



Національний університет
водного господарства
та природокористування

Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства
та природокористування
Кафедра автоматизації, електротехнічних та комп'ютерно-
інтегрованих технологій

04-03-160

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять з дисципліни
“Теоретичні основи електротехніки”
(розділ “Лінійні кола постійного струму”)
для студентів спеціальності 141 “Електроенергетика,
електротехніка та електромеханіка”
денної та заочної форм навчання

Рекомендовано методичною
комісією за спеціальністю
”Електроенергетика,
електротехніка та
електромеханіка”.
Протокол №3 від 14.09.2016 р.

Рівне 2016



Національний університет
водного господарства
та природокористування

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни “Теоретичні основи електротехніки” (розділ “Лінійні кола постійного струму”) для студентів спеціальності 141 ”Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка” денної та заочної форм навчання / А.В. Рудик. – Рівне: НУВГП, 2016. – 63 с.

Упорядник: А.В. Рудик, канд. техн. наук, доцент.

Відповідальний за випуск: В.В. Древецький, доктор техн. наук, професор, академік ІАУ, завідувач кафедри автоматизації, електротехнічних та комп’ютерно-інтегрованих технологій.



Національний університет
водного господарства
та природокористування



ЗМІСТ

1. Перший закон Кірхгофа.....	4
2. Опір. Провідність. Закон Ома.....	10
3. Методи перетворення схем.....	16
4. Представлення джерел електроенергії схемами заміщення...	24
5. Метод пропорційних величин (метод визначальних коефіцієнтів).....	28
6. Метод накладання.....	32
7. Метод еквівалентного генератора.....	39
8. Другий закон Кірхгофа. Застосування законів Кірхгофа для розрахунку електричних кіл.....	42
9. Метод контурних струмів.....	47
10. Метод вузлових потенціалів. Метод двох вузлів.....	51
11. Методи перевірки результатів розрахунку. Застосування теорема про баланс потужностей.....	59

ПЕРЕЛІК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гумен М.Б. та ін. Основи теорії електричних кіл. Підручник. – К.: Вища школа, 2004.
2. Бобало Ю.Я. та ін. Основи теорії електронних кіл. Підручник. – Львів: Магнолія Плюс, 2005.
3. Паначевський Б.І. Свєргун Ю.Ф. Загальна електротехніка: теорія і практикум. Навч. посіб. для ВНЗ. – К.: Каравела, 2003.
4. Бойко В.С. та ін. Теоретичні основи електротехніки. Підручник. – К.: Політехніка, 2004.
5. Колонтаєвський Ю.П., Сосков А.Г. Електроніка і мікросхемотехніка. Підручник. – К.: Каравела, 2009.
6. Синдеев Ю.Г. Электротехника с основами электроники. Учебное пособие. – Ростов на Дону: Феникс, 2006.
7. Коваль Ю.О. та ін. Основи теорії кіл. Підручник. – Харків: Компанія СМІТ, 2006.
8. Колонтаєвський Ю.П., Сосков А.Г. Промислова електроніка і мікросхемотехніка: теорія і практикум. Навчальний посібник. – К.: Каравела, 2004.



1. ПЕРШИЙ ЗАКОН КІРХГОФА

Перший закон Кірхгофа – алгебраїчна сума струмів у всіх вітках, що сходяться в одному вузлі, дорівнює нулю.

$$\sum_k I_k = 0, \quad (1.1)$$

де I_k – струм у вітці з номером k .

Струмам, що входять у вузол, приписують один знак, наприклад, плюс, а струмам, що виходять з вузла, – протилежний.

При аналізі електричних кіл доцільно використовувати й інші формулювання першого закону Кірхгофа. Відомий з теорії електромагнітного поля закон нерозривності струму, який є наслідком закону повного струму, стверджує, що потік вектора густини струму крізь будь-яку замкнену поверхню дорівнює нулю:

$$\oint_s \vec{\delta} d\vec{S} = 0, \quad (1.2)$$

де $\vec{\delta}$ – вектор густини струму, $d\vec{S}$ – вектор елемента поверхні, спрямований назовні цієї поверхні.

Якщо врахувати, що за межами провідників в колі постійного струму, де провідність середовища (ізоляції) на багато порядків менша, ніж в провіднику, значенням $\vec{\delta}$ можна знехтувати, а праву частину співвідношення (1.2) можна записати як

$$\oint_s \vec{\delta} d\vec{S} = \sum_k \int_{S_k} \vec{\delta}_k d\vec{S}_k,$$

де S_k – площа перетину k -го провідника замкненою поверхнею

S ; $\vec{\delta}_k$ – вектор густини струму в межах S_k . Але

$\int_{S_k} \vec{\delta}_k d\vec{S}_k = I_k$, де I_k – струм в k -му провіднику, що перетинає

ється замкненою поверхнею S .

Отже, $\sum_k I_k = 0$. Струми, що спрямовані назовні замкне-



ної поверхні, будуть додатними, а всередину – від’ємними.

Останній вираз, який впливає з (1.2) і співпадає з (1.1), можна прочитати так.

Алгебраїчна сума струмів у провідниках, що пронизують будь-яку замкнену поверхню, дорівнює нулю.

Розрахунок електричних кіл прийнято здійснювати з використанням їх плоских умовних графічних зображень (електричних схем). При цьому замість умовної замкненої поверхні, що охоплює ту чи іншу частину кола, розглядається замкнений плоский контур, що охоплює відповідну частину схеми кола.

Розглянемо для прикладу скелетну схему (тобто “кістяк”, схему без вказання елементів у її вітках) певного довільного кола (рис. 1.1). Накладемо на схему кола уявний контур (наприклад, позначений штриховою лінією контур 1).

Нанесений контур пронизують струми $I_1 \dots I_4$; отже, їх алгебраїчна сума дорівнює нулю:

$$I_1 - I_2 - I_3 - I_4 = 0. \quad (1.3)$$

Але ці ж струми виходять з вузла a розглянутого кола, тому замкнений контур, накладений на схему кола, з точки зору застосування першого закону Кірхгофа розглядається як вузол.

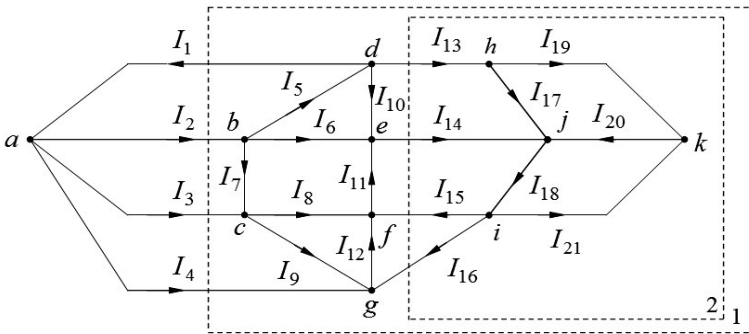


Рис. 1.1. Скелетна схема кола до прикладу 1.1

Якщо частина уявного контуру замикається за межами схеми кола, до розгляду можна приймати лише ту частину контуру, що перетинає вітки кола.

З врахуванням того, що обмежена уявним контуром частина схеми кола в загальному випадку є багатополісником, мо-



жна дати ще такі формулювання першого закону Кірхгофа.

Алгебраїчна сума струмів, що перетинають будь-який уявний контур, нанесений на схему кола, дорівнює нулю.

Алгебраїчна сума струмів всіх віток, що входять в будь-який реальний контур кола лише ззовні (чи лише зсередини), дорівнює нулю.

Алгебраїчна сума струмів, що входять в багатополосник через його полюси, дорівнює нулю.

Застосування першого закону Кірхгофа в його різних формулюваннях дозволяє без використання інших законів і методів розв'язувати як очевидно прості, так і деякі на перший погляд складні задачі.

Приклад 1.1. В колі, скелетна схема якого представлена на рис. 1.1, сили струмів мають значення $I_1 = 3 \text{ A}$, $I_2 = 5 \text{ A}$, $I_3 = 2 \text{ A}$; їх напрямки вказані на рисунку. Знайти значення I_4 .

Розв'язання. Значення I_4 можна знайти з рівняння, записаного за першим законом Кірхгофа для вузла a :

$$I_1 - I_2 - I_3 - I_4 = 0,$$

звідки

$$I_4 = I_1 - I_2 - I_3 = 3 - 5 - 2 = -4 \text{ A}.$$

Знак мінус вказує, що істинний напрям струму I_4 протилежний до вказаного на рисунку.

Приклад 1.2. Знайти алгебраїчну суму струмів, що входять в будь-який контур кола (рис. 1.1) ззовні.

Розв'язання. Виберемо довільний контур, всередині якого немає вузлів чи інших контурів, наприклад, контур $bcfe$.

Запишемо вираз за першим законом Кірхгофа для кожного з цих вузлів:

$$\text{вузол } b \quad I_2 - I_5 - I_6 - I_7 = 0 \quad (1.4)$$

$$\text{вузол } c \quad I_3 + I_7 - I_8 - I_9 = 0 \quad (1.5)$$

$$\text{вузол } f \quad I_8 + I_{12} + I_{15} - I_{11} = 0 \quad (1.6)$$

$$\text{вузол } e \quad I_6 + I_{10} + I_{11} - I_{14} = 0 \quad (1.7)$$

Знайшовши суму цих рівнянь, одержимо:

$$I_2 + I_3 - I_5 - I_9 + I_{10} + I_{12} - I_{14} + I_{15} = 0.$$



Зіставивши цей вираз з рис. 1.1, переконуємося, що доданками алгебраїчної суми є струми, які входять в контур ззовні. До цього ж висновку приходимо, застосувавши такий підхід до будь-якого контуру цього чи іншого кола. Отже, будь-який контур кола з точки зору застосування першого закону Кірхгофа можна розглядати як вузол.

Приклад 1.3. Знайти алгебраїчну суму струмів, що входять в будь-який контур зсередини.

Розв'язання. Розглянемо контур, всередині якого знаходиться інший. Наприклад, контур $adhjig$ (рис. 1.1) охоплює контур $bcfe$. Очевидно, що струми, які входять в зовнішній контур зсередини – ті самі, що входять ззовні у внутрішній контур. Їх алгебраїчна сума, як вже доведено в попередньому прикладі, дорівнює нулю.

Розглянемо контур $bdhjigc$, що охоплює вузли e та f . Взявши суму рівнянь (1.6) і (1.7) з попереднього прикладу за першим законом Кірхгофа для вузлів f та e , отримуємо:

$$I_6 + I_8 + I_{10} + I_{12} - I_{14} + I_{15} = 0.$$

Зіставивши цей вираз з рис. 1.1, переконуємося, що алгебраїчна сума струмів, які підтікають до контуру зсередини контуру, дорівнює нулю.

Шляхом аналогічних міркувань можна переконатися, що незалежно від кількості вузлів і контурів, охоплених зовнішнім контуром, алгебраїчна сума струмів, що підтікають до зовнішнього контуру зсередини, дорівнює нулю.

Приклад 1.4. Переконатися, що алгебраїчна сума струмів, які входять ззовні в будь-який уявний контур, нанесений на схему кола, дорівнює нулю.

Доведення. Розглянемо скелетну схему довільного кола, наприклад, зображену на рис. 1.2, на яку штриховою лінією нанесемо уявні контури 1, 2, 3, 4, 5.

Уявний контур може охоплювати: певну вітку кола чи її частину (1); певний вузол (2); кілька вузлів, віток і контурів (3, 4, 5), тобто в загальному випадку багатополосник.

В контури 1 та 5 входить і виходить один і той самий



струм, тому їх алгебраїчна сума дорівнює нулю.

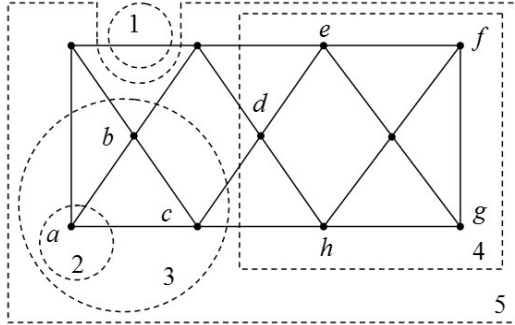


Рис. 1.2. Скелетна схема кола до прикладу 1.4

Алгебраїчна сума струмів, що входять в контур 2, дорівнює нулю для струмів, що сходяться в одному вузлі a .

Алгебраїчна сума струмів, що входять в контур 3, дорівнює нулю як сума струмів, що входять в реальний контур abc .

Алгебраїчна сума струмів, що входять в контур 4, збігається з сумою струмів, що входять в реальний контур $defgh$ і, таким чином, дорівнює нулю.

Приклад 1.5. Для кола, скелетна схема якого приведена на рис. 1.1, відомі значення струмів $I_{13} = 8 \text{ A}$, $I_{14} = 9 \text{ A}$, $I_{16} = 10 \text{ A}$. Знайти значення сили струму I_{15} .

Розв'язання. Проведемо штриховою лінією замкнений контур так, щоб він перетинав лише вітки з відомими і одним невідомим струмом (контур 2 на рис. 1.1), та застосуємо перший закон Кірхгофа для струмів, що входять в контур ззовні:

$$I_{13} + I_{14} - I_{15} - I_{16} = 0,$$

звідки

$$I_{15} = I_{13} + I_{14} - I_{16} = 8 + 9 - 10 = 7 \text{ A}.$$

Такий самий результат можна одержати, якщо розглядати як вузол контур $hkij$.

Приклад 1.6. Знайти струми у вітках dg та eh , якщо відомі значення струмів джерел $J_1 = 1 \text{ A}$, $J_2 = 2 \text{ A}$, $J_3 = 3 \text{ A}$, $J_4 = 4 \text{ A}$ (рис. 1.3).



Розв'язання. Перш за все звернемо увагу на те, що від всіх джерел ЕРС струми у всіх вітках кола не протікають, бо для цих джерел коло є розірваним (див. приклад 6.3). Спочатку знайдемо струм I_{gh} , застосовуючи перший закон Кірхгофа для перетину 1–1' як частини контуру, що замикається за межами схеми кола:

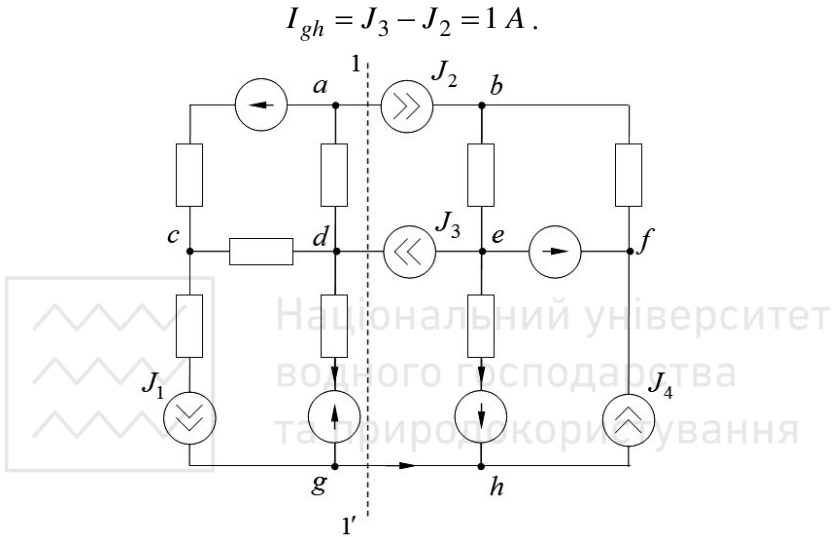


Рис. 1.3. Схема електричного кола до прикладу 1.6

Застосувавши перший закон Кірхгофа для вузла g , знаходимо струм I_{dg} :

$$I_{dg} = I_{gh} - J_1 = 0 \text{ A} .$$

Поступаючи так само щодо вузла h , знаходимо:

$$I_{eh} = J_4 - I_{gh} = 3 \text{ A} .$$

На цьому прикладі переконуємось, що деякі задачі можна розв'язувати, застосовуючи лише відповідне формулювання першого закону Кірхгофа навіть при відсутності даних про значення опорів та ЕРС у вітках кола.

Приклад 1.7 Знайти значення струму I у виділеній стрілкою вітці кола з багатополосниками 1 та 2, скелетна схема



якого показана на рис. 1.4, якщо покази амперметрів A_1 і A_2 становлять відповідно $I_1 = 10$ А та $I_2 = 20$ А, а джерело струму розвиває силу струму $J = 100$ А.

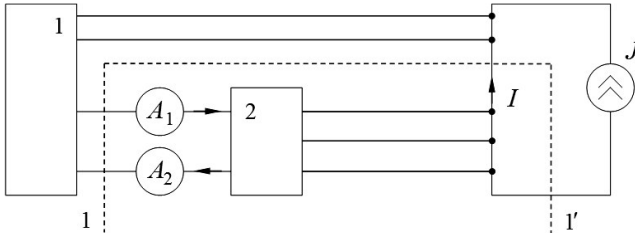


Рис. 1.4. Скелетна схема кола до прикладу 1.7

Розв'язання. Даних умов достатньо для знаходження значення струму I . Напрями струмів I_1 та I_2 через амперметри A_1 та A_2 можна визначити через позначені на схемі полярності їх ввімкнення. Проведемо перетин схеми кола штриховою лінією $11'$ як частиною уявного замкнутого контуру. В цей контур ззовні входить струм I_1 і з нього виходять струми I_2 , J та шуканий струм I . У відповідності з першим законом Кірхгофа для уявного контуру

$$I_1 - I_2 - J - I = 0,$$

звідки $I = I_1 - I_2 - J = 10 - 20 - 100 = -110$ А.

