ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

УДК 519.63.001.57

Бомба А. Я., д.т.н., професор (Рівненський державний гуманітарний університет), **Гладка О. М., к.т.н.** (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)**, Кузьменко А. П., к.ф.-м.н., доцент** (Міжнародний економіко-гуманітарний університет імені Степана Дем'янчука)

МЕТОДИ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ І СУМАРНИХ ЗОБРАЖЕНЬ МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ КВАЗІІДЕАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ У ДВОЯКО-ШАРУВАТИХ СЕРЕДОВИЩАХ

На основі синтезу числових методів комплексного аналізу та сумарних зображень з декомпозицією області за методом Шварца розроблено конструктивний підхід до розв'язання нелінійних крайових задач для двозв'язних шаруватих криволінійних областей, обмежених еквіпотенціальними лініями. Створений алгоритм автоматично вирішує проблему вибору вузлів та побудови динамічної сітки, знаходження невідомих ліній розділу шарів сталості коефіцієнта прові

***Ключові слова*: комплексний потенціал, конформні відображення, метод сумарних зображень, декомпозиція області, альтернуючий метод Шварца, шарувате середовище.**

Вступ. У попередніх роботах авторів (див., напр. [1; 2]) запропоновано конструктивний підхід до моделювання квазіідеальних полів для криволінійних областей, обмежених лініями течії і еквіпотенціальними лініями, на основі синтезу числових методів комплексного аналізу [3; 4] та сумарних зображень [5; 6]. Зокрема, розроблена обчислювальна технологія розв'язання нелінійних модельних задач для багатозв'язних криволінійних шаруватих областей, у яких провідність середовища задається як кусково-стала функція, залежна від шуканого квазіпотенціалу, що базується на поєднанні числових методів квазіконформних («кусково-конформних») відображень [4], формул сумарних зображень для шарувато-неоднорідних середовищ з вертикальними лініями розділу [7; 8] і альтернуючого методу Шварца [9]. Цей підхід також був поширений і на математичне моделювання процесів витіснення вуглеводнів із ущільнених (сланцевих) пластів з гідророзривами, в яких має місце суттєво різна проникність середовища вздовж відповідних ліній течії. Для розрахунку вузлів динамічної сітки у таких задачах застосовуються формули сумарних зображень для диференціальних рівнянь з розривними коефіцієнтами в багатошарових

областях з горизонтальними лініями розділу [7; 8]. При цьому, використання методів сумарних зображень як компоненти раніше розроблених обчислювальних процедур дозволяє суттєво підвищити ефективність запропонованого алгоритму, оскільки, дає можливість в комплексі (сумарно) враховувати вплив усіх граничних і внутрішніх вузлів, що пришвидшує досягнення спряженості шуканих гармонічних функцій.

У даній роботі запропонований підхід викладений на прикладі розв'язання нелінійних крайових задач для двозв'язних обмежених еквіпотенціальними лініями областей – математичних моделей стаціонарного процесу руху речовини у двояко-шаруватих середовищах [10], провідність яких задається кусково-сталими функціями, залежними і від шуканого потенціалу, і від функції течії, з невідомими лініями розділу шарів (лініями розриву коефіцієнта провідності), що проходять вздовж ділянок шуканих еквіпотенціалей та ліній течії і знаходяться в процесі розв'язання задачі.

Формулювання задачі. Розглянемо стаціонарний процес фільтрації у двозв'язній криволінійній області G_z $(z = x + iy)$, обмеженій замкненими контурами – еквіпотенціалями $L_* = \{z : f_*(x, y) = 0\}$ і $L^* = \{z : f^*(x, y) = 0\}$, який описуватимемо рівнянням руху $\vec{\upsilon} = \kappa \cdot grad\ \varphi$ (закон Дарсі) та рівнянням нерозривності $div\ \vec{\upsilon} = 0$ [3], де $\vec{\upsilon} = \upsilon_x(x, y) + \mathrm{i}\,\upsilon_y(x, y)$ – швидкість фільтрації, φ – потенціал поля, такий, що $\varphi\big|_{L_*} = \varphi_*$, $\varphi\big|_{L^*} = \varphi^*$, $-\infty < \varphi_* < \varphi^* < +\infty$, $\psi = \psi(x, y)$ – функція течії, комплексно спряжена до φ [1–4], κ – коефіцієнт провідності середовища – кусково-стала функція із розривами вздовж ділянок шуканих еквіпотенціалей і ліній течії – $\kappa(x(\varphi,\psi), y(\varphi,\psi)) = \kappa^{(q,l)} при\ \varphi_* \le \varphi^{(q-1)} < \varphi \le \varphi^{(q)} \varphi^*$, $q = \overline{1, s_1}$, $0 \le \psi^{(l-1)} < \psi \le \psi^{(l)} \le Q, l = \overline{1, s_2}$ ($\kappa^{(q,l)}$ – деякі додатні числа). Такого роду задачі виникають при моделюванні процесів витіснення вуглеводнів із ущільнених (сланцевих) пластів за геологічно складних умов.

