

## МАТЕРІАЛОЗНАВСТВО

УДК 539.3

**Шевцова Н. В., к.т.н., доцент** (Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне)

### **НАПРУЖЕНИЙ СТАН ОРТОТРОПНОЇ ПЛАСТИНКИ З КРУГОВИМ ОТВОРОМ, ЧАСТКОВО ПІДСИЛЕНИМ СИСТЕМОЮ ДВОХ ПРУЖНИХ РЕБЕР**

**Досліджено напружений стан нескінченної ортотропної пластинки з круговим отвором, контур якого підсилений системою двох центральносиметричних ребер з однаковими фізико-геометричними характеристиками. Наближений розв'язок системи сингулярних інтегральних рівнянь задачі побудовано методом механічних квадратур і колокації. Вивчено вплив на розподіл напружень у пластинці та в підсилювальних ребрах ортотропії матеріалу пластинки і зовнішнього навантаження.**

***Ключові слова:* ортотропна пластинка, пружне ребро, часткове підсилення, напружений стан, контактні зусилля.**

**Вступ.** Успішний розвиток різних галузей сучасної техніки і будівництва тісно пов'язаний зі створенням конструкційних матеріалів, що мають керовані та наперед задані властивості. Основу таких матеріалів складають композити.

Пластинчасті елементи з композитних матеріалів, як деталі складних механізмів і споруд, широко використовуються в машинобудуванні, авіабудуванні та інших галузях інженерної практики. Через технологічні чи конструктивні причини їх послаблюють отворами різної форми та розмірів. Внаслідок деформації таких деталей в околі отворів виникають зони з високою концентрацією напружень. Для її зменшення контури отворів підсилюють тонкими пружними ребрами [1; 2].

Разом із тим на контурі отвору є зони, де концентрація напружень незначна, і їх підсилення є недоцільним. Тому в інженерній практиці широко використовують часткове підсилення контурів тонкими розімкненими пружними ребрами. Такі задачі для ізотропних і ортотропних пластин із криволінійними контурами найбільш повно досліджені для підсилювальних ребер, які моделюються пружними лініями сталої чи змінної жорсткості на розтяг (стиск) і згин [3-5].

Для підсилень, що моделюються криволінійними стрижнями,

лінії сполучення яких із пластинкою не співпадають з їх геометричними осями, подібні задачі розглянуті лише для ізотропної пластинки з круговим отвором і круглого пружного диска [6; 7]. Для ортотропних пластин, виготовлених з композитних матеріалів, аналогічні дослідження не проводилися.

Пропонується наближений розв'язок задачі про часткове підсилення контуру кругового отвору в нескінченній ортотропній пластинці системою двох центральносиметричних стрижнів.

**Постановка задачі.** Нехай нескінченна ортотропна пластинка товщиною  $2h$  з круговим отвором радіусом  $\rho=1$  перебуває в умовах двостороннього розтягу (стиску) на нескінченності рівномірно розподіленими зусиллями  $p$  і  $q$ , що діють у головних напрямках ортотропії матеріалу пластинки. Серединну площину пластинки віднесемо до декартової  $(x, y)$  і полярної  $(\rho, \lambda)$  систем координат з полюсом у центрі отвору. Осі декартової системи координат визначаються головними напрямками ортотропії матеріалу пластинки.

Позначимо через  $\gamma$  лінію перетину серединної площини пластинки з циліндричною поверхнею, яка обмежує її отвір. Припустимо, що на двох центральносиметричних ділянках  $\gamma_1 = [\alpha_0; \beta_0]$  і  $\gamma_2 = [\pi + \alpha_0; \pi + \beta_0]$  контур  $\gamma$  частково підсилений тонкими пружними ребрами сталого прямокутного поперечного перерізу  $2h_0 \times 2\eta$  ( $2h_0$  – висота ребра;  $2\eta$  – його ширина), осі яких розміщені в серединній площині пластинки. Зовнішнє навантаження на підсилювальні ребра відсутнє (рис. 1).