2. ОПІР. ПРОВІДНІСТЬ. ЗАКОН ОМА

Визначальною характеристикою одного з основних елементів електричних кіл постійного струму – резисторів – є їх опір R або їх провідність $G = R^{-1}$. Ці величини входять як коефіцієнти пропорційності в закон Ома для ділянки кола:

$$I = G \cdot U \quad \text{або} \quad I = \frac{1}{R} \cdot U,$$

де I – сила струму, U – напруга на ділянці кола з опором R .

Вони також характеризують здатність елементів до перетворення енергії електричного струму в теплову енергію (закон Ленца-Джоуля):



$$P = I^2 \cdot R = U^2 \cdot G.$$

В цьому виразі P – електрична потужність, яка споживається резистором від джерела електроенергії і дорівнює тепловій потужності, яка виділяється в резисторі.

У випадку нерозгалуженого замкненого кола аналітично закон Ома записується таким чином:

$$I = \frac{E}{R + R_{\text{вн}}},$$

де E – електрорушійна сила (ЕРС), а $R_{\text{вн}}$ – внутрішній опір джерела ЕРС.

При послідовному ввімкненні резисторів (рис. 2.1, а) опір кола з n резисторів дорівнює сумі опорів резисторів, що його утворюють:

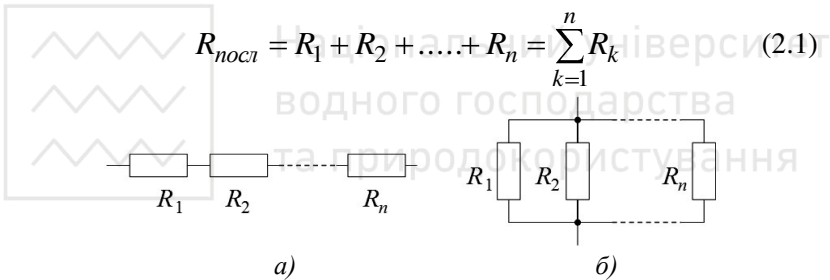


Рис. 2.1. Послідовна (а) та паралельна (б) схеми включення резисторів

При паралельному сполученні n резисторів (рис. 2.1, б) опори і провідності визначаються так:

$$R_{\text{нар}} = \frac{1}{G_{\text{нар}}} = \frac{1}{G_1 + G_2 + \dots + G_n}; \quad (2.2)$$

$$G_{\text{нар}} = G_1 + G_2 + \dots + G_n = \sum_{k=1}^n G_k.$$

Легко бачити, що при $R_1 = R_2 = \dots = R_n = R$ $R_{\text{нар}} = \frac{R}{n}$,

а $R_{\text{носл}} = n \cdot R$. Варто запам'ятати вирази для паралельного сполучення двох і трьох резисторів.



Приклад 2.1. Знайти величину опору паралельного сполучення:

- двох резисторів (рис. 2.2, а);
- трьох резисторів (рис. 2.2, б).

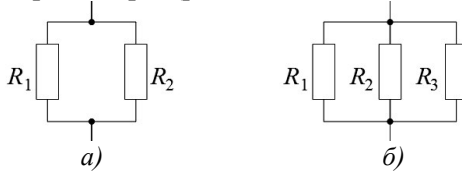


Рис. 2.2. Паралельне сполучення двох (а) та трьох (б) резисторів

Розв’язання. З формули (2.2) одержуємо:

- для випадку паралельного сполучення двох резисторів:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2}, \quad \text{звідки} \quad R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2};$$

- для випадку паралельного сполучення трьох резисторів:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2}{R_1 R_2 R_3}, \quad \text{звідки}$$
$$R = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}.$$

Приклад 2.2. Маючи вольтметр і амперметр, необхідно визначити невідомі значення ЕРС та внутрішнього опору джерела. Характеристики вимірювальних приладів вважати ідеальними.

Розв’язання. У випадку роботи джерела в ненавантаженому режимі $R = \infty$ та $I = \frac{E}{R + R_{вн}} = \frac{E}{\infty} = 0$, при цьому спад

напруги на внутрішньому опорі джерела $I \cdot R_{вн} = 0$ і напруга на затискачах джерела дорівнює ЕРС: $U = E$. Отже, приєднавши вольтметр з опором $R_g \gg R_{вн}$ до затискачів джерела напруги (рис. 2.3, а), за його показами визначають величину ЕРС E .

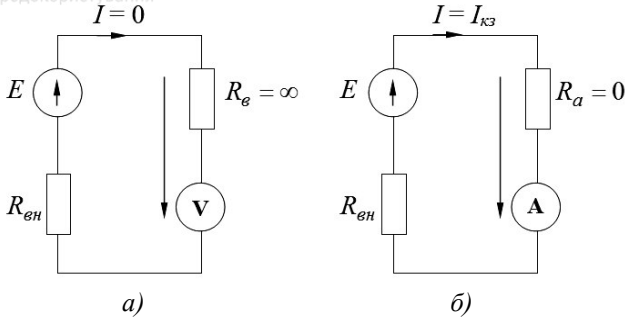


Рис. 2.3. До визначення ЕРС та внутрішнього опору джерела

Якщо ж до затискачів джерела приєднати ідеальний амперметр з опором R_a , що дорівнює нулю (дослід короткого замикання (КЗ), рис. 2.3, б), він виміряє силу струму КЗ

$$I_{кз} = \frac{E}{R_a + R_{вн}} = \frac{E}{R_{вн}}$$

З цього виразу одержимо

$$R_{вн} = \frac{E}{I_{кз}}$$

Приклад 2.3. Знайти силу струму на ділянці кола з опором R для випадків, представлених на рис. 2.4, а, б, в. Потенціали вузлів a та b відповідно становлять φ_a та φ_b .

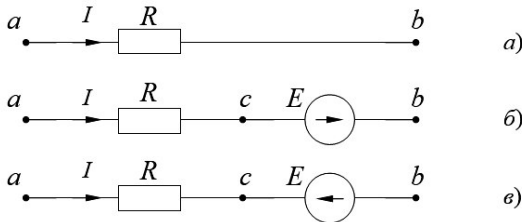


Рис. 2.4. Електричні схеми до прикладу 2.3

Розв'язання. Для знаходження сили струму скористаємося законом Ома для ділянки кола.

У випадку а) сила струму $I = \frac{U}{R} = \frac{\varphi_a - \varphi_b}{R}$. Струм



протікає від точки з вищим потенціалом до точки з нижчим потенціалом. Якщо $\varphi_a < \varphi_b$, одержимо значення струму зі знаком мінус; це означає, що дійсний напрям струму протилежний до вказаного на рис. 2.4, а.

У випадку б) напруга на резисторі $U = \varphi_a - \varphi_c$; потенціал φ_c можна виразити через потенціал φ_b та ЕРС E : $\varphi_c = \varphi_b - E$. Отже, $U = \varphi_a - \varphi_b + E$; сила струму:

$$I = \frac{\varphi_a - \varphi_b + E}{R}.$$

Для випадку в) аналогічно одержуємо

$$I = \frac{\varphi_a - \varphi_b - E}{R}.$$

Приклад 2.4. Знайти значення струмів у вітках контуру, якщо відомі потенціали його вузлів $\varphi_1 = 3 \text{ В}$, $\varphi_2 = 1 \text{ В}$, $\varphi_3 = -8 \text{ В}$, а також ЕРС $E_{12} = 6 \text{ В}$, $E_{23} = 5 \text{ В}$, $E'_{31} = 5 \text{ В}$, $E''_{31} = 10 \text{ В}$. Опори всіх резисторів $R = 2 \text{ Ом}$. Напрями струмів вказані на рис. 2.5.

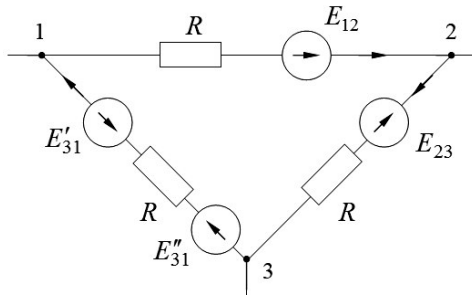


Рис. 2.5. Електрична схема до прикладу 2.4

Розв'язання. Відповідно до закону Ома для ділянки кола

$$I_{12} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E_{12}}{R} = \frac{2 + 6}{2} = 4 \text{ А};$$

$$I_{23} = \frac{\varphi_2 - \varphi_3 - E_{23}}{R} = \frac{1 + 8 - 5}{2} = 2 \text{ А};$$



$$I_{31} = \frac{\varphi_3 - \varphi_1 + E_{31}'' - E'_{31}}{R} = \frac{-8 - 3 + 10 - 5}{2} = -3 \text{ A.}$$

Від'ємне значення струму I_{31} говорить про те, що його істинний напрям протилежний до вказаного на рис. 2.5.

Приклад 2.5. При відомих значеннях струму I в нерозгалуженій частині кола (рис. 2.6) та опорях віток записати вирази для струмів у вітках.

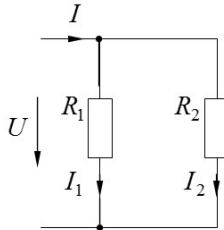


Рис. 2.6. Електрична схема до прикладу 2.5

Розв'язання. Напряга між вузлами

$$U = I \cdot R = I \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}.$$

Звідси значення струмів

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = I \frac{R_2}{R_1 + R_2};$$

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

Легко переконатись, що виконується перший закон Кірхгофа – сума цих струмів дорівнює силі струму в нерозгалуженій частині кола:

$$I_1 + I_2 = I \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) = I.$$

Приклад 2.6. Два чотириполюсники сполучені між собою, як показано на рис. 2.7. Опори резисторів однакові і становлять $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R = 100 \text{ Ом}$, значення ЕРС $E_2 =$



$= E_3 = E_4 = 10 \text{ В}$. Напруги між затискачами чотирьохполюсників $U_{11'} = -20 \text{ В}$; $U_{22'} = 15 \text{ В}$; $U_{33'} = 5 \text{ В}$. Визначити напругу $U_{44'}$.

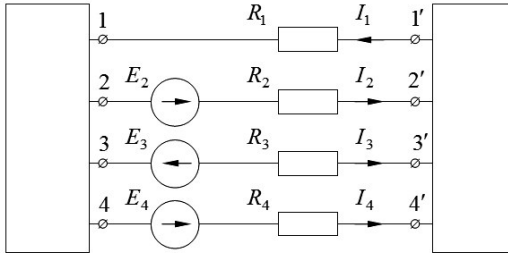


Рис. 2.7. Електрична схема до прикладу 2.6

Розв'язання. Довільно вкажемо напрями струмів у вітках, що сполучають чотирьохполюсники. Знайдемо струми у вітках 1 – 3, виходячи з напрямків, вказаних на рис. 2.7:

$$I_1 = -\frac{U_{11'}}{R} = \frac{20}{100} = 0,20 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{U_{22'} + E_2}{R} = \frac{15 + 10}{100} = 0,25 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{U_{33'} - E_3}{R} = \frac{5 - 10}{100} = -0,05 \text{ А}.$$

Відповідно до першого закону Кірхгофа алгебраїчна сума всіх струмів, що входять в багатополюсник, дорівнює нулю.

Отже, $I_1 - I_2 - I_3 - I_4 = 0$, звідки

$$I_4 = I_1 - I_2 - I_3 = 0,20 - 0,25 + 0,05 = 0 \text{ А}.$$

За законом Ома $I_4 = \frac{U_{44'} + E_4}{R}$, звідки

$$U_{44'} = I_4 R - E_4 = 0 - 10 = -10 \text{ В}.$$

3. МЕТОДИ ПЕРЕТВОРЕННЯ СХЕМ

В багатьох випадках задача аналізу кола значно спрощується, якщо його схему відповідним чином перетворити. Зокрема,



представлення частин кола у вигляді двополюсників дозволяє звести задачу до задачі на застосування закону Ома; перетворення зірка-трикутник чи навпаки дозволяє складну схему перетворити на схему із змішаним сполученням. При перетвореннях слід дотримуватися принципу еквівалентності, який вимагає, щоб за однакових умов (при однакових напругах між вузлами перетвореної і вихідної схем) у вітках, що сполучають неперетворену частину схеми з перетвореною, протікали ті самі струми, що й у відповідних вітках вихідної.

3.1. Метод згортки – розгортки

Для кіл з одним джерелом і послідовно-паралельним сполученням резисторів застосовують так званий метод згортки – розгортки, який передбачає:

- 1) зведення схеми до схеми з однією віткою, тобто згортку схеми;
- 2) знаходження струму в цій вітці, тобто в нерозгалуженій частині кола;
- 3) розгортку еквівалентної схеми аж до вихідної, в процесі якої знаходять струми і напруги на всіх елементах розгалуженого кола.

Приклад 3.1. Для кола (рис. 3.1, а) знайти еквівалентний вхідний опір, струми і напруги на всіх елементах кола. Вхідна напруга кола $U = 108 \text{ В}$; опори всіх резисторів $R = 6 \text{ Ом}$.

Розв'язання. Опори R_5 , R_6 , R_7 з'єднані паралельно, їх еквівалентна провідність G_{cd} і опір R_{cd} дорівнюють:

$$G_{cd} = G_5 + G_6 + G_7 = \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7} = 0,5 \text{ См};$$

$$R_{cd} = \frac{1}{G_{cd}} = 2 \text{ Ом}.$$

В результаті схема рис. 3.1, а зводиться до схеми рис. 3.1, б, в якій резистори R_4 та R_{cd} з'єднані послідовно. Їх загальний опір становить $R_4 + R_{cd} = 8 \text{ Ом}$. Опір між вузлами a та b



$$R_{ab} = \frac{R_3(R_4 + R_{cd})}{R_3 + R_4 + R_{cd}} = \frac{6 \cdot 8}{6 + 8} = \frac{48}{14} \text{ Ом},$$

а вхідний опір кола, як впливає з рис. 3.1, в,

$$R = R_1 + R_2 + R_{ab} = 12 + \frac{48}{14} = \frac{216}{14} \text{ Ом}.$$

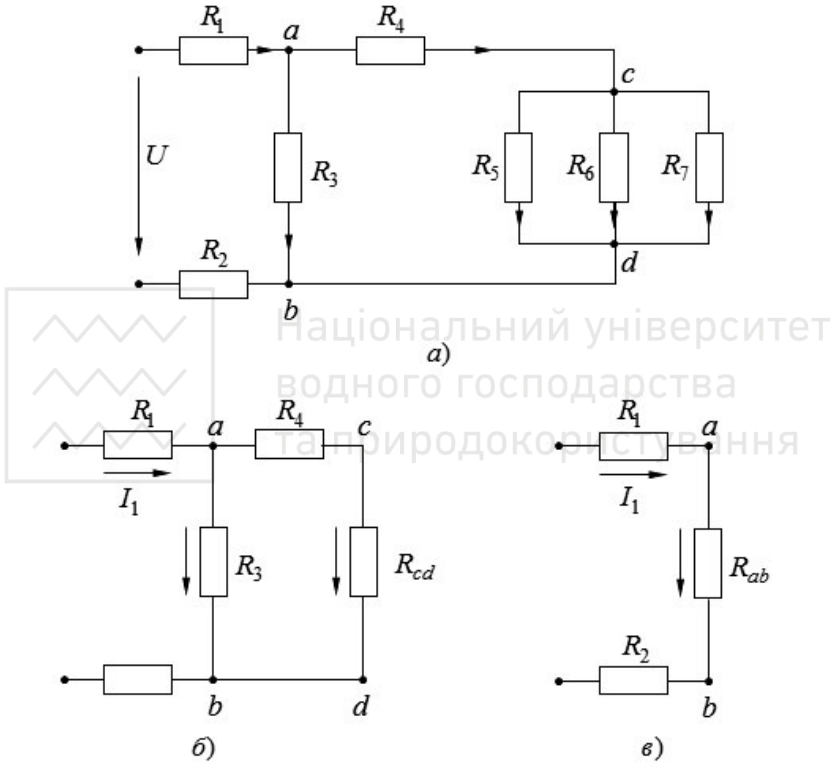


Рис. 3.1. Електричні схеми до прикладу 3.1

Струм в нерозгалуженій частині кола $I_1 = \frac{U}{R} = 7 \text{ А}$.

