

УДК 378.147:515:516

Кривцов В. В., к.т.н., доцент (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

ЗАСТОСУВАННЯ РОДИННИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ З НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

В статті показано, як за допомогою родинних перетворень можна розв'язувати задачі з нарисної геометрії, коли точки або лінії перетину геометричних фігур знаходяться за межами креслення.

Ключові слова: нарисна геометрія, родинні перетворення, задачі.

Під час розв'язування задач з нарисної геометрії виникають ситуації, коли точки або лінії перетину геометричних об'єктів знаходяться за межами креслення, що значно ускладнює розв'язування задач. Для досягнення потрібного результату, як правило, виконують додаткові, іноді громіздкі побудови, при цьому графічні об'єкти можуть накладатися один на одного, що утруднює відтворення послідовності графічних дій і суттєво зменшує точність кінцевого результату.

Використання положень проєктивної геометрії дозволяє подібні, як і безліч інших задач нарисної геометрії, розв'язувати за допомогою простих, зручних прийомів, що значно збільшує точність побудов [1-3]. До важливих понять проєктивної геометрії належить група геометричних перетворень, що ґрунтуються на теоремі Дезарга. Зупинимось на родинних перетвореннях, які є частковим випадком гомологічних перетворень і які зручно використовувати для розв'язування задач в ортогональних проєкціях.

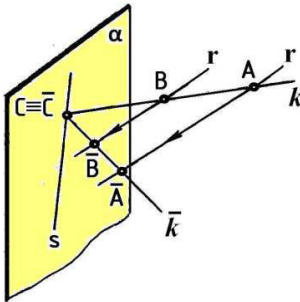


Рис. 1. Родинні перетворення в просторі, що здійснюються з одного боку від площини родинності

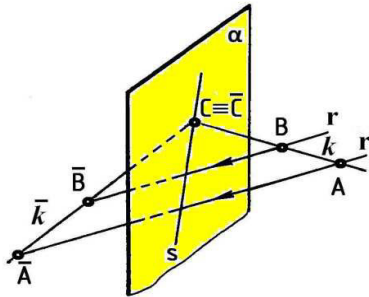


Рис. 2. Родинні перетворення в просторі, що здійснюються з двох боків від площини родинності

Перетворення, які можуть бути однозначно задані парою відповідних (родинних) точок A і \bar{A} (B і \bar{B}) та площиною родинності α , якщо перетворення відбуваються в просторі (рис. 1, 2), або віссю родинності s , якщо перетворення ведуться в площині (рис. 3, 4), називають родинними. Пара родинних точок A і \bar{A} (B і \bar{B}) визначає напрям родинності (напрямок подвійних прямих) – пряму r . Площина родинності α і вісь родинності s є геометричним місцем (множиною) точок, собі відповідних (подвійних точок): $\alpha \equiv \bar{\alpha}$, $s \equiv \bar{s}$. Будь-яка точка осі s або площини

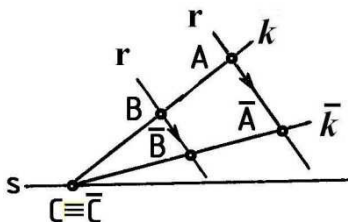


Рис. 3. Родинні перетворення на площині, що здійснюються з одного боку від осі родинності

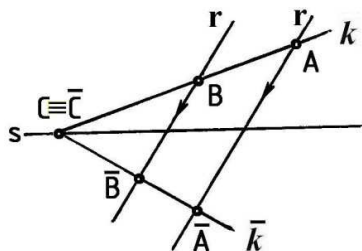


Рис. 4. Родинні перетворення на площині, що здійснюються з двох боків від осі родинності

α збігається з родинною їй точкою: $C \equiv \bar{C}$ (точка C належить s або α). Родинність задана, якщо відомі її центр, вісь або площина родинності і пара родинних точок. Центр родинності задається напрямом родинності, тобто центр є невласною точкою, що знаходиться в безкінченності. Можна перейти від родинних перетворень в просторі до родинних перетворень на площині. Дійсно, паралельні прямі $A\bar{A}$ і $B\bar{B}$ визначають площину, яка по прямій s перетинає площину α . Розглядаючи s як вісь, а розміщення невласного центру родинності відповідно до напрямку родинності, маємо справу з родинними перетвореннями на площині.

