Національний університет
водного господарства
та природокористування

Міністерство освіти і науки України

Національний університет водного господарства
та природокористування

Кафедра економічної кібернетики

06-11-46

Методичні рекомендації та завдання
для виконання практичних робіт з дисципліни
„Дискретний аналіз”

Національний університет
водного господарства
та природокористування

студентами напряму підготовки 6.030502 «Економічна кібернетика»
денної форми навчання

Рекомендовано до друку методичною комісією НУВГП за напрямом підготовки 6.030502 «Економічна кібернетика»

Протокол № від « » 2016 р.

Рівне – 2016

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Методичні рекомендації та завдання для виконання практичних робіт з дисципліни «Дискретний аналіз» студентами спеціальності 6.030502 «Економічна кібернетика» 06-11-46 / Бабич Т.Ю. – Рівне: НУВГП, 2016. – 56 с.

Упорядник:
Бабич Т.Ю., старший викладач кафедри економічної кібернетики

Відповідальний за випуск: Грицюк П.М., завідувач кафедри економічної кібернетики

Зміст

Вступ 3

Заняття 1. Основні поняття теорії множин. Операції над множинами . 4

Заняття 2. Основні правила комбінаторики. Розміщення, сполучення, перестановки. 8

Заняття 3. Математична логіка. Висловлення. Доведення тотожностей 14

Заняття 4. Логічні функції. Таблиці істинності логічних функцій 17

Заняття 5. Теорія графів. Різні форми подання графів. Локальні ступені вершин графа. 20

Заняття 6. Маршрут, шлях, ланцюг та цикл. Ейлерові та гамільтонові графи 31

Заняття 7. Дерева. Бінарне дерево пошуку. Побудова мінімальних кістякових дерев 41

Заняття 8. Теорія алгоритмів. Алгоритми на графах 48

Література 55

© Бабич Т.Ю., 2016
© НУВГП, Рівне, 2016

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Вступ

Дискретний аналіз — це сукупність математичних дисциплін, які об'єднані дослідженням явищ, що мають дискретний характер, або таких, що можуть бути приведені до дискретного виду для спрощення обчислень без втрати актуальності та належного ступеня точності. Оскільки практично всі соціально-економічні процеси є дискретними, вивчення дискретного аналізу є необхідним.

Мета дисципліни: формування у майбутніх спеціалістів знань про принципи роботи з множинами, побудови алгоритмів, роботи з комбінаторними об'єктами, на яких базується розробка основного програмного продукту, навичок створення дискретних математичних моделей, розв'язування дискретних задач, у тому числі оптимізаційних.

Завдання: знайомство з базовими алгоритмами аналізу дискретних множин та графів.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

знати:
- основні поняття теорії множин;
- основні поняття комбінаторики;
- основні поняття, операції, властивості алгебри логіки;
- булеві функції двох змінних;
- поняття та алгоритми мінімізації булевих функцій;
- основні поняття теорії графів;
- основні поняття теорії алгоритмів.

вміти:
- будувати дискретні математичні моделі економічних задач;
- розв'язувати теоретико-множинні задачі;
- розв'язувати комбінаторні задачі підрахунку вибірок;
- оперувати формулами алгебри висловлень;
- виконувати аналітичні перетворення функцій алгебри логіки;
- використовувати основні алгоритми на графах;
- розв'язувати оптимізаційні задачі на графах.

Методичні рекомендації призначені для студентів, які навчаються за напрямом підготовки «Економічна кібернетика» освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр». Методичні рекомендації містять приклади розв'язування типових задач, а також задачі для

Національний університет
водного господарства
та природокористування
самостійного виконання під час практичних робіт з дисципліни «Дискретний аналіз». Методичні рекомендації відповідають вимогам ECTS (European Credit Transfer System).

Теоретична частина курсу «Дискретний аналіз» складається з 5 тем: теорія множин, комбінаторний аналіз, математична логіка, теорія графів, теорія алгоритмів. З розглядуваних тем сформовано 2 змістових модулі.

Заняття 1. Основні поняття теорії множин. Операції над множинами

Контрольні запитання

1. Опишіть відомі вам операції над множинами.
2. Які множини називаються рівними? Як за означенням довести рівність двох множин?
3. Як зображають множини на діаграмах Ейлера?
4. Як використати діаграми Ейлера для доведення рівності двох множин?
5. Що таке потужність множини?
6. Наведіть приклади скінченних та зчисленних множин.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Приклади розв'язування задач

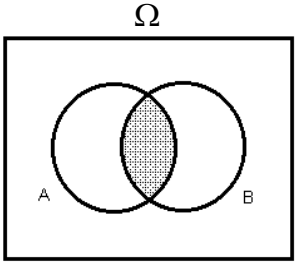
Приклад 1.1. Довести рівність $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Розв'язування. Нехай $x \in \overline{A \cup B}$, а, отже, $x \notin A \cup B$. Тоді $x \notin A$ та $x \notin B$. Звідси $x \in \overline{A}$ і $x \in \overline{B}$, а, отже, $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Тепер припустимо навпаки, що $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Тоді $x \in \overline{A}$, $x \in \overline{B}$ і значить $x \notin A$ та $x \notin B$, а, отже, $x \in A \cup B$. Звідси $x \in \overline{A \cup B}$.

Приклад 1.2. Довести графічно рівність множин $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

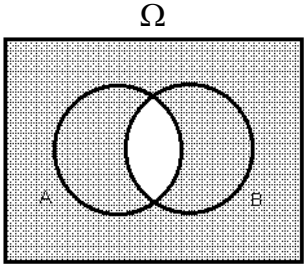
Розв'язування. Зобразимо на діаграмі Ейлера ліву множину (рис.1.1, 1.2).

Національний університет
водного господарства
та природокористування



$A \cap B$

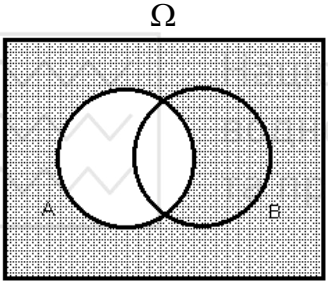
Рис.1.1



$\overline{A \cap B}$

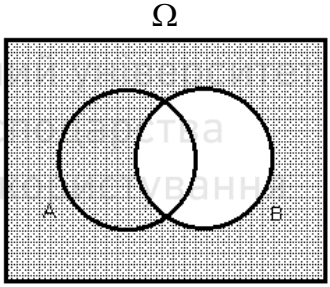
Рис.1.2

Виконаємо аналогічне зображення для множини в правій частині (рис. 1.3- 1.5).



