x) \quad (x \in L_1). \quad (2)$$

Умова неперервності напружень в околах вершин зон передруйнування

$$\sigma_{xy}(x, 0) \rightarrow \tau_s^* \quad (x \rightarrow c_{wr} - 0). \quad (3)$$

Для розв'язування задачі (1)–(3) використовуємо відомі [1] подання Колосова – Мусхелішвілі для напружень і деформацій:

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4\text{Re}\Phi(z), \quad \sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi(z) - \kappa\Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (4)$$

$$2G(\partial u/\partial x + i\partial v/\partial x) = 2\kappa\text{Re}\Phi(z) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad z = x + iy, \quad (5)$$

$\kappa = 3 - 4\nu$  для плоскої деформації та  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  за умов плоского напруженого стану.

Функцію напружень  $\Phi(z)$  знайдемо після підстановки формул (4), (5) у крайові умови (1)–(3) та розв'язання відповідної задачі спряження з кусково неперервними коефіцієнтами:

$$\Phi(z) = \frac{\tau_s^*}{\pi(\kappa + 1)} \ln \Gamma_1(z, a_{wr}, c_{wr}), \quad (6)$$

$$\Gamma_1(z, a_{wr}, c_{wr}) = \left[ \xi^+(z) / \xi^-(z) \right], \quad \xi^\pm(z) = a_{wr} \sqrt{z^2 - c_{wr}^2} \pm z \sqrt{a_{wr}^2 - c_{wr}^2},$$

$$\frac{Q}{2\tau_s^*} - \sqrt{l^2 - c_{wr}^2} \ln \frac{a_{wr} + \sqrt{a_{wr}^2 - c_{wr}^2}}{c_{wr}} = 0. \quad (7)$$

Формули (4)–(7) цілком описують поля напружень та деформацій у тілі з підсиленням за заданим навантаженням і дають можливість дослідити умови його руйнування. Рівняння (7), отримане із забезпечення умови (3), описує зв'язок між довжиною зон передруйнування, навантаженням, відстанню до прикладених сил.

В зонах передруйнування відбуваються зміщення точок матеріалу матриці стосовно підсилення, які згідно (5), (7) визначаються за формулою

$$u(x, a_{wr}) = \frac{\kappa \tau_s^* l}{\pi G(\kappa + 1)} \{ a_{wr} \Gamma_2(x, a_{wr}, c_{wr}) + x \Gamma_1(x, a_{wr}, c_{wr}) \}, \quad c_{wr} \leq |x| \leq a_{wr}, \quad (8)$$

$$\Gamma_2(x, a_{wr}, c_{wr}) = \ln \left[ \frac{\eta^+(x)}{\eta^-(x)} \right], \quad \eta^\pm(x) = \sqrt{a_{wr}^2 - c_{wr}^2} \pm \sqrt{x^2 - c_{wr}^2}.$$

Їх найбільші значення досягаються в околах вершин ( $x = \pm a_{wr}$ )

$$u(a_{wr}) = \lim_{x \rightarrow a_{wr}} u(x, a_{wr}) = \frac{2\kappa \tau_s^* a_{wr}}{\pi G(\kappa + 1)} \ln \frac{a_{wr}}{c_{wr}}. \quad (9)$$

При досягненні максимальними переміщеннями  $u(a_{wr})$  певної граничної межі  $\delta_{2c}$  настає можливість розшарування, тобто втрати зв'язку між підсиленням та матрицею. Розшарування визначаємо як процес переходу точок області ослаблених зв'язків в область розірваних зв'язків, умовою якого приймається рівність

$$u(a_{wr}) = \delta_{2c}. \quad (10)$$

**Відшарування за неперервного навантаження.** Для побудови рівняння відшарування підсилення використовуємо енергетичний критерій, який передбачає існування критичного значення енергії  $W_f$ , необхідної для того, щоб робоча довжина підсилення зменшилася на одиницю довжини. Тоді для зменшення робочої довжини підсилення  $a_{wr}$  на величину  $\delta a_{wr}$  дисипація енергії повинна досягти значення

$$W_f = \eta_1 \gamma_f^* \delta a_{wr} :$$

$$W = W_f,$$

де  $\gamma_f^*$  – густина енергії відшарування;  $\eta_1$  – поправковий коефіцієнт.