Виконаємо родинні перетворення, які знадобляться під час розв'язування задач з нарисної геометрії в ортогональних проекціях.

На рис. 5 родинність задана віссю x , невласним центром, знаходження якого визначається напрямом подвійної прямої $A\bar{A}$, що проходить через задані точки A і \bar{A} , перпендикулярно до осі родинності x . Для побудови точки B , що є родинною заданій точці B , проводимо пряму AB і відмічаємо точку C її перетину з віссю родинності x . Точка C є подвійною ($C \equiv \bar{C}$), тому пряма, що є родинною прямою AB , проходить через точку \bar{C} і точку \bar{A} . Проводимо подвійну пряму через точку B паралельно прямій $A\bar{A}$ і відмічаємо на ній точку \bar{B} її перетину з

прямою \overline{AC}

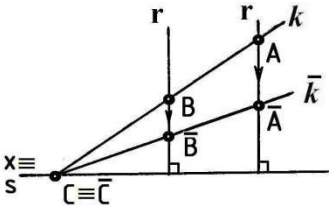


Рис. 5. Побудова точки \overline{B} , що є родинною заданій точці \overline{B} , при напрямі родинності, перпендикулярному до осі

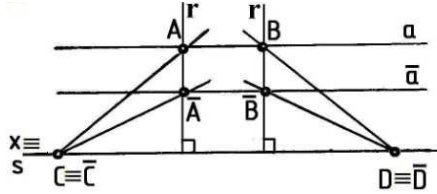


Рис. 6. Побудова точок \overline{A} і \overline{B} , що є родинними заданих точок A і B (точки лежать на заданих родинних прямих a і \overline{a} , паралельних до осі x)

На рис. 6 родинність задана віссю x , родинними прямими a і \overline{a} , що паралельні до осі x , і напрямом подвійних прямих, перпендикулярних до осі родинності x . На цьому рисунку показано побудову прямих \overline{CA} і \overline{DB} , родинних прямих CA і DB .

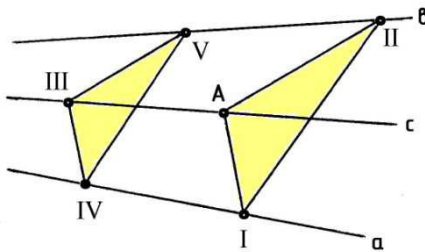


Рис. 7. Побудова прямої c , яка перетинається з прямими a і v за межами креслення

На рис. 7 побудовано пряму c , що проходить через точку A і перетинає задані прямі a і v в точці їх перетину, розміщену за межами креслення. Для цього через точку A проводимо довільні прямі AI і AII , отримаємо трикутник $A-I-II$ з вершинами I і II на прямих a і v . З точки IV на прямій a проводимо пряму $IV-V$, паралельну до $I-II$. З точок IV і V проводимо прямі $IV-III$ і $V-III$ паралельні відповідно до AI і AII . Через точку III і задану точку A буде проходити пряма a , що перетинається із заданими прямими a і v . В даному випадку маємо справу не з родинними перетвореннями, у яких центром є невласна точка, а з гомологічними перетвореннями, де центром є власна точка – точка перетину прямих a , v і c , а віссю гомології є невласна пряма, при якій гомологічні прямі паралельні між собою.

Покажемо переваги використання родинних перетворень при розв'язуванні задач з нарисної геометрії порівняно з традиційними

способами, коли точки або лінії перетину геометричних об'єктів, що входять в умову задачі, недоступні в межах креслення.

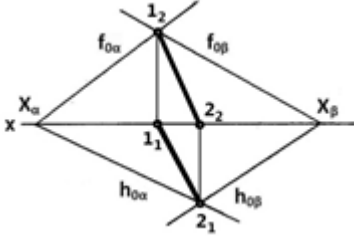


Рис. 8. Розв'язок задачі на побудову лінії перетину двох площин, коли сліди площин перетинаються в межах креслення

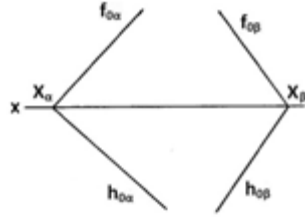


Рис. 9. Сліди двох площин не перетинаються в межах креслення

На рис. 8 показано побудову лінії перетину 12 площин α і β , коли сліди площин перетинаються в межах креслення. Якщо сліди площини (рис. 9) не перетинаються в межах креслення, то кількість графічних побудов для визначення лінії перетину при застосуванні традиційних способів значно збільшується. Причому для отримання результату потрібно використовувати різні прийоми. Покажемо, як, використовуючи родинні перетворення, можна звести розв'язок задачі з початковою умовою на рис. 9 до задачі на рис. 8.