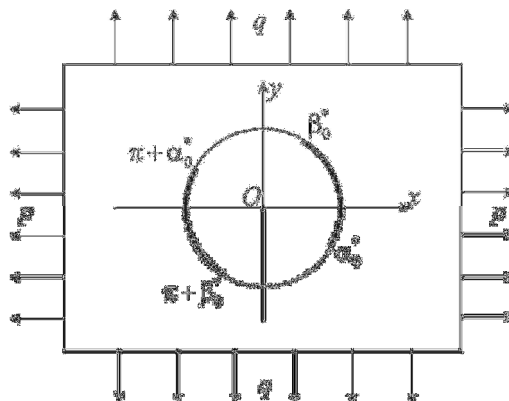


Рис. 1. Розрахункова схема задачі

Розв'язання задачі передбачає дослідження впливу ортотропії матеріалу пластинки, зовнішнього навантаження і ширини підсилювальних ребер на розподіл напружень по контуру  $\gamma$  в пластинці та в

підсилювальних ребрах.

**Основні рівняння задачі.** Якщо умовно розділити пластинку і підсилення, замінюючи дію одного тіла на інше невідомими контактними зусиллями  $T_p$  і  $S_{p\lambda}$ , то прийдемо до першої граничної задачі для нескінченної ортотропної пластинки з круговим отвором і підсилювальних ребер.

Пластинка навантажена на нескінченності зусиллями  $p$  і  $q$ , а на контурі  $\gamma$  контактними зусиллями  $T_p$  і  $S_{p\lambda}$ . З урахуванням центральної симетрії задачі компоненти деформації контуру  $\gamma$  визначаються за формулами [5]

$$\begin{aligned}\varepsilon_\lambda &= \frac{1}{2E_x h} [C_1 T_p(\lambda) + C_2 R_1(\lambda) - C_3 Q_1(\lambda) + \varepsilon_\lambda^{(0)}]; \\ V &= \frac{1}{2E_x h} [C_1 S_{p\lambda}(\lambda) - C_3 R_1(\lambda) + C_4 Q_1(\lambda) + V^{(0)}],\end{aligned}\quad (1)$$

де

$$\begin{aligned}R_1(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} [T_p(t) - S_{p\lambda}(t) \operatorname{ctg}(\lambda - t)] dt; \\ Q_1(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} [S_{p\lambda}(t) + T_p(t) \operatorname{ctg}(\lambda - t)] dt; \quad C_1 = (\beta_1 \beta_2 - \nu_x); \\ C_2 &= (\beta_1 + \beta_2) [(1 - \beta_1 \beta_2) \cos^2 \lambda - 1]; \quad C_3 = (\beta_1 + \beta_2) (1 - \beta_1 \beta_2) \cos \lambda \sin \lambda; \\ C_4 &= (\beta_1 + \beta_2) [(1 - \beta_1 \beta_2) \sin^2 \lambda - 1]; \quad V^{(0)} = -\frac{\beta_1 \beta_2}{2} (\beta_1 \beta_2 + \beta_1 + \beta_2 + 1) \sin 2\lambda; \\ \varepsilon_\lambda^{(0)} &= \frac{\beta_1 \beta_2}{2} [\beta_1 \beta_2 + \beta_1 + \beta_2 - 1 + (\beta_1 \beta_2 + \beta_1 + \beta_2 + 1) \cos 2\lambda];\end{aligned}$$

$E_x, \nu_x$  – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини в напрямку осі  $Ox$ ;  $\beta_1, \beta_2$  – корені характеристичного рівняння [8];  $\varepsilon_\lambda, V$  – відносне видовження контуру  $\Gamma$  і кут повороту нормалі до нього внаслідок деформації.

Підсилювальні ребра моделюємо тонкими пружними стрижнями, осі яких не співпадають з лініями  $\gamma_1$  і  $\gamma_2$ . Ці ребра перебувають у рівновазі під дією контактних зусиль, прикладених з боку пластинки.

Внутрішні поздовжня  $N$ , поперечна  $Q$  сили і згинальний момент  $L_b$ , що діють у поперечних перерізах стрижня і віднесені до його осі, визначаються зі співвідношень [9]

$$\begin{aligned}N &= f_1(\lambda) \cos \lambda + f_2(\lambda) \sin \lambda; \quad Q = f_1(\lambda) \sin \lambda - f_2(\lambda) \cos \lambda; \\ L_b &= \eta N + \int_{\alpha_0}^{\lambda} [f_1(t) \sin t - f_2(t) \cos t] dt, \quad t \in [\alpha_0; \beta_0].\end{aligned}\quad (2)$$

Тут введено позначення

$$f_1(\lambda) + if_2(\lambda) = i \int_{\alpha_0}^{\lambda} [T_{\rho}(t) + iS_{\rho\lambda}(t)] e^{it} dt. \quad (3)$$