При зменшенні робочої довжини на деяку малу величину  $\delta a_{wr}$  напруження на відповідному переміщенні виконують роботу

$$W = \int_{a_{wr} - d - \delta a_{wr}}^{a_{wr} - \delta a_{wr}} 2\sigma_{xy}(x) [u(x, a_{wr} - \delta a_{wr}, Q + \delta Q) - u(x, a_{wr}, Q)] dx,$$

де  $d = a_{wr} - c_{wr}$ . За схемою [24] подамо функцію  $u(x, a_{wr} - \delta a_{wr})$  у вигляді ряду Тейлора за степенями  $\delta a_{wr}$ , знехтуємо доданками порядку  $(\delta a_{wr})^2$  та спрямуємо  $\delta a_{wr}$  до нуля, вважаючи параметр  $a_{wr}$  залежним від навантаження. Тоді отримаємо, що

$$W = 2\tau_s^* \frac{d}{da_{wr}} \int_{c_{wr}}^{a_{wr}} x \frac{\partial u(x, a_{wr}, Q)}{\partial x} dx - 2\tau_s^* a_{wr} \frac{du(a_{wr}, a_{wr}, Q)}{da_{wr}}. \quad (11)$$

Перетворимо рівняння (11), використовуючи поданий вище розв'язок (4)–(8). Трансцендентне щодо довжини смуг  $a_{wr} - c_{wr}$  рівняння (7) подамо в неявному вигляді

$$f[\varphi_1(\tilde{Q}), \varphi_2(\tilde{Q}), \tilde{Q}] = 0,$$

де  $\varphi_1(\tilde{Q}) = c_{wr}/l$ ,  $\varphi_2(\tilde{Q}) = l/a_{wr}$ ,  $\tilde{Q} = Q/(2\tau_s^* a_{wr})$ , при цьому  $\varphi_1(\tilde{Q}) \cdot \varphi_2(\tilde{Q}) = c_{wr}/a_{wr}$ . Тоді згідно формули (11)

$$2\tau_s^* \frac{d}{da_{wr}} R(\varphi_1(\tilde{Q}), \varphi_2(\tilde{Q}), a_{wr}) + 2\tau_s^* u(a_{wr}, a_{wr}, \tilde{Q}) = \eta_1 \gamma_{\mathcal{F}}^*, \quad (12)$$

де  $R(\varphi_1(\tilde{Q}), \varphi_2(\tilde{Q}), a_{wr}) = \frac{\kappa \tau_s^* a_{wr}^2}{\pi G(\kappa+1)} [2 \ln(\varphi_1 \varphi_2) + s_1(\tilde{Q}) \sqrt{1 - \varphi_1^2 \varphi_2^2}]$ ,

$$\frac{dR}{da_{wr}} = \frac{\partial R}{\partial a_{wr}} + \frac{\partial R}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tilde{Q}} \frac{d\tilde{Q}}{da_{wr}} + \frac{\partial R}{\partial \varphi_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tilde{Q}} \frac{d\tilde{Q}}{da_{wr}},$$

$$\frac{\partial R}{\partial \varphi_1} = a_{wr}^2 \tilde{Q} \frac{\sqrt{1 - \varphi_1^2 \varphi_2^2} - \varphi_1^2 \varphi_2^2 s_1(\tilde{Q})}{\varphi_1^2 \sqrt{1 - \varphi_1^2 \varphi_2^2}}, \quad \varphi_1 = \varphi_1(\tilde{Q}), \quad \varphi_2 = \varphi_2(\tilde{Q}),$$

$$\frac{\partial R}{\partial \varphi_2} = \frac{\kappa \tau_s^* a_{wr}^2}{\pi G(\kappa+1)} \frac{\sqrt{1 - \varphi_1^2 \varphi_2^2} - \varphi_1^2 \varphi_2^2 s_1(\tilde{Q})}{\varphi_2^2 \sqrt{1 - \varphi_1^2 \varphi_2^2}},$$

$$s_1(\tilde{Q}) = \ln\left(\left(1 + \sqrt{1 - \varphi_1^2 \varphi_2^2}\right) / (\varphi_1 \varphi_2)\right), \quad s_2(\tilde{Q}) = \varphi_1^2 - 1 - s_1(\tilde{Q}) \varphi_1^2 \sqrt{1 - \varphi_1^2 \varphi_2^2}.$$

Після відносно громіздких перетворень з формули (12) отримуємо, що

$$\frac{\kappa a_{wr}}{G(\kappa+1)} \left\{ 2A_1(\varphi_1, \varphi_2) + \frac{1}{\varphi_2} \frac{B_1(\varphi_1, \varphi_2)}{C_1(\varphi_1, \varphi_2)} \frac{d\tilde{Q}}{da_{wr}} \right\} = \pi \frac{\eta_1 \gamma_{\mathcal{F}}^*}{\tau_s^*},$$

