Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства
та природокористування
Кафедра обчислювальної техніки

04-04-189

Методичні вказівки

до виконання самостійних робіт з дисципліни
“Теорія ймовірностей та математична статистика”

для студентів 1 курсу спеціальностей
“Комп’ютерна інженерія” і “Комп’ютерні науки”

Рекомендовано до друку
методичною комісією НУВГП
за спеціальністю
123 “Комп’ютерна інженерія”
Протокол № 11 від 24 травня 2016р.

Рівне-2016

Методичні вказівки до виконання самостійних робіт з дисципліни “Теорія ймовірностей та математична статистика” для студентів 1 курсу спеціальностей “Комп’ютерна інженерія” і “Комп’ютерні науки” /В.О. Савич, О.М. Гладка, Б.А. Замрій – Рівне: НУВГП, 2016. – 26 с.

Укладачі:
В. О. Савич, канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри обчислювальної техніки;
О. М. Гладка, канд. техн. наук, доцент кафедри комп’ютерних наук;
Б. А. Замрій, старший викладач кафедри обчислювальної техніки.

Відповідальний за випуск:
Б.Б. Круліковський, кандидат технічних наук, завідувач кафедри обчислювальної техніки.

Зміст

ВСТУП

Вивчення процесів та їх закономірностей у навколишньому середовищі часто зумовлює потребу проводити певні експерименти і спостерігати за їх наслідками. Такі експерименти називають також *випробуваннями*, а їх наслідки – *подіями*.

Події поділяються на три види: вірогідні, неможливі і випадкові.

Вірогідною називається подія, яка в разі виконання певної сукупності умов обов’язково відбудеться. Наприклад, якщо всі працівники банку мають вищу освіту, то подія «навмання вибраний працівник банку має вищу освіту» є вірогідна.

Неможливою називається подія, яка за виконання певної сукупності умов обов’язково не відбудеться. Наприклад, якщо гуртівня № 1 реалізовує тільки продукти харчування, то подія «на гуртівні № 1 придбано пральну машину» є неможлива.

Випадковою називається подія, яка за виконання певної сукупності умов може відбутися або не відбутися. Наприклад, події: «при киданні монети випаде герб», «при киданні грального кубика випаде грань із числом очок 6», «навмання вибране приватне підприємство є банкрут» – випадкові.

Предметом теорії ймовірностей у цілому є математичний аналіз випадкових подій. При цьому теорія ймовірностей не може передбачити, чи в даному експерименті (випробуванні) та або інша подія відбудеться чи ні, оскільки практично неможливо врахувати всі чинники, які можуть впливати на результати експерименту (випробування).

Однак якщо проводити велику серію експериментів в однакових умовах і спостерігати за їх наслідками (подіями), то можна помітити певні закономірності, математичним аналізом яких займається теорія ймовірностей.

Тому *предметом теорії ймовірностей* є вивчення кількісних закономірностей, які спостерігаються в масових однорідних випадкових подіях.

Знання закономірностей, які характерні для масових однорідних випадкових подій, дає можливість передбачати їх подальший розвиток. У зв'язку з цим методи теорії ймовірностей широко використовують у різних галузях природознавства, економіки, техніки і т. д.

Теорія ймовірностей є теоретичною базою для математичної статистики.

САМОСТІЙНА РОБОТА №1

Тема: Випадкові події

Теоретичні відомості

Стохастичними (*випадковими*) експериментами називаються експерименти, результати яких не можна передбачити наперед. Проте з кожним конкретним експериментом можна пов'язати поняття *сукупності* усіх можливих його результатів. Кожний із цих можливих результатів будемо називати *елементарною* (*нерозкладною*) подією, або *елементарним* результатом, а сукупність (множину) усіх таких можливих результатів – *простором елементарних подій* (*результатів*). Отже, унаслідок аналізованого випадкового експерименту обов'язково відбувається одна з елементарних подій, до того ж одночасно з нею не може відбутися жодна з інших елементарних подій (події, які мають таку властивість, називають *несумісними*).

Простір елементарних подій позначатимемо літерою Ω, а елементарну подію – літерою ω і записуватимемо: $\omega \in \Omega$.

Події A і B називаються *рівносильними*, якщо подія A є окремим випадком події B ($A \subset B$) і подія B є окремим випадком події A **(**$B \subset A$**).** Рівносильність подій A і B позначають так: $A = B$.

Сумою (об'єднанням) двох подій A і B називається подія C: $C = A \bigcup B$ ($C = A + B$), що складається з елементарних подій, які входять до складу хоча б однієї з подій A, B.

Добутком (*перетином*) двох подій A і B називається подія C: $C = A \bigcap B$ ($C = A \cdot B$), що складається з елементарних подій, які входять в обидві події A і B. Подія $A \bigcap B$ означає, що одночасно відбуваються обидві події A і B.

Різницею двох подій A і B називається подія C: $C = A \setminus B$ ($C = A - B$), що складається з елементарних подій, які входять до A і не входять до B. Подія $A \setminus B$ полягає в тому, що подія A відбулася, а подія B не відбулася.

Протилежною подією $\overline{A}$ до події A називається подія $\overline{A} = \Omega \setminus A$, тобто подія, що складається з усіх елементарних подій, які не входять до A. Отже, подія $\overline{A}$ відбувається тоді, і лише тоді, коли не відбувається подія A.

Дві події A і B називаються *несумісними*, коли їх добуток є неможлива подія, тобто коли $A \bigcap B = \varnothing$.