Шляхом розгортки кола знаходимо:

- напруга $U_{ab} = I_1 \cdot R_{ab} = 7 \cdot \frac{48}{14} = 24 \text{ В}$;



- напруга на резисторах R_1 та R_2 :

$$U_1 = U_2 = I_1 \cdot R_1 = 42 \text{ В};$$

- струми: $I_3 = \frac{U_{ab}}{R_3} = \frac{24}{6} = 4 \text{ А},$

$$I_4 = \frac{U_{ab}}{R_4 + R_{cd}} = \frac{24}{8} = 3 \text{ А};$$

- напруги: $U_{cd} = I_4 \cdot R_{cd} = 6 \text{ В}, \quad U_4 = I_4 \cdot R_4 = 18 \text{ В};$

- струм $I_5 = I_6 = I_7 = \frac{U_{cd}}{R_5} = 1 \text{ А}.$

3.2. Перетворення зірки в трикутник і навпаки

Деякі кола з числом вузлів більшим, ніж три, неможливо розбити на ділянки з послідовним чи паралельним сполученням елементів. До таких кіл метод згортки – розгортки незастосовний. Але в таких колах можна виділити ділянки, що є сполученням елементів трикутником або трипроменевою зіркою. У випадку, коли до складу таких сполучень не входять джерела енергії, легко здійснити перехід від сполучення трикутником до сполучення зіркою або навпаки. Це дозволяє перетворити складну схему в просту, в якій елементи сполучені лише послідовно та паралельно.

В схемі, представленій на рис. 3.2, а, можна виділити ділянку кола, обмежену штриховим прямокутником, в якій резистори R_1, R_2, R_3 сполучені трикутником, і ділянку кола, обмежену штриховим овалом, на якій резистори R_2, R_3, R_5 сполучені зіркою.

Шляхом перетворення трикутника R_1, R_2, R_3 в зірку R_a, R_b, R_c схема рис. 3.2, а перетвориться в схему рис. 3.2, б; при перетворенні зірки R_2, R_3, R_5 в трикутник схема рис. 3.2, а перетвориться в схему рис.3.2, в. Схеми рис. 3.2, б та в – це схеми з послідовно-паралельним сполученням, які легко піддаються розрахунку.

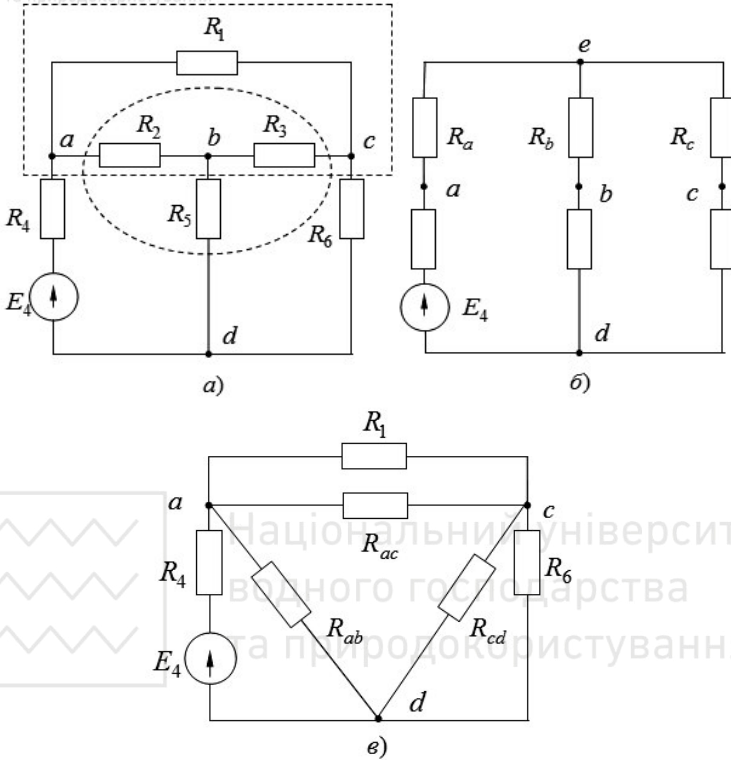


Рис. 3.2. Еквівалентні перетворення електричних схем

Перетворення трикутника в зірку (рис. 3.2, а та б) буде еквівалентним при виконанні таких співвідношень:

$$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{13}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad (3.1)$$

$$R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad (3.2)$$

$$R_3 = \frac{R_{23} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \quad (3.3)$$

При перетворенні зірки в трикутник умова еквівалентності виконується при виконанні таких співвідношень:



$$R_{12} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3}; \quad (3.4)$$

$$R_{23} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1}; \quad (3.5)$$

$$R_{31} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2}. \quad (3.6)$$

Приклад 3.2. Значення опорів резисторів трикутника (рис. 3.3, а) $R_{12} = 1$, $R_{23} = 2$, $R_{31} = 3 \text{ Ом}$. Знайти значення опорів у вітках еквівалентної зірки.

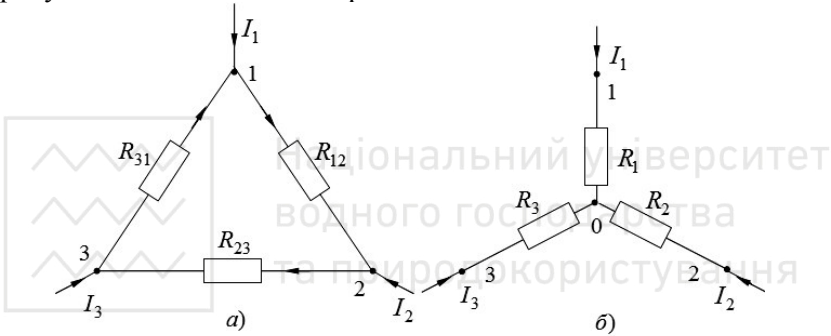


Рис. 3.3. Перетворення трикутника в зірку

Розв'язання. Скориставшись виразами (3.1), (3.2), (3.3), одержуємо:

$$R_1 = \frac{1 \cdot 3}{1 + 2 + 3} = \frac{1}{2} \text{ Ом}; \quad R_2 = \frac{1 \cdot 2}{1 + 2 + 3} = \frac{1}{3} \text{ Ом};$$

$$R_3 = \frac{2 \cdot 3}{1 + 2 + 3} = 1 \text{ Ом}.$$

Приклад 3.3. Довести, що перетворення зірки в трикутник і навпаки за формулами (3.1) – (3.3) та (3.4) – (3.6) еквівалентні.

Доведення. Формули (3.1) – (3.3) та (3.4) – (3.6) симетричні в тому плані, що зміна одинарного індексу при величинах R по кільцю 1-2-3-1 і т. ін. приводить до кільцевої зміни подвійного індексу в порядку 12-23-31-12 і т. ін. і навпаки. Тому



достатньо довести еквівалентність перетворення лише для однієї пари затискачів зірки чи трикутника.

Перетворення буде еквівалентним, якщо опори між відповідними парами полюсів трикутника і зірки (рис. 3.3) однакові. Переконаємося, що опір між полюсами 1 та 2 зірки $R_{12Y} = R_1 + R_2$ дорівнює опорі між полюсами 1 та 2 трикутника $R_{12\Delta}$. Для цього знайдемо провідність $G_{12\Delta}$:

$$G_{12\Delta} = G_{12} + \frac{G_{23} \cdot G_{31}}{G_{23} + G_{31}}.$$

Скориставшись формулами (3.4) – (3.6) і ввівши позначення $m = R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1$, одержимо

$$G_{12\Delta} = \frac{R_3}{m} + \frac{R_1 R_2}{m^2} \cdot \frac{m}{R_1 + R_2} = \frac{R_1 R_3 + R_2 R_3 + R_1 R_2}{m(R_1 + R_2)} = \frac{1}{R_1 + R_2}.$$

$$\text{Звідси } R_{12\Delta} = \frac{1}{G_{12\Delta}} = R_1 + R_2 = R_{12Y}.$$

Отже, перетворення еквівалентні.

Приклад 3.4. Визначити вхідний опір схеми рис. 3.4, а, якщо $R_1 = R_2 = R_3 = 6 \text{ Ом}$; $R_{12} = R_{23} = 18 \text{ Ом}$; $R_{31} = 9 \text{ Ом}$.

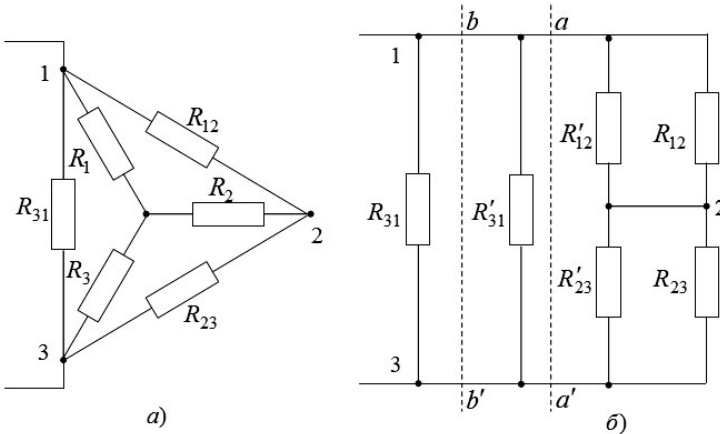


Рис. 3.4. Електричні схеми до прикладу 3.4

Розв'язання. Зірку, яка складається з резисторів



R_1, R_2, R_3 (рис. 3.4, *a*), замінимо на трикутник з резисторів $R'_{12} = R'_{23} = R'_{31}$ (рис. 3.4, *б*). Їх опір відповідно до формул (3.4) ... (3.6) становить $\frac{6 \cdot 6 + 6 \cdot 6 + 6 \cdot 6}{6} = 18 \text{ Ом}$. Резистор R_{12} і

паралельний резистор R'_{12} замінимо одним, опір якого дорівнює 9 Ом; резистор R_{23} і паралельний йому R'_{23} – резистором з таким самим опором 9 Ом.

Загальний опір частини кола праворуч від перетину aa' становить 18 Ом, а праворуч від перетину bb' – 9 Ом. Вхідний опір кола становить 4,5 Ом.

Приклад 3.5. Задана мостова схема (рис. 3.5, *a*). Необхідно знайти співвідношення для струму, що протікає через резистор R , і різницю потенціалів між точками b і c .

Розв'язання. Замінимо трикутник резисторів R_{ab}, R_{bc}, R_{ca} еквівалентною зіркою резисторів R_a, R_b, R_c , яка на рис. 3.5, *a* зображена штриховою лінією. В результаті одержимо схему рис. 3.5, *б* із змішаним сполученням резисторів. Еквівалентний опір цієї схеми

$$R_{екв} = R + R_a + \frac{R_b + R_{bd} \cdot (R_c + R_{cd})}{R_b + R_c + R_{bd} + R_{cd}}$$

Сила струму, що протікає через резистор R : $I = \frac{E}{R_{екв}}$.

Струм, що протікає через резистор R_{bd} :

$$I_{bd} = I \frac{R_c + R_{cd}}{R_c + R_{cd} + R_b + R_{bd}},$$

а струм, що протікає через резистор R_{cd} :

$$I_{cd} = I \frac{R_b + R_{bd}}{R_c + R_{cd} + R_b + R_{bd}}.$$

Прийнявши потенціал точки d рівним нулю, визначимо потенціали точок b і c :



$$\varphi_b = I_{bd} R_{bd}; \quad \varphi_c = I_{cd} R_{cd}.$$

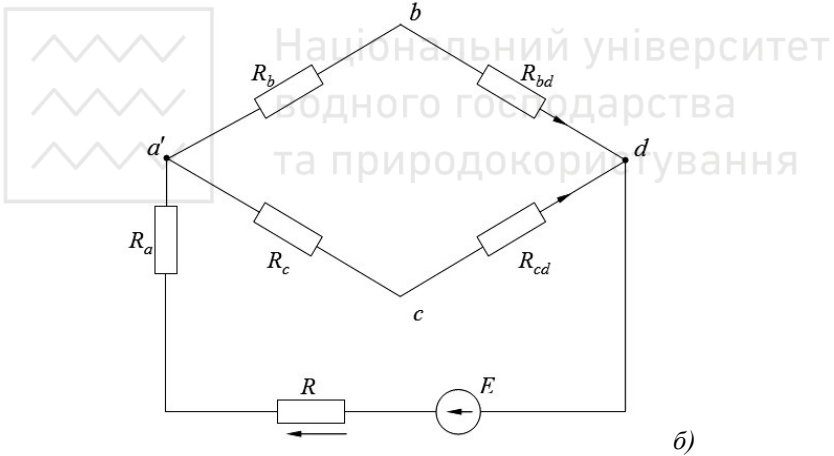
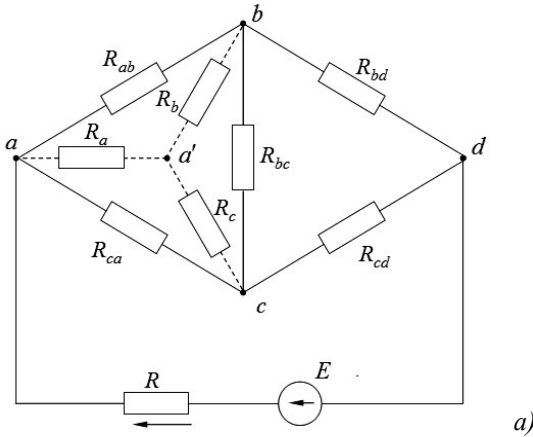


Рис. 3.5. Електричні схеми до прикладу 3.5

Їх різниця

$$\varphi_b - \varphi_c = U_{bc} = I \frac{(R_c + R_{cd})R_{bd} - (R_b + R_{bd})R_{cd}}{R_c + R_b + R_{cd} + R_{bd}}.$$

4. ПРЕДСТАВЛЕННЯ ДЖЕРЕЛ ЕЛЕКТРИЧНОЇ ЕНЕРГІЇ СХЕМАМИ ЗАМІЩЕННЯ

Будь-яке реальне джерело характеризується двома осно-



вними параметрами – величиною ЕРС E та внутрішнім опором $R_{вн}$.

Незважаючи на те, що величина внутрішнього опору $R_{вн}$ і в певній мірі ЕРС E залежать від опору навантаження джерела, в більшості випадків у першому наближенні реальні джерела можна вважати лінійними елементами кола.

Реальне джерело електроенергії, в залежності від характеру розглядуваної задачі, можна представити однією з двох схем заміщення:

- схемою з джерелом ЕРС E з послідовно ввімкненим опором, що дорівнює внутрішньому опору $R_{вн}$ реального джерела (рис. 4.1, а);

- схемою з джерелом струму $J = \frac{E}{R_{вн}}$ і паралельно з ним ввімкненим опором $R_{вн}$ (рис. 4.1, б).

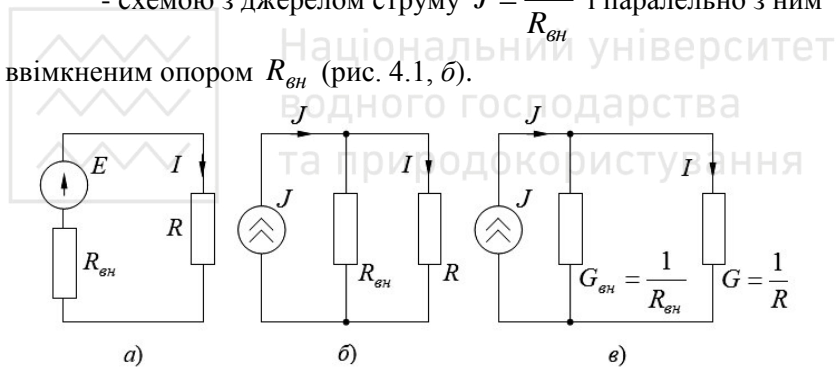


Рис. 4.1. Еквівалентні схеми джерел електричної енергії

Незалежно від схеми заміщення струм в навантаженні однаковий як для першої схеми заміщення (відповідно до закону Ома)

$$I = \frac{E}{R_{вн} + R}, \quad (4.1, а)$$

так і для другої схеми заміщення (відповідно до виразу для струму в розгалуженні)

$$I = J \frac{R_{вн}}{R_{вн} + R} = \frac{E}{R_{вн}} \frac{R_{вн}}{R_{вн} + R} = \frac{E}{R + R_{вн}}. \quad (4.1, б)$$



Схеми заміщення джерел еквівалентні щодо енергії, яка виділяється в навантаженні. Але вони не еквівалентні в плані енергії, що виділяється всередині джерел (на їх внутрішньому опорі) і в плані коефіцієнта корисної дії кола.

Приклад 4.1. Здійснити еквівалентний перехід від схеми з джерелом ЕРС $E = 60 \text{ В}$ (рис. 4.1, а) і внутрішнім опором $R_{\text{вн}} = 2 \text{ Ом}$ до схеми з джерелом струму. Знайти вирази для коефіцієнта корисної дії кола з джерелом ЕРС і кола з джерелом струму, провести їх аналіз при зміні опору навантаження R .

Розв'язання. Джерелу з ЕРС $E = 60 \text{ В}$ та послідовно ввімкненим внутрішнім опором $R_{\text{вн}} = 2 \text{ Ом}$ буде еквівалентне джерело струму з струмом

$$J = \frac{E}{R_{\text{вн}}} = \frac{60}{2} = 30 \text{ А}$$

і паралельно ввімкненим внутрішнім опором $R_{\text{вн}} = 2 \text{ Ом}$ (схема рис. 4.1, б).

Як впливає з виразів (4.1, а та б), сила струму в навантаженні в обох випадках однакова.