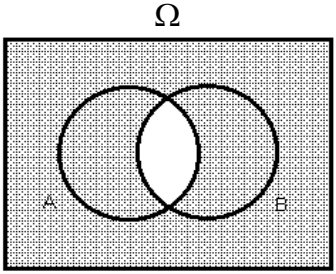
$\overline{A}$

Рис.1.3



$\overline{B}$

Рис.1.4



$\overline{A} \cup \overline{B}$

Рис.1.5

Оскільки рис.1.2 та рис.1.5 співпадають, то потрібна рівність множин доведена.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Приклад 1.3. Спростити вираз $(A\cup B)\cap\left(\overline{A}\cup B\right)\cap\left(A\cup\overline{B}\right)$.

Розв'язування. Виконаємо рівносильні перетворення

1) $(A\cup B)\cap\left(\overline{A}\cup B\right)=\left(A\cap\overline{A}\cup A\cap B\cup B\cap\overline{A}\cup B\cap B\right)=B$;

2) $B\cap\left(A\cup\overline{B}\right)=B\cap A\cup B\cap\overline{B}=B\cap A$.

Приклад 1.4. За допомогою рівносильних перетворень довести рівність множин $A\cap B\cup A\cap B\cap C\cup A\cap B\cap\overline{A}=A\cap B\cup A\cap B\cap K$.

Розв'язування. Перетворимо ліву частину

$$A\cap B\cup A\cap B\cap C\cup A\cap B\cap\overline{A}=A\cap B\cup A\cap B\cap C=$$
$$=A\cap B\cap\Omega\cup A\cap B\cap C==A\cap B\cap(\Omega\cup C)=A\cap B\cap\Omega=A\cap B.$$

Аналогічно, для правої частини.

$$A\cap B\cup A\cap B\cap K=A\cap B\cap\Omega\cup A\cap B\cap K=$$
$$=A\cap B\cap(\Omega\cup K)=A\cap B\cap\Omega=A\cap B.$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Задачі для виконання

1.1. Доведіть за означенням рівність множин:

a) $\overline{A\cup\overline{B}}=\overline{A}\cap B$;

b) $\overline{A\cap\overline{B}\cup A\cap C}=\overline{A}\cup B\cap\overline{C}$;

c) $A\cup B\cup\overline{A}\cap\overline{B}=\Omega$.

1.2. Довести графічно рівність множин:

a) $\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(B\cap\overline{A}\right)\cup(A\cap B)=A\cup B$;

b) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$;

c) $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$;

d) $A\cap(B\cup C)=A\cap B\cup A\cap C$;

e) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

1.3. Спростити вирази:

a) $(A\cup B)\cap\left(\overline{A}\cup B\right)\cap\left(A\cup\overline{B}\right)$;

Національний університет
водного господарства
та природокористування

b) $\left(\overline{A} \cap \overline{B} \cup A \cap B\right) \cap \left(A \cup B\right)$;

c) $A \cap B \cap C \cup A \cap C \cap \overline{B} \cup B \cap C \cap \overline{A} \cup C \cap \overline{A} \cap \overline{B}$.

1.4. Користуючись основними рівносильностями теорії множин, довести рівносильності:

a) $A \cap B \cap C \cup \overline{A} \cap B \cap C \cup \overline{B} \cup \overline{C} = \Omega$;

b) $A \cap B \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C} = \Omega$.

1.5. За допомогою діаграм Ейлера—Вена перевірити закони де Моргана.

1.6. Довести, що

$$A \subset B \leftrightarrow A \cup B = B \leftrightarrow A \cap B = A \leftrightarrow A \setminus B = \varnothing \leftrightarrow \bar{A} \cap B = U.$$

1.7. Довести, що $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$, $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

1.8. Довести, що $A = B \leftrightarrow (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \varnothing$.

1.9. Довести, що якщо A, B, C та D не порожні множини, то

a) $A \subset B$ та $C \subset D \leftrightarrow A \times C \subset B \times D$;

b) $A = B$ та $C = D \leftrightarrow A \times C = B \times D$.

1.10. Довести, що

a) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$;

b) $(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$.

1.11. Довести на прикладі хибність формули $X \times Y = Y \times X$.

1.12. Відомо, що із 100 студентів живописом захоплюються 28, спортом — 42, музикою — 30, живописом і спортом — 10, живописом і музикою — 8, спортом і музикою — 5, живописом, спортом і музикою — 3. Визначте:

a) кількість студентів, що захоплюються лише спортом;

b) кількість студентів, що нічим не захоплюються.

1.13. Зобразити на координатній площині декартовий добуток множин $A \times B$ та $B \times A$.

1.14. Записати також усі елементи декартових добутків:

$$A = \{x \mid x \in R, 3 \le x \le 5\}; B = \{x \mid x \in R, 3 \le x \le 6\};$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

1.15. Задано множини $A=\{a,b,c\}, B=\{x,y\}, C=\{0,1\}$. Побудувати декартові добутки:

a) $A\times B\times C$; b) $C\times B\times A$; c) $C\times A\times B$; d) $B\times B\times B$.

1.16. Задано множини $A=\{a,b,c,d,e\}$ та $B=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$. Побудувати множини:

a) $A\cap B$; b) $A\cup B$; c) $A\setminus B$; d) $B\setminus A$.

1.17. Знайти множини A та B, якщо

$A\setminus B=\{1,5,7,8\}, B\setminus A=\{2,10\}, A\cap B=\{3,6,9\}$.

1.18. Довести рівність множин $A\setminus B=A\cap\overline{B}$.

1.19. Довести рівності множин:

a) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$; b) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

c) $A\cap(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$; d) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

1.20. Задано множини $A=\{0,2,4,6,8,10\}$, $B=\{0,1,2,3,4,5,6\}$, $C=\{4,5,6,7,8,9,10\}$. Побудувати множини:

a) $A\cap B\cap C$; b) $A\cup B\cup C$;

c) $(A\cup B)\cap C$; d) $(A\cap B)\cup C$.

1.21. Симетричною різницею множин A та B називається множина, задана рівністю $A\oplus B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$:

a) зобразити діаграму Венна множини $A\oplus B$;

b) задано множини $A=\{1,3,5\}, B=\{1,2,3\}$, побудувати множину $A\oplus B$;

c) нехай A та B – довільні множини. Довести рівність $A\oplus B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

Заняття 2. Основні правила комбінаторики. Розміщення, сполучення, перестановки

Контрольні запитання

1. Які задачі розв'язує комбінаторика?
2. Що таке вибірка?