Декілька подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називаються *попарно несумісними* (або просто несумісними), якщо поява будь-якої з них виключає появу кожної з решти, тобто $A_i \bigcap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

Події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ утворюють *повну групу*, якщо в результаті виконання експерименту принаймні одна з цих подій обов'язково відбудеться, тобто коли $A_1 \bigcup A_2 \bigcup \ldots \bigcup A_n = \Omega$.

Класичною ймовірністю $P(A)$ події A називається відношення числа сприятливих для події A елементарних подій (наслідків) m до числа всіх рівноможливих і попарно несумісних результатів (наслідків) експерименту n, тобто $P(A) = \dfrac{m}{n}$**.**

Нехай M є n-елементною множиною.

Розміщенням із n елементів по k елементів називають будь-яку впорядковану k-елементну підмножину множини M.

Кількість розміщень з n по k елементів обчислюється за формулою:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Розміщення з n елементів по n елементів називаються переставленнями з n елементів.

Кількість розміщень з n по n елементів (кількість переставлень) обчислюється за формулою:

$$P_n = A_n^n = n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

Комбінацією з n елементів по k елементів називають будь-яку k-елементну підмножину множини M.

Кількість комбінацій з n по k елементів обчислюється за формулою:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

<u>Властивості ймовірності</u>

1. Для кожної події $A \subset \Omega$ маємо, що $0 \le P(A) \le 1$.
2. Імовірність вірогідної події дорівнює 1: $P(\Omega) = 1$.
3. Якщо події A і B несумісні $(A \cap B = \varnothing)$, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
4. Нехай A і B – випадкові події, такі, що $A \subset B$. Тоді $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.
5. Імовірність суми двох довільних подій A і B дорівнює сумі їх ймовірностей, зменшеній на ймовірність добутку цих подій, тобто: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
6. Імовірність протилежної події $\overline{A}$ до події A обчислюється за формулою: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Геометричною ймовірністю P(A) події *A* називається відношення міри $m(A)$ до міри $m(\Omega)$, тобто $P(A)=\dfrac{m(A)}{m(\Omega)}$.

Умовною ймовірністю події *A* за умови, що подія *B* відбулася, називається відношення

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)},\quad P(B)>0\,.$$

Події *A* і *B* називаються *незалежними*, якщо

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)\,.$$

Незалежність подій рівносильна тому, що ймовірність сумісної появи двох подій дорівнює добуткові їх ймовірностей. А *ймовірність появи хоча б однієї* з незалежних подій $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ дорівнює різниці між одиницею і добутком ймовірностей протилежних до них подій:

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot\ldots\cdot P(\overline{A}_n)\,.$$

Якщо $H_1, H_2, \ldots, H_n$ – повна група попарно несумісних подій і $P(H_i)>0,\ \ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$ то для будь-якої події *A* має місце рівність:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A\,|\,H_i)\,.$$

Завдання 1

1. Для фінансової перевірки підприємств міста навмання вибирають два підприємства, кожне з яких може бути або рентабельним (Р), або банкрутом (Б). Побудувати простір елементарних подій та описати події: A – хоча б одне підприємство є рентабельним, B – перше підприємство є банкрутом, $A\cup B$, $A\cap B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A}\cup B$, $A\cap\overline{B}$, $A\setminus B$.

2. Підкидають монету і гральний кубик. Описати простір елементарних подій та випадкові події: A – випаде герб і цифра 5, B – випаде число очок, що ділиться на 2. Знайти ймовірності описаних подій.

3. Побудувати простір елементарних подій у такому експерименті: кидають монету і фіксують, чи випав герб; кидання триває доти, доки герб не випаде двічі.

4. У лотереї розігрується 1000 виграшів. Серед них один виграш – 50 грн., п'ять виграшів по 20 грн., двадцять виграшів – по 10 грн. і п'ятдесят – по 5 грн. Знайти ймовірність того, що:

а) на один куплений квиток припаде виграш не менший, ніж 10 грн.;

б) куплений один квиток буде виграшним.

5. Гральний кубик кидають двічі. Яка ймовірність того, що сума очок, які випадуть, ділиться на 3?

6. В урні є 10 куль: 3 білі та 7 чорних. З урни навмання виймають одну кулю. Яка ймовірність того, що вийнята куля: а) біла; б) чорна?

7. Вкладники банку за сумами вкладів та віком мають такий процентний розподіл:

Вік	Суми вкладу		
	менше, ніж $1000	від $1000 до $5000	більше, ніж $5000
менше, ніж 30 років	5 %	15 %	8 %
від 30 до 50 років	8 %	25 %	20 %
більше, ніж 50 років	7 %	10 %	2 %

Нехай подія A – у навмання вибраного клієнта вклад більший від $5000, подія В – вік навмання вибраного клієнта не менший ніж 30 років. Визначити: $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$.

8. Маємо дев'ять однакових за розміром карток, на кожній з яких записано одну з цифр: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Навмання беруть чотири картки і розкладають в один рядок. Яка ймовірність того, що при цьому одержимо цифру 1973?

9. Знайти ймовірність того, що серед десяти цифр номера банкноти:
а) немає цифри 6 (число сприятливих наслідків – розміщення з повтореннями);
б) немає цифр 0 і 8;
в) знайдуться всі цифри (число сприятливих наслідків – перестановки).

10. Обчислити ймовірність того, що дні народження 12 осіб припадатимуть на різні місяці року (число сприятливих наслідків – перестановки, а число всіх наслідків – розміщення з повтореннями).

11. У лабораторії працюють 12 жінок і 8 чоловіків. П'ятеро осіб повинні виїхати у відрядження. Яка ймовірність того, що у відрядження поїдуть 3 жінки?

12. На семи картках написано 7 літер: А, В, И, К, Л, Н, Я. Послідовно виймають п'ять карток і розкладають у порядку виймання. Яка ймовірність того, що ці п'ять карток утворять слово ЯЛИНА.