У випадку одного джерела і одного приймача коефіцієнт корисної дії кола дорівнює відношенню потужності на приймачі до потужності, що розвивається джерелом.

$$\text{Для схеми рис. 4.1, а: } \eta = \frac{P}{P_{\text{дж}}} = \frac{IU}{IE} = \frac{U}{E} = \frac{R}{R + R_{\text{вн}}}.$$

Зокрема, при значеннях опору приймача

$$R = 0 \quad \eta = 0;$$

$$R = R_{\text{вн}} \quad \eta = 0,5;$$

$$R = \infty \quad \eta = 1,$$

тобто ККД η зростає від 0 до 1 при збільшенні опору навантаження R від 0 до ∞ .

Для того, щоб одержати вираз для ККД кола за схемою рис. 4.1, б, доцільно перейти від опорів до відповідних їм провідностей (рис. 4.1, в).



$$\eta = \frac{P}{P_{\text{дж}}} = \frac{I^2 \frac{1}{G}}{J^2 \frac{1}{G + G_{\text{вн}}}} = \frac{\left(J \frac{G}{G + G_{\text{вн}}} \right)^2 \cdot \frac{1}{G}}{J^2 \frac{1}{G + G_{\text{вн}}}} = \frac{G}{G + G_{\text{вн}}}.$$

Можна переконатись, що величина η зменшується від 1 до 0 при збільшенні опору навантаження R від 0 до ∞ .

Зокрема, при різних значеннях опору приймача отримаємо такі результати:

$$\begin{aligned} R = 0 & \quad \eta = 1; \\ R = R_{\text{вн}} & \quad \eta = 0,5; \\ R = \infty & \quad \eta = 0. \end{aligned}$$

Приклад 4.2. Знайти струми у вітках кола (рис. 4.2, а), параметри елементів якого $J_1 = 6 \text{ A}$, $E_2 = 5 \text{ B}$, $R_1 = 3 \text{ Ом}$, $R_2 = 10 \text{ Ом}$.

Розв'язання. 1. Здійснимо заміну джерела ЕРС E_2 еквівалентним джерелом струму J_2 , вважаючи R_2 внутрішнім опором джерела ЕРС. Струм такого джерела

$$J_2 = \frac{E_2}{R_2} = 0.5 \text{ A}.$$

Паралельно ввімкнені джерела струму J_1 і J_2 (рис. 4.2, б) можна замінити одним, сила струму якого дорівнює алгебраїчній сумі струмів джерел (рис. 4.2, в):

$$J = J_1 + J_2 = 6.5 \text{ A}.$$

Тоді сила струму в неперетвореній частині кола (в резисторі R_1) становить

$$I_1 = J \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 6.5 \cdot \frac{10}{13} = 5 \text{ A}.$$

Повертаючись до вихідної схеми (рис. 4.2, а) і застосовуючи перший закон Кірхгофа, знаходимо струм другої вітки:

$$I_2 = J_1 - I_1 = 1 \text{ A}.$$



2. Здійснимо еквівалентну заміну джерела струму J_1 , вважаючи R_1 його внутрішнім опором, джерелом ЕРС $E = J_1 R_1 = 18 \text{ В}$. Тоді схема кола набуде вигляду, представленого на рис. 4.2, з. Сила струму в такому колі $I = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} = 1 \text{ А}$.

Вітка з резистором R_2 і джерелом E_2 належить до неперетвореної частини кола, отже, $I_2 = I = 1 \text{ А}$.

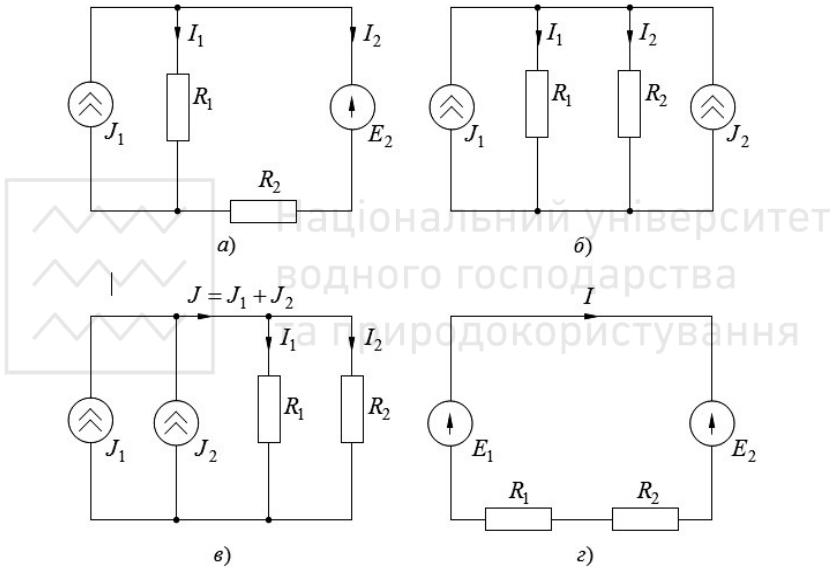


Рис. 4.2. Електричні схеми до прикладу 4.2

Повертаючись до вихідної схеми, знаходимо відповідно до першого закону Кірхгофа

$$I_1 = J_1 - I_2 = 5 \text{ А}.$$

Цей результат збігається з одержаним попереднім способом (див. також приклад 1.6).

5. МЕТОД ПРОПОРЦІЙНИХ ВЕЛИЧИН (МЕТОД ВИЗНАЧАЛЬНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ)

Деякі прості кола з одним джерелом живлення можна



розрахувати, не спрощуючи їх схем. Зокрема, в таких випадках можна скористатись методом визначальних коефіцієнтів. Цей метод називають також методом пропорційних величин або методом подібності. Він передбачає такі етапи:

1. Приймаємо, що у вітці, електрично найбільш віддаленій від джерела, протікає струм, сила якого становить, наприклад, 1 А (або що спад напруги на цій вітці становить 1 В).

2. Користуючись законом Ома для ділянки кола і першим законом Кірхгофа, послідовно знаходимо умовні напруги на всіх елементах кола і умовні струми в них (ці величини позначимо, наприклад, штрихом).

3. Поділивши задані умовою вхідну напругу U чи струм I на одержані таким чином умовні значення напруги U' між кінцями віток чи струму I' у вітках, які безпосередньо підходять до джерела, знаходимо коефіцієнт пропорційності (коефіцієнт подібності) між заданими і розрахованими умовними значеннями

$$k_I = \frac{I}{I'}; \quad k_U = \frac{U}{U'}$$

Дійсні значення струмів і напруг в інших вітках кола знаходимо шляхом множення розрахованих умовних величин на коефіцієнт пропорційності.

Приклад 5.1. Визначити струми у вітках кола (рис. 5.1), якщо $J = 96 \text{ А}$, $R_1 = 4 \text{ Ом}$, $R_2 = 2 \text{ Ом}$, $R_3 = 3 \text{ Ом}$, $R_4 = 6 \text{ Ом}$, $R_5 = 2 \text{ Ом}$, $R_6 = 8 \text{ Ом}$, $R_7 = 5 \text{ Ом}$, $R_8 = 3 \text{ Ом}$.

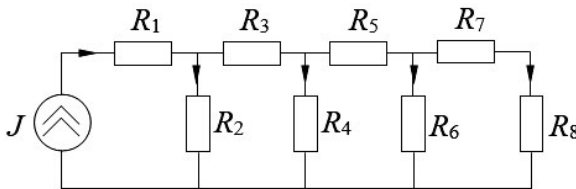


Рис. 5.1. Електрична схема до прикладу 5.1

Розв'язання. Для аналізу подібних кіл зі змішаним з'єднанням опорів і наявністю джерела струму в одній вітці можна застосувати метод пропорційних величин. У відповідності з вка-



заним напрямом струму джерела струму можна вказати дійсний напрям струму будь-якої вітки. Спочатку прийемо довільну величину струму в електрично найбільш віддаленій від джерела вітці. Наприклад, $I'_8 = I'_7 = 1 \text{ A}$. Потім, просуваючись за схемою в напрямку до джерела струму, визначаємо умовні струми і напруги на ділянках кола. Ці напруги і струми позначаємо штрихами. Для напруги на резисторі R_6 отримаємо:

$$U'_6 = I'_8 (R_7 + R_8) = 8 \text{ B}.$$

Знаючи напругу U'_6 , знайдемо відповідний струм I'_6 :

$$I'_6 = \frac{U'_6}{R_6} = 1 \text{ A}.$$

Струм I'_5 дорівнює сумі струмів двох паралельних віток:

$$I'_5 = I'_6 + I'_8 = 2 \text{ A},$$

$$U'_5 = I'_5 R_5 = 4 \text{ B}.$$

Відповідно до схеми сполучення ділянок кола знаходимо:

$$U'_4 = U'_6 + U'_5 = 12 \text{ B}.$$

Отже:

$$I'_4 = \frac{U'_4}{R_4} = 2 \text{ A};$$

$$I'_3 = I'_4 + I'_5 = 4 \text{ A}.$$

Знаючи струм I'_3 , знаходимо:

$$U'_3 = I'_3 R_3 = 12 \text{ B};$$

$$U'_2 = U'_3 + U'_4 = 24 \text{ B}.$$

Тепер можна знайти струм I'_2 . Його значення становить

$$I'_2 = \frac{U'_2}{R_2} = 12 \text{ A}.$$

Тоді

$$I'_1 = I'_2 + I'_3 = 16 \text{ A}.$$

звідки



Тому що дійсний струм у вітці 1 становить 96 А, то коефіцієнт пропорційності

$$k = \frac{I}{I'_1} = 6.$$

Помноживши відповідні умовні значення струмів на коефіцієнт пропорційності, одержимо дійсні значення струмів:

$$I_1 = kI'_1 = 96 \text{ A}; \quad I_2 = kI'_2 = 72 \text{ A};$$

$$I_3 = kI'_3 = 24 \text{ A}; \quad I_4 = kI'_4 = 12 \text{ A};$$

$$I_5 = kI'_5 = 12 \text{ A}; \quad I_6 = kI'_6 = 6 \text{ A}; \quad I_7 = I_8 = kI'_8 = 6 \text{ A}.$$

Приклад 5.2. Знайти напруги і струми у всіх вітках кола, затискачі якого приєднані:

- до джерела напруги з ЕРС $E = 40 \text{ В}$ (рис. 5.2, а);

- до джерела струму $J = 40 \text{ А}$ (рис. 5.2, б).

Значення опорів резисторів:

$$R_1 = 1,25 \text{ Ом}, \quad R_2 = 1,5 \text{ Ом}, \quad R_3 = 3 \text{ Ом}, \quad R_4 = 1 \text{ Ом}, \quad R_5 = 2 \text{ Ом}.$$

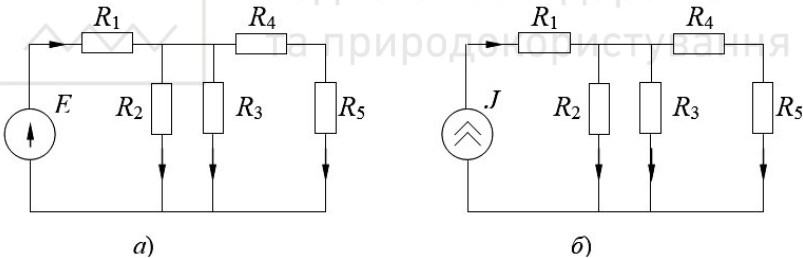


Рис. 5.2. Електричні схеми до прикладу 5.2

Розв'язання. Приймаємо, що струм через резистори R_4 та R_5 становить $I'_4 = I \text{ А}$. Тоді напруга на резисторі R_2 :

$$U'_2 = U'_3 = I'_4 (R_4 + R_5) = 3 \text{ В};$$

- струм через резистор R_3 :

$$I'_3 = \frac{U'_3}{R_3} = 1 \text{ А};$$

- струм через резистор R_2 :



$$I'_2 = \frac{U'_3}{R_2} = 2 \text{ A}.$$

Струм через резистор R_1

$$I'_1 = I'_2 + I'_3 + I'_4 = 4 \text{ A},$$

а спад напруги на ньому

$$U'_1 = I'_1 \cdot R_1 = 5 \text{ B}.$$

Напруга на входних затискачах за цих умов:

$$U' = U'_1 + U'_3 = 8 \text{ B}.$$

Тому що напруга джерела ЕРС становить 40 В, дійсні значення струмів і напруг у вітках будуть в $k_U = \frac{U}{U'} = 5$ разів більшими.

Якщо входні затискачі кола приєднані до джерела струму $J = 40 \text{ A}$, дійсні значення струмів і напруг у вітках кола будуть в $k_I = \frac{I}{I'} = \frac{40}{4} = 10$ разів більшими від розрахованих умовних значень.

6. МЕТОД НАКЛАДАННЯ

Метод накладання базується на загальнофізичному принципі накладання (суперпозиції), який в застосуванні до лінійних електричних кіл можна сформулювати так.

Через будь-який елемент чи ділянку електричного кола одночасно можуть протікати струми від різних джерел, а підсумковий струм (напруга) визначається алгебраїчною сумою струмів (напруг), викликаних дією кожного з джерел незалежно від інших.

Слід особливо наголосити, що принцип накладання не виконується для нелінійних систем, в тому числі нелінійних електричних кіл. З цього принципу випливає метод накладання. Відповідно до нього струм у будь-якій вітці кола, в якому діють k джерел, знаходять як алгебраїчну суму частинних струмів $I_1 \dots I_k$, викликаних дією кожного з k джерел при відсутності



дії $k-1$ інших джерел.

При відключенні джерел у вітках залишаються їх внутрішні опори. У випадку ідеального джерела ЕРС $\mathcal{E}_{\text{вн}} = 0$ замість внутрішнього опору ставлять перемичку, а вітку з ідеальним джерелом струму $\mathcal{E}_{\text{вн}} = \infty$ розривають. Сума k частинних струмів у випадку кіл постійного струму буде алгебраїчною, у випадку кіл синусоїдального – геометричною.

Цей метод дозволяє порівняно складну задачу розділити на ряд простих задач для визначення частинних струмів, викликаних дією кожного джерела окремо. Реальний струм в кожній вітці заданої схеми одержують шляхом сумування всіх частинних струмів цієї вітки.

Приклад 6.1. Знайти струми у вітках кола (приклад 4.2) методом накладання.

Розв’язання. Виключимо з кола (рис. 4.2, *a*) джерело ЕРС E_2 , тоді схема цього кола набуде вигляду, приведеного на рис. 6.1, *a*.

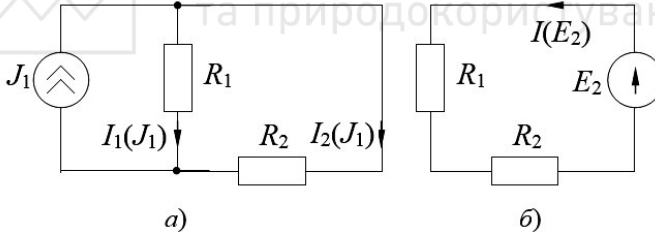


Рис. 6.1. Електричні схеми до прикладу 6.1

Частинні струми у вітках кола:

$$I_1 \mathcal{I}_1 \rightrightarrows J_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 6 \cdot \frac{10}{13} = \frac{60}{13} \text{ A};$$

$$I_2 \mathcal{I}_1 \rightrightarrows J_1 \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 6 \cdot \frac{3}{13} = \frac{18}{13} \text{ A}.$$

Тепер у вихідній схемі кола виключимо джерело струму J_1 (рис. 6.1, *б*). Сила струму в такому колі:



$$I = I_1 \leftarrow E_2 \Rightarrow I_2 \leftarrow E_2 \Rightarrow = \frac{E_2}{R_1 + R_2} = \frac{5}{13} \text{ A.}$$

Сила струму у вітці кола з резистором R_1 (рис. 4.2, а):

$$I_1 = I_1 \leftarrow J_1 \rightarrow + I_1 \leftarrow E_2 \Rightarrow = \frac{60}{13} + \frac{5}{13} = \frac{65}{13} = 5 \text{ A,}$$

а у вітці з резистором R_2 –

$$I_2 = I_2 \leftarrow J_1 \rightarrow - I_2 \leftarrow E_2 \Rightarrow = \frac{18}{13} - \frac{5}{13} = 1 \text{ A}$$

(струм $I_2 \leftarrow E_2 \Rightarrow$ спрямований зустрічно до струму $I_2 \leftarrow J_1 \rightarrow$).

Приклад 6.2. Визначити струми у вітках кола (рис. 6.2,

а) методом накладання. Параметри елементів кола: $J_1 = 15 \text{ A}$, $J_2 = 6 \text{ A}$, $E_1 = 20 \text{ B}$, $E_2 = 8 \text{ B}$, $R_1 = 3 \text{ Ом}$, $R_2 = 2 \text{ Ом}$, $R_3 = 1 \text{ Ом}$.