Аналогічно до [3; 4], приходимо до задачі на квазіконформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ однозв'язної області $G_z^\Gamma = G_z \setminus \Gamma$, що утворена за допомогою умовного розрізу Γ вздовж вибраної лінії течії, на відповідну прямокутну область комплексного потенціалу

$$G_\omega = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*,\ 0 < \psi < Q\} =$$
$$= \left(\bigcup_{q=1,l=1}^{s_1,s_2} G_\omega^{(q,l)}\right) \bigcup \left(\bigcup_{q=1}^{s_1} L_{\omega*}^{(q)}\right) \bigcup \left(\bigcup_{l=1}^{s_2} L_{\omega 0}^{(l)}\right),$$
$$G_\omega^{(q,l)} = \left\{\omega \in G_\omega : \varphi^{(q-1)} < \varphi < \varphi^{(q)}, \psi^{(l-1)} < \psi < \psi^{(l)}\right\},$$
$$L_{\omega*}^{(q)} = \left\{\omega \in G_\omega : \varphi = \varphi^{(q)}\right\},\ L_{\omega 0}^{(l)} = \left\{\omega \in G_\omega : \psi = \psi^{(l)}\right\}$$

з невідомою витратою $Q = \oint\limits_{L_*} -\upsilon_y dx + \upsilon_x dy$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = \kappa(x,y)\dfrac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \kappa(x,y)\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x}, \quad (x,y)\in G_z^{\Gamma}; \\ \varphi\big|_{L_*} = \varphi_*,\ \varphi\big|_{L^*} = \varphi^*,\ \psi\big|_{L_0} = 0,\ \psi\big|_{L^0} = \oint\limits_{L_*} -\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}dx + \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}dy, \end{cases} \tag{1}$$

де L_0, L^0 – відповідно нижній і верхній береги розрізу Γ.

Обернена до (1) крайова задача на квазіконформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi,\psi) + iy(\varphi,\psi)$ області G_ω на G_z^{Γ} при невідомій витраті Q та розрізі Γ має вигляд:

$$\begin{cases} \kappa(x(\varphi,\psi), y(\varphi,\psi))\dfrac{\partial x}{\partial\varphi} = \dfrac{\partial y}{\partial\psi}, \\ \dfrac{\partial y}{\partial\varphi} = -\kappa(x(\varphi,\psi), y(\varphi,\psi))\dfrac{\partial x}{\partial\psi}, \quad (\varphi,\psi)\in G_\omega, \\ f_*\big(x(\varphi_*,\psi), y(\varphi_*,\psi)\big) = 0, \\ f^*\big(x(\varphi^*,\psi), y(\varphi^*,\psi)\big) = 0, \quad 0\le\psi\le Q, \\ x(\varphi,0) = x(\varphi,Q),\ y(\varphi,0) = y(\varphi,Q), \\ \lim\limits_{\psi\to 0+0}\dfrac{\partial x(\varphi,\psi)}{\partial\psi} = \lim\limits_{\psi\to Q-0}\dfrac{\partial x(\varphi,\psi)}{\partial\psi}, \varphi_*\le\varphi\le\varphi^*, \\ \lim\limits_{\psi\to 0+0}\dfrac{\partial y(\varphi,\psi)}{\partial\psi} = \lim\limits_{\psi\to Q-0}\dfrac{\partial y(\varphi,\psi)}{\partial\psi}, \varphi_*\le\varphi\le\varphi^*, \end{cases} \tag{2}$$