13. На приватній фірмі працює 15 людей, причому п'ятеро з них – жінки. Керівник навмання вибирає трьох працівників для відрядження. Знайти ймовірність того, що хоча б одна з вибраних осіб виявиться жінкою (подія A).

14. У рівносторонній трикутник вписано круг. У цей трикутник кидають навмання точку. Яка ймовірність того, що вона не попаде в круг?

15. Під час бурі на ділянці між 40 і 70 кілометрами телефонної мережі розірвався провід. Яка ймовірність того, що він розірвався між 45 і 50 кілометром мережі?

16. Задано множину $\Omega = \{0 \le x \le \pi, 0 \le y \le 1\}$. Яка ймовірність того, що навмання вибрані два числа x, y $(0 \le x \le \pi, 0 \le y \le 1)$ утворять координати точки, яка належить області $A = \left\{(x, y):\ 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le x\right\}$.

17. Два судна повинні підійти до одного причалу. Появи суден – незалежні випадкові події, рівноможливі протягом доби. Знайти ймовірність того, що одному зі суден доведеться чекати звільнення причалу, якщо час стоянки першого судна – одна година, а другого – дві.

18. Дуелі в місті Обережність рідко закінчуються сумним кінцем. Річ у тому, що кожний дуелянт прибуває на місце зустрічі у випадковий момент часу між 5-ю і 6-ю годинами і, прочекавши суперника 5 хвилин, залишає місце дуелі. У разі, коли суперник прибуде протягом цих п'яти хвилин, дуель відбудеться. Знайти ймовірність того, що дуель закінчиться поєдинком?

19. У партії однотипних деталей, кількість яких дорівнює 400, контролер виявив 25 бракованих. Чому дорівнює відносна частота появи стандартних деталей?

20. При стрільбі з гвинтівки по мішені відносна частота влучення дорівнює 0,85. Знайти число влучень, якщо було здійснено 20 пострілів.

Завдання 2

1. Імовірність своєчасного складання звіту для першого економіста становить 0,9, для другого ця ймовірність є додатним розв'язком рівняння $8p^2 = 7p$. Визначити ймовірність несвоєчасного складання звіту двома економістами.

2. Радіолокаційна станція веде спостереження за двома об'єктами. За час спостереження перший об'єкт може бути загублений з ймовірністю $p_1 = 0{,}12$, другий – з імовірністю $p_2 = 0{,}14$. Знайти ймовірність того, що за час спостереження станція не виявить об'єктів.

3. По цілі стріляють трьома ракетами. Імовірність влучення кожною ракетою в ціль дорівнює 0,95. Знайти ймовірність того, що після обстрілу:

а) ціль не буде уражена; б) ціль буде знищена.

4. Екзаменаційний білет містить три питання. Ймовірності того, що студент зможе відповісти на перші два питання білета, дорівнюють по 0,9, а на третє – 0,8. Знайти ймовірність того, що студент складе іспит, якщо для цього необхідно відповісти: а) на всі питання; б) хоча б на 2 питання.

5. У бібліотеці 10 книжок з історії, 40 з математики і 30 з економіки. Читач, що зайшов у бібліотеку, замовив навмання 5 книжок. Яка ймовірність, що всі вони з одного розділу науки?

6. У групі 30 студентів і серед них 13 хлопців. За списком навмання вибирають 4 студенти. Яка ймовірність, що серед них виявиться більше, ніж 2 хлопці?

7. В ящику міститься 15 однотипних деталей. Із них 9 – стандартні, а решта браковані. Деталі виймають по одній без повернення. Так було вийнято 3 деталі. Обчислити ймовірності таких випадкових подій: A – три деталі виявляться стандартними; B – три деталі виявляться бракованими.

8. В офісі працюють сім чоловіків і три жінки. За табельними номерами навмання відібрано три особи. Знайти ймовірність того, що всі відібрані особи є чоловіками.

9. Імовірність переходу студента першого курсу на другий дорівнює 0,9, а ймовірність закінчити інститут – 0,8. З якою ймовірністю можна стверджувати, що студент другого курсу закінчить інститут?

10. Імовірність безвідмовної роботи блоку, що входить у систему, протягом заданого часу дорівнює 0,85. Для підвищення надійності встановлюють такий самий резервний блок. Знайти ймовірність безвідмовної роботи системи з урахуванням резервного блоку.

11. Перша фірма може одержати заданий прибуток з ймовірністю 0,7, для другої ця ймовірність є розв'язком рівняння $5p^2-13p+6=0$. Визначити ймовірність одержання заданого прибутку принаймні однією фірмою.

12. Оператор обслуговує три верстати, що працюють незалежно один від одного. Імовірність того, що протягом однієї години не потребуватиме уваги оператора перший верстат, дорівнює – 0,9, другий – 0,8, третій – 0,85. Знайти ймовірність того, що протягом однієї години:

а) рівно один верстат вимагатиме уваги оператора (сума всеможливих добутків подій, дві з яких беруться із запереченням);

б) рівно два верстати вимагатимуть уваги оператора;

в) хоча б один верстат вимагатиме уваги оператора (імовірність протилежної події);

г) усі верстати вимагатимуть уваги оператора.

13. Імовірність не допустити хоча б однієї помилки під час заповнення 4-х податкових декларацій становить 0,9984. Обчислити ймовірність того, що при заповненні декларації буде допущено помилку.

14. Імовірність того, що подія A з'явиться хоча б один раз при 4 незалежних випробуваннях, дорівнює 0,75. Знайти ймовірність появи події в одному випробуванні (припускається, що ймовірність появи події в усіх випробуваннях одна й та ж).