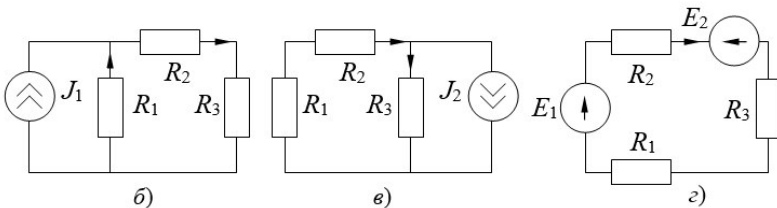
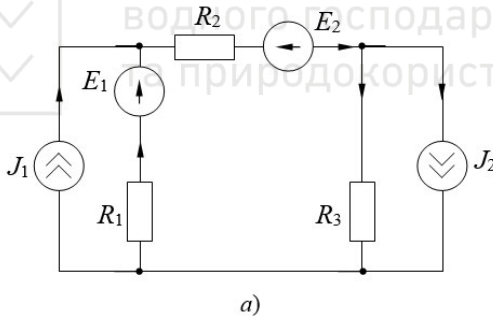


Рис. 6.2. Електричні схеми до прикладу 6.2

Розв'язання. Довільно позначимо напрями струмів у вітках, наприклад так, як вказано на рис. 6.2, а. Для знаходження частинних струмів, викликаних дією окремих джерел, зобразимо



схему кола так, як показано на рис. 6.2, б, в, г.

При цьому враховуємо, що: 1) у вітках з ідеальними джерелами струмів, внутрішній опір яких $R_{\text{вн}} = \infty$, протікають лише їх власні струми; 2) коли кілька джерел ЕРС (в даному випадку E_1 та E_2) діють в одному нерозгалуженому колі, їх дію можна замінити дією однієї ЕРС, що дорівнює алгебраїчній сумі всіх ЕРС нерозгалуженого контуру.

Виходячи з цих схем, знаходимо відповідні частинні струми:

$$I_1 \overset{\curvearrowright}{\underset{\curvearrowleft}{\mathbb{C}}}_1 \overset{\curvearrowright}{=} -J_1 \frac{R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = -7,5 \text{ A};$$

$$I_2 \overset{\curvearrowright}{\underset{\curvearrowleft}{\mathbb{C}}}_1 \overset{\curvearrowright}{=} I_3 \overset{\curvearrowright}{\underset{\curvearrowleft}{\mathbb{C}}}_1 \overset{\curvearrowright}{=} J_1 \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} = 7,5 \text{ A};$$

$$I_1 \overset{\curvearrowright}{\underset{\curvearrowleft}{\mathbb{C}}}_2 \overset{\curvearrowright}{=} I_2 \overset{\curvearrowright}{\underset{\curvearrowleft}{\mathbb{C}}}_2 \overset{\curvearrowright}{=} J_2 \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 1 \text{ A};$$

$$I_3 \overset{\curvearrowright}{\underset{\curvearrowleft}{\mathbb{C}}}_2 \overset{\curvearrowright}{=} -J_2 \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = -5 \text{ A};$$

$$I_1 \overset{\curvearrowright}{\underset{\curvearrowleft}{\mathbb{C}}}_{E_1, E_2} \overset{\curvearrowright}{=} I_2 \overset{\curvearrowright}{\underset{\curvearrowleft}{\mathbb{C}}}_{E_1, E_2} \overset{\curvearrowright}{=} I_3 \overset{\curvearrowright}{\underset{\curvearrowleft}{\mathbb{C}}}_{E_1, E_2} \overset{\curvearrowright}{=} \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2 + R_3} = 2 \text{ A}.$$

Реальні струми мають такі значення:

$$I_1 = I_1 \overset{\curvearrowright}{\underset{\curvearrowleft}{\mathbb{C}}}_1 \overset{\curvearrowright}{+} I_1 \overset{\curvearrowright}{\underset{\curvearrowleft}{\mathbb{C}}}_2 \overset{\curvearrowright}{+} I_1 \overset{\curvearrowright}{\underset{\curvearrowleft}{\mathbb{C}}}_{E_1, E_2} \overset{\curvearrowright}{=} -7,5 + 1 + 2 = -4,5 \text{ A};$$

$$I_2 = I_2 \overset{\curvearrowright}{\underset{\curvearrowleft}{\mathbb{C}}}_1 \overset{\curvearrowright}{+} I_2 \overset{\curvearrowright}{\underset{\curvearrowleft}{\mathbb{C}}}_2 \overset{\curvearrowright}{+} I_2 \overset{\curvearrowright}{\underset{\curvearrowleft}{\mathbb{C}}}_{E_1, E_2} \overset{\curvearrowright}{=} 7,5 + 1 + 2 = 10,5 \text{ A};$$

$$I_3 = I_3 \overset{\curvearrowright}{\underset{\curvearrowleft}{\mathbb{C}}}_1 \overset{\curvearrowright}{+} I_3 \overset{\curvearrowright}{\underset{\curvearrowleft}{\mathbb{C}}}_2 \overset{\curvearrowright}{+} I_3 \overset{\curvearrowright}{\underset{\curvearrowleft}{\mathbb{C}}}_{E_1, E_2} \overset{\curvearrowright}{=} 7,5 - 5 + 2 = 4,5 \text{ A}.$$

Приклад 6.3. Записати вирази для частинних струмів у колі рис. 6.3, а, викликаних дією джерел ЕРС.

Розв'язання. В колі (рис. 6.3, а) довільно вказуємо напрями струмів. Тому що внутрішній опір ідеальних джерел струму прямує до безкінечності, вітки з такими джерелами можна вважати розірваними для струмів, створюваних джерелами ЕРС, і схема кола набуває вигляду рис. 6.3, б.

З аналізу схеми робимо висновок, що для джерел ЕРС



E_2 та E_3 коло розірване і ці джерела не викликають струмів.

Частинні струми у вітках ac , cd та ad , створені джерелом ЕРС E_1 , відповідно до закону Ома становлять:

$$I_{ac} \leftarrow E_1 \Rightarrow I_{cd} \leftarrow E_1 \Rightarrow -I_{ad} \leftarrow E_1 \Rightarrow \frac{E_1}{R_{ac} + R_{cd} + R_{ad}}.$$

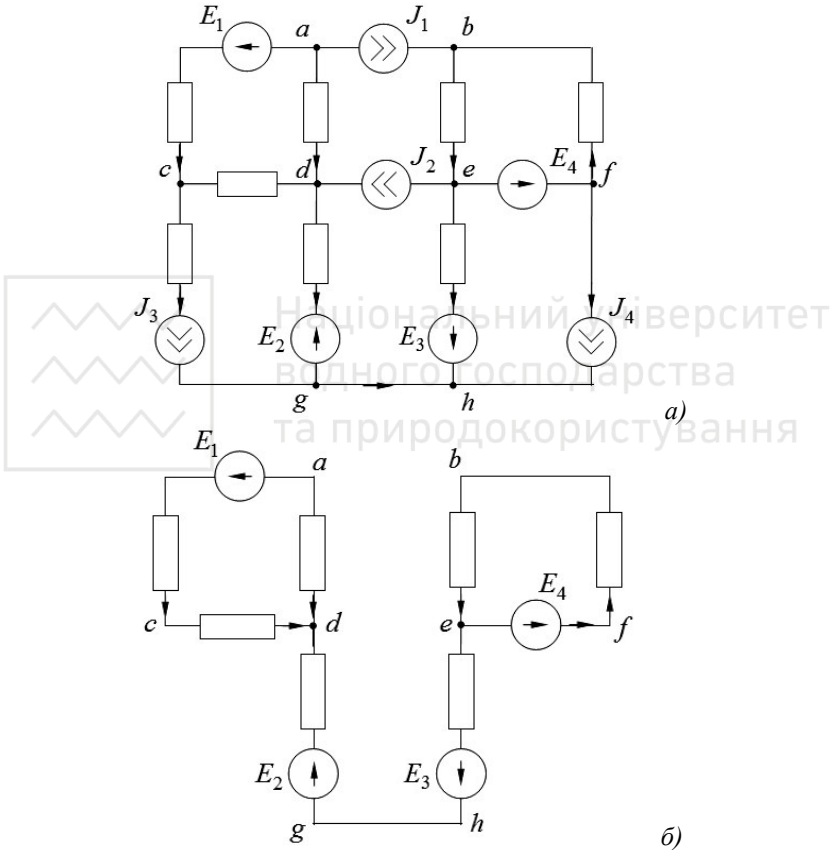


Рис. 6.3. Електричні схеми до прикладу 6.3

Частинні струми, викликані дією джерела E_4 , становлять:

$$I_{fb} = I_{be} = \frac{E_4}{R_{fb} + R_{be}}.$$



Приклад 6.4. Записати вирази для частинних струмів, викликаних дією джерел струму в колі рис. 6.3, а.

Розв'язання. 1) Якщо виключити з розгляду всі джерела, крім J_1 , одержимо схему (рис. 6.4, а). Очевидно, що:

$$\begin{aligned}I_{eh} \mathcal{C}_1 \rightrightarrows &= -I_{gh} \mathcal{C}_1 \rightrightarrows = -I_{dg} \mathcal{C}_1 \rightrightarrows = J_1; \\I_{be} \mathcal{C}_1 \rightrightarrows &= J_1 \frac{R_{bf}}{R_{bf} + R_{be}}; \quad I_{bf} \mathcal{C}_1 \rightrightarrows = -J_1 \frac{R_{be}}{R_{bf} + R_{be}}; \\I_{ad} \mathcal{C}_1 \rightrightarrows &= -J_1 \frac{R_{ac} + R_{cd}}{R_{ac} + R_{cd} + R_{ad}}; \\I_{ac} \mathcal{C}_1 \rightrightarrows &= I_{cd} \mathcal{C}_1 \rightrightarrows = -J_1 \frac{R_{ad}}{R_{ac} + R_{cd} + R_{ad}}\end{aligned}$$

2) Якщо виключити з розгляду всі джерела, крім J_2 , одержимо схему (рис. 6.4, б).

Струм від цього джерела протікає лише у вітках dg , gh , eh і дорівнює:

$$I_{dg} \mathcal{C}_2 \rightrightarrows = I_{gh} \mathcal{C}_2 \rightrightarrows = -I_{eh} \mathcal{C}_2 \rightrightarrows = J_2.$$

3) Якщо виключити з розгляду всі джерела, крім J_3 , одержимо схему (рис. 6.4, в), для якої:

$$\begin{aligned}I_{dg} \mathcal{C}_3 \rightrightarrows &= -J_3; \\I_{cd} \mathcal{C}_3 \rightrightarrows &= -J_3 \frac{R_{ac} + R_{ad}}{R_{ac} + R_{ad} + R_{cd}}; \\I_{ac} \mathcal{C}_3 \rightrightarrows &= -I_{ad} \mathcal{C}_3 \rightrightarrows = J_3 \frac{R_{cd}}{R_{ac} + R_{ad} + R_{cd}}.\end{aligned}$$

В інших вітках струм від джерела J_3 не протікає.

4) При дії в колі лише джерела J_4 схема кола матиме вигляд, зображений на рис. 6.4, г. Очевидно, що:

$$I_{eh} \mathcal{C}_4 \rightrightarrows = -I_{ef} \mathcal{C}_4 \rightrightarrows = -J_4$$

У вітках dg , ac , ad , cd , gh , be та bf струм від джерела J_4 не протікає (вітки be , bf закорочені віткою ef).

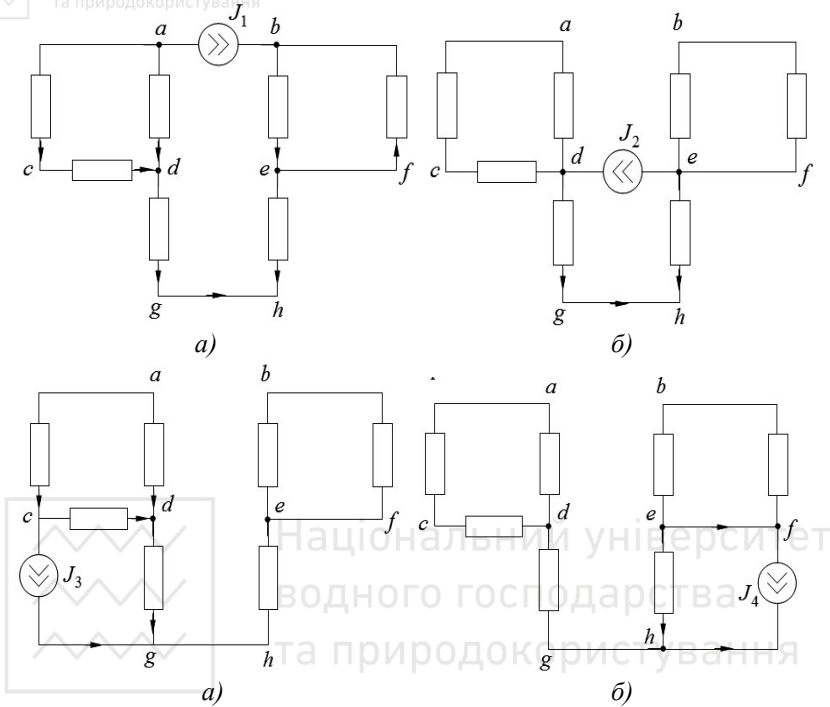


Рис. 6.4. Електричні схеми до прикладу 6.4

Приклад 6.5. Для кола (рис. 6.3, а) отримати вирази для струмів I_{dg} , I_{gh} , I_{eh} за методом накладання.

Розв'язання. З прикладу 6.3 випливає, що струми у вітках dg , gh , eh не залежать від дії джерел ЕРС.

Струм у вітці dg викликаний лише дією джерел J_1 , J_2 , J_3 і становить

$$I_{dg} = I_{dg} \text{ (1) } \text{ } I_{dg} \text{ (2) } \text{ } I_{dg} \text{ (3) } \text{ } -J_1 + J_2 - J_3.$$

Струм у вітці gh залежить лише від дії джерел J_1 та J_2 :

$$I_{gh} = I_{gh} \text{ (1) } \text{ } I_{gh} \text{ (2) } \text{ } -J_1 + J_2.$$

Струм у вітці eh залежить від дії джерел J_1 , J_2 та J_4 :

$$I_{eh} = I_{eh} \text{ (1) } \text{ } I_{eh} \text{ (2) } \text{ } I_{eh} \text{ (4) } \text{ } J_1 - J_2 - J_4.$$



7. МЕТОД ЕКВІВАЛЕНТНОГО ГЕНЕРАТОРА

В деяких випадках немає потреби знати струми у всіх вітках кола, а досить знати лише в одній вітці. В таких випадках доцільно скористатися методом еквівалентного генератора (активного двополюсника).

Для цього схему поділяють на дві частини – виділену вітку та решту кола. Цю частину кола представляють у вигляді двополюсника (в загальному випадку активного) з параметрами $E_{екв}$ та $R_{екв}$ (рис. 7.1). Значення цих параметрів залежать від схеми сполучень і параметрів елементів, що входять до складу двополюсника. Загальної методики визначення цих параметрів не існує і кожна конкретна задача вимагає окремого підходу.

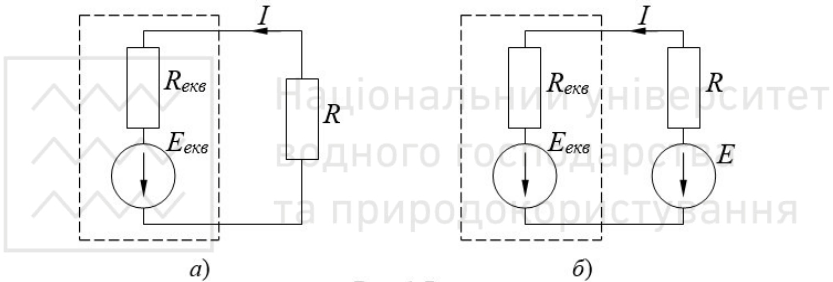


Рис. 7.1. До пояснення методу еквівалентного генератора

Значення струму у виділеній вітці з опором R (рис. 7.1, а) знаходять за законом Ома:

$$I = \frac{E_{екв}}{R_{екв} + R}.$$

Якщо у виділеній вітці діє джерело ЕРС E (рис. 7.1, б), то значення струму:

$$I = \frac{E_{екв} \pm E}{R_{екв} + R}$$

(знак “+” відповідає узгодженому ввімкненню джерел $E_{екв}$ і E).

Приклад 7.1. Ділянка кола складається з двох віток з параметрами елементів $R_1 = 15$ Ом, $E_1 = 15$ В, $R_2 = 10$ Ом та $E_2 = 10$ В. Замінити цю ділянку еквівалентним двополюсником і



розрахувати параметри $R_{екв}$, $E_{екв}$ (рис. 7.2).