і є еквівалентною до задачі [4]:

$$\begin{cases} \mathrm{L}x \equiv \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\dfrac{1}{\kappa\big(x(\varphi,\psi), y(\varphi,\psi)\big)}\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\right) + \\ + \dfrac{\partial}{\partial\psi}\left(\kappa\big(x(\varphi,\psi), y(\varphi,\psi)\big)\dfrac{\partial x}{\partial\psi}\right) = 0, \\ \mathrm{L}y = 0,\ (\varphi,\psi)\in G_\omega, \\ f_*\big(x(\varphi_*,\psi), y(\varphi_*,\psi)\big) = 0, \\ f^*\big(x(\varphi^*,\psi), y(\varphi^*,\psi)\big) = 0, \quad 0\le\psi\le Q, \\ x(\varphi,0) = x(\varphi,Q),\ y(\varphi,0) = y(\varphi,Q),\ \varphi_*\le\varphi\le\varphi^*, \\ \left(\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\dfrac{\partial f_*}{\partial y} - \dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\dfrac{\partial f_*}{\partial x}\right)\Bigg|_{\varphi=\varphi_*} = 0, \left(\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\dfrac{\partial f^*}{\partial y} - \dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\dfrac{\partial f^*}{\partial x}\right)\Bigg|_{\varphi=\varphi^*} = 0, \\ Q = \displaystyle\int\limits_0^Q \dfrac{\kappa\big(x(\varphi,\psi), y(\varphi,\psi)\big)}{J}\left(\left(\dfrac{\partial x}{\partial\psi}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial\psi}\right)^2\right)d\psi, \end{cases} \tag{3}$$

де $J = \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi}\frac{\partial y}{\partial \varphi}$ – якобіан переходу.

Умови спряження вздовж шуканих еквіпотенціальних ліній $L_*^{(q)}$ і ліній течії $L_0^{(l)}$, що є лініями розриву функції κ, мають вигляд:

$$[x]\Big|_{L_*^{(q)}} = [x]\Big|_{L_0^{(l)}} = 0, \quad [y]\Big|_{L_*^{(q)}} = [y]\Big|_{L_0^{(l)}} = 0, \left[\kappa\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right]\Bigg|_{L_*^{(q)}} = \left[\kappa\frac{\partial x}{\partial \psi}\right]\Bigg|_{L_0^{(l)}} = 0,$$

$$\left[\kappa\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right]\Bigg|_{L_*^{(q)}} = \left[\kappa\frac{\partial y}{\partial \psi}\right]\Bigg|_{L_0^{(l)}} = 0,$$

де $[f]$ – стрибок функції *f* при переході по нормалі через відповідну лінію.

Різницевий аналог. Для знаходження розв'язків нелінійної задачі (3) в області комплексного квазіпотенціалу конструюємо рівномірну ортогональну сітку і замінюємо G_ω сітковою областю $G_\omega^\gamma = \{(\varphi_i, \psi_j):\quad \varphi_i = \varphi_* + \Delta_\varphi \cdot i,\quad i = \overline{0, m+1},\quad \varphi^{(q)} = \varphi_{m_q},\quad q = \overline{1, s_1},$ $0 \le m_1 < m_2 < \ldots < m_{s_1} \le m,\ \psi_j = \Delta_\psi \cdot j,\ j = \overline{0, n+1},\ \psi^{(l)} = \psi_{n_l},\ l = \overline{1, s_2},$ $0 \le n_1 < n_2 < \ldots < n_{s_2} \le n,\quad \Delta_\varphi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{m+1},\quad \Delta_\psi = \frac{Q}{n+1},\quad \gamma = \Delta_\varphi / \Delta_\psi,$ $m,\ n \in \mathbf{N}\}$, а крайові умови, умови на розрізі і умови ортогональності ліній динамічної сітки до відповідних ділянок межі фізичної області – скінченно-різницевими аналогами [4]:

$$f_*(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0,\ f^*(x_{m+1,j}, y_{m+1,j}) = 0,\ j = \overline{0, n+1} \tag{4}$$