15. Два пункти сполучаються кількома лініями зв'язку і ймовірність пошкодження кожної з них протягом часу T дорівнює 0,8. Заміна будь-якої пошкодженої лінії може бути проведена лише після пошкодження всіх ліній. Скільки потрібно провести ліній, щоб імовірність функціонування зв'язку між пунктами протягом часу T була більша, ніж 0,99?

16. Імовірність того, що за одного пострілу стрілець попаде в мішень, дорівнює 0,6. Скільки пострілів повинен зробити стрілець, щоб з імовірністю не меншою, ніж 0,8, він попав у десятку хоча б один раз?

17. Відносні частоти неполадок у роботі мікропроцесора, оперативної пам'яті і решти пристроїв комп'ютера відносяться як 3 : 2 : 5. Імовірності виявлення неполадок у роботі мікропроцесора, оперативної пам'яті і решти пристроїв комп'ютера відповідно дорівнюють 0,8; 0,9 і 0,9. Знайти ймовірність виявлення неполадок у роботі комп'ютера.

18. У спеціалізованій лікарні є в середньому 50% пацієнтів із хворобою K, 30% – із хворобою L і 20% – із хворобою M. Імовірності повного вилікування кожної хвороби відповідно дорівнюють 0,7; 0,8 і 0,9. Пацієнт, що лікувався в лікарні, був виписаний здоровим. Знайти ймовірність того, що він лікувався від хвороби K.

19. 70% всіх електроламп, що є магазині, виготовлені на одному заводі, і 30% – на іншому. Продукція першого заводу містить 90%, а другого – 96% стандартних електроламп. Знайти ймовірність того, що навмання куплена в магазині електролампа виявиться стандартною.

20. Відомо, що 6% всіх чоловіків і 0,5% всіх жінок – дальтоніки. Навмання вибрана людина виявилася дальтоніком. Яка ймовірність того, що це жінка, якщо вважати, що кількість жінок і чоловіків однакова?

Завдання 3

1. Два рівносильні гравці грають у шахи (нічиї до уваги не беруться). Що ймовірніше: а) виграти дві партії з чотирьох чи три партії зі шести; б) виграти одну партію з двох чи дві партії з чотирьох; в) виграти не менше, ніж дві партії з чотирьох чи не менше, ніж три партії з п'яти?

2. Ймовірність того, що студент складе іспит з вищої математики дорівнює 0,85. Нехай є підгрупа з 10 студентів. Знайти: а) найімовірніше число студентів цієї підгрупи, які складуть іспит з вищої математики і обчислити відповідну ймовірність; б) ймовірність того, що в цій підгрупі не здадуть іспит з даного предмету хоча б два студенти.

3. Виробник детекторів брехні вимагає, щоб детектори могли чітко розрізняти правильні відповіді від неправильних на 85%. Детектор тестують використовуючи 50 запитань. Визначте:

а) найбільш ймовірне число правильних відповідей;

б) ймовірність того, що їх буде не більше, ніж 40;

в) ймовірність того, що їх буде від 35-ти до 43-ох?

4. Імовірність появи події в кожному зі 625 незалежних випробувань дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що відносна частота появи події відхилиться від її ймовірності за абсолютним значенням не більше, ніж на 0,04.

5. Імовірність появи події в кожному з незалежних випробувань дорівнює 0,2. Знайти найменшу кількість випробувань n, за якої з імовірністю 0,99 можна очікувати, що відносна частота появи події відхилиться від її ймовірності за абсолютним значенням не більше ніж на 0,04.

6. При виготовленні деталей у цеху брак становить у середньому 8%. Скільки деталей має перевірити контролер, щоб ймовірність того, що абсолютна величина відхилення відносної частоти появи стандартної деталі від ймовірності p виготовлення такої деталі не перевищувала $\varepsilon = 0{,}002$, дорівнювала 0,988.

7. Для кожного з 900 першокурсників імовірність закінчити інститут дорівнює 0,9. Знайти межі, в яких перебуватиме відносна частота кількості першокурсників, які закінчать інститут з імовірністю 0,88.

8. Пристрій складається з 800 елементів, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність відмови функціонування кожного з елементів дорівнює 0,0015. Знайти ймовірність того, що за час роботи відмовлять не більше, ніж два елементи.

9. Знайти середню кількість помилок на сторінці рукопису, якщо ймовірність того, що сторінка рукопису містить хоча б одну помилку, дорівнює 0,98.

10. Середня кількість викликів таксі, які надходять в диспетчерський пункт протягом хвилини, дорівнює три. Знайти ймовірність, що за дві хвилини надійде: а) чотири виклики; б) менше чотирьох викликів; в) не менше чотирьох викликів.

11. Ймовірність того, що посіяне зерно ячменю проросте в лабораторних умовах, у середньому дорівнює 0,9. Було посіяно 700 зернин ячменю в лабораторних умовах. Визначити найімовірніше число зернин, що проростуть із цієї кількості зернин, та обчислити ймовірність цього числа.

САМОСТІЙНА РОБОТА №2

Тема:Випадкові величини

Теоретичні відомості

Випадкова величина – це величина, яка в результаті експерименту з випадковим результатом набуває того або іншого чисельного значення.

Випадкова величина називається *дискретною*, якщо множина її можливих значень є скінченною або зліченною.

Нехай X – дискретна випадкова величина, можливими і єдино можливими значеннями якої є числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Через $p_i = P(X = x_i)$ позначимо ймовірності значень x_i величини X, тобто p_i є ймовірність того, що величина X набуває значення x_i, $p_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

Законом розподілу ймовірностей (законом розподілу) дискретної випадкової величини називається відповідність між усіма її можливими значеннями та їх ймовірностями.