Національний університет
водного господарства
та природокористування

3. Як формулюються правила суми і добутку?
4. Чому дорівнює число впорядкованих вибірок з повтореннями?
5. Чому дорівнює число впорядкованих вибірок без повторень?
6. Чому дорівнює число невпорядкованих вибірок з повтореннями?
7. Чому дорівнює число невпорядкованих вибірок без повторень?

Приклади розв'язування задач

Приклад 2.1. У пасажирському поїзді 9 вагонів. Скількома способами можна розсадити в поїзді 4 людей, за умови, що всі вони повинні їхати в різних вагонах?

Розв'язування. Оскільки всі пасажири повинні їхати в різних вагонах, потрібно відібрати 4 вагони з 9 з урахуванням порядку (вагони відрізняються №), ці вибірки - розміщення з n різних елементів по m елементів, де n = 9, m = 4. Число таких розміщень знаходимо за формулою:

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1).$$

$$A_9^4 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024.$$

Відповідь: 3024 способами можна розсадити в поїзді 4 чоловік.

Приклад 2.2. Підприємство може надати роботу за однією спеціальністю 4 жінкам, по інший - 6 чоловікам, за третьою - 3 працівникам незалежно від статі. Скількома способами можна заповнити вакантні місця, якщо є 14 претендентів: 6 жінок і 8 чоловіків?

Розв'язування. Маємо 14 претендентів і 13 робочих місць. Спочатку виберемо працівників на першу спеціальність, тобто 4 жінок з 6: $C_6^4 = \frac{6!}{4!\cdot 2!} = 15.$

Далі незалежно аналогічним чином виберемо чоловіків на другу спеціальність: $C_8^6 = \frac{8!}{6!\cdot 2!} = 28.$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Залишилося 2 жінки, 2 чоловіків і 3 вакантних місця, які, за умовою, можуть бути зайнятими будь-ким з чотирьох чоловік, що залишилися.

Це може бути зроблено 2 варіантами:

1. 1 жінка і 2 чоловіків (вибираємо жінку $C_2^1 = 2$ способами)

2. 1 чоловік і 2 жінки (вибираємо чоловіка $C_2^1 = 2$ способами).

Разом отримуємо $15 \cdot 28 \cdot (2+2) = 1680$ способів.

Відповідь: 1680 способів.

Приклад 2.3. У групі 9 чоловік. Скільки можна утворити різних підгруп за умови, що в підгрупу входить не менше 2 осіб?

Розв'язування.

Не менш 2-х чоловік, тобто 2 + 7 або 3 + 6 або 4 + 5 чоловік (5 + 4, 6 + 3, 7 + 2 - ті ж самі комбінації). У кожній вибірці важливий тільки склад, тому що члени підгрупи не розрізняються за ролями, тобто вибірки є поєднаннями з n різних елементів по m елементів, їх число:

$C_n^m = \dfrac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$, де $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Число виборок з 2 чоловік: $C_9^2 = \dfrac{9!}{2! \cdot (9-2)!} = \dfrac{9!}{2! \cdot 7!} = \dfrac{8 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 36.$

Число виборок з 3 чоловік: $C_9^3 = \dfrac{9!}{3! \cdot (9-3)!} = \dfrac{9!}{3! \cdot 6!} = \dfrac{7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84.$

Число виборок з 4 чоловік:

$$C_9^4 = \frac{9!}{4! \cdot (9-4)!} = \frac{9!}{4! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 126.$$

За правилом суми: $C_9^2 + C_9^3 + C_9^4 = 36 + 84 + 126 = 246$ способів.

Відповідь: 246 способів.

Приклад 2.4. У лабораторії науково-дослідного інституту працює декілька чоловік, причому кожний з них знає хоча б одну іноземну мову, 6 чоловік знають англійську, 6 – німецьку, 7 – французьку, 4 знають англійську і німецьку, 3 – німецьку і французьку, 2 – французьку і англійську, один чоловік знає всі три мови. Скільки

Національний університет
водного господарства
та природокористування

чоловік працює в лабораторії? Скільки з них знає лише англійську мову? Скільки чоловік знає лише одну мову?

Розв'язування.

Позначимо *n(А), n(Н), n(Ф)* кількість співробітників у лабораторії, які знають англійську, німецьку та французьку мови відповідно, а *n(НФ), n(АН), n(А*Ф), *n(АНФ)* – кількість чоловік, що знають по дві і три мови відповідно.

Тоді, за правилом суми, загальне число співробітників у лабораторії дорівнює

$m = n(A) + n(H) + n(Ф) - n(НФ) - n(АН) - n(А\text{Ф}) + n(АНФ) = 6 + 6 + 7 - 3 - 4 - 2 + 1 = 11.$

Тільки англійську та німецьку мови знають $n_{АН} = n(АН) – n(АНФ) = 4\text{-}1 = 3$ чоловіка.

Тільки англійську і французьку - $n_{АФ} = n(АФ) - n(АНФ) = 2\text{-}1 = 1$ чоловік.

Тоді тільки англійську мову знає $n_A = n(A) - n_{АН} – n_{АФ} - n(АНФ) = 6\text{-}3 - 1\text{-}1 = 1$ чоловік.

Тільки німецьку і французьку знають $n_{НФ} = n(НФ) - n(АНФ) = 3 – 1 = 2$ чоловіки.

Тоді більше однієї мови знають $k = n(АНФ) + n_{АН} + n_{АФ} + n_{НФ} = 1 + 3 + 1 + 2 = 7$ чоловік, та тільки одну мову $p = n - m = 11 - 7 = 4$ чоловіка.

Приклад 2.5. Скільки різних слів можна отримати перестановкою літер слова ОГОРОД таким чином, щоб три літери О не стояли би поряд?

Розв’язування. Загальна кількість слів, отриманих перестановкою літер слова ОГОРОД, дорівнює

$$P(3,1,1,1) = \frac{(3+1+1+1)!}{3!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{6!}{3!} = 6\cdot 5\cdot 4 = 120.$$

Якщо в будь-якому слові всі три букви О стоять поряд, то потрійну О можна вважати єдиним символом, тоді кількість слів, в яких три літери О стоять поряд, дорівнює P(4)=4!=24.

Отже, кількість слів, в яких три літери О не стоять поряд:
120-24=96.

Відповідь: 96 слів.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Задачі для виконання

2.1. Скільки різних варіантів хокейної команди можна скласти з 9 нападаючих, 5 захисників і 3 воротарів, якщо до складу команди повинно ввійти 3 нападаючих, 2 захисника і воротар?

2.2. З 10 студентів призначають двох чергових. Скількома способами можна це зробити, якщо:

a) один із призначених стає старшим;
b) старших немає?