$$\begin{cases} x_{i,0} = \alpha_i(x_{i+1,n} + x_{i+1,1} - x_{i,n} - x_{i,1}) - \beta_i(x_{i,n} + x_{i,1} - x_{i-1,n} - \\ - x_{i-1,1}) + 0.5(x_{i,n} + x_{i,1}),\ y_{i,0} = \alpha_i(y_{i+1,n} + y_{i+1,1} - y_{i,n} - y_{i,1}) - \\ - \beta_i(y_{i,n} + y_{i,1} - y_{i-1,n} - y_{i-1,1}) + 0.5(y_{i,n} + y_{i,1}),\ i = \overline{1, m}, \\ \alpha_i = \left[2\gamma^2\kappa_{i,0}(\kappa_{i,0} + \kappa_{i+1,0})\right]^{-1}, \beta_i = \left[2\gamma^2\kappa_{i,0}(\kappa_{i-1,0} + \kappa_{i,0})\right]^{-1}, \\ x_{i,0} = x_{i,n+1},\quad y_{i,0} = y_{i,n+1},\quad i = \overline{0, m+1}, \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} (4x_{1,j}-3x_{0,j}-x_{2,j})(x_{0,j+1}-x_{0,j-1})+ \\ +(4y_{1,j}-3y_{0,j}-y_{2,j})(y_{0,j+1}-y_{0,j-1})=0, \\ (3x_{m,j}+x_{m-2,j}-4x_{m-1,j})(x_{m,j+1}-x_{m,j-1})+ \\ +(3y_{m,j}+y_{m-2,j}-4y_{m-1,j})(y_{m,j+1}-y_{m,j-1})=0, \\ (4x_{i,1}-3x_{i,0}-x_{i,2})(x_{i+1,0}-x_{i-1,0})+ \\ +(4y_{i,1}-3y_{i,0}-y_{i,2})(y_{i+1,0}-y_{i-1,0})=0, \\ (3x_{i,n}+x_{i,n-2}-4x_{i,n-1})(x_{i+1,n}-x_{i-1,n})+ \\ +(3y_{i,n}+y_{i,n-2}-4y_{i,n-1})(y_{i+1,n}-y_{i-1,n})=0, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}, \end{cases} \quad (6)$$

де $x_{i,j}=x(\varphi_i,\psi_j)$, $y_{i,j}=y(\varphi_i,\psi_j)$, $\kappa_{i,j}=\kappa(\varphi_i,\psi_j)$.

κ по φ ($\kappa=\begin{cases}\tilde{\kappa}_1, \varphi_* \le \varphi \le \varphi^{(1)}, \\ \tilde{\kappa}_2, \varphi^{(1)} < \varphi \le \varphi^*,\end{cases}$ $\tilde{\kappa}_0=\tilde{\kappa}_1/\tilde{\kappa}_2$) при фіксованих (заданих) початкових значеннях невідомої величини γ (або шуканої витрати Q) та функцій x і y у граничних вузлах сіткової області $x_{0,j}$, $y_{0,j}$, $x_{m+1,j}$, $y_{m+1,j}$, $x_{i,n+1}$, $y_{i,n+1}$, $x_{i,0}$, $y_{i,0}$ з урахуванням крайових умов (4)–(6), наближення значень функцій x і y у внутрішніх вузлах сіткової області визначаємо за формулами сумарних зображень [7]:

$$x_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}p_{j,k}\left(\frac{2\tilde{\kappa}_0}{1+\tilde{\kappa}_0}\mu_k^i a_k+\frac{2}{1+\tilde{\kappa}_0}\nu_k^i b_k+\gamma^2\sum_{g=1}^{m}\Phi(i,g)\times\right.$$
$$\left.\times(p_{1,k}x_{g,0}+p_{n,k}x_{g,n+1})\right), \quad y_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}p_{j,k}\left(\frac{2\tilde{\kappa}_0}{1+\tilde{\kappa}_0}\mu_k^i c_k+\right. \quad (7)$$
$$\left.+\frac{2}{1+\tilde{\kappa}_0}\nu_k^i d_k+\gamma^2\sum_{g=1}^{m}\Phi(i,g)(p_{1,k}y_{g,0}+p_{n,k}y_{g,n+1})\right),$$
$$i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,n},$$