де  $A_1(\varphi_1, \varphi_2) = \ln(\varphi_1 \varphi_2) + s_1(\tilde{Q}) \sqrt{1 - \varphi_1^2 \varphi_2^2}$ ,

$$B_1(\varphi_1, \varphi_2) = \left(1 - \varphi_1^2 - s_2(\tilde{Q})\varphi_1 \left( \sqrt{1 - \varphi_1^2 \varphi_2^2} - s_1(\tilde{Q})\varphi_1^2 \varphi_2^2 \right) \right),$$

$$C_1(\varphi_1, \varphi_2) = s_2(\tilde{Q})\varphi_1 \sqrt{1 - \varphi_1^2}.$$

Звідси шуканий зв'язок між робочою довжиною підсилення та навантаженням подаємо у вигляді задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку:

$$\frac{da_{wr}}{d\tilde{Q}} = R_1(\varphi_1, \varphi_2), \quad a_{wr}(\tilde{Q} = 0) = a_0, \quad (13)$$

$$\text{де } R_1(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{\pi k g_c a_{wr} B_1(\varphi_1, \varphi_2)}{\varphi_2 C_1(\varphi_1, \varphi_2) (k + 1 - 2\pi k g_c a_{wr} A_1(\varphi_1, \varphi_2))},$$

$$g_c \equiv (\tau_s^*)^2 / (\pi^2 G \eta_1 \gamma_{\text{гр}}^*), \quad a_0 - \text{початкова робоча довжина підсилення.}$$

**Відшарування за циклічного навантаження.** Диференціальне рівняння задачі Коші (13) використаємо для розв'язання задачі про відшарування підсилення за циклічного навантаження, нехтуючи впливом залишкових напружень. Приймаємо, що відшарування відбувається під час кожного періоду навантаження, а під час розвантаження його робоча довжина не змінюється.

Рівняння (13) описує відшарування підсилення протягом одного циклу. Інтегруючи його від мінімального  $\tilde{Q}_{\min}$  до максимального  $\tilde{Q}_{\max}$  навантаження та вважаючи параметр  $a_{wr}$  сталим упродовж одного циклу, отримуємо зменшення робочої довжини підсилення протягом одного циклу на

$$\Delta a_{wr} = \int_{\tilde{Q}_{\min}}^{\tilde{Q}_{\max}} R_1(\varphi_1, \varphi_2) d\tilde{Q}.$$

Звідси швидкість відшарування підсилення подається виразом

$$\frac{da_{wr}}{dn} = \int_{\tilde{Q}_{\min}}^{\tilde{Q}_{\max}} R_1(\varphi_1, \varphi_2) d\tilde{Q} \equiv R_2(\tilde{Q}_{\max}, \tilde{Q}_{\min}, a_{wr}), \quad (14)$$

де  $n$  – кількість циклів навантаження. Після інтегрування залежність між робочою довжиною підсилення та кількістю циклів

$$n = \int_{a_0}^{a_n} \frac{da_{wr}}{R_2(\tilde{Q}_{\max}, \tilde{Q}_{\min}, a_{wr})}, \quad (15)$$

де  $a_0$  – початкове значення параметра  $a_{wr}$ ;  $a_n$  – значення параметра



$a_{wr}$  через  $n$  кількість циклів. Формула (15) описує шукану залежність між робочою  $a_{wr}$  довжиною підсилення та кількістю циклів навантаження. Швидкість відшарування (рис. 3) істотно залежить як від початкової довжини підсилення, так і максимального навантаження за цикл. При цьому повного відшарування не відбувається, в середній частині підсилення завжди за умов задачі залишається зв'язаним з матрицею. Чим менша початкова робоча довжина підсилення, тим повільніше (рис. 3, *b*) проходить розшарування.