На рис. 10 наведено розв'язок задачі з початковою умовою на рис. 9 за допомогою родинних перетворень. Задамо родинність віссю x , родинними прямими a і \bar{a} , паралельними осі x , і напрямком подвійних

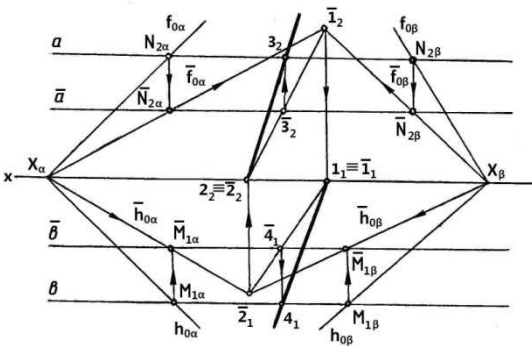


Рис. 10. Розв'язок задачі на визначення лінії перетину двох площин з початковою умовою на рис. 9 за допомогою родинних перетворень

прямих, перпендикулярних осі родинності. Знаходимо точки $N_{2\alpha}$ і $N_{2\beta}$, що є родинними точкам $N_{2\alpha}$ і $N_{2\beta}$ і лежать на фронтальних слідах площин. Проводимо через знайдені родинні фронтальні сліди $\bar{f}_{0\alpha}$ і $\bar{f}_{0\beta}$ площин α і β та визначаємо точку $\bar{1}_2$,

яка є родинною фронтальної проекції l_2 точки перетину 1 слів $f_{0\alpha}$ і $f_{0\beta}$. При родинних перетвореннях, коли напрям подвійних прямих перпендикулярний до осі x , горизонтальні проекції точок та ліній площин не змінюють свого положення. Тому за допомогою лінії проекційного зв'язку можна зафіксувати горизонтальну проекцію l_1 точки перетину фронтальних слів $f_{0\alpha}$ і $f_{0\beta}$. Далі знаходимо точки $\overline{M}_{1\alpha}$ і $\overline{M}_{1\beta}$, які є родинними точкам $M_{1\alpha}$ і $M_{1\beta}$, що лежать на горизонтальних слідах площини. Проводимо через знайдені точки родинні горизонтальні сліди $\overline{h}_{0\alpha}$ і $\overline{h}_{0\beta}$ площин α і β та визначаємо точку $\overline{2}_1$, яка є родинною горизонтальної проекції точки перетину 2 слів $h_{0\alpha}$ і $h_{0\beta}$. Фіксуємо за допомогою лінії проекційного зв'язку фронтальну проекцію 2_2 . Точки 1_1 і 2_1 лежать на осі родинності і є подвійними точками, тобто $1_1 \equiv \overline{1}_1$ і $2_2 \equiv \overline{2}_2$. Проводимо родинну фронтальну проекцію $\overline{1}_2$ $\overline{2}_2$ лінії перетину 12 площин α і β , фіксуємо на прямій \overline{a} точку $\overline{3}_2$ і знаходимо її родинну точку 3_2 , що лежить на прямій a . Через точки 2_2 і 3_2 буде проходити фронтальна проекція l_2 і 2_2 лінії перетину 12 площин α і β . Аналогічним чином побудовано горизонтальну проекцію l_1 2_1 лінії перетину 12 площин α і β , яка буде проходити через точки 1_1 і 4_1 .