2.3. Побудувати різні перестановки по 2 і по 3 елементи множини $M = \{1,2,3\}$.

2.4. У футбольному чемпіонаті беруть участь 15 команд вищої ліги. За умовою, що 2 останні команди її залишають, скільки варіантів завершення чемпіонату?

2.5. Нехай M= {1, 2, 3, 4, 5}. Навести всі розміщення та сполучення без повторень з елементів множини M по 3 елементи.

2.6. Обчислити кількість перестановок множини {a, b, c, d, є, f, g}, які закінчуються буквою a.

2.7. Обчислити значення:

a) A_5^3; b) A_8^1; c) A_8^5.

2.8. Обчислити значення:

a) C_5^1; b) C_8^4; c) C_{12}^6.

2.9. Скількома способами можна визначити призові місця (перше, друге, третє) у забігу 12 коней?

2.10. Міста A та B з'єднано трьома різними дорогами. Скількома способами можна виконати коловий рейс від A до B та від B до A, якщо, їдучи від B до A, обов'язково треба вибирати нову дорогу?

2.11. Дано множину M= {1, 2, 3, ..., 99, 100}. Скільки існує розміщень без повторень з елементів множини M по чотири елементи, які містять:

a) число 47;
b) водночас числа 17 і 47;
c) водночас числа 17, 47 і 73;
d) водночас числа 17, 47, 73 і 97;
e) три послідовні цілі числа у висхідному порядку?

2.12. Скількома способами можна розсадити шістьох осіб за круглим столом?

Національний університет
водного господарства
та природокористування

2.13. Із цифр 1, 2, 3, 4, 5, не повторюючи їх, склали всі можливі п'ятицифрові числа. Скільки серед них таких чисел:

a) які починаються цифрою 3;
b) не починаються цифрою 5;
c) починаються з 54?

2.14. Дано натуральні числа від 1 до 31. Скількома способами можна вибрати з них три числа так, щоб їх сума була парним числом?

2.15. Скількома способами можна поставити на полицю 10 книжок:

a) якщо серед них є один тритомник, усі томи якого мають стояти поруч у довільному порядку;
b) усі томи тритомника мають стояти поруч за зростанням номерів томів?

2.16. Скількома способами можна розподілити серед 20 студентів групи чотири квитки в театр, якщо:

a) квитки на один спектакль, і кожен студент може отримати не більше одного квитка;
b) квитки на один спектакль, і кожен студент може отримати скільки завгодно квитків;
c) всі квитки на різні спектаклі, і кожен студент може отримати не більше одного квитка;
d) всі квитки на різні спектаклі, і кожен студент може отримати скільки завгодно квитків?

2.17. Є 4 квитки на концерт, 5 квитків в театр і 7 квитків в цирк. Скількома способами їх можна розподілити серед 25 студентів групи, якщо кожен студент може отримати не більше одного квитка на кожен захід? Квитки на один захід вважаються рівнозначними.

2.18. Скількома способами з колоди 52 карт можна вийняти 10 карт, щоб серед них були такі:

a) точно один туз;
b) принаймні один туз;
c) не менше двох тузів?

2.19. Скількома способами з 28 кісток доміно можна утворити пари кісток, які можна докласти одна до другої за правилами доміно?

2.20. Скількома способами можна вибрати пару однакових карт із колоди 36 карт?

2.21. Скількома способами можна вибрати пару з колоди 36 карт і одного джокера? (Джокер утворює пару з будь-якою картою.)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

2.22. Скількома способами можна поселити дев'ять студентів у три кімнати гуртожитку, поселяючи їх по троє в кожній?

2.23. Скількома способами можна вибрати п'ять невпорядкованих елементів множини, що складається з трьох елементів, якщо повторення дозволені?

2.24. Скількома способами можна вибрати три невпорядкованих елементи множини, що складається з п'яти елементів, якщо повторення дозволені?

2.25. Скільки різних рядків із шести букв можна утворити з алфавіту, який має 26 букв, якщо повторення дозволені?

2.26. Скільки різних рядків можна утворити зі слова MISSISSIPPI, використовуючи всі букви? Скільки таких рядків починаються та закінчуються літерою S? У скількох таких рядках усі чотири букви S стоять поруч?

2.27. Скільки потрібно запросити людей, аби щонайменше шість із них народилися під одним і тим самим знаком зодіаку?

2.28. Скільки має бути людей, щоб обов'язково принаймні двоє з них народилися в один і той самий день тижня та в один і той самий місяць (можливо, у різні роки)?

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Заняття 3. Математична логіка. Висловлення. Доведення тотожностей

Контрольні запитання

1. Яке висловлення називають істинним?
2. Які ви знаєте способи опису?
3. Назвіть основні логічні операції над висловленнями.
4. Назвіть основні закони алгебри логіки.
5. Які ви знаєте способи доведення тотожностей?

Приклади розв'язування задач

Приклад 3.1. Наступні складені висловлення розкласти на прості складові і записати символічно, ввівши позначення цих складових:
«Якщо в трикутнику медіана не є висотою і бісектрисою, то цей трикутник не рівнобедрений і не рівносторонній».

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Розв'язування. Виділимо і позначимо через A, B, C, D такі прості висловлення:

A: "В трикутнику медіана є висотою".

B: "В трикутнику медіана є бісектрисою".

C: "Цей трикутник – рівнобедрений".

D: "Цей трикутник – рівносторонній".

Тоді дане висловлення має символічний запис: $(\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow (\neg C \wedge \neg D)$.

Приклад 3.2. Нехай через A позначено висловлення "Цей трикутник рівнобедрений", через B - "Цей трикутник рівносторонній". Прочитати висловлення: $(A \wedge \neg B) \Rightarrow \neg\neg A$.

Розв'язування. «Якщо цей трикутник рівнобедренний та нерівносторонній, то не вірно, що він нерівнобедрений».

Приклад 3.3. Довести тотожності теорії множин за допомогою алгебраїчних перетворень.

a) $(A \cap B) \cup (A \cap \neg B) \cup (\neg A \cap B) \cup (\neg A \cap \neg B) = \Omega$.

Розв'язування.

$$(A \cap B) \cup (A \cap \neg B) \cup (\neg A \cap B) \cup (\neg A \cap \neg B) = (A \cap (B \cup \neg B)) \cup (\neg A \cap (B \cup \neg B)) =$$
$$= (A \cap \Omega) \cup (\neg A \cap \Omega) = \Omega \cap \Omega = \Omega$$

Тотожність доведена.

b) $((A \setminus B) \cup A) \oplus (B \oplus A) = B$.