де елементи матриці P-трансформацій $P=[p_{j,k}]_{j,k=1}^{n}$ обчислюються як $p_{j,k}=\frac{2}{\sqrt{2n+1}}\sin\frac{jk\pi}{n+1}$, функція $\Phi(i,g)$ має вигляд:

$$\Phi(i,g)=\begin{cases}\left.\begin{array}{l}\left(\nu_k^{|i-g|}+\dfrac{1-\tilde{\kappa}_0}{1+\tilde{\kappa}_0}\nu_k^{2*m_1-i-g}\right)(\mu_k-\nu_k)^{-1},\ g=\overline{1,m_1-1},\\ \left(\nu_k^{m_1-i}\right)(\mu_k-\nu_k)^{-1},\quad g=m_1,\\ \left(\dfrac{2\tilde{\kappa}_0}{1+\tilde{\kappa}_0}\nu_k^{g-i}\right)(\mu_k-\nu_k)^{-1},\quad g=\overline{m_1+1,m},\end{array}\right\} i=\overline{1,m_1},\\ \left.\begin{array}{l}\left(\dfrac{2}{1+\tilde{\kappa}_0}\nu_k^{i-g}\right)(\mu_k-\nu_k)^{-1},\quad g=\overline{1,m_1-1},\\ \left(\nu_k^{i-m_1}\right)(\mu_k-\nu_k)^{-1},\quad g=m_1,\\ \left(\nu_k^{|i-g|}+\dfrac{\tilde{\kappa}_0-1}{\tilde{\kappa}_0+1}\nu_k^{i+g-2*m_1}\right)(\mu_k-\nu_k)^{-1},g=\overline{m_1+1,m}\end{array}\right\} i=\overline{m_1+1,m};\end{cases}$$

елементи діагональних матриць $\mu^i=\left[\mu_k^i\right]_{k=1}^n$, $\nu^i=\left[\nu_k^i\right]_{k=1}^n$ визначаються із формул $\mu_k=\nu_k^{-1}=\eta_k+\sqrt{\eta_k^2-1}$, $\eta_k=1+\gamma^2\left(1-\cos\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$, а довільні сталі a_k, b_k, c_k, d_k знаходяться із умов на межах L_*, L^*.

У випадку однієї лінії розриву κ по ψ ($\kappa=\begin{cases}\tilde{\tilde{\kappa}}_1, 0\le\psi\le\psi^{(1)},\\ \tilde{\tilde{\kappa}}_2, \psi^{(1)}<\psi\le Q\end{cases}$) відповідні формули сумарних зображень мають вигляд [11]:

$$x_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}p_{j,k}\left(\mu_k^i a_k+\nu_k^i b_k+\gamma^2\sum_{t=1}^{m}\frac{\nu_k^{|i-t|}}{\mu_k-\nu_k}\times\right.$$

$$\left.\times\left(p_{1,k}x_{t,0}+p_{n,k}x_{t,n+1}\right)\right),\quad y_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}p_{j,k}\left(\mu_k^i c_k+\nu_k^i d_k+\right. \tag{8}$$

$$\left.+\gamma^2\sum_{t=1}^{m}\frac{\nu_k^{|i-t|}}{\mu_k-\nu_k}\left(p_{1,k}y_{t,0}+p_{n,k}y_{t,n+1}\right)\right),\quad i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n},$$

де $p_{j,k}=C_k\begin{cases}\sin j\theta_k,\quad j=1,2,\ldots,n_1,\\ \alpha_k\sin(n-j)\theta_k, j=n_1+1,\ldots,n,\end{cases}$ $\alpha_k=\dfrac{\sin n_1\theta_k}{\sin(n-n_1)\theta_k}$, якщо $\sin(n-n_1)\theta_k\ne 0$, інакше – $\alpha_k=-\dfrac{\tilde{\tilde{\kappa}}_1\cos n_1\theta_k}{\tilde{\tilde{\kappa}}_2\cos(n-n_1)\theta_k}$, θ_k – корені рівняння $\sin n\theta+\dfrac{\tilde{\tilde{\kappa}}_1-\tilde{\tilde{\kappa}}_2}{\tilde{\tilde{\kappa}}_1+\tilde{\tilde{\kappa}}_2}\sin(n-2n_1)\theta=0$ на проміжку $(0,\pi)$,