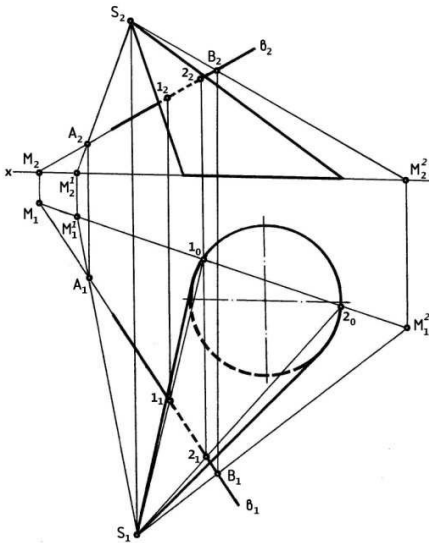


Рис. 11. Побудова точок 1 і 2 перетину прямої ϵ з поверхнею конуса традиційним способом

Розглянемо більш складні задачі, розв'язок яких без застосування родинних перетворень був би надзвичайно ускладненим. На рис. 11 традиційним способом визначено точки 1 і 2 перетину прямої ϵ з конічною поверхнею. Для цього через вершину S і пряму ϵ проведено допоміжну площину, що задана або прямими SA та SB , або прямими SA і ϵ (SB і ϵ) за умови, що пряма ϵ перетинає площину π_1 в межах креслення. В практичних задачах вершина конуса часто недоступна (рис. 12). Розв'язок такої задачі традиційними спо-

собами за допомогою, наприклад, січних площин веде до великої кількості побудов, що, в підсумку, зменшує точність отриманого результату. На рис. 12 побудови виконано за допомогою родинних перетворень, що дозволяє її розв'язування звести до рис. 11. Родинність задано горизонтальною площиною родинності α , що проходить через нижню основу конуса, горизонтальними родинними площинами ω і $\bar{\omega}$ та напрямом подвійних прямих, перпендикулярних до цих площин. Перетворимо конус з верхньою основою, на якій лежать точки A і B , в конус з верхньою основою, що проходить через точки \bar{A} і \bar{B} . Нижня основа конуса розміщена в площині родинності, тому вона перетворюється «сама в себе». Побудуємо вершину \bar{S} перетвореного конуса та перетворимо пряму v в \bar{v} . Точка M , що лежить в площині родинності, свого положення не змінює, а точка D перетворюється в родинну точку \bar{D} . Після виконаних родинних перетворень розміщення конуса з вершиною \bar{S} і прямою \bar{v} , що

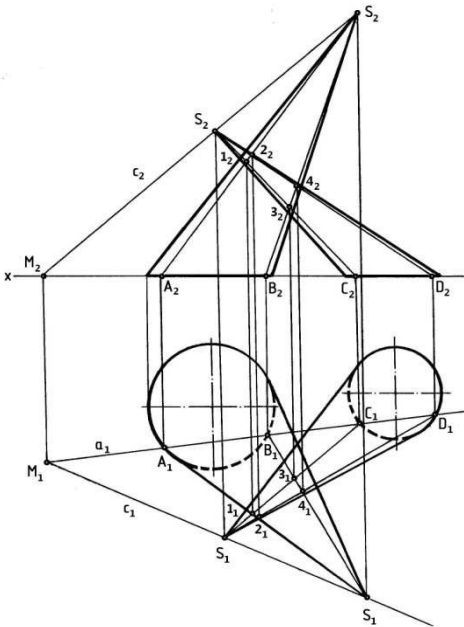


Рис. 12. Побудова точок 1 і 2 перетину прямої v з поверхню конуса, у якого вершина недоступна, за допомогою родинних перетворень

перетинає поверхню перетвореного конуса, відповідає рис. 11. Проводячи через вершину \bar{S} площину, що задана прямими \bar{v} і $\bar{S}\bar{A}$, знаходимо точки $\bar{1}$ і $\bar{2}$ перетину прямої \bar{v} з перетвореним конусом. Оскільки в результаті зазначених перетворень горизонтальні проекції фігур не змінили свого положення ($\bar{1}_1 \equiv 1_1$ і $\bar{2}_1 \equiv 2_1$), то фронтальні проекції 1_2 і 2_2 точок 1 і 2 перетину прямої v з поверхню конуса можна знайти за допомогою ліній проєкційного зв'язку $\bar{1}_2 - 1_2$ і $\bar{2}_2 - 2_2$.