Розв'язування.

$$((A \setminus B) \cup A) \oplus (B \oplus A) = ((A \cap \neg B) \cup A) \oplus ((B \cap \neg A) \cup (\neg B \cap A)) =$$
$$= A \oplus ((B \cap \neg A) \cup (\neg B \cap A)) =$$
$$= \left[A \cap \neg((B \cap \neg A) \cup (\neg B \cap A))\right] \cup \left[\neg A \cap ((B \cap \neg A) \cup \neg B \cap A))\right] =$$
$$= \left[A \cap (\neg(B \cap \neg A) \cap \neg(\neg B \cap A))\right] \cup \left[(\neg A \cap B \cap \neg A) \cup (\neg A \cap \neg B \cap A)\right] =$$
$$= \left[A \cap) \neg B \cup A) \cap (B \cup \neg A)\right] \cup (\neg A \cap B) \cup (\emptyset \cap \neg B) =$$
$$= \left[A \cap (B \cup \neg A)\right] \cup (\neg A \cap B) \cup \emptyset = (A \cap B) \cup (A \cap \neg A) \cup (\neg A \cap B) =$$
$$= (A \cap B) \cup \emptyset \cup (\neg A \cap B) = B \cap (A \cup \neg A) = B \cap \Omega = B.$$

Тотожність доведена.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Приклад 3.4. Спростити формулу, використовуючи аксіоми та теореми булевої алгебри. $(x \to y) \to ((y \to z) \to (z \to x))$

Розв'язування.

$$(x \to y) \to ((y \to z) \to (z \to x)) = \left(\overline{x} \vee y\right) \to \left(\left(\overline{y} \vee z\right) \to \left(\overline{z} \vee x\right)\right) =$$
$$= \overline{\left(\overline{x} \vee y\right)} \vee \left(\overline{\left(\overline{y} \vee z\right)} \vee \overline{z} \vee x\right) = \left(x \wedge \overline{y}\right) \vee \left(\left(y \wedge \overline{z}\right) \vee \overline{z} \vee x\right) = \left(x \wedge \overline{y}\right) \vee \overline{z} \vee x \vee \left(y \wedge \overline{z}\right) =$$
$$= \left(\left(x \wedge \overline{y}\right) \vee x\right) \vee \left(\overline{z} \vee \left(y \wedge \overline{z}\right)\right) = x \vee \overline{z}.$$

Задачі для виконання

3.1. Визначте, які з наведених речень є висловленнями:

a) $3 > 4$; b) $7 > 4 > 3$; c) $5 < 6$; d) $6 < 3$;

e) що більше: 4 чи 3?; f) існує таке число a, що $a > 3$;

g) для будь-якого a - $a > 3$; h) $x = 1$.

3.2. Запишіть формально та визначте істинність таких висловлень:

a) 100 ділиться на 3 та 4;

b) 100 ділиться на 3 або 4;

c) 100 ділиться на 3 або 100 ділиться на 4;

d) якщо 100 ділиться на 3, то 100 ділиться й на 4.

3.3. Нехай через A позначено висловлення "Цей трикутник рівнобедрений", через B - "Цей трикутник рівносторонній". Прочитати висловлення:

a) $\neg A \wedge \neg B$; b) $\neg(A \vee B)$; c) $\neg A \Rightarrow \neg B$;

d) $(A \vee B) \Leftrightarrow A$; e) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg B$.

3.4. Дано висловлення:

A: «Я люблю математику». B: «Я люблю спорт».

Який зміст мають висловлення?

a) $A \wedge B$; b) $\overline{A \wedge B}$; c) $A \vee B$;

d) $A \wedge \overline{B}$; e) $\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}$; f) $\overline{A}$; g) $\overline{A} \vee B$.

Які з цих висловлень істинні, якщо A і B істинні?

3.5. Дано висловлення:

A: "m і n – невід'ємні числа».

B: "$m+n=mn$".

C: "$m=0$".

Національний університет
водного господарства
та природокористування

D: "$n=0$".

E: "$m=2$".

F: "$n=2$".

Сформулювати словами твердження $A \to [B \sim ((C \wedge D) \vee (E \wedge F))]$ і довести його.

3.6. Записати у вигляді логічної формули твердження:

a) Якщо ціле число n ділиться на 30, то воно ділиться на 3 і на 10, а також на 5 і на 6.

b) Ціле число ділиться на 30 тоді і тільки тоді, коли воно ділиться на 3 і на 10 або на 5 і на 6.

3.7. Нехай A, B і C позначають наступні висловлення:

A - "Я люблю грати в комп'ютерні ігри";

B - "У мене є комп'ютер";

C - "У мене є час для ігор".

Інтерпретуйте наступні висловлення як звичайні пропозиції:

a) $A \wedge \neg B$; b) $C \to A$;

c) $\neg C \wedge A \wedge B$; d) $B \wedge (\neg A \vee \neg C)$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

3.8. Доведіть, що:

a) $x \to y = \bar{y} \to \bar{x}$;

b) $x \vee (x \wedge y) = x$;

c) $xy \vee \bar{x}y = y$.

Заняття 4. Логічні функції. Таблиці істинності логічних функцій

Контрольні запитання

1. Що таке булеві або логічні змінні?
2. Яким чином будують таблиці істинності булевої функції?
3. Перелічіть булеві функції однієї змінної.
4. Скільки існує булевих функцій від n змінних?
5. Яким чином можна перевірити еквівалентність формул?
6. Що означає поняття «суперпозиція функцій»?

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Приклади розв'язування задач

Приклад 4.1. Нехай $f(x_1,x_2,x_3)=f_4(f_1(x_2,f_2(x_3,x_1)),f_3(x_2,x_1))$ і f_1 означає кон'юнкцію, f_2 – диз'юнкцію, f_3 – імплікацію, f_4 – додавання за модулем 2. Представити функцію формулою і обчислити значення функції на наборі (0,0,1).

Розв'язування. $x_1=0, x_2=0, x_3=1.$

$f\ (x_1,x_2,x_3)=(x_2\wedge(x_3\vee x_2))\oplus(x_2\to x_1).$

Обчислимо значення f на наборі (0,0,1), для чого підставимо в отриману формулу значення змінних:

$$(x_2\wedge(x_3\vee x_2))\oplus(x_2\to x_1)$$
$$0\quad 1\quad 0\qquad 0\quad 0$$
$$1\qquad\qquad 1$$
$$0$$
$$1$$

Тобто, при даному наборі змінних функція істинна.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Приклад 4.2. Побудувати таблицю істинності висловлення $(\neg A\to B)\wedge C$.