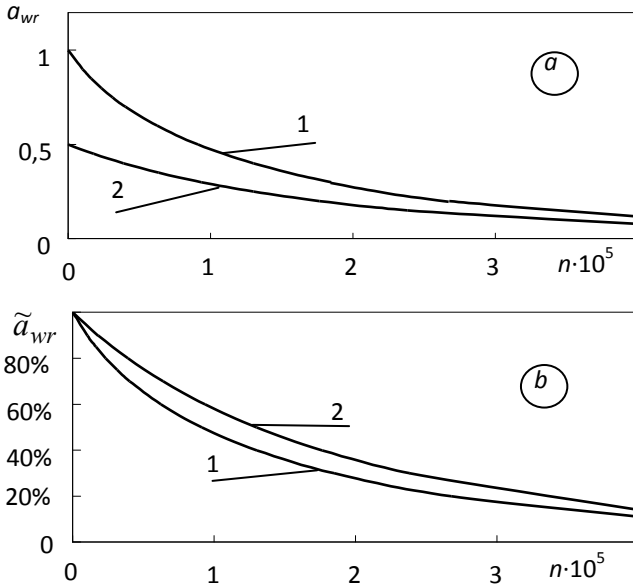


Рис. 3. Робоча (*a*) та відносна (*b*) довжини підсилення

$\tilde{a}_{wr} = a_{wr} \cdot 100\% / a_0$  залежно від числа  $n$  циклів навантаження:

$$\tilde{Q}_{\min} = 0,1, \tilde{Q}_{\max} = 0,2, \kappa = 2,2, g_c = 1, l = 2; 1 - a_0 = 1, 2 - a_0 = 0,5$$

**Висновки.** Запропоновано розрахункову модель відшарування тонкого нерозтяжливого підсилення від матеріалу матриці. Сформульовано постановку та отримано аналітичний розв'язок задачі відшарування підсилення за неперервного (описується задачею Коші для диференціального рівняння першого порядку) та циклічного (нелінійним рівнянням) силового навантаження.

Для заданого фіксованого навантаження за цикл та наперед відомій кількості циклів завжди можна підібрати довжину підсилення чи його характеристики таким чином, щоб відшарування не перевищувало заданого наперед значення (чи не відбувалося).

Отримані співвідношення необхідні в експериментальній механіці руйнування композитів. При відомих довжині підсилення, пружних та міцнісних параметрах композиції, мінімальному та максимальному навантаженнях за цикл за отриманими формулами можна оцінити робочу довжину підсилення чи її значення у відношенні до початкової через задану кількість циклів навантаження.

1. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.
2. Sih G. C. Plane extension of rigidly embedded line inclusions / Sih G. C. // *Developments in mechanics*. – V. 3, Pt. 1. *Solid. mech. and mater.* – New York : Willey, 1965. – P. 61–79.
3. Панасюк В. В. Распределение напряжений около дефектов типа жестких остроугольных включений / Панасюк В. В., Бережницкий Л. Т., Труш И. И. // *Проблемы прочности*. – 1972. – № 7. – С. 3–9.
4. Сулим Г. Т. Основы математической теории термопружной равновесии деформированных твердых тел с тонкими включениями / Г. Т. Сулим. – Львів : Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
5. Бережницкий Л. Т. К оценке предельного состояния матрицы в окрестности остроконечного жесткого включения / Бережницкий Л. Т., Громяк Р. С. // *Физико-химическая механика материалов*. – 1977. – Т. 13, № 2. – С. 39–47.
6. Эберт Л. Дж. Механические поверхности раздела. – *Композиционные материалы*. Т. 1. *Поверхности раздела в металлических композитах* / Эберт Л. Дж., Райт П. К. ; редактор А. Меткалф. – М. : Мир, 1978. – С. 42–76.
7. Fukuda Hiroshi. Stiffness and strength of short fibre composites as affected by crack and plasticity / Fukuda Hiroshi, Chou Tsu-Wei. // *Fibre Sci. and Technol.* – 1981. – Т. 15, № 4. – P. 243–256.
8. Iremonger M. J. Effects of geometry on stress in discontinuous composite materials / Iremonger M. J., Ulood W. G. // *Strain Analysis*. – 1969. – Т. 4, № 2. – P. 121–126.
9. Paipetis A. Modeling the stress-transfer efficiency of carbon-epoxy interfaces / Paipetis A., Galiotis C. // *Proc. Roy. Soc. London. A*. – 2001. – Т. 457, № 2011. – P. 1555–1577.
10. Brussat T. R. Interfacial slip around rigid fiber inclusions / Brussat T. R., Westmann R. A. // *J. Comp. Mater.* – 1974. – Т. 8, № 4. – P. 364–377.
11. Shioiri J. Micromechanics of interfacial failure in short fiber reinforced composite materials / Shioiri J., Inoue K. // *Rep. 1-st Soviet-Japanese Symp. on Composite Materials*. – Moscow, 1979. – P. 286–295.
12. Бережницкий Л. Т. О пластических полосах у вершины линейного жесткого включения / Бережницкий Л. Т., Кундрат Н. М. // *Проблемы прочности*. – 1982. – № 11. – С. 66–69.
13. Бережницкий Л. Т. Локальное упругопластическое разрушение одного класса композитов / Бережницкий Л. Т., Кундрат Н. М. // *Физико-химическая механика материалов*. – 1984. – Т. 19, № 5. – С. 57–64.
14. Кундрат Н. М. Локальное разрушение в композиции с жестким линейным включением / Н. М. Кундрат // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 1998. – Т. 4, № 4. – С. 115–127.
15. Кундрат М. М. Композиція з жо-