На рис. 13 показано визначення точок 1...4, що належать двом конічним поверхням, традиційним методом за допомогою площини, яка задана прямими c і a .

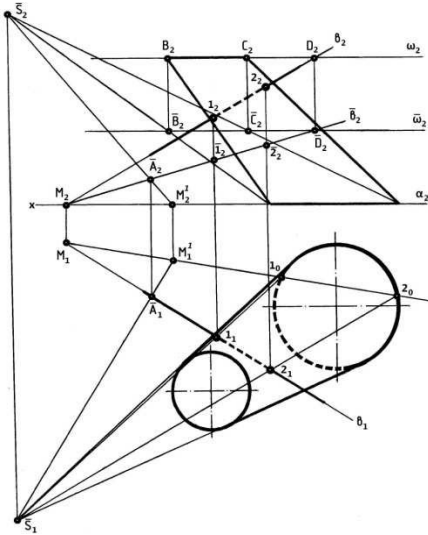


Рис. 13. Побудова спільних точок двох конічних поверхонь традиційним методом

Якщо розміщення вершин конусів таке, що точка перетину прямої c з площиною π_1 (рис. 14) знаходиться за межами креслення, доцільно для зменшення кількості побудов застосовувати родинні перетворення. Проте спочатку

потрібно провести одну з допоміжних площин. Для цього з вершини S^2 проводимо, наприклад, довільну пряму S^2M . Прямі c і S^2M визначають одну з допоміжних площин зі спільною прямою c .

Знаходимо лінію перетину цієї площини з площиною π_1 . Для цього через точку S^1 проводимо горизонталь h площини, що задана прямими c і S^2M , а через точку M паралельну до неї пряму h' . Пряма h' буде горизонтальним слідом ($h_1' \equiv h_1$) площини, що задана прямими c і S^2M . Якщо пряма h_1 перетинає основи конусів, то за її допомогою можна визначити спільні точки поверхонь двох конусів. Пряму h_1' разом з прямою c_1 можна використовувати для проведення інших горизонтальних слідів допоміжних площин зі спільною прямою c . Так, застосовуючи гомологічні трикутники I-II-III і IV-V-VI за способом, зображеним на рис. 7, можна побудувати пряму a_1 , що проходить через точки I і IV вершин цих трикутників і є горизонтальним слідом однієї з допоміжних площин зі спільною прямою c . Пряма a_1 разом з прямими h_1' і c_1 перетинаються в недоступній точці перетину прямої c з площиною

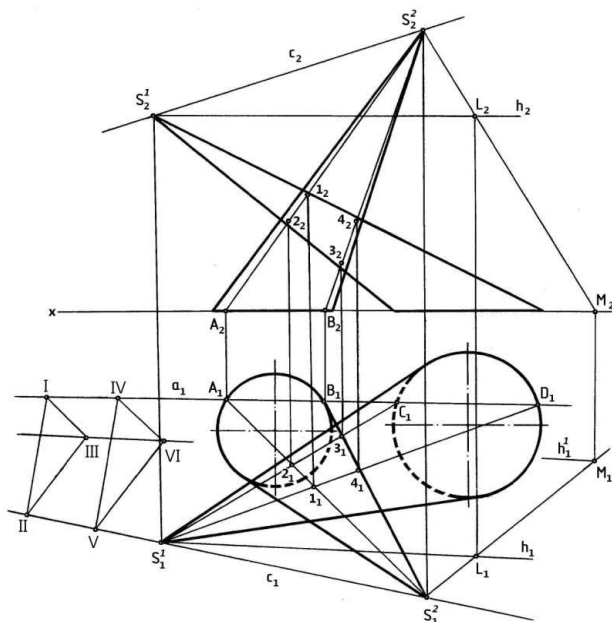


Рис. 14. Побудова спільних точок двох конічних поверхнь, коли пряма, що проходить через вершини конусів, не перетинає площину π_1 в межах креслення π_1 . На рис. 14 за допомогою прямої a_1 визначено спільні точки 1...4 двох конічних поверхнь.

При розв'язуванні технічних задач часто зустрічаються конічні поверхні, вершини яких розміщені за межами креслення (рис. 15). Розв'язування таких задач традиційними методами надзвичайно ускладнюється виконанням великої кількості графічних побудов.