Розв'язування. Побудуємо таблицю істинності двома способами:

A	B	C	$\neg A$	$\neg A\to B$	$(\neg A\to B)\wedge C$		A	B	C	$(\neg A\to B)\wedge C$
1	1	1	0	1	1		1	1	1	0 1 **1**
1	1	0	0	1	0		1	1	0	0 1 **0**
1	0	1	0	1	1		1	0	1	0 1 **1**
1	0	0	0	1	0		1	0	0	0 1 **0**
0	1	1	1	1	1		0	1	1	1 1 **1**
0	1	0	1	1	0		0	1	0	1 1 **0**
0	0	1	1	0	0		0	0	1	1 1 **0**
0	0	0	1	0	0		0	0	0	1 1 **0**

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Приклад 4.3. Довести еквівалентність формул $x_1 \oplus x_2 = (x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2)$.

Розв'язування. Складемо таблиці істинності наведених формул:

x_1	x_2	$x_1 \oplus x_2$	$(x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2)$
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

Як бачимо, таблиці істинності формул $x_1 \oplus x_2$ і $(x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2)$ збігаються. Звідси робимо висновок, що формули еквівалентні.

Приклад 4.4. Побудувати таблиці істинності формули $(x \to y) \sim ((y \to z) \to (x \to z))$.

Розв'язування. Порядок операцій позначено цифрами над відповідним знаком у формулі:

$$\overset{1}{(}x \overset{5}{\to} y\overset{2}{)} \sim \overset{4}{(}\overset{3}{(}y \to z\overset{4}{)} \to \overset{3}{(}x \to z\overset{4}{)}\overset{5}{)}.$$

x	*y*	*z*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Задачі для виконання

4.1. Побудувати таблиці істинності таких висловлень:

a) $x\bar{y}z$; b) $xy\bar{z}$; c) $x \vee \bar{y} \vee z$;

d) $xyz \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee xy\bar{z}$; e) $x \to (\bar{z} \to y)$;

f) $(x \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$; g) $x \to y \sim z \to x \vee y$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

4.2. Знайти значення істинності формули:

a) $\neg(a \to c) \wedge (\neg b \vee (\neg c \to a))$ при $|a|=1,\ |b|=0,\ |c|=1.$

b) $\neg(a \leftrightarrow b)c \to \neg a \vee (b \leftrightarrow c)$ при $|a|=0,\ |b|=1,\ |c|=0.$

4.3. Побудувати таблиці істинності для висловлень c), d) задачі 7 з заняття 3. При якому наборі змінних висловлення істинне?

4.4. Для даного висловлення сформулювати конверсію, інверсію і контрапозицію:

a) "Якщо мені вдасться украсти вигідну угоду, то фірма виплатить мені премію";

b) "Якщо парубок одержав паспорт, то він повнолітній";

4.5. Перевірити, чи є наступні висловлення еквівалентними:

a) $\neg(P \leftrightarrow Q)$ і $(P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P)$;

b) $P \to Q$ і $\neg P \vee Q$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Заняття 5. Теорія графів. Різні форми подання графів. Локальні ступені вершин графа

Контрольні питання

1. Які графи називають орієнтованими, неорієнтованими?
2. Якими способами можна задати граф?
3. Що таке петля в графі?
4. Що таке мультиграф?
5. Який вигляд має матриця суміжності орієнтованого і неорієнтованого графа?
6. Як будується матриця інцидентності орієнтованого і неорієнтованого графа?

Приклади розв'язування задач

Приклад 5.1. Визначити степені вершин графа, зображеного на рис. 5.1.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

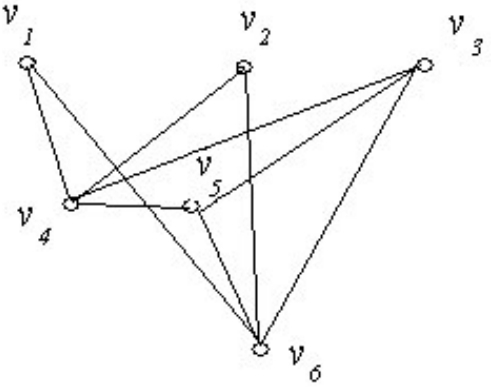


Рис. 5.1.

Розв'язування:

$\deg v_1 = 2$; $\deg v_2 = 2$; $\deg v_3 = 3$; $\deg v_4 = 4$; $\deg v_5 = 3$; $\deg v_6 = 4$.

$\sum_{v \in G} \deg v = 2+2+3+4+3+4 = 18 = 2 \cdot 9 = 2m$.

У розглянутому графі дев'ять ребер, а вершин непарного степеня дві: v_3; v_5.

Визначення 1. Для орієнтованого графа визначаються дві степені вершин: $\deg v'$ - кількість ребер, що виходять із вершини v і $\deg v''$ - кількість ребер, що входять у вершину v. Петля дає внесок по одиниці в обидві степені.

В орграфі суми степенів всіх вершин $\deg v'$ і $\deg v''$ рівні між собою і дорівнюють кількості ребер m цього графа: $\sum_{v \in G} \deg v' = \sum_{v \in G} \deg v'' = m$.

Приклад 5.2. Визначити степені вершин орграфа, зображеного на рис. 5.2.

Розв'язування:

$\deg a' = 1$, $\deg b' = 2$; $\deg c' = 3$; $\deg d' = 2$; $\deg e' = 2$;

$\deg a'' = 2$, $\deg b'' = 1$; $\deg c'' = 2$; $\deg d'' = 2$; $\deg e'' = 3$;

Національний університет
водного господарства
та природокористування

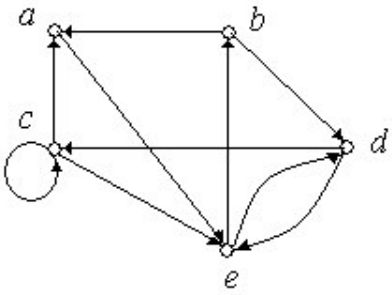


Рис. 5.2.

$$\sum_{v\in G}\deg v' = 1+2+3+2+2 = 10 = \sum_{v\in G}\deg v'' = = 2+1+2+2+3 = 10 = m.$$

Приклад 5.3. На рис. 5.3 зображені графи $G_1 - G_{13}$ з п'ятьма вершинами в кожному. Порівняти графи.

Розв'язування:

Графи $G_1 - G_9$ - неорієнтовані графи, а $G_{10} - G_{13}$ - орієнтовані.

Графи G_1 і G_4 - повні, причому $G_1 = G_4$.

Граф G_5 не є повним, тому що незважаючи на то, що кожна пара вершин з'єднана ребром, є петля.