Деформації поздовжніх волокон стрижнів без урахування впливу поперечних сил визначаються за формулами [9]

$$\varepsilon_{\lambda}^{(c)} = \frac{1}{E_0 F_0} \left[ N + \frac{\rho - r_0}{\rho} \frac{L_b}{r - r_0} \right]; \quad \frac{d\theta_b}{d\lambda} = \frac{1}{E_0 F_0} \left[ N + \frac{L_b}{r - r_0} \right], \quad \lambda \in [\alpha_0; \beta_0], \quad (4)$$

де  $E_0$  – модуль Юнга матеріалу підсиленя;  $\rho$ ,  $r$ ,  $r_0$  – відповідно радіуси кривини розглядуваного, осьового та нейтрального для чистого згину [6] волокон підсилення;  $\varepsilon_{\lambda}^{(c)}$ ,  $\theta_b$  – відносне видовження розглядуваного волокна та кут пружного повороту нормалі до нього внаслідок деформації.

Для тих волокон стрижнів, які контактують з пластинкою, формули (4) набувають вигляду

$$\varepsilon_{\lambda}^{(c)} = \frac{1}{E_0 F_0} \left[ N + (1 - r_0) \frac{L_b}{r - r_0} \right]; \quad \frac{d\theta_b}{d\lambda} = \frac{1}{E_0 F_0} \left[ N + \frac{L_b}{r - r_0} \right]. \quad (5)$$

Нормальні напруження  $\sigma^{(c)}$  в довільному поздовжньому волокні стрижня можна визначити за законом Гука [9]

$$\sigma^{(c)} = \frac{1}{F_0} \left[ N + \frac{\rho - r_0}{\rho} \frac{L_b}{r - r_0} \right]. \quad (6)$$

Враховуючи центральну симетрію задачі, граничні умови запишемо на одній з ділянок підсилення у вигляді рівності деформацій спільних волокон пластинки і стрижня

$$\varepsilon_{\lambda} = \varepsilon_{\lambda}^{(c)}; \quad V = \theta_b, \quad \lambda \in [\alpha_0; \beta_0], \quad \rho = 1. \quad (7)$$

Залежності (1), (2), (5) разом з граничними умовами (7) визначають систему чотирьох сингулярних інтегральних рівнянь відносно контактних зусиль  $T_{\rho}$  і  $S_{\rho\lambda}$  і функцій  $f_1$ ,  $f_2$

$$\varepsilon_{\lambda} = \varepsilon_{\lambda}^{(c)}; \quad V = \theta_b, \quad T_{\rho} = -f_1'(\lambda) \sin \lambda + f_2'(\lambda) \cos \lambda; \\ S_{\rho\lambda} = -f_1'(\lambda) \cos \lambda - f_2'(\lambda) \sin \lambda, \quad \lambda \in [\alpha_0; \beta_0], \quad \rho = 1. \quad (8)$$

Крім цієї системи, повинні виконуватися силові та моментні умови рівноваги для кожного підсилювального стрижня

$$f_1(\beta_0) = f_2(\beta_0) = 0; \quad \int_{\alpha_0}^{\beta_0} [f_1(t) \sin t - f_2(t) \cos t] dt = 0. \quad (9)$$

Розглянемо часткові випадки задачі (8), (9).

При  $\beta_1 = \beta_2 = 1$  система (8), (9) визначає розв'язок задачі для ізотропної пластинки, контур кругового отвору якої підсилений системою двох центральносиметричних ребер.

Якщо в (8), (9) прийняти  $\eta \rightarrow 0$  ( $\eta \neq 0$ ), то ця система визначає напружений стан пластинки та підсилень, якщо останні моделюються пружними лініями [ 3; 4].

**Наближений розв'язок задачі.** Оскільки знаходження точного розв'язку системи (8), (9) становить значні математичні труднощі, застосуємо числові методи. З цією метою встановимо структуру функцій  $T_\rho(\lambda)$ ,  $S_{\rho\lambda}(\lambda)$ ,  $f_1(\lambda)$ ,  $f_2(\lambda)$  на кінцях ділянки підсилення.

На підставі позначення (3) і силових умов (9) можна записати

$$f_1(\alpha_0) = f_1(\beta_0) = f_2(\alpha_0) = f_2(\beta_0) = 0. \quad (10)$$

Співвідношення (10) показують, що функції  $f_1(\lambda)$ ,  $f_2(\lambda)$  обмежені на ділянці підсилення, а на її кінцях дорівнюють нулю. Із двох останніх рівнянь системи (8) можна встановити, що контактні зусилля на кінцях зони контакту мають кореневу особливість.