$$C_k = \left[\frac{\tilde{\tilde{\kappa}}_1}{2} \left(n_1 - \frac{\cos(n_1 - 1)\theta_k \sin n_1\theta_k}{\sin\theta_k} \right) + \frac{\tilde{\tilde{\kappa}}_1 + \tilde{\tilde{\kappa}}_2}{2} \sin^2 n_1\theta_k + \right.$$

$$\left. + \frac{\tilde{\tilde{\kappa}}_2}{2} \alpha_k^2 \left(n - n_1 - \frac{\cos(n - n_1 - 1)\theta_k \sin(n - n_1)\theta_k}{\sin\theta_k} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

У випадку багатьох ліній розриву κ по φ і по ψ для декомпозиції області скористаємось альтернуючим методом Шварца. Для цього область G_ω^γ «розіб'ємо» на дві групи (по горизонталі і по вертикалі) сіткових прямокутників з «накладками»:

$$G_\omega^\gamma = \bigcup_{q=1}^{s_1} \left(\bigcup_{l=1}^{s_2 - 1} \tilde{G}_{q,l} \right) = \bigcup_{l=1}^{s_2} \left(\bigcup_{q=1}^{s_1 - 1} \tilde{\tilde{G}}_{q,l} \right),$$

де $\tilde{G}_{q,l} = \left\{ (\varphi_i, \psi_j) \in G_\omega^\gamma : \varphi_{m_{q-1}+1} \le \varphi_i \le \varphi_{m_q - 1}, \psi_{n_{l-1}+1} \le \psi_j \le \psi_{n_{l+1}-1} \right\}$,

$\tilde{\tilde{G}}_{q,l} = \left\{ (\varphi_i, \psi_j) \in G_\omega^\gamma : \varphi_{m_{q-1}+1} \le \varphi_i \le \varphi_{m_{q+1}-1}, \psi_{n_{l-1}+1} \le \psi_j \le \psi_{n_l - 1} \right\}$.

При цьому отримаємо $s_1(s_2 - 1) + s_2(s_1 - 1)$ проекцій вихідної задачі (стосовно підобластей $\tilde{G}_{q,l}, \tilde{\tilde{G}}_{q,l}$) [9; 11] для знаходження послідовностей сіткових функцій $\left(\left\{ \tilde{x}_{i,j}^{(q,l)(\xi)} \right\}_{\xi=0}^{\infty}, \left\{ \tilde{y}_{i,j}^{(q,l)(\xi)} \right\}_{\xi=0}^{\infty} \right)$: $x_{i,j}^{(q,l)} = \lim_{\xi \to \infty} \tilde{x}_{i,j}^{(q,l)(\xi)}$, $y_{i,j}^{(q,l)} = \lim_{\xi \to \infty} \tilde{y}_{i,j}^{(l)(\xi)}$, де ξ – номер кроку ітераційного процесу [9], що є чисельним аналогом класичного методу Шварца [12], розв'язки яких подамо формулами сумарних зображень (7)–(8).

Алгоритм розв'язання поставленої задачі у загальному вигляді може бути описаний таким чином. Вводимо необхідні параметри заданої фізичної області, значення граничних потенціалів, параметри ліній розриву та відповідні значення коефіцієнта провідності, задаємо кількість $m \times n$ вузлів розбиття сіткової області G_ω^γ (так, щоб відповідні вузли належали лініям розриву κ), параметр ε, що характеризує точність наближення розв'язку відповідної різницевої задачі та бажаний рівень конформності відображення δ_*, нульове наближення невідомої величини γ (або шуканої витрати Q). Задаємо також початкові наближення координат граничних вузлів так, щоб. виконувались умови (4) і обчислюємо початкові наближення координат внутрішніх вузлів як результат ітераційного процесу по ξ обчислен-

ня функцій $\left(\tilde{x}_{i,j}^{(q,l)(\xi)},\ \tilde{y}_{i,j}^{(q,l)(\xi)}\right)$ у підобластях $\tilde{G}_{q,l}, \tilde{\tilde{G}}_{q,l}$ за формулами (7)–(8). При цьому, значення граничних вузлів у цих підобластях визначатимемо як значення внутрішніх вузлів (вздовж відповідних вертикальних та горизонтальних відрізків) сусідніх підобластей з «накладками» [9]. Зазначимо, що достатньо провести щонайбільше $(s_1-1)(s_2-1)$ ітерацій по ξ для отримання прийнятного результату, оскільки загальний алгоритм передбачає кількаразове повторення цих обчислювальних процедур при подальшому уточненні інших параметрів задачі.