Графи G_3 і G_9 є мультиграфами, тому що містять кратні ребра.

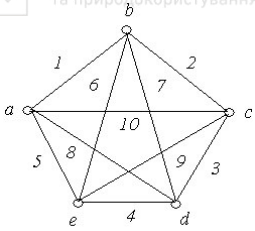
Граф G_6 - має порожню множину ребер, всі вершини графа є ізольованими.

Графи G_7 і G_8 є доповненням друг до друга.

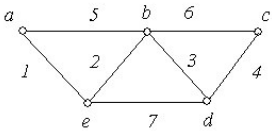
Графи G_{10} і G_{11} не є рівними, тому що ребра 5 мають різний напрямок.

Граф G_{12} - орієнтований мультиграф, тому що має кратні ребра, у той час як граф G_{13} не є мультиграфом, тому що ребра 8 і 9 по-різному орієнтовані.

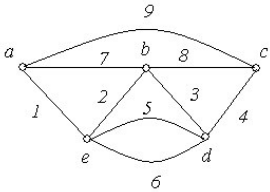
Національний університет
водного господарства
та природокористування



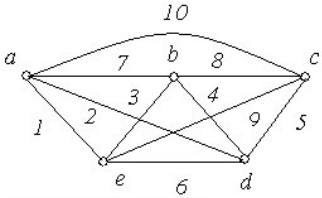
G_1



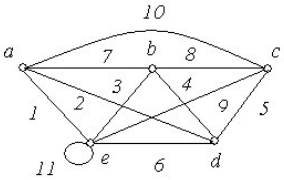
G_2



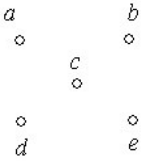
G_3



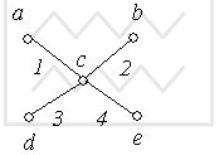
G_4



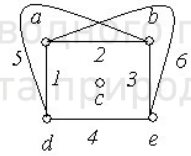
G_5



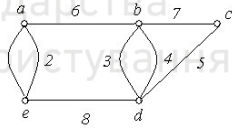
G_6



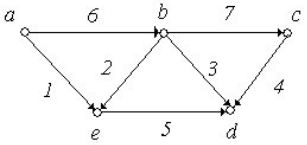
G_7



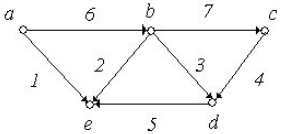
G_8



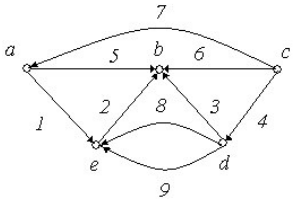
G_9



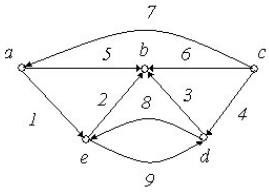
G_{10}



G_{11}



G_{12}



G_{13}

Рис. 5.3.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Приклад 5.4. Задати матрицями інцидентності і суміжності, а також списком ребер, неорієнтований граф, зображений на рис. 5.4.

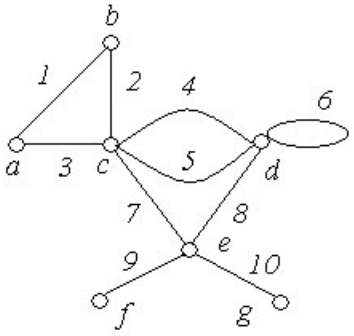


Рис. 5.4.

Розв'язування:

Матриця інцидентності

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
b	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
c	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0
d	0	0	0	1	1	2	0	1	0	0
e	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
f	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Матриця суміжності

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
a	0	1	1	0	0	0	0
b	1	0	1	0	0	0	0
c	1	1	0	2	1	0	0
d	0	0	2	1	1	0	0
e	0	0	1	1	0	1	1
f	0	0	0	0	1	0	0
g	0	0	0	0	1	0	0

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Тут $\alpha = 2$.

Список ребер

Ребро		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Вершини	Початок	*a*	*b*	*a*	*c*	*c*	*d*	*c*	*d*	*e*	*e*
	Кінець	*b*	*c*	*c*	*d*	*d*	*d*	*e*	*e*	*f*	*g*

Як бачимо, у кожному стовпці матриці інцидентності є тільки два елементи, відмінних від нуля (або один, якщо ребро – петля).

Матриця суміжності симетрична щодо головної діагоналі.

Список ребер є найбільш компактним способом завдання графів.

Кожний із наданих способів однозначно описує граф, зображений на рис. 5.4.

Приклад 5.5. Задати матрицями інцидентності, суміжності, списком ребер орієнтований граф, зображений на рис.5.5.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

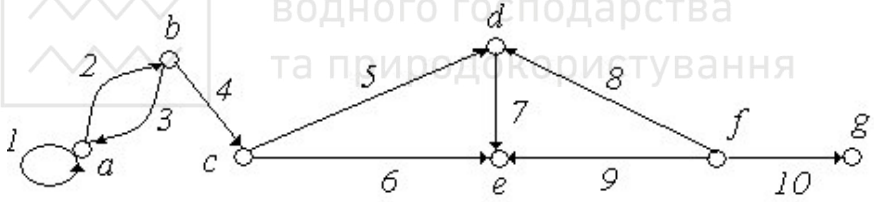


Рис. 5.5.

Розв'язування:

Матриця інцидентності

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	2	−1	1	0	0	0	0	0	0	0
b	0	1	−1	−1	0	0	0	0	0	0
c	0	0	0	1	−1	−1	0	0	0	0
d	0	0	0	0	1	0	−1	1	0	0
e	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0
f	0	0	0	0	0	0	0	−1	−1	−1
g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Матриця суміжності

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
a	1	1	0	0	0	0	0
b	1	0	1	0	0	0	0
c	0	0	0	1	1	0	0
d	0	0	0	0	1	0	0
e	0	0	0	0	0	0	0
f	0	0	0	1	1	0	1
g	0	0	0	0	0	0	0

Список ребер

Ребро		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Вершини	початок	*a*	*a*	*b*	*b*	*c*	*c*	*d*	*f*	*f*	*f*
	кінець	*a*	*b*	*a*	*c*	*d*	*e*	*e*	*d*	*e*	*g*

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Відмінність матриці інцидентності орієнтованого графа від неорієнтованого складається у вказівці початку і кінця ребер. Матриця суміжності губить свою симетричність. У списку ребер важливий порядок вказівки вершин, що з'єднують зазначеним ребром (від початку до кінця).