Функція розподілу $F(x)$ випадкової величини X визначається рівністю: $F(x) = P(X < x) = \sum_{i: x_i < x} p_i$.

Основні закони розподілу ймовірностей.

Нехай проводиться n незалежних випробувань і випадкова величина X може набути значень $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, \ldots, x_n = n$, $p = P(A)$, $q = 1 - p$.

А. Біномний закон розподілу:

$X = x_i$	0	1	2	…	n
$p = p_i$	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	…	p^n

Б. Розподіл Пуассона:

$X = x_i$	0	1	2	…	$n-1$	n
$p = p_i$	$e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda}{1!} e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$	…	$\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$

***В.** Геометричний розподіл:*

$$P(X = m) = q^{m-1} p.$$

<u>*Чисельні характеристики випадкової величини.*</u>

Математичним сподіванням $M(X)$ дискретної випадкової величини X називається сума добутків усіх можливих її значень на їх ймовірності:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

Дисперсією $D(X)$ дискретної випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини від її математичного сподівання:

$$D(X) = M\left\{\left[X - M(X)\right]^2\right\} = \sum_{i=1}^{n}\left[x_i - M(X)\right]^2 \cdot p_i ,$$

$$D(X) = M(X^2) - \left[M(X)\right]^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - \left[M(X)\right]^2 .$$

Середнім квадратичним відхиленням дискретної випадкової величини X називають корінь квадратний із дисперсії $D(X)$ і позначають $\sigma(X)$, $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Модою дискретної випадкової величини X називається те її значення x_i, ймовірність набуття якого є найбільшою.

Медіаною дискретної випадкової величини X називається те її значення у законі розподілу, для якого сума ймовірностей можливих значень зліва і справа від нього не перевищує 0,5.

Початковим моментом s-го порядку дискретної випадкової величини X називають математичне сподівання величини X^s

$$\nu_s = M(X^s),\ \nu_s = \sum_{i=1}^{n} x_i^s \cdot p_i .$$

Центральним моментом s-го порядку дискретної випадкової величини X називається математичне сподівання величини

$$\left[X - M(X)\right]^s,\ \mu_s = M\left\{\left[X - M(X)\right]^s\right\},\ \mu_s = \sum_{i=1}^{n}\left[x_i - M(X)\right]^s \cdot p_i .$$

Асиметрією дискретної випадкової величини X називається число A, яке обчислюється за формулою: $\text{A} = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$.

Ексцесом дискретної випадкової величини X називається число E, яке обчислюється за формулою: $E = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$.

Випадкова величина X називається *неперервною*, якщо її можливі значення суцільно заповнюють деякий скінченний або нескінченний проміжок на числовій прямій.

Функцією розподілу ймовірностей (функцією розподілу) $F(x)$ випадкової величини X називається ймовірність того, що в результаті випробування вона набуде значення, меншого за число x, тобто, $F(x) = P(X < x)$ (називають ще *інтегральною функцією).*

Випадкову величину називають *неперервною*, якщо її функція розподілу є неперервна і кусково-диференційовна.

Густиною (*щільністю*) розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини X називають функцію $f(x)$, яка дорівнює першій похідній функції розподілу $F(x)$, тобто: $f(x) = F'(x)$.

Густину розподілу називають ще *диференціальною функцією* розподілу.

<u>Чисельні характеристики неперервної випадкової величини.</u>

Математичним сподіванням неперервної випадкової величини X називають число *M(X)*, яке визначається рівністю: $M(X) = \int_a^b xf(x)dx$, якщо можливі значення X зосереджені на інтервалі *(a, b)*, або $M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$, якщо можливі значення величини X містяться на всій осі Ox.

Дисперсією $D(X)$ неперервної випадкової величини X називають математичне сподівання квадрата її відхилення $X - M(X)$, тобто: $D(X) = \int_a^b [x - M(X)]^2 f(x)dx$ (або $D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx$).

Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$ неперервної випадкової величини X визначається рівністю: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Модою Мо неперервної випадкової величини X називають те її можливе значення x_0, за якого густина розподілу $f(x)$ цієї величини досягає максимуму, тобто: Мо=x_0, де $f(x_0) = \max f(x)$.

Медіаною Ме неперервної випадкової величини X називають те її можливе значення, для якого виконується рівність: $P(-\infty < X <$ Ме$) = P($Ме $< X < \infty)$. Медіану Ме визначають із рівняння: $F($Ме$) = 0{,}5$, де $F(x)$ – функція розподілу величини X.

Початковим моментом s-го порядку ν_s неперервної випадкової величини X називається математичне сподівання випадкової величини X^s, тобто: $\nu_s = \int_a^b x^s f(x)dx$, якщо розподіл випадкової величини X зосереджений в інтервалі *(a, b);* $\nu_s = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f(x)dx$, якщо розподіл випадкової величини X міститься на всій числовій осі Ох.

Центральним моментом s-го порядку μ_s неперервної випадкової величини X називається математичне сподівання випадкової величини $[X - M(X)]^s$, тобто:

$$\mu_s = \int_a^b [x - M(X)]^s f(x)dx, \text{ (або } \mu_s = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^s f(x)dx\text{)}.$$

Асиметрією неперервної випадкової величини називається число A, яке обчислюється за формулою: $A = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$.

Ексцесом неперервної випадкової величини називають число *E*, яке визначається рівністю: $E = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$.

Основні закони розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини.