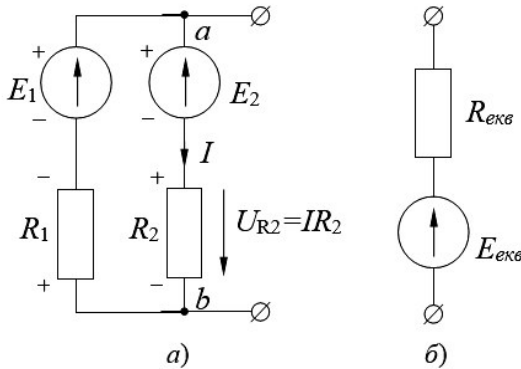


Рис. 7.2. Електричні схеми до прикладу 7.1

Розв'язання. Еквівалентний опір знайдемо як опір паралельного сполучення резисторів R_1 та R_2 , виключивши (“закоротивши”) джерела ЕРС:

$$R_{екв} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{150}{25} = 6 \text{ Ом.}$$

Еквівалентне значення ЕРС знайдемо за законом Ома. Струм у замкнутому колі, складеному з віток 1 і 2, має напрям більшої ЕРС і становить

$$I = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} = \frac{15 - 10}{25} = 0,2 \text{ А.}$$

ЕРС еквівалентного генератора дорівнює напрузі між вузлами a та b і становить:

$$U_{ab} = E_{екв} = U_{R2} + E_2 = IR_2 + E_2 = 0,2 \cdot 10 + 10 = 12 \text{ В,}$$

або, що дає такий самий результат,

$$E_{екв} = -U_{R1} + E_1 = -3 + 15 = 12 \text{ В.}$$

Приклад 7.2. Для схеми, зображеної на рис. 7.3, a , задані ЕРС $E_1 = 12 \text{ В}$, $E_2 = 48 \text{ В}$ та опори $R_1 = 3 \text{ Ом}$, $R_2 = 6 \text{ Ом}$. Знайти струм у вітці з опором R_3 , якщо його величина становить:

- 1) 10 Ом;
- 2) 6 Ом;
- 3) 4 Ом.

Розв'язання. Кола такого типу найзручніше аналізувати



методом еквівалентного генератора. “Відключимо” вітку з резистором R_3 і знайдемо ЕРС $E_{екв}$ еквівалентного двополюсника (рис. 7.3, б) методом двох вузлів (див. приклад 10.6):

$$E_{екв} = U_{ab} = \frac{E_1 G_1 + E_2 G_2}{G_1 + G_2} = \frac{12 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + 48 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)}{1/3 + 1/6} = 24 \text{ В.}$$

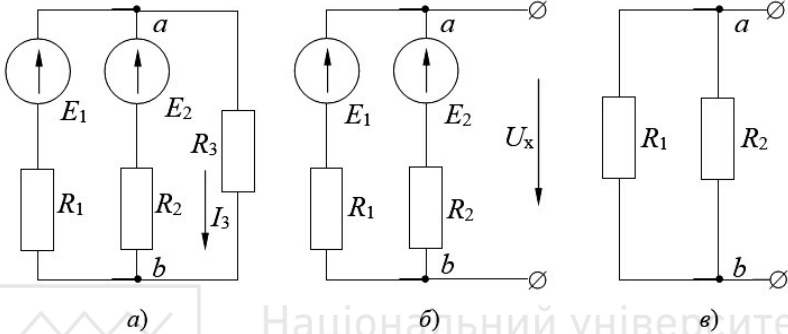


Рис. 7.3. Електричні схеми до прикладу 7.2

Внутрішній опір еквівалентного генератора (опір між вузлами a і b при виключених ЕРС E_1 і E_2 , рис. 7.3, в становить:

$$R_{екв} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} = 2 \text{ Ом.}$$

Сила струму у вітці 3 становить:

$$I = \frac{E_{екв}}{R_{екв} + R_3};$$

- у випадку 1: $I_3 = 24/12 = 2 \text{ А};$

- у випадку 2: $I_3 = 24/8 = 3 \text{ А};$

- у випадку 3: $I_3 = 24/6 = 4 \text{ А.}$

Приклад 7.3. Знайти струми у вітках кола з параметрами $E_1 = 100 \text{ В}; E_3 = 200 \text{ В}; R_1 = R_2 = R_3 = 50 \text{ Ом}; J = 10 \text{ А.}$

Розв’язання. ЕРС еквівалентного генератора дорівнює напрузі між вузлами 0 та 1, яку знайдемо як $U_{10} = E_1 - I_1 R_1$. Для джерела ЕРС E_1 при відключеній вітці 3 (рис. 7.4) коло ро-



зірване (внутрішній опір генератора струму дорівнює безкінечності). Тому $I_1 = -J$; $I_1 \cdot R_1 = -J \cdot R_1 = -500 \text{ В}$. Отже, $E_{екв} = U_{10} = 100 + 500 = 600 \text{ В}$. Внутрішній опір еквівалентного генератора $R_{екв} = R_1 = 50 \text{ Ом}$.

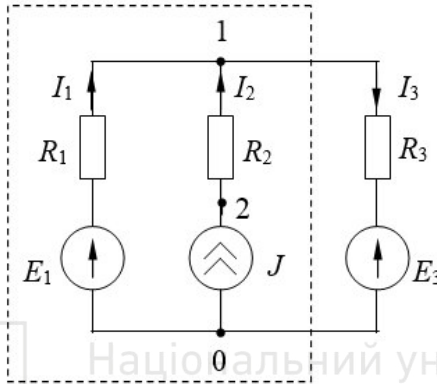


Рис. 7.4. Електрична схема до прикладу 7.3

Струм у вітці 3

$$I_3 = \frac{E_{екв} - E_3}{R_{екв} + R_3} = \frac{600 - 200}{100} = 4 \text{ А}.$$

Тому що $I_2 = J = 10 \text{ А}$, то $I_1 = I_3 - I_2 = -6 \text{ А}$.

8. ДРУГИЙ ЗАКОН КІРХГОФА. ЗАСТОСУВАННЯ ЗАКОНІВ КІРХГОФА ДЛЯ РОЗРАХУНКУ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

Другий закон Кірхгофа можна сформулювати таким чином. *Алгебраїчна сума спадів напруг в будь-якому замкнутому контурі дорівнює алгебраїчній сумі ЕРС цього контуру:*

$$\sum IR = \sum E.$$

Спад напруги IR беруть із знаком “+”, якщо напрям струму на резисторі збігається з напрямом обходу контуру, і зі знаком “-”, якщо ці напрями не збігаються. Аналогічного правила дотримуються і щодо знаків ЕРС – із знаком “+” беруть ЕРС, напрям якої збігається з напрямом обходу контуру, і навпаки.



Другий закон Кірхгофа разом з першим законом (розділ 1) виконуються для будь-яких електричних кіл (лінійних і нелінійних) при будь-якому характері зміни в часі струмів і напруг. Система рівнянь, складених за першим та другим законами Кірхгофа, дозволяє визначити струми і напруги в електричних колах будь-якого рівня складності. Але перш ніж приступити до складання такої системи рівнянь треба переконавшись у відсутності інших методів, застосування яких вимагатиме меншого об'єму чи складності обчислювальної роботи.

При застосуванні законів Кірхгофа для розрахунку електричних кіл дотримуються таких правил.

1. Довільно позначають напрями струмів у вітках і так само довільно вибирають напрями обходу контурів.

2. Записують незалежні рівняння за першим законом Кірхгофа. Число їх становить $q - 1$, де q – кількість вузлів.

3. Записують необхідну кількість незалежних рівнянь за другим законом Кірхгофа. Ця кількість становить $p - (q - 1)$, де p – кількість невідомих струмів у вітках кола. Незалежними будуть рівняння, записані для так званих незалежних контурів, тобто такого набору контурів, при якому кожен контур відрізняється від інших хоча б однією віткою з невідомим струмом в ній.

Слід зазначити, що для кіл, у вітках яких діють джерела струму, струми в цих вітках фактично задані струмами джерел і кількість рівнянь системи зменшується на кількість таких віток.

Далі за одним з відомих способів розв'язують систему рівнянь і знаходять невідомі струми. Якщо значення струму одержано із знаком мінус, даний струм має напрям, протилежний до вибраного довільно відповідно до п.1.

Приклад 8.1. На рис. 8.1 зображені скелетні схеми двох кіл. Для кожного з них визначити:

- 1) кількість вузлів і кількість незалежних вузлів;
- 2) кількість віток і кількість невідомих струмів;
- 3) кількість контурів і кількість незалежних контурів;
- 4) кількість рівнянь, які потрібно записати за першим і другим законами Кірхгофа для знаходження невідомих струмів.

Розв'язання.

1. Коло рис. 8.1, a має три вузли b, d, f (з них будь-які



два – незалежні) і шість віток між цими вузлами bcd , def , fab , приєднані паралельно до віток bd , df , fb відповідно. Очевидно, що кількість невідомих струмів в загальному випадку дорівнює кількості віток (в даному випадку – шести).

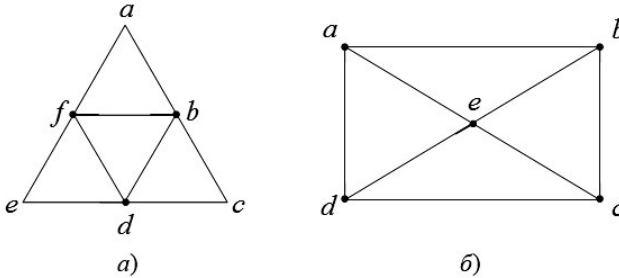


Рис. 8.1. Скелетні схеми електричних кіл до прикладу 8.1

Розглядуване коло має одинадцять контурів:

$abfa$; $abdfa$; $abcdfa$;
 $bcdb$; $fbdef$; $bcdefb$;
 $defd$; $fbcdf$; $abdefa$;
 $fbdf$; $abcdefa$,

з яких будь-які чотири – незалежні.

Отже, для знаходження невідомих струмів у вітках розглядуваного кола в загальному випадку необхідно записати систему з шести рівнянь, з них два – за першим законом Кірхгофа, а решту чотири – за другим законом Кірхгофа.

2. Коло рис. 8.1, б має п'ять вузлів, вісім віток, тринадцять контурів. Число невідомих струмів – вісім. Отже, кількість рівнянь системи становить вісім, з них чотири необхідно записати за першим законом Кірхгофа, а чотири – за другим.

Якщо у вітках кола a чи b діють джерела струмів, струми в цих вітках можна вважати відомими і кількість рівнянь системи зменшується на кількість таких віток.

Приклад 8.2. Скласти систему рівнянь за законами Кірхгофа для знаходження невідомих струмів у колі, схема якого приведена на рис. 8.2.

Розв'язання. В даному колі потрібно знайти шість невідомих струмів. Довільно виберемо напрями струмів у вітках, наприклад так, як вказано на рис. 8.2. За першим законом Кірхго-



фа запишемо три рівняння для вузлів 1, 2 та 3:

$$\begin{aligned} I_{12} - I_{31} - I_{10} &= 0; \\ -I_{12} + I_{23} + I_{20} &= 0; \\ I_{31} - I_{23} - I_{30} &= 0. \end{aligned}$$

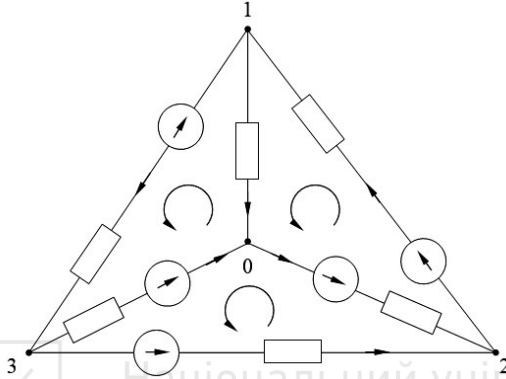


Рис. 8.2. Електрична схема до прикладу 8.2

Решту необхідних рівнянь (три) запишемо за другим законом Кірхгофа. Вибираємо три незалежні контури у вигляді комірок 1201, 2302, 3103; напрям обходу всіх контурів – проти ходу годинникової стрілки, і запишемо:

$$\begin{aligned} I_{12}R_{12} + I_{20}R_{20} + I_{10}R_{10} &= E_{12} + E_{20}; \\ I_{23}R_{23} - I_{20}R_{20} - I_{30}R_{30} &= E_{23} - E_{20} - E_{30}; \\ I_{30}R_{30} + I_{31}R_{31} - I_{10}R_{10} &= E_{30} - E_{31}. \end{aligned}$$

Приклад 8.3. Визначити струм у вітках кола (рис. 8.3), якщо параметри його елементів мають такі значення:

$$\begin{aligned} E_1 &= 10 \text{ В}, & E_3 &= 11 \text{ В}, & E_4 &= 8 \text{ В}; \\ R_{ен1} &= 1 \text{ Ом}, & R_{ен3} &= 1 \text{ Ом}, & R_{ен4} &= 0,2 \text{ Ом}; \\ R_1 &= 9 \text{ Ом}, & R_2 &= 10 \text{ Ом}, & R_4 &= 2,8 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Розв'язання. З метою зменшення кількості рівнянь системи спершу дещо спростимо схему кола. Між точками a і a' не включені резистор чи джерело ЕРС, отже, їх потенціали однакові і їх можна з'єднати в спільний вузол. Аналогічно з'єднуються точки b і b' . Таким чином, схема має два вузли, між якими включені чотири вітки, а число невідомих струмів становить



чотири. Вибрані додатні напрями струмів показані на схемі.

За першим законом Кірхгофа можна скласти $(q - 1)$ рівнянь, де q – кількість вузлів. Для складання незалежних рівнянь за другим законом Кірхгофа дотримуємося правила: кожний наступний контур має містити хоча б одну нову вітку.

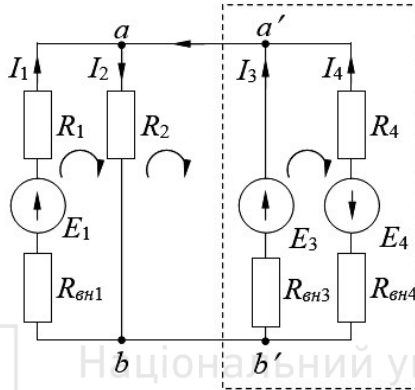


Рис. 8.3. Електрична схема до прикладу 8.3

Складемо рівняння за першим законом Кірхгофа для вузла a :

$$-I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0.$$

Приймаючи напрями обходу контурів за напрямком ходу годинникової стрілки, отримуємо:

$$\mathcal{E}_{\text{вн1}} + R_1 \overset{\curvearrowright}{I_1} + R_2 I_2 = E_1 \quad \text{– для контуру 1}$$

$$-R_2 I_2 - R_{\text{вн3}} I_3 = -E_3 \quad \text{– для контуру 2}$$

$$R_{\text{вн3}} I_3 - \mathcal{E}_{\text{вн4}} + R_4 \overset{\curvearrowright}{I_4} = E_3 + E_4 \quad \text{– для контуру 3}$$

В отриману систему рівнянь підставимо числові значення ЕРС і опорів:

$$I_2 - I_1 - I_3 - I_4 = 0 ; \quad (8.1)$$

$$10I_1 + 10I_2 = 10 ; \quad (8.2)$$

$$-10I_2 - I_3 = -11 ; \quad (8.3)$$

$$I_3 - 3I_4 = 19 . \quad (8.4)$$

Розв'яжемо систему рівнянь методом підстановки. З рівняння (8.2) знаходимо



$$I_2 = \frac{10 - 10I_1}{10} = 1 - I_1,$$

з рівняння (8.3) –

$$I_3 = 11 - 10I_2 = 1 + 10I_1,$$

а з рівняння (8.4) –

$$I_4 = \frac{I_3 - 19}{3} = \frac{10}{3}I_1 - 6.$$

Підставивши значення I_2 , I_3 , I_4 у (8.1), отримаємо:

$$\left(-I_1\right) + I_1 - \left(+10I_1\right) + \left(\frac{10}{3}I_1 - 6\right) = 0,$$

звідки:

$$I_1 = \frac{9}{23} \text{ A}; \quad I_2 = \frac{14}{23} \text{ A}; \quad I_3 = \frac{113}{23} \text{ A}; \quad I_4 = -\frac{108}{23} \text{ A}.$$

Тепер повернемося до вихідної схеми і знайдемо струми у вітках aa' та bb' . Знаючи струми I_1 та I_2 , можна за першим законом Кірхгофа знайти струм у вітці aa' :

$$I = I_2 - I_1 = \frac{5}{23} \text{ A}.$$

Очевидно, що струм у вітці bb' направлений від b до b' і за величиною дорівнює I (алгебраїчна сума струмів, що входять до уявного контуру, позначеного на рис. 8.3 штриховою лінією, дорівнює нулю).

9. МЕТОД КОНТУРНИХ СТРУМІВ

Цей метод базується на застосуванні другого закону Кірхгофа для так званих контурних струмів. Контурні струми можна розглядати як розрахункові складові реальних струмів.

Перед складанням рівнянь за методом контурних струмів необхідно на схемі кола вибрати незалежні контури (краще всього у вигляді суміжних комірок), вказати напрями невідомих реальних струмів і напрями контурних струмів. Щоб відрізнити реальні і контурні струми на схемах і в рівняннях, останні позначають інакше ніж реальні, наприклад, римськими цифрами



або подвійним цифровим індексом. Якщо напрями всіх контурних струмів однакові (наприклад, лише за або лише проти ходу годинникової стрілки), то спади напруг від власних контурних струмів будуть мати знак “+”, а від суміжних – знак “-”.