Покажемо, як родинні перетворення значно полегшують розв'язування даної задачі, зводячи її розв'язок до умов задачі, показаної на рис. 13. Задамо родинність горизонтальною площиною α , що проходить через верхні основи конусів або утворює перерізи конусів, якщо їх поверхня не обмежується верхніми основами. Площини верхніх основ конусів паралельні до площини π_1 . Родинність задамо також горизонтальними родинними площинами ω і $\bar{\omega}$. Напрямок подвійних прямих (напрямок родинності) приймемо перпендикулярним до площин ω і $\bar{\omega}$. Конус з нижньою основою AB перетворюється в конус з основою $\bar{A}\bar{B}$, а конус з основою CD – в конус з основою $\bar{C}\bar{D}$. Верхні основи конусів лежать в площині родинності α і перетворюються «в самих се-

бе», тобто не змінюють своїх розмірів та положення. Оскільки відстань від $\bar{\omega}_2$ до α_2 менша ніж від ω_2 до α_2 , то фронтальні проекції родинних конусів будуть стиснутими, тобто мати менші висоти, ніж в початковому положенні. Це дозволяє побудувати фронтальні проекції \bar{S}_2^1 і \bar{S}_2^2 родинних конусів в межах креслення, а отже, і фронтальну проекцію \bar{c} прямої \bar{c} . Фронтальні проекції родинних конусів будуть

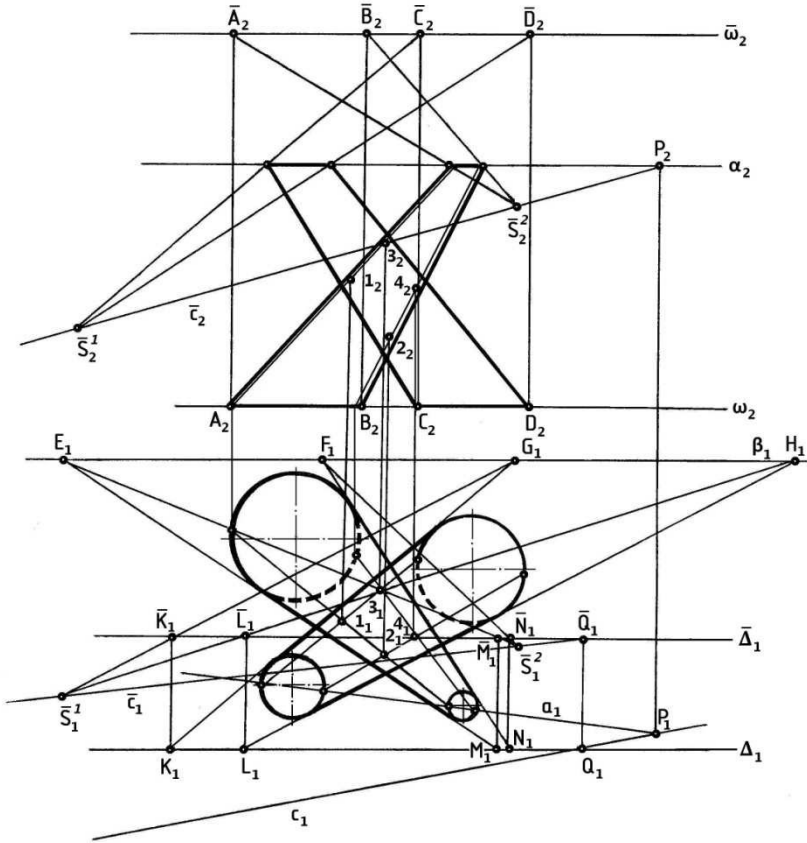


Рис. 15. Побудова спільних точок двох поверхонь зрізаних конусів за допомогою родинних перетворень

перевернутими, оскільки родинна площина $\bar{\omega}$ знаходиться вище від родинної площини α . Далі знаходимо фронтальну проекцію P_2 точки P перетину прямої \bar{c} з площиною верхніх основ конусів, через яку про-