А. Неперервна випадкова величина називається *рівномірно розподіленою* на проміжку [*a, b*], якщо її густина *f(x)* на цьому проміжку є стала, а поза ним дорівнює нулю, тобто:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le a; \\ \dfrac{1}{b-a}, & a \le x < b; \\ 0, & x > b, \end{cases} \quad \text{а} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b; \\ 1, & x > b. \end{cases} \; -$$

відповідна функція розподілу

Б. Неперервна випадкова величина *X* називається розподіленою за *нормальним законом*, або *нормально розподіленою,* з параметрами $-\infty < a < +\infty$ і $\sigma > 0$, якщо її густина розподілу має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \; -\infty < x < \infty, \; a = M(X).$$

В. Неперервна випадкова величина *X* називається розподіленою за *показниковим законом*, або *показниково розподіленою*, з параметром λ, якщо густина розподілу її ймовірностей $f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0,\end{cases}$ де $\lambda > 0$ – параметр розподілу. Відповідна функція розподілу має вигляд:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0,\end{cases}$$

Завдання 1

1. Під час виготовлення деталі робітникові необхідно виконати чотири незалежні між собою технологічні операції. Ймовірність того, що при виконанні першої операції робітник не допустить дефекту, рівна 0,9; для другої, третьої і четвертої операцій ця ймовірність становить відповідно 0,95; 0,75; 0,85. Побудувати закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа операції, під час виконання яких робітник не припуститься браку. Знайти функцію розподілу випадкової величини X та побудувати її графік.

2. У скриньці 6 однакових виробів, причому 4 з них пофарбовані. Зі скриньки навмання виймають 3 вироби. Записати закон розподілу випадкової величини X – кількості пофарбованих виробів серед відібраних. Знайти функцію розподілу $F(x)$ та побудувати її графік.

3. В ящику є 6 конусних і 15 циліндричних деталей. Навмання виймають 3 деталі. Написати закон розподілу випадкової величини X – кількості циліндричних деталей серед вийнятих. Знайти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

4. У лікарню за медичною допомогою звернулося 5 пацієнтів. Повне видужання від їхньої хвороби спостерігається у 60% усіх хворих. Знайти: а) закон розподілу випадкової величини X – кількості пацієнтів, що повністю одужали; б) ймовірність того, що повністю одужає не менше трьох пацієнтів; в) знайти $M(X)$ і $D(X)$.

5. Нехай X – випадкова величина, яка має біноміальний розподіл із параметрами n та p. Відомо, що $M(X)=12$, $D(X)=4$. Знайти n і p.

6. Партія, що нараховує 100 виробів, містить 10 бракованих. Зі всієї партії довільно вибирають 5 виробів з метою перевірки їх якості. Знайти математичне сподівання та дисперсію кількості бракованих виробів, що містяться в довільній такій вибірці.

7. Імовірність виготовлення стандартної деталі дорівнює 0,96. Для перевірки навмання взято 300 деталей. Скільки в середньому виявиться бракованих деталей серед перевірених? Яким є середнє квадратичне відхилення кількості бракованих деталей?

8. Статистика свідчить, що 9% працездатних мешканців регіону є безробітними. Навмання вибирають 100 мешканців. Використовуючи формулу Пуассона, написати закон розподілу ймовірностей випадкової величини X – числа безробітних осіб серед навмання вибраних 100 мешканців регіону. Знайти: а) імовірність того, що не більше, ніж двоє осіб серед чотирьох вибраних мешканців регіону, є безробітними; б) імовірність того, що чотири вибрані мешканці регіону мають роботу; в) найімовірніше число безробітних осіб серед 4-х вибраних мешканців регіону.

9. Робітник виготовляє певний тип деталей. Ймовірність виготовлення бракованої деталі дорівнює 0,01. Написати закон розподілу ймовірностей випадкової величини X – кількості бракованих деталей серед 150 виготовлених (за формулою Пуассона). Знайти ймовірність того, що серед виготовлених деталей виявиться не більше, ніж 2 бракованих.

10. Ймовірність того, що стрілець влучить в мішень при одному пострілі дорівнює 0,85. Стрільцю видають патрони доти, доки він не промахнеться. Знайти закон розподілу випадкової величини X – кількості патронів, виданих стрільцеві.

11. Екзаменатор задає студенту додаткові питання доти, доки студент не зможе дати правильної відповіді. Ймовірність того, що студент знає відповідь на будь-яке додаткове питання, дорівнює 0,8. Побудувати закон розподілу випадкової величини X – кількості додаткових питань, які задасть екзаменатор студенту. Знайти ймовірність того, що екзаменатор дасть 3 питання.

12. Визначити середнє математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X, розподіл ймовірностей якої задано таблицею:

а)

x_i	10	20	30	40	50
p_i	0,18	0,26	0,32	0,20	0,04

б)

x_i	9	10	20	40	50
p_i	0,1	0,15	0,15	0,4	0,2

в)

x_i	–1	0	2	3	5
p_i	0,15	0,3	0,15	0,2	0,2

13. Випадкова величина X набуває двох можливих значень x_1 та x_2 з ймовірностями відповідно p_1 та p_2. Знайти x_1 та x_2 і записати її закон розподілу, якщо:

а) $x_1 > x_2$, $p_1 = 2/3$, $M(X) = -1/3$, $D(X) = 8/9$;
б) $x_1 < x_2$, $p_2 = 0{,}9$, $M(X) = 1{,}7$, $\sigma(X) = 0{,}9$;
в) $x_1 < x_2$, $p_2 = 3/4$, $M(X) = 1/4$, $M(X^2) = 7/4$;
г) $x_1 > x_2$, $p_1 = 0{,}4$, $p_2 = 0{,}6$, $M(X) = -1{,}4$, $D(X) = 0{,}24$.