рстким лінійним включенням в модельному формулюванні / Н. М. Кундрат // Вісник Львівського Університету. Серія прикладна математика та інформатика. – 1999. – Вип. 1. – С. 146–151. **16.** Sulym H. T. Limiting Equilibrium and Fracture in an Orthotropic Body Containing a Thin Rigid Inclusion / Sulym H. T. and Kundrat M. M. // *Materials Science*. – 2006. – V. 42, № 2. – P. 220–232. **17.** Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами / В. В. Панасюк. – Киев : Наук. думка, 1968. – 248 с. **18.** Шами К. Механизм передачи нагрузки через поверхность раздела / К. Шами // *Композиционные материалы*. Т. 6. Поверхности раздела в полимерных композитах. – М. : Мир, 1978. – С. 42–87. **19.** Thomason P. F. Plastic flow and fracture in fibre composites / Thomason P. F. // *J. Mech. Phys. Solids*. – 1972. – V. 20. – P. 19–32. **20.** Сулим Г. Т. Метод конечных элементов в задаче о тонкостенном включении / Сулим Г. Т., Рокач И. В. // *Материалы 10 Конф. мол. ученых Физ.-мех. ин-та АН УССР. Секц. физ.-хим. мех. материалов*. Львов, 12-16 окт., 1981. – Львов, 1983. – 3 с. – Деп. в ВИНТИ 12 апр. 1983 г. № 1948-83 Деп. **21.** Gdoutos E. E. Stress and failure analysis of brittle matrix composites. Part1: Stress analysis / Gdoutos E. E., Gianakopoulou A. // *Int. J. of Fracture*. – 1999. – V. 98. – P. 263–277. **22.** Zhou L. Micromechanical characterization of fiber-matrix interphase / Zhou L. M., Kim J. K., Mai Y. W. // *Composites Sci. Technol.* – 1993. – V. 48. – P. 227–236. **23.** Kim J. K. Engineered interfaces in fiber reinforced composites / Kim J. K., Mai Y. W. – Elsevier Science Ltd, 1998. – 418 p. **24.** Кундрат М. М. Про відшарування жорсткого лінійного включення / М. М. Кундрат // *Доповіді НАН України*. – 2001. – № 2. – С. 60–65. **25.** Sulym H. T. Odseparowywanie gietkiej nakładki na krawędzi polplaszczyny sprężystej w płaskim zagadnieniu termosprężystości / Sulym H. T., Kundrat M. M. // *Materiały III Sympozjum Mechaniki Zniszczenia Materiałów i Konstrukcji (Augustów 1-4 czerwca 2005)*. – Białystok, 2005. – S. 401–404.

Рецензент: д.т.н., професор Трач В. М. (НУВГП)

---

**Kundrat M. M., Doctor of Engineering, Professor** (National University of Water Management and Nature Resources Use, Rivne)

### **SEPARATION OF THE INEXTENSIBLE LINE REINFORCEMENT UNDER LOADING OF CONCENTRATED CONTINUOUS AND CYCLICAL FORCES**

**The value of working length of strengthening depending on the amount of cycles, minimum and maximal loading for a cycle, energy for separation, strength and elastic rates, distance to applied forces are obtained. The calculations of working length for some data cases of composition and load are made.**

**Keywords:** strengthening, separation, zone of prefracture, working length, amount of cycles.

---

**Кундрат Н. М., д.т.н., профессор** (Национальный университет водного хозяйства и природопользования, г. Ровно)

### **ОТСЛОЕНИЕ НЕРАСТЯЖИМОГО ПОДКРЕПЛЕНИЯ ПРИ НАГРУЗКЕ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ НЕПРЕРЫВНЫМИ И ЦИКЛИЧЕСКИМИ СИЛАМИ**

Получено значение рабочей длины подкрепления в зависимости от количества циклов, минимальной и максимальной нагрузки за цикл, энергии отслаивания единицы длины подкрепления, прочностных и упругих характеристик матрицы, расстояния к прилагаемым силам. Выполнены расчеты рабочей длины для отдельных значений характеристик композиции и нагрузки.

**Ключевые слова:** подкрепление, отслоение, зона предразрушения, рабочая длина, количество циклов.

---