Зокрема, для кола (рис. 9.1) система рівнянь за методом контурних струмів має вигляд:

- для першого контуру $I_1(R_1 + R_2) - I_{II}R_2 = E_1$;
- для другого контуру $I_{II}(R_2 + R_3 + R_4) - I_1R_2 - I_{III}R_4 = E_3 + E_4$;
- для третього контуру $I_{III}(R_4 + R_5) - I_{II}R_4 = -E_4 - E_5$.

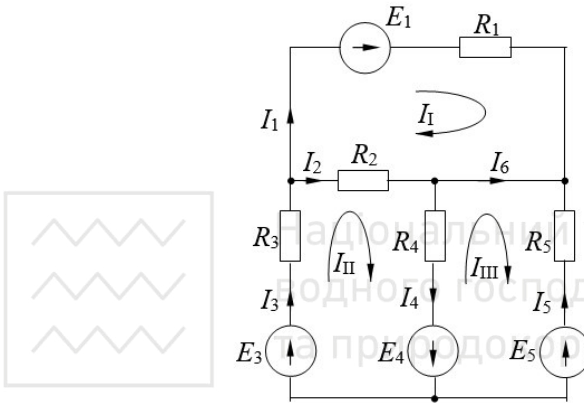


Рис. 9.1. Електрична схема триконтурного кола

В першому з цих рівнянь сума $(R_1 + R_2)$ – власний опір першого контуру, в другому $(R_2 + R_3 + R_4)$ – власний опір другого контуру, в третьому $(R_4 + R_5)$ – власний опір третього контуру. Опір R_2 в першому рівнянні – спільний (суміжний, взаємний) для першого і другого контурів кола; протікання струму I_{II} викликає спад напруги, протилежний спаду напруги від протікання власного струму I_1 , тому цей спад напруги $I_{II}R_2$ береться зі знаком мінус. Те ж саме можна сказати і про спади напруг на інших спільних для двох контурів резисторах.

Розв’язавши систему рівнянь щодо контурних струмів, одержимо їх значення. Реальні струми знаходять як алгебраїчну суму контурних струмів в кожній з віток кола (або ж за першим законом Кірхгофа для відповідних вузлів):

$$I_1 = I_I; \quad I_2 = I_{II} - I_I = I_3 - I_I;$$



$$\begin{aligned} I_3 &= I_{II}; & I_4 &= I_{II} - I_{III} = I_2 - I_6; \\ I_5 &= -I_{III}; & I_6 &= I_{III} - I_1 = -I_1 - I_5. \end{aligned}$$

У випадку наявності в колі джерел струму незалежні контури вибирають так, щоб кожна вітка з джерелом струму входила в один з незалежних контурів; контурний струм такого контуру дорівнює струму джерела, тобто вважається відомим. В цьому випадку число рівнянь, складених за методом контурних струмів, дорівнює числу незалежних контурів мінус число віток з джерелами струму.

Приклад 9.1. Визначити струми у вітках кола (рис. 9.2), в якому $E = 10$ В, $J = 10$ А, $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 3$ Ом.

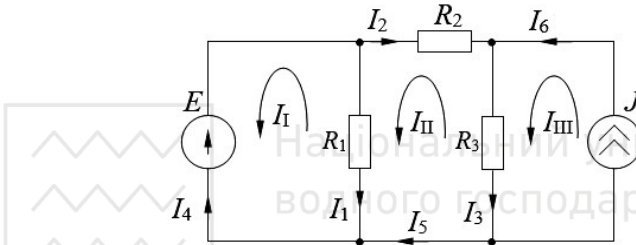


Рис. 9.2. Електрична схема до прикладу 9.1

Розв'язання. Вибираємо напрями контурних струмів в комірках проти руху годинникової стрілки. Довільно позначаємо напрями реальних струмів. Враховуючи, що контурний струм $I_{III} = J$ відомий з умови, запишемо систему з двох рівнянь:

$$\begin{aligned} I_I R_I - I_{II} R_I &= -E; \\ -I_I R_I + I_{II} (R_I + R_2 + R_3) &= J R_3 = 0. \end{aligned}$$

Перенісши доданок $-J R_3$ в праву частину і підставивши числові значення, одержуємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} I_I - I_{II} &= -10; \\ -I_I + 6I_{II} &= 30. \end{aligned}$$

Розв'язавши її, знаходимо $I_{II} = 4$ А, $I_I = -6$ А.

Реальні струми в колі:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{II} - I_I = 10 \text{ А}; & I_2 &= -I_{II} = -4 \text{ А}; \\ I_3 &= I_{III} - I_{II} = 6 \text{ А}; & I_4 &= -I_I = 6 \text{ А}; \\ I_5 &= -I_{II} = -4 \text{ А}; & I_6 &= J = 10 \text{ А}. \end{aligned}$$



Приклад 9.2. Знайти струм у вітках кола (рис. 9.3, а) за методом контурних струмів. Параметри елементів кола $E_{15} = 1$ В, $E_{12} = 2$ В, $E_{01} = 3$ В, $E_{23} = 4$ В, $J = 1$ А; опори всіх резисторів $R = 3$ Ом.

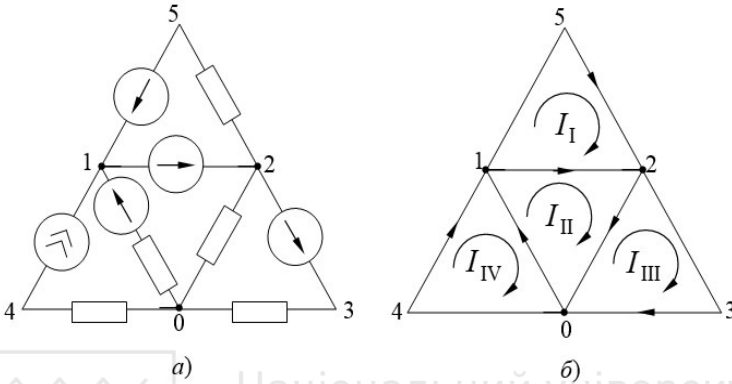


Рис. 9.3. Електричні схеми до прикладу 9.2

Розв'язання. В колі можна виділити чотири незалежні контури (рис. 9.3, б). Контурний струм у контурі IV відомий за умовою і становить $I_{IV} = J = 1$ А. Тому достатньо скласти 3 рівняння за методом контурних струмів:

$$\text{контур I - } I_I R_{52} = -E_{15} - E_{12};$$

$$\text{контур II - } I_{II} R_{20} + R_{01} \overset{I_{III}}{\curvearrowright} I_{III} R_{20} - J R_{01} = E_{12} + E_{01};$$

$$\text{контур III - } I_{III} R_{30} + R_{20} \overset{I_{II}}{\curvearrowright} I_{II} R_{20} = E_{23}.$$

Підставивши числові значення, отримаємо $3I_I = -3$, звідки $I_I = -1$ А;

$$6I_{II} - 3I_{III} = 8; \quad -3I_{II} + 6I_{III} = 4.$$

Помноживши третє рівняння на 2 і додавши до другого, маємо:

$$9I_{III} = 16, \quad \text{звідки } I_{III} = \frac{16}{9} \text{ А, а } I_{II} = \frac{20}{9} \text{ А.}$$

Співставляючи напрями реальних і контурних струмів, запишемо значення реальних струмів:

$$I_{52} = I_I = -1 \text{ А; } \quad I_{41} = J = 1 \text{ А;}$$



$$I_{12} = I_{II} - I_I = \frac{20}{9} + \frac{9}{9} = \frac{29}{9} \text{ A}; \quad I_{30} = I_{III} = \frac{16}{9} \text{ A};$$

$$I_{20} = I_{II} - I_{III} = \frac{20}{9} - \frac{16}{9} = \frac{4}{9} \text{ A};$$

$$I_{10} = I_{II} - J = \frac{20}{9} - \frac{9}{9} = \frac{11}{9} \text{ A}.$$

10. МЕТОД ВУЗЛОВИХ ПОТЕНЦІАЛІВ. МЕТОД ДВОХ ВУЗЛІВ

Метод вузлових потенціалів, як і метод контурних струмів, передбачає використання рівнянь, записаних за законами Кірхгофа. Але, на відміну від методу контурних струмів, спершу розв'язують систему з $q - 1$ рівнянь (q – кількість вузлів кола), що виражають перший закон Кірхгофа. Це дозволяє знайти потенціали вузлів. За відомою різницею потенціалів між вузлами за законом Ома можна знайти струми у всіх вітках кола. Метод вузлових потенціалів, як і метод контурних струмів, вимагає менших обчислювальних затрат, ніж метод рівнянь Кірхгофа.

Система рівнянь, записаних за методом вузлових потенціалів для кожного з $q - 1$ незалежних вузлів кола, має вигляд:

$$\text{- для вузла 1} \quad \varphi_1 G_{11} - \sum_{\substack{m \\ m \neq 1}} \varphi_m G_{1m} = \sum_1 EG;$$

$$\text{- для вузла 2} \quad \varphi_2 G_{22} - \sum_{\substack{m \\ m \neq 2}} \varphi_m G_{2m} = \sum_2 EG;$$

... ..

$$\text{- для вузла } s \quad \varphi_s G_{ss} - \sum_{\substack{m \\ m \neq s}} \varphi_m G_{sm} = \sum_s EG,$$

де $\varphi_1 \dots \varphi_s$ – потенціали вузлів;

G_{mm} – власна провідність вузла m , яка дорівнює сумі провідностей всіх віток, що утворюють вузол m ;

$G_{mn} = G_{nm}$ – взаємна провідність вузлів m і n , тобто



сумарна провідність віток, які безпосередньо зв'язують вузли m і n (не через інші вузли);

$\sum_t EG$ – алгебраїчна сума добутків ЕРС, що діють у віт-

ках, які утворюють вузол m , на провідності цих віток. Добутки беруть зі знаком плюс, коли ЕРС направлена до вузла m , і мінус, коли ЕРС направлена від вузла m .

Дані рівняння фактично є однією з форм запису першого закону Кірхгофа для відповідних вузлів.

У випадках наявності в колі джерел струму останні враховують шляхом введення в праву частину вищенаведених рівнянь відповідних доданків $\sum J$. Знак плюс беруть для струмів, що входять у вузол, а знак мінус для струмів, які виходять з вузла (приклад 10.2).

Якщо коло має всього два вузли, потенціал одного з них прирівнюють до нуля, і тоді система рівнянь за методом вузлових потенціалів зводиться до одного рівняння для потенціалу іншого вузла

$$\varphi \sum G = \sum EG + \sum J,$$

з якого знаходять потенціал цього вузла

$$\varphi = \frac{\sum EG + \sum J}{\sum G}. \quad (10.1)$$

Ця формула виражає сутність методу двох вузлів.

Приклад 10.1. Записати систему рівнянь за методом вузлових потенціалів для кола, схема якого наведена на рис. 10.1.

Розв'язання. Потенціал вузла 0 прийемо рівним нулю: $\varphi_0 = 0$. Для визначення потенціалів вузлів 1 і 2 запишемо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \varphi_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_6} \right) - \varphi_2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) &= \frac{E_1}{R_1} - \frac{E_6}{R_6}; \\ \varphi_2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) - \varphi_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) &= \frac{E_5}{R_5} - \frac{E_1}{R_1} \end{aligned}$$

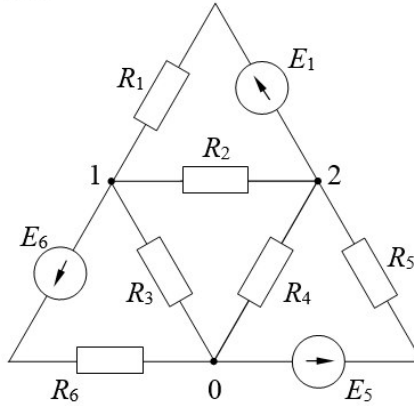


Рис. 10.1. Електрична схема до прикладу 10.1

Приклад 10.2. Записати систему рівнянь за методом вузлових потенціалів для кола, схема якого наведена на рис. 10.2.

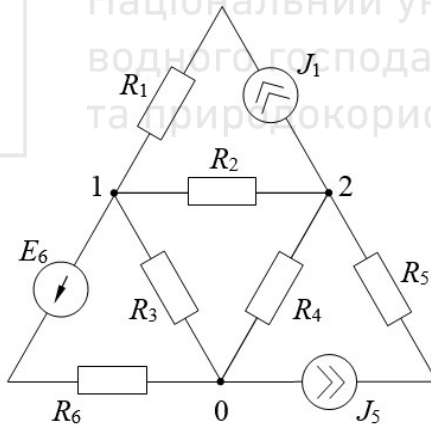


Рис. 10.2. Електрична схема до прикладу 10.2

Розв'язання. Приймаємо $\varphi_0 = 0$ і запишемо рівняння:

- для вузла 1
$$\varphi_1 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_6} \right) - \varphi_2 \frac{1}{R_2} = -\frac{E_6}{R_6} + J_1;$$

- для вузла 2
$$\varphi_2 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right) - \varphi_1 \frac{1}{R_2} = J_5 - J_1.$$



(провідність віток з джерелами струму дорівнює нулю).

Приклад 10.3. Довести, що рівняння, складені за методом вузлових потенціалів, фактично є рівняннями, складеними за першим законом Кірхгофа.

Доведення. Розглянемо будь-яке коло, наприклад, зображене на рис. 10.3. Запишемо рівняння за першим законом Кірхгофа для струмів, що входять до вузла 1:

$$I_{41} - I_{12} - I_{10} = 0. \quad (10.2)$$

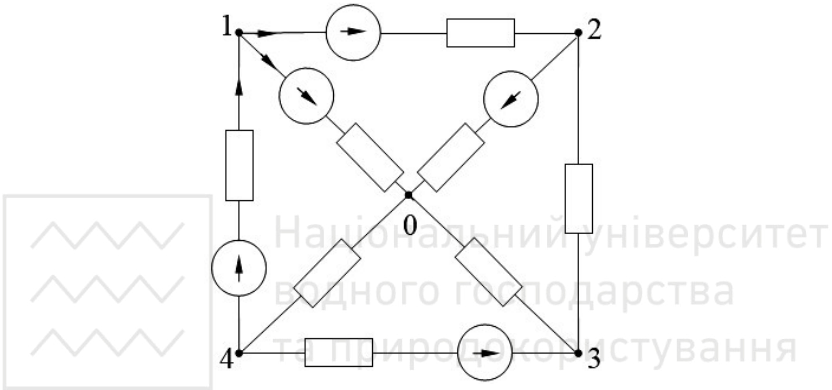


Рис. 10.3. Електрична схема до прикладу 10.3

Відповідно до закону Ома:

$$I_{41} = \frac{\varphi_4 - \varphi_1 + E_{41}}{R_{41}}; \quad I_{12} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E_{12}}{R_{12}};$$

$$I_{10} = \frac{\varphi_1 - \varphi_0 + E_{10}}{R_{10}}.$$

Підставивши ці значення в формулу (10.2), отримуємо:

$$\frac{\varphi_4}{R_{41}} - \frac{\varphi_1}{R_{41}} - \frac{\varphi_1}{R_{12}} + \frac{\varphi_2}{R_{12}} - \frac{\varphi_1}{R_{10}} + \frac{\varphi_0}{R_{10}} = \frac{E_{12}}{R_{12}} + \frac{E_{10}}{R_{10}} - \frac{E_{41}}{R_{41}}.$$

Згрупувавши відповідним чином доданки і враховуючи, що $\varphi_0 = 0$, перепишемо рівняння у вигляді

$$\varphi_1 \left(\frac{1}{R_{41}} + \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{10}} \right) - \frac{\varphi_2}{R_{12}} - \frac{\varphi_4}{R_{41}} = -\frac{E_{10}}{R_{10}} - \frac{E_{12}}{R_{12}} + \frac{E_{41}}{R_{41}}.$$



Отримане рівняння збігається з рівнянням, яке слід було записати для вузла 1 за методом вузлових потенціалів.

Аналогічні результати одержуємо і для вузлів 2, 3, 4.

Отже, рівняння, записані за методом вузлових потенціалів, – не що інше, як рівняння, записані за першим законом Кірхгофа для відповідних вузлів.

Приклад 10.4. Знайти потенціали вузлів 1, 2, 3, 4 кола (рис. 10.4) відносно вузла 0 за методом вузлових потенціалів, якщо $E_1 = 1 \text{ В}$, $E_2 = 4 \text{ В}$.

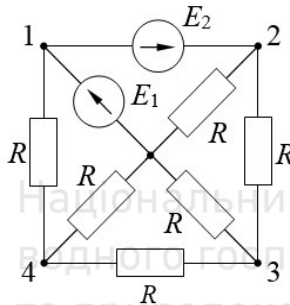


Рис. 10.4. Електрична схема до прикладу 10.4

Розв'язання. Потенціали вузлів 1, 2, 3, 4 будемо визначати відносно вузла 0, потенціал якого приймемо за 0: $\varphi_0 = 0$.