Знаходимо значення γ та Q за формулами [4]:

$$\gamma = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \frac{1}{\kappa_{i,j}} \frac{\gamma_{i,j}^{(1)} + \gamma_{i,j+1}^{(1)}}{\gamma_{i,j}^{(2)} + \gamma_{i+1,j}^{(2)}},\ Q = \Delta_{\varphi} \cdot \frac{n+1}{\gamma}, \qquad (9)$$

де $\gamma_{i,j}^{(1)} = \sqrt{\left(x_{i+1,j} - x_{i,j}\right)^2 + \left(y_{i+1,j} - y_{i,j}\right)^2}$, $\gamma_{i,j}^{(2)} = \sqrt{\left(x_{i,j+1} - x_{i,j}\right)^2 + \left(y_{i,j+1} - y_{i,j}\right)^2}$.

Після цього уточнюємо координати граничних вузлів (4)–(6), знаходимо нове наближення координат внутрішніх вузлів за описаною вище процедурою, знову обчислюємо γ та Q за формулами (9).

Наприкінці кожної ітерації перевіряємо виконання умов стабілізації координат граничних вузлів. Якщо величина зміщення вузлів на границі за проведену загальну ітерацію більша за ε, то повторюємо перерахунок параметрів задачі. У протилежному випадку оцінюємо ступінь конформності отриманого відображення області комплексного потенціалу на фізичну область [4].

Висновки. На основі синтезу числових методів квазіконформних відображень та сумарних зображень з декомпозицією області за методом Шварца розроблено конструктивний підхід до розв'язання нелінійних крайових задач для двозв'язних двояко-шаруватих криволінійних областей, обмежених еквіпотенціальними лініями. Побудований алгоритм забезпечує можливість автоматичного розрахунку динамічної сітки, знаходження ліній розділу шарів сталості коефіцієнта провідності середовища, обчислення повної витрати тощо.

Використання методів сумарних зображень для наближення внутрішніх вузлів дозволяє у комплексі на кожному ітераційному кроці враховувати вплив не тільки навколишніх, а і всіх граничних вузлів і, отже, суттєво пришвидшує досягнення спряженості шуканих гармонічних функцій.

Застосування альтернуючого методу Шварца для декомпозиції області по прошарках сталості коефіцієнта провідності з «накладка-

ми» дає змогу, по-перше, ефективно знаходити неперервні розв'язки нелінійних крайових задач з розривними коефіцієнтами; по-друге, розв'язувати задачі у більш «зручних» підобластях, аніж уся область вихідної задачі, що є особливо актуальним для розрахунків у нафтогазових, сланцевих пластах, де маємо значні співвідношення між розмірами пласта і діаметрами свердловин; по-третє, дозволяє розпаралелювати обчислювальний процес, оскільки розрахунки у підобластях на кожному ітераційному кроці є незалежними один від одного і можуть виконуватись паралельно з використанням сучасних комп'ютерних мереж і відповідних комунікаційних програм, що важливо з огляду на великий обсяг обчислювальної роботи для таких класів задач.