Враховуючи структуру функцій  $T_\rho$ ,  $S_{\rho\lambda}$ ,  $f_1$ ,  $f_2$ , наближений розв'язок задачі можна побудувати методом механічних квадратур і колокації. Квадратурні формули цього методу для сингулярних і регулярних інтегралів наведені в [4-7].

Для ортотропної пластинки і підсилювальних ребер з параметрами  $\sqrt{E_x E_y} / E_0 = 0.2$ ;  $h_0 / h = 4/3$ ;  $h_0 / \eta = 3$ ;  $2\eta = 0.1$ ;  $\alpha_0 = -\pi/3$ ;  $\beta_0 = \pi/3$  досліджено вплив на розподіл зусиль  $T_\rho$ ,  $S_{\rho\lambda}$ ,  $T_\lambda$  по контуру отвору ортотропії матеріалу. Характеристики досліджуваних ортотропних матеріалів та лінії, які відповідають цим матеріалам, наведено в таблиці 1.

Результати числового розрахунку зусиль на контурі отвору пластинки при  $p = 0$ ;  $q = 1$  наведені на рис. 2. Епюра  $T_\lambda^{(1)}$  побудована для випадку відсутності підсилювальних ребер.

На рис. 3 наведені епюри нормальних напружень, визначених за формулою (6), у крайніх поздовжніх волокнах підсилювальних ребер (напруження  $\sigma_1^{(c)}$  відповідає волокну, що сполучене з пластинкою).

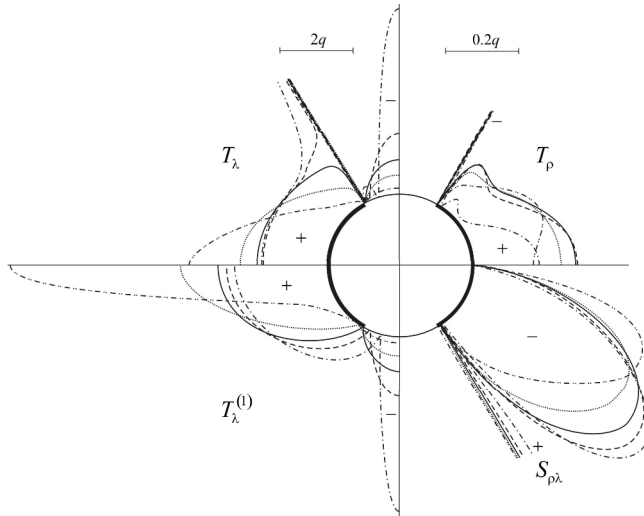


Рис. 2. Розподіл зусиль на контурі отвору в пластинці

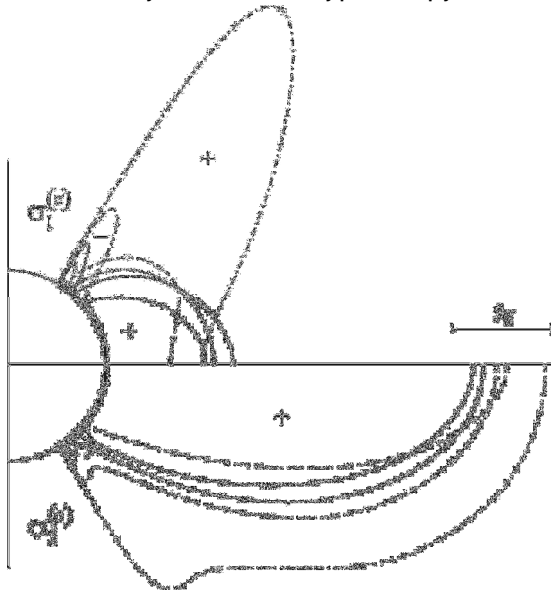


Рис. 3. Розподіл напружень у підсилненні

Таблиця 1

Характеристики досліджуваних матеріалів

Матеріал пластинки	$\beta_1$	$\beta_2$	$\nu_x$	$E_x/E_y$	Лінії
ізотропний матеріал	1	1	0.300	1	————
скло-епоксид	2.2712	0.7626	0.250	3	-----
графіт-епоксид	6.9992	0.7144	0.250	25	-.-.-.-
епоксид-скло	0.4400	1.3100	0.083	1/3	.....
епоксид-графіт	0.1430	1.4010	0.010	1/25	-.-.-.