ведено площину родинності, причому $\overline{P}_2 \equiv P_2$. Для того, щоб знайти горизонтальну проекцію P_1 точки P , задамо фронтальну площину родинності β та фронтальні родинні площини Δ і $\overline{\Delta}$, а також напрям подвійних прямих, перпендикулярний до площин Δ і $\overline{\Delta}$. Побудуємо за допомогою площин β і Δ горизонтальні проекції перерізів поверхонь конусів. Горизонтальними проекціями перерізів конусів з вершиною S^1 будуть відрізки G_1H_1 і K_1L_1 , конуса з вершиною S^2 – відрізки E_1F_1 і M_1N_1 . Проведемо родинні перетворення, в результаті яких проекції перерізів конусів переміщуються з площини Δ в площину $\overline{\Delta}$, тобто K_1L_1 перетворюється в $\overline{K}_1\overline{L}_1$, а M_1N_1 в $\overline{M}_1\overline{N}_1$. Оскільки розміри горизонтальних проекцій родинних конусів в результаті родинного перетворення зменшилися у напрямку, перпендикулярному до площини π_2 , вершини перетворених конусів проєціюються на площину π_1 в межах креслення. Це точки \overline{S}_1^1 і \overline{S}_1^2 , через які проводимо пряму \overline{e}_1 до перетину із слідом площини $\overline{\Delta}_1$ в точці \overline{Q}_1 . Цій точці буде відповідати родинна точка Q_1 на сліді площини Δ_1 . Через цю точку буде проходити горизонтальна проекція c_1 прямої c , проведеної через вершини конусів. Пряму c_1 проводимо через точку Q_1 і точку S_1^2 , що є родинною проекцією точки \overline{S}_1^2 . За допомогою лінії проекційного зв'язку, що проведена з точки P_2 на пряму c_1 , фіксуємо горизонтальну проекцію P_1 точки P перетину прямої c з площиною верхніх основ конусів. Через точку P_1 проводимо пряму a_1 до перетину з лініями основ верхніх конусів і визначаємо спільні точки 1...4 лінії перетину поверхонь двох конусів.

Геометричні фігури, які входять в початкові умови задачі, можуть займати, в загальному випадку, довільне положення в просторі. Під час розв'язування геометричних задач, зокрема з нарисної геометрії, часто трапляються ситуації, коли точки або лінії перетину геометричних фігур знаходяться за межами креслення. В таких випадках розв'язок задачі традиційними способами є або неможливим, або дуже ускладнюється. Застосування родинних перетворень, як свідчать наведені приклади, дозволяє стиснути задані геометричні фігури до таких розмірів, що їх перетин відбувається в межах креслення. Це дозволяє, по-перше, розв'язати задачу, яку традиційними способами розв'язати було неможливо, а, по-друге, використати для перетворених фігур звичні способи розв'язку, що значно спрощує розв'язок і робить більш точним його результат порівняно з розв'язком задачі без застосування родинних перетворень.

1. Четверухин Н. Ф. Проективная геометрия / Н. Ф. Четверухин. – М. : Просвещение, 1969. – 368 с. 2. Начертательная геометрия / Н. Ф. Четверухин, В. С. Левицкий, З. И. Прянишникова, А. М. Тевлин, Г. И. Федотов. – М. : Высш. школа, 1963. – 420 с. 3. Кузнецов Н. С. Начертательная геометрия / Н. С. Кузнецов. – М. : Высш. школа, 1969. – 501 с.

Рецензент: д.т.н., доцент Науменко Ю. В. (НУВГП)

Krivtsov V. V., Candidate of Engineering, Associate Professor (National University of Water Management and Nature Resources Use, Rivne)

USAGE OF RELATED TRANSFORMATIONS IN DESCRIPTIVE GEOMETRY PROBLEM SOLVING

The article shows how to solve tasks in descriptive geometry with the help of related transformations, when points or intersection lines of geometric figures are beyond the drawing.

Keywords: descriptive geometry, related transformations, tasks.

Кривцов В. В., к.т.н., доцент (Национальный университет водного хозяйства и природопользования, г. Ровно)

ПРИМЕНЕНИЕ РОДСТВЕННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ПО НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

В статье показано, как с помощью родственных преобразований можно решать задачи по начертательной геометрии, когда точки или линии пересечения геометрических фигур находятся за пределами чертежа.

Ключевые слова: начертательная геометрия, родственные преобразования, задачи.