14. За заданим законом розподілу дискретної випадкової величини X

$X = x_i$	-3	-2	1	3	5	7
$P(X = x_i) = p_i$	a	1,5a	0,5a	3,5a	2,5a	a

знайти: а) параметр a; б) $P(X < 2), P(-4 < X \leq 6)$; в) функцію розподілу ймовірностей та побудувати її графік; г) $M(X)$, $D(X)$, A_s, E_s.

15. Обчислити $D(X), \sigma(X)$, якщо закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X задано функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -5 \\ 0{,}1, & -5 < x \leq -4 \\ 0{,}3, & -4 < x \leq 1 \\ 0{,}4, & 1 < x \leq 2 \\ 0{,}65, & 2 < x \leq 4 \\ 0{,}9, & 4 < x \leq 7 \\ 1, & x > 7 \end{cases}$$

Завдання 2

1. Густину розподілу ймовірностей $f(x)$ випадкової величини задано формулами:

а) $$f(x) = \begin{cases} ax^2, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{якщо } x < 0 \text{ або } x > 1; \end{cases}$$

б) $$f(x) = \begin{cases} a(x-3)^2, & \textit{якщо} \quad 3 \leq x \leq 5 \\ 0, & \textit{якщо} \quad x < 3 \quad \textit{або} \quad x > 5 \end{cases}$$

в) $f(x)=\begin{cases} a\sqrt{x}, & \text{якщо } 0\le x\le 9,\\ 0, & \text{якщо } x<0 \text{ або } x>9; \end{cases}$

г) $f(x)=\begin{cases} 0, & x\notin\left(0,\pi/2\right),\\ a\sin x, & x\in\left(0,\pi/2\right); \end{cases}$ д) $f(x)=\begin{cases} 0, & x\notin(0,\ln 2),\\ ae^{x}, & x\in(0,\ln 2). \end{cases}$

Для кожного випадку виконати такі дії:

1) знайти коефіцієнт a;

2) знайти функцію розподілу випадкової величини X;

3) побудувати графіки густини ймовірностей та функції розподілу;

4) знайти ймовірність попадання випадкової величини X у проміжок I, якщо:

а) $I=\left[0;\ \frac{1}{2}\right]$; б) $I=(3;4)$; в) $I=[\pi/4,\pi/3]$; г) $I=[0;0,5]$;

5) знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X;

6) обчислити асиметрію та ексцес.

2. Дано функції:

а) $f_1(x)=-x^2$; б) $f_2(x)=0,5\sin x+0,5$; в) $f_3(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{(1+x^2)}$.

Чи є вони функціями густини розподілу ймовірності? Відповідь пояснити.

3. Функцію розподілу ймовірностей $F(x)$ неперервної випадкової величини X задано формулою:

а) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x\le 2,\\ a(x-2)^2, & \text{якщо } 2<x\le 4,\\ 1, & \text{якщо } x>4; \end{cases}$

б) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x\le 0,\\ \frac{1}{6}x^2, & \text{якщо } 0<x\le 2,\\ ax^2+2x-2, & \text{якщо } 2<x\le 3,\\ 1, & \text{якщо } x>3; \end{cases}$

в) $$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le -2\pi, \\ a + a\cos\frac{x}{2}, & \text{якщо} \quad -2\pi < x \le 0, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > 0; \end{cases}$$

Виконати такі дії:

1) знайти коефіцієнт a;

2) знайти густину розподілу $f(x)$.

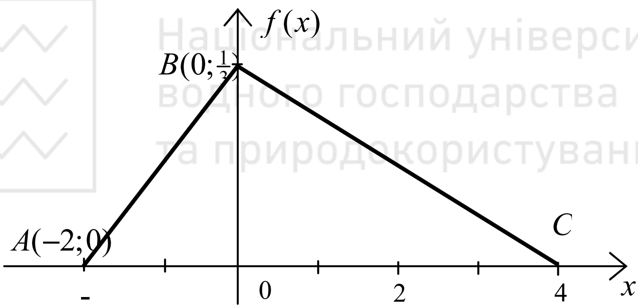
3) побудувати графіки функції розподілу та густини розподілу;

4) знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення;

5) знайти ймовірність попадання випадкової величини X в інтервалі:

а) $I=(3;\ 10)$; б) $I=[1;\ 3]$; в) $I=\left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$.

4. Густина розподілу ймовірностей випадкової величини X задана графіком на рис.:



Обчислити $D(X)$; Me; Mo.

5. Якщо виконується графік руху на маршруті, то середній час очікування пасажиром автобуса дорівнює 4 хвилини. Відомо, що час очікування має рівномірний закон розподілу. Мінімальний час очікування дорівнює 0. Знайти ймовірність того, що пасажир буде очікувати автобус від 3 до 6 хвилин.

6. Випадкова величина X має рівномірний розподіл із математичним сподіванням $M(X)=3$ і дисперсією $D(X)=4/3$. Знайти функцію розподілу випадкової величини X.

7. Математичне сподівання і дисперсія рівномірно розподіленої на деякому відрізку випадкової величини X відповідно дорівнюють 0,5 і $\frac{1}{12}$. Знайти: а) густину розподілу величини X; б) функцію розподілу $F(x)$.

8. Протягом години $0 \le t \le 1$ (t – час у годинах) на станцію прибуває одна і лише одна електричка в заданому напрямку. Яка ймовірність того, що пасажир, який прийшов на зупинку в момент часу t = 0, буде чекати електричку не більше, ніж 10 хвилин? Визначити, скільки в середньому часу пасажир чекатиме електричку.