Аналізуючи одержані результати, можна зробити такі **висновки**:

- наявність часткового підсилення в зонах найбільшої концентрації суттєво зменшує максимальні зусилля  $T_\lambda$  при  $\lambda=0$ , залишаючи їх практично незмінними за межами ділянок підсилення. Особливо це стосується ортотропних матеріалів, для яких  $E_x/E_y > 1$ ;
- зони різкого зростання зусиль  $T_\rho$ ,  $S_{\rho\lambda}$  і  $T_\lambda$  на кінцях ділянок підсилення мають локальний характер і зумовлені появою в цих зонах пластичних деформацій;
- нормальні напруження в поздовжніх волокнах підсилювальних ребер обмежені, максимумами цих величин зміщені до торців підсилень.

**1.** Савин Г. Н. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости / Г. Н. Савин, Н. П. Флейшман. – К. : Наукова думка, 1964. – 384 с. **2.** Шереметьев М. П. Пластинки с подкрепленным краем / М. П. Шереметьев. – Львов : Изд-во Львов. ун-та, 1960. – 258 с. **3.** Александров В. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками / В. М. Александров, С. М. Мхитарян. – М. : Наука, 1983. – 488 с. **4.** Сяський А. А. Упругое равновесие пластинки с частично подкрепленным криволинейным отверстием / А. А. Сяський // Прикл. математика и механика. – 1986. – Т. 50, № 2. – С. 247–254. **5.** Сяський А. Контактна взаємодія розіМКнених стрижнів змінної жорсткості з еліптичним отвором нескінченної ортотропної пластинки / А. Сяський, Ю. Батишкіна // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2004. – Т. 9, № 3. – С. 17–24. **6.** Сяський А. О. Математична модель однієї задачі трибомеханіки для шліцевого з'єднання / А. О. Сяський, С. М. Комбель // Проблеми трибології. – 2004. – № 2. – С. 53–58. **7.** Сяський А. Теоретичні основи уточненого розрахунку шліцевих з'єднань / Сяський А., Комбель С. // Машинознавство. – 2003. – № 4 (70). – С. 27–33. **8.** Лехницький С. Г. Анизотропные пластинки / С. Г. Лехницький. – М. : Гостехиздат, 1957. – 464 с. **9.** Сяський А. Застосування методу сил для статичного розрахунку замкнених криволінійних стрижнів жорсткості / А. Сяський, Н. Шевцова // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2015. – Т. 79, № 3. – С. 24–30.

Рецензент: д.т.н., професор Сяський А. О. (Рівненський державний гуманітарний університет)

**Shevtsova N. V., Candidate of Engineering, Associate Professor** (Rivne State University of Humanities, Rivne)

### **STRESS STATE OF ORTHOTROPIC PLATE WITH CIRCULAR HOLE, PARTLY REINFORCEMENT BY A SYSTEM OF TWO ELASTIC RIBS**

The stress state of infinite orthotropic plate with circular hole which contour is reinforced by a system of two centrally symmetric ribs with the same physical and geometrical characteristics. An approximate solution of singular integral equations of the problem by method of mechanical quadrature and collocation is constructed. The effect of orthotropy plate material and the external load on the distribution of stresses in the plate and reinforcing ribs is examined.

**Keywords:** orthotropic plate, elastic rib, partial reinforcement, stress state, contact forces.

---

**Шевцова Н. В., к.т.н., доцент** (Ровенский государственный гуманитарный университет)

### **НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ, ЧАСТИЧНО ПОДКРЕПЛЕННЫМ СИСТЕМОЙ ДВУХ УПРУГИХ РЕБЕР**

Исследовано напряженное состояние бесконечной ортотропной пластинки с круговым отверстием, контур которого подкреплён системой двух центрально симметричных ребер с одинаковыми физико-геометрическими характеристиками. Приближенное решение системы сингулярных интегральных уравнений задачи построено методом механических квадратур и коллокации. Изучено влияние на распределение напряжений в пластинке и подкрепляющих ребрах ортотропии материала пластинки, а также внешней нагрузки.

**Ключевые слова:** ортотропная пластинка, упругое ребро, частичное подкрепление, напряженное состояние, контактные усилия.

---