З аналізу схеми потенціал вузла 1 становить:

$$\varphi_1 = \varphi_0 + E_1 = 0 + 1 = 1 \text{ В},$$

а потенціал вузла 2:

$$\varphi_2 = \varphi_1 + E_2 = 1 + 4 = 5 \text{ В}.$$

Потенціали решти вузлів знайдемо за методом вузлових потенціалів. Для цього складемо рівняння для вузлів 3 та 4 і розв'яжемо отриману систему рівнянь відносно φ_3 та φ_4 :

$$\begin{cases} \varphi_3 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) - \varphi_4 \frac{1}{R} - \varphi_2 \frac{1}{R} = 0; \\ \varphi_4 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) - \varphi_3 \frac{1}{R} - \varphi_1 \frac{1}{R} = 0; \end{cases}$$



$$\begin{cases} \varphi_3 \left(\frac{3}{R} \right) - \varphi_4 \frac{1}{R} = \varphi_2 \frac{1}{R}; \\ \varphi_4 \left(\frac{3}{R} \right) - \varphi_3 \frac{1}{R} = \varphi_1 \frac{1}{R}. \end{cases}$$

Підставивши значення φ_1 та φ_2 і домноживши всі рівняння на R , одержимо:

$$\begin{cases} 3\varphi_3 - \varphi_4 = \varphi_2 = 5; \\ 3\varphi_4 - \varphi_3 = \varphi_1 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi_3 = 3\varphi_4 - 1; \\ 3(3\varphi_4 - 1) - \varphi_4 = 5; \end{cases}$$
$$8\varphi_4 = 5 + 3.$$

З останнього рівняння визначасмо $\varphi_4 = 1$ В та $\varphi_3 = 1$ В.

Приклад 10.5. Визначити струми у вітках кола (рис. 10.5), якщо ЕРС джерел $E = 5$ В, а опори всіх резисторів $R = 5$ Ом.

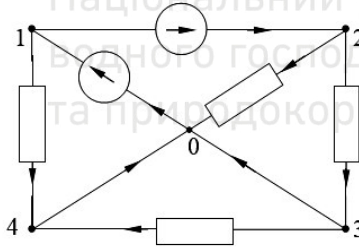


Рис. 10.5. Електрична схема до прикладу 10.5

Розв'язання. Позначимо довільно напрями струму, як показано на рис. 10.5. Прийнемо, що потенціал вузла 0 дорівнює нулю: $\varphi_0 = 0$. Опори віток 3 і 4 та відповідні спади напруг $I_3 R_3$ та $I_4 R_4$ дорівнюють нулю, тому потенціали вузлів 3 і 4 також дорівнюють нулю: $\varphi_3 = \varphi_0 = 0$; $\varphi_4 = \varphi_0 = 0$.

Згідно умови $\varphi_1 = \varphi_0 + E_1 = 5$ В, $\varphi_2 = \varphi_1 + E_{12} = 10$ В.

Знаючи потенціали всіх вузлів, можна знайти струми у вітках. За законом Ома отримуємо такі результати:

$$I_{14} = \frac{\varphi_1 - \varphi_4}{R_{14}} = \frac{5}{5} = 1 \text{ А}; \quad I_{23} = \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{R_{23}} = \frac{10}{5} = 2 \text{ А};$$



$$I_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_0}{R_2} = \frac{10}{5} = 2 \text{ A}; \quad I_{34} = \frac{\varphi_3 - \varphi_4}{R_{34}} = 0 \text{ A}.$$

За першим законом Кірхгофа

$$I_{12} = I_2 + I_{23} = 4 \text{ A}; \quad I_4 = I_{14} + I_{34} = 1 \text{ A};$$

$$I_1 = I_{12} + I_{14} = 5 \text{ A}; \quad I_3 = I_{23} - I_{34} = 2 \text{ A}.$$

З даного прикладу бачимо, що у випадках, коли опір вітки дорівнює нулю, законом Ома користуватися недоцільно (має місце невизначеність $I = \frac{U}{0}$) і для знаходження струмів у таких вітках слід використовувати перший закон Кірхгофа.

Приклад 10.6. Знайти струми у вітках кола (рис. 10.6) методом вузлових потенціалів, якщо опори всіх резисторів $R = 3 \text{ Ом}$, $E_{01} = 3 \text{ В}$, $E_{12} = 2 \text{ В}$, $E_{23} = 4 \text{ В}$, $E_{15} = 1 \text{ В}$, $J = 1 \text{ А}$.

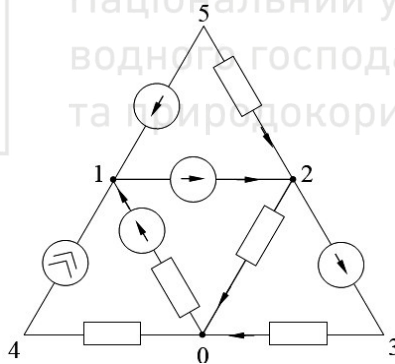


Рис. 10.6. Електрична схема до прикладу 10.6

Розв'язання. Коло має три вузли: 1, 2, 3. В даному випадку зручно прийняти рівним нулю потенціал вузла 1, тоді потенціал вузла 2 дорівнює 2 В. Отже, треба знайти потенціал вузла 0, для якого записуємо рівняння згідно даного методу:

$$\varphi_0 \left(\frac{1}{R_{01}} + \frac{1}{R_{02}} + \frac{1}{R_{03}} \right) - \varphi_2 \left(\frac{1}{R_{02}} + \frac{1}{R_{03}} \right) = -J - \frac{E_{01}}{R_{01}} + \frac{E_{23}}{R_{03}}.$$

Враховуючи, що всі резистори мають опір 3 Ом, а $\varphi_2 = 2 \text{ В}$, отримуємо



$$\varphi_0 = \frac{\frac{4}{3} - \frac{3}{3} - \frac{3}{3} + \frac{4}{3}}{\frac{3}{3}} = \frac{2}{3} \text{ В.}$$

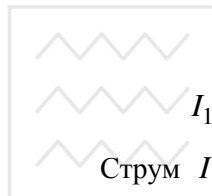
Струми у вітках знаходимо за законом Ома

$$I_{52} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 - E_{15}}{R} = \frac{-2 - 1}{3} = -1 \text{ А;}$$

$$I_{30} = \frac{\varphi_2 - \varphi_0 + E_{23}}{R} = \frac{2 - \frac{2}{3} + 4}{3} = \frac{16}{9} \text{ А;}$$

$$I_{20} = \frac{\varphi_2 - \varphi_0}{R} = \frac{2 - \frac{2}{3}}{3} = \frac{4}{9} \text{ А;}$$

$$I_{10} = \frac{\varphi_0 - \varphi_1 + E_{01}}{R} = \frac{\frac{2}{3} + 3}{3} = \frac{11}{9} \text{ А.}$$



Струм I_{12} знайдемо за першим законом Кірхгофа, наприклад, для вузла 1:

$$J + I_{10} - I_{52} - I_{12} = 0; \quad I_{12} = J + I_{10} - I_{52} = 1 + \frac{11}{9} + 1 = \frac{29}{9} \text{ А.}$$

Отримані результати збігаються з результатами розрахунку прикладу 9.2.

Приклад 10.7. Знайти струми у вітках кола (рис. 10.7) з параметрами $J = 6 \text{ А}$, $E_2 = 5 \text{ В}$, $R_1 = 3 \text{ Ом}$, $R_2 = 10 \text{ Ом}$.

Розв'язання. Скористаємось методом двох вузлів. Потенціал вузла 0 приймемо рівним нулю: $\varphi_0 = 0$, тоді потенціал вузла 1:

$$\varphi_1 = \frac{\sum EG + \sum J}{\sum G} = \frac{\frac{E_2}{R_2} + J_1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = 15 \text{ В.}$$

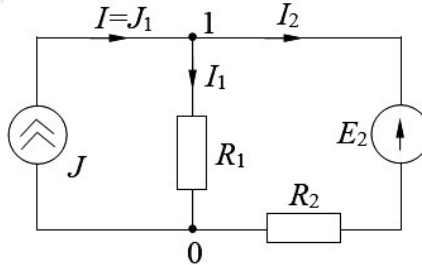


Рис. 10.7. Електрична схема до прикладу 10.7

Струми у вітках кола:

$$I = J_1; \quad I_1 = \frac{\varphi_1}{R_1} = \frac{15}{3} = 5 \text{ A}; \quad I_2 = \frac{\varphi_1 - E_2}{R_2} = \frac{10}{10} = 1 \text{ A},$$

що збігається з результатами, отриманими в прикладах 4.2 і 6.1.

11. МЕТОДИ ПЕРЕВІРКИ РЕЗУЛЬТАТІВ РОЗРАХУНКУ. ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМИ ПРО БАЛАНС ПОТУЖНОСТЕЙ

Для перевірки розрахунків електричних кіл часто їх результати підставляють в рівняння, записані за законами Кірхгофа. Але при цьому слід мати на увазі такі особливості.

1. Невиконання рівняння, записаного за першим чи другим законами Кірхгофа при підстановці в нього розрахованих величин, тобто негативний результат, однозначно свідчить про наявність помилки в розрахунках.

2. Позитивний результат, одержаний при вибірковій підстановці розрахованих величин в окремі рівняння, а не в повну систему рівнянь, записаних за законами Кірхгофа, не завжди свідчить про відсутність помилки в розрахунках.

Наприклад, якщо в результаті розрахунків були одержані завищені в 5 разів значення всіх струмів, підстановка їх значень у рівняння, записані за першим законом Кірхгофа (або за другим для контурів без джерел ЕРС), дасть позитивний результат. Можливі також ситуації, коли позитивний результат має місце при підстановці помилкових результатів у рівняння, записані за другим законом Кірхгофа для контурів з джерелами ЕРС.



3. Позитивний результат, одержаний при підстановці розрахованих величин в повну систему рівнянь, записаних за законами Кірхгофа для розглядуваного кола, свідчить про відсутність помилки в розрахунках, але не свідчить про відсутність помилок при записі самих рівнянь.

Простою, надійною і достатньою буде перевірка, що базується на теоремі про баланс потужностей в колі, яка впливає із закону збереження і перетворення енергії в електричних колах. Для випадку кіл постійного струму ця теорема формулюється так. *Сума потужностей, які виділяються на всіх резисторах кола, дорівнює алгебраїчній сумі потужностей всіх джерел кола:*

$$\sum I_k^2 R_k = \sum E_k I_k + \sum J_k U_{abk}, \quad (11.1)$$

де k – номер вітки кола.

Добутки виду EI беруться із знаком плюс, якщо напрям струму через джерело збігається з напрямом його ЕРС. Добутки виду JU_{ab} беруть із знаком плюс, якщо напрям струму J збігається з напрямком напруги U_{ab} між точками кола, до яких приєднане джерело струму.

Приклад 11.1. В результаті розрахунку кола з параметрами $E_1 = 10 \text{ В}$, $E_3 = 11 \text{ В}$, $E_4 = 8 \text{ В}$, $R_{\text{вн}1} = 1 \text{ Ом}$, $R_{\text{вн}3} = 1 \text{ Ом}$, $R_1 = 9 \text{ Ом}$, $R_{\text{вн}4} = 0,2 \text{ Ом}$, $R_2 = 10 \text{ Ом}$, $R_4 = 2,8 \text{ Ом}$ одержано такі значення струмів: $I_1 = -1,8 \text{ А}$; $I_2 = 2,8 \text{ А}$; $I_3 = 8,2 \text{ А}$; $I_4 = -3,6 \text{ А}$. Виконати перевірку розрахунків шляхом підстановки результатів у рівняння, записані за першим та другим законами Кірхгофа.

Перевірка. Тому що опір ділянки aa' дорівнює нулю, вузли a та a' можна звести в один вузол a . Те ж саме можна зробити з вузлами b та b' . Отже, коло має два вузли і три незалежних контури.

Переконаємось у виконанні першого закону Кірхгофа для вузла a :

$$I_1 + I_3 + I_4 - I_2 = -1,8 + 8,2 - 3,6 - 2,8 = 0.$$

Одержані дані свідчать про виконання першого закону



Кірхгофа для вузла a . Те ж саме можна сказати про вузол b , бо в нього входять ті ж самі струми, але з протилежним знаком.

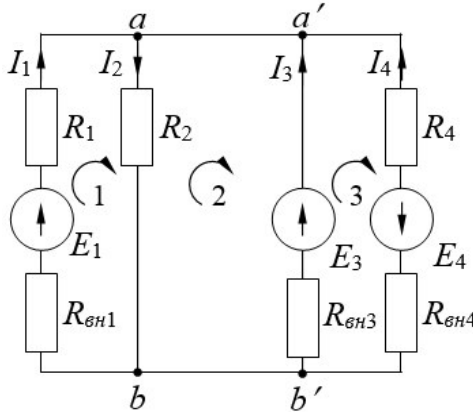


Рис. 11.1. Електрична схема до прикладу 11.1

Зробимо підстановку даних в рівняння, що виражає другий закон Кірхгофа, для контуру 1:

$$I_1(R_1 + R_{\text{вн}1}) + I_2R_2 = E_1. \quad (11.2)$$

Одержуємо позитивний результат:

$$-1,8 \cdot 10 + 2,8 \cdot 10 = 10.$$

Так само позитивний результат одержимо при підстановці значень струмів у рівняння, записане за другим законом Кірхгофа для третього контуру:

$$I_3R_{\text{вн}3} - I_4(R_{\text{вн}4} + R_4) = E_3 + E_4;$$

$$8,2 \cdot 1 + 3,6 \cdot 3 = 19.$$

Чи можна з одержаних позитивних результатів перевірки зробити висновок, що розрахунок проведено правильно?

Ні, не можна. Якщо результати розрахунку підставити в рівняння за другим законом Кірхгофа, записаним для контуру 2, одержимо негативний результат:

$$I_2R_2 + I_3R_{\text{вн}3} = E_3;$$

$$2,8 \cdot 10 + 8,2 \cdot 1 \neq 11.$$

Насправді правильним є результат розрахунку, отриманий в прикладі 8.3.



Отже, при перевірці з використанням законів Кірхгофа лише негативний результат дає достовірну інформацію про помилку в розрахунках. Позитивний результат при вибірковій підстановці в рівняння за законами Кірхгофа не завжди свідчить про відсутність помилок в розрахунках.

Приклад 11.2. Зробити перевірку розрахунку прикладу 8.3 шляхом складання балансу потужностей.

Перевірка. Вираз для балансу потужностей в колі рис. 8.3 має вигляд

$$E_1 I_1 + E_3 I_3 - E_4 I_4 = I_1^2 R_{\text{вн}1} + R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_{\text{вн}3} + I_4^2 R_{\text{вн}4} + R_4$$

Підставивши значення ЕРС і розраховані значення струмів, отримаємо:

$$\frac{90}{23} + \frac{1243}{23} + \frac{864}{23} = \frac{810 + 1960 + 12769 + 34992}{23 \cdot 23};$$

$$50531 = 50531.$$

Баланс потужностей виконується. Отже, розрахунок проведено правильно.

Приклад 11.3. Виконати перевірку результатів розрахунку за прикладом 9.1.

Перевірка. Рівняння балансу потужностей (11.1)

$$\sum I_k^2 R_k = \sum E_k I_k + \sum U_{abk} J_k$$

для кола за схемою рис. 9.1 має вигляд

$$I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 = EI_4 + U_3 J.$$

Підставимо дані з умови прикладу і результатів розрахунку. Напругу U_3 знайдемо як $U_3 = I_3 R_3 = 6 \cdot 3 = 18 \text{ В}$. Тоді:

$$100 \cdot 1 + 16 \cdot 2 + 36 \cdot 3 = 10 \cdot 6 + 18 \cdot 10;$$

$$240 = 240.$$

Баланс потужностей виконується; отже, розрахунки виконано без помилки.

Приклад 11.4. Перевірити розрахунки прикладу 9.2 шляхом складання балансу потужностей.

Розв'язання. Загальна потужність, яка виділяється на всіх приймачах кола – резисторах – відповідно до закону Ленца-



Джоуля становить

$$\sum P = I_{52}^2 + I_{30}^2 + I_{20}^2 + I_{10}^2 + J^2 R$$

(в розглянутому колі опори всіх приймачів однакові).

Підставивши числові значення величин, отримаємо:

$$\begin{aligned} \sum P &= \left(1 + \frac{256}{81} + \frac{16}{81} + \frac{121}{81} + 1\right) \cdot 3 = \\ &= \frac{81 + 256 + 16 + 121 + 81}{27} = 20, \text{ Вт.} \end{aligned}$$

Знайдемо потужність, що розвивається джерелами кола:

$$\sum P_{дж} = -E_{51}I_{52} + E_{12}I_{12} + E_{10}I_{10} + E_{23}I_{30} + U_{14}J,$$

де U_{14} – напруга між точками, до яких підключений генератор струму. Її знайдемо, виходячи з потенціалів вузлів 1 та 0 і спаду напруги на резисторі R_{40} :

$$U_{14} = \varphi_1 + \varphi_0 + JR_{40} = 2 \frac{1}{3} B.$$

Підставивши числові значення, отримаємо:

$$\sum P_{дж} = 1 + 2 \cdot \frac{29}{9} + 3 \cdot \frac{11}{9} + 4 \cdot \frac{16}{9} + \frac{7}{3} \cdot 1 = \frac{185}{9} = 20, \text{ Вт.}$$

Баланс потужностей виконується: $\sum P = \sum P_{дж}$; отже, розрахунки виконані правильно.