9. Перехрестя доріг оснащене світлофором, який дозволяє проїзджати його (зелене світло) протягом 1 хв. і забороняє (жовте, червоне світло) протягом 0,5 хв. Автолюбитель під'їзджає до перехрестя у випадковий момент часу. Знайти ймовірність того, що він проїде перехрестя не зупиняючись. Знайти середній час зупинки автомобіля перед світлофором.

10. Випадкова величина X має рівномірний закон розподілу на проміжку $(0, a)$. Відомо також, що $P(X > \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$. Знайти $a, M(X^2)$.

11. Банк провів дослідження про наявність річних заощаджень в осіб, вік яких є не менший ніж 21 рік. Дослідження показали, що річні заощадження на одну особу нормально розподіляються зі середнім числом 1 850 грн. і середнім квадратичним відхиленням − 350 грн. Визначити ймовірність того, що навмання вибрана особа має заощадження:

а) більше, ніж 2 200 грн.;
б) менше, ніж 1 500 грн.;
в) у межах від 1 080 грн. до 2 375 грн.;
г) менше, ніж 800 грн.

12. Результати тестування абітурієнтів вищих закладів освіти деякого міста наближено можна вважати розподіленими за нормальним законом з середнім значенням 500 балів і середнім квадратичним відхиленням 100 балів. Знайти: а) який відсоток усіх результатів охоплюють оцінки від 300 до 700 балів? б) яка найнижча оцінка серед 10% найвищих оцінок? в) яка кількість абітурієнтів з 10000, можна сподіватися, матимуть оцінки, не нижчі від 675 балів?

13. Середня ціна деякої великої кількості акцій становить 12 грн. 80 коп., а середнє квадратичне відхилення 3 грн. Припускаємо, що ціни розподілені за нормальним законом. Знайти: а) яку частку акцій продають за ціною, не вищою від 10 грн.? б) яка ймовірність того, що навмання взята акція матиме ціну від 11 до 14 грн.? в) нижче від якої ціни продаються 20 % найдешевших акцій?

14. Деталі, які виготовляє цех, вважаються деталями вищого гатунку, якщо відхилення їх розмірів від номіналу не перевищує за абсолютною величиною 2,6 мм. Випадкові відхилення розміру деталі розподіляються за нормальним законом із середнім квадратичним відхиленням 2 мм, а систематичне відхилення відсутнє. Визначити середню кількість деталей вищого гатунку серед навмання вибраних 5 деталей.

15. Зріст дорослого чоловіка описується нормальним законом розподілу. За статистикою середній зріст становить 175 см, а середньоквадратичне відхилення дорівнює 7 см. Знайти ймовірність того, що зріст навмання взятого чоловіка буде відрізнятися від середнього зросту не більше, ніж на 7 см.

16. Помилки в обчисленнях, допущені бухгалтером при складанні балансу, розподіляються у відсотках за нормальним законом з параметрами a = 1,5 і σ = 0,01. Написати функцію і густину розподілу цих помилок та побудувати їх графіки. В яких межах містяться помилки обчислень з імовірністю 0,9973?

17. Середній дохід на душу населення в розмірі 8 000 грн. вважається випадковою величиною, яка розподілена нормально зі середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 200$ грн. В яких межах практично можна гарантувати дохід на душу населення з ймовірністю 0,9973?

18. Час безвідмовної роботи верстата має показниковий закон розподілу. Імовірність того, що верстат не відмовить за 5 годин роботи, дорівнює 0,60653. Знайти $M(X),\ D(X)$.

19. Відомо, що середній час очікування чергового покупця, який підійде до каси, дорівнює 0,2 хвилини. Час очікування касиром чергового покупця можна вважати випадковою величиною X із показниковим законом розподілу. Касирові потрібно поміняти стрічку касового апарата. На це йому потрібно 2 хвилини. Яка ймовірність того, що за цей час не утвориться черга?

20. Випадкова величина X має функцію розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x}, & x \geq 1, \\ 0, & x < 1. \end{cases}$$

Знайти a, для якого $P(X > a) = \dfrac{1}{3}$.

Література

1. Бобик О. І., Берегова Г. І., Копитко Б. І. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч. підручник. – 2006. – 440 с.
2. Борковський В. В., Барковська Н. В., Лопатін О. К. Теорія ймовірностей і математична статистика. (Математичні науки). – К.: ЦУЛ, – 2002. – 448 с.
3. Бугір М. К. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч. посібник. – Тернопіль: Підручники і посібники. – 1998. – 176 с.
4. Бугір М. К. Практикум з теорії ймовірностей та математичної статистики: Навч. посібник. – Тернопіль: УМДС, 1998.
5. Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И. Теория вероятностей и математическая статистика. – К.: Вища школа, 1988.
6. Гурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Физматгиз, 1975; М.: Высшая школа, 2000. – 479 с.
7. Жлуктенко В. І., Наконечний С. І. Теорія ймовірностей з елементами математичної статистики. – К.: УМКВО, 1991.
8. Жлуктенко В. І., Наконечний С. І. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.-метод. посібник: У 2 ч. – К.: КНЕУ, 2000. – Ч. І: Теорія ймовірностей. – 304 с.
9. Жолдак М. І., Кузьміна Н. М., Берлінська С. Ю. Теорія ймовірностей і математична статистика. – К.: Вища школа, 1995. – 351 с.
10. Копич І. М. Елементи теорії ймовірностей і математичної статистики: Навч. посібник. – Л.: Коопосвіта, ЛКА, 1997.
11. Кулініч Г. Л., Максименко Л. О., Плахотник В. В., Призва Г. Й. Вища математика: основні означення, приклади і задачі: Навч. посібник: У 2-х кн. – 2-ге вид., зі змінами. – К.: Либідь, 1994. – Кн. 1. – 312 с.