1. Бомба А. Я. Синтез числових методів конформних відображень та сумарних зображень при моделюванні ідеальних полів для криволінійних областей / А. Я. Бомба, А. П. Кузьменко, О. М. Гладка // Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. Серія фіз.-мат. науки. – 2012. – № 2. – С. 87–94. **2.** Бомба А. Я. Числово-аналітичні представлення розв'язків одного класу нелінійних крайових задач / А. Я. Бомба, О. М. Гладка. // Вісник КрНУ ім. М. Остроградського. – Кременчук : КрНУ, 2013. – Вип. 3 (80). – С. 76–83. **3.** Бомба А. Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / А. Я. Бомба, В. М. Булавацький, В. В. Скопецький – Київ : Наукова думка, 2007. – 308 с. **4.** Бомба А. Я. Методи комплексного аналізу: Монографія / А. Я. Бомба, С. С. Каштан, Д. О. Пригорницький, С. В. Ярощак. – Рівне : НУВГП, 2013. – 415 с. **5.** Положий Г. М. Численное решения двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента / Г. М. Положий. – К. : Изд-во КГУ. – 1962. – 161 с. **6.** Глущенко А. А. Приближенное аналитическое решение краевой задачи фильтрации через неоднородную плотину с различными отметками дна верхнего и нижнего бьефов / А. А. Глущенко, А. П. Кузьменко // Вычисл. и прикл. математика. – 1984. – Вып. 54. – С. 50–56. **7.** Ляшко И. И. Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации / И. И. Ляшко, И. М. Великоиваненко. – К. : Наукова думка. – 1973. – 264 с. **8.** Ляшко И. И. Решение краевых задач в слоистых грунтах / И. И. Ляшко, А. Е. Грищенко. // Алгоритмы и программы решения краевых задач математической физики. – К. : Изд-во Киев. ун-та, 1972. – 173 с. **9.** Гладка О. М. Про розв'язок крайової задачі для рівняння дивергентного типу у нескінченній багатошаровій смузі / О. М. Гладка, А. П. Кузьменко // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. праць. – К. : Ін-т математики НАН

України, 1995. – Вип. 9. – С. 168–173. **10.** Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. – К. : Наукова думка, 1991. – 432 с. **11.** Кузьменко А. П. До розв'язання нестаціонарних крайових задач у шаруватих кругових областях / А. П. Кузьменко, О. М. Гладка // Гідромеліорація та гідротехнічне будівництво. Наук.-техн. зб. – Рівне : УДАВГ, 1998. – Вип. 23. – С. 76–83. **12.** Канторович Л. В. Приближенные методы высшего анализа / Л. В. Канторович, В. И. Крылов. – М. ; Л. : Физматгиз, 1962. – 708 с.

Рецензент: д.т.н., професор Мартинюк П. М. (НУВГП)

Bomba A. Y., Doctor of Engineering, Professor (Rivne State Humanitarian University), **Hladka O. M., Candidate of Engineering** (National University of Water and Environmental Engineering, Rivne), **Kuzmenko A. P., Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor** (International University of Economics and Humanities named after Academician Stepan Demianchuk)

METHODS OF COMPLEX ANALYSIS AND SUMMARY REPRESENTATIONS MODELING NONLINEAR QUASIIDEAL PROCESSES IN DOUBLY-LAYERED MEDIUMS

The constructive approach to solving of nonlinear boundary value problems for double-connected layered curvilinear domains bounded by equipotential lines was developed on the basis of synthesis of the numerical methods of complex analysis and summary representations with method of domain decomposition by Schwarz. Developed algorithm automatically solves the problem of choice of nodes and the construction of a dynamic grid, finding the lines between the layers constant coefficient of conductivity of the medium, calculate the total flow.

***Keywords*: complex potential, conformal mappings, summary representations method, domain decomposition, alternating method by Schwarz, layered medium.**

Бомба А. Я., д.т.н., профессор (Ровенский государственный гуманитарный университет), **Гладкая Е. Н., к.т.н.** (Национальный университет водного хозяйства и природопользования, г. Ровно), **Кузьменко А. П., к.ф.-м.н., доцент** (Международный экономико-гуманитарный университет имени Степана Демьянчука)

МЕТОДЫ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА И СУММАРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КВАЗИИДЕАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ В ДВОЯКО-СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

На основании синтеза численных методов комплексного анализа и суммарных представлений с декомпозицией области по методу Шварца разработан конструктивный подход к решению нелинейных краевых задач для двусвязных слоистых криволинейных областей, ограниченных эквипотенциальными линиями. Созданный алгоритм автоматически решает проблему выбора узлов и построения динамической сетки, нахождения неизвестных линий раздела слоев постоянства коэффициента проводимости среды, вычисления полного расхода.

***Ключевые слова*: комплексный потенциал, конформные отображения, метод суммарных представлений, декомпозиция области, альтернирующий метод Шварца, слоистая среда.**