Як відзначалося вище, всі розглянуті способи завдання графів однозначно визначають граф. Виникає питання: чи можливо відновити граф по заданих матрицях інцидентності, суміжності або списку ребер? Очевидна позитивна відповідь.

По матриці інцидентності число ребер і вершин визначається з розмірності матриці: число ребер $|E|$ графа дорівнює числу стовпців m, а число вершин $|V|$ - числу рядків n матриці.

По матриці суміжності число вершин визначається з розмірності матриці. Число ребер графа дорівнює сумі елементів, розташованих на

Національний університет
водного господарства
та природокористування

головній діагоналі і у верхньому правому трикутнику. Число ребер орграфа дорівнює сумі всіх елементів матриці суміжності.

Список ребер є скороченим варіантом матриці інцидентності. Кількість ребер очевидна, а кількість вершин дорівнює максимальному номеру всіх перерахованих вершин зі списку.

Знаючи матрицю інцидентності можна записати список ребер, і навпаки.

Побудова матриці інцидентності за списком ребер. Кожен рядок списку ребер відповідає рядку в матриці инцидентності з тим же номером. Для неорієнтованого графа в кожному рядку списку ребер зазначені номери елементів матриці інцидентності, рівні 1 (всі інші елементи – нулі). Для орієнтованого графа першою вказується вершина, що відповідає початку ребра (у матриці інцидентності – елемент -1), а другий – відповідному кінцю ребра (у матриці інцидентності – елемент 1). При збігу елементів у рядку списку ребер, у відповідному рядку матриці інцидентності записується число, відмінне від -1, 0, 1, наприклад, 2. Така ситуація відповідає наявності у графі петель.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Приклад 5.6. Побудувати матрицю інцидентності неорієнтованого графа за списком ребер:

Ребро		1	2	3	4	5	6	7	8
Вершини	початок	*a*	*d*	*e*	*C*	*a*	*d*	*b*	*f*
	кінець	*d*	*f*	*f*	*E*	*b*	*c*	*f*	*f*

Розв'язування:

Матриця інцидентності, відповідно до списку ребер, має вигляд:

	1	2	3	4	5	6	7	8
a	1	0	0	0	1	0	0	0
b	0	0	0	0	1	0	1	0
c	0	0	0	1	0	1	0	0
d	1	1	0	0	0	1	0	0
e	0	0	1	1	0	0	0	0
f	0	1	1	0	0	0	1	2

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Приклад 5.7. Записати список ребер відповідно до матриці інцидентності орієнтованого графа:

	1	2	3	4	5	6	7	8
a	1	0	0	0	0	0	0	−1
b	−1	−1	0	0	0	0	0	0
c	0	1	2	−1	0	0	0	0
d	0	0	0	1	2	−1	0	0
e	0	0	0	0	0	1	−1	0
f	0	0	0	0	0	0	1	1

Розв'язування:

Список ребер, записаний відповідно до матриці інцидентності орієнтованого графа має вигляд:

Ребро		1	2	3	4	5	6	7	8
Вершини	початок	*b*	*b*	*c*	*C*	*d*	*d*	*e*	*a*
	кінець	*a*	*c*	*c*	*D*	*d*	*e*	*f*	*f*

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Задачі для виконання

5.1. Визначити степені вершин графів G_1 - G_{13} (рис. 5.3).

5.2. Визначити доповнення $\overline{G}$ графів G, зображених на рис. 5.6. Побудувати повні графи.

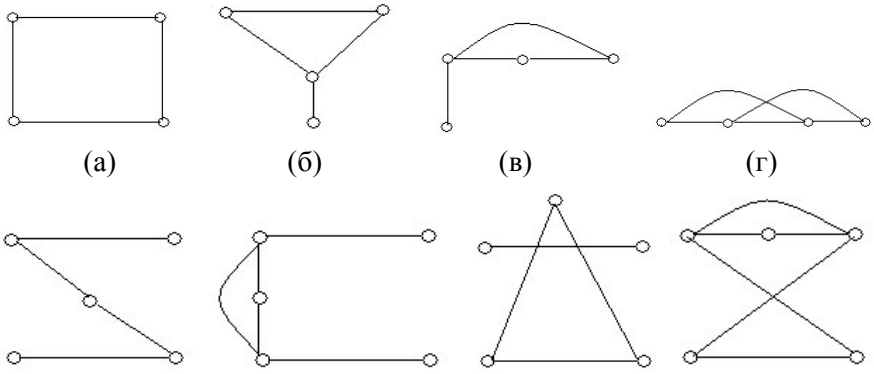
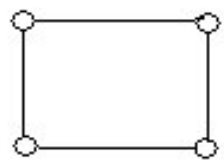


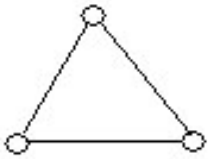
Рис. 5.6.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

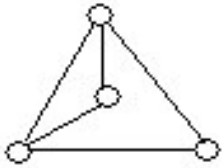
5.3. Які пари графів, представлених на рис. 5.7, ізоморфні?



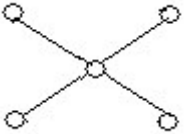
G_1



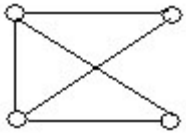
G_2



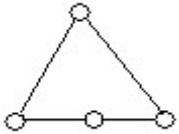
G_3



G_4

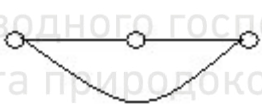


G_5

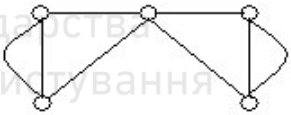


G_6

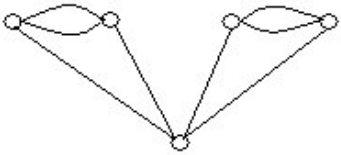
G_7



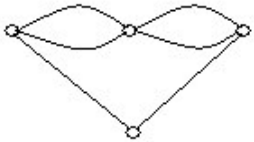
G_8



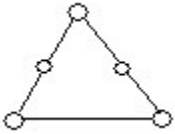
G_9



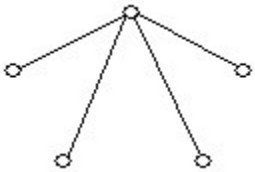
G_{10}



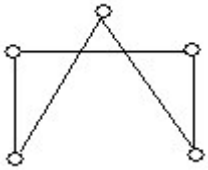
G_{11}



G_{12}



G_{13}



G_{14}

Рис. 5.7.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

5.4. Задати матрицями інцидентності, суміжності і списком ребер неорієнтовані графи, зображені на рис. 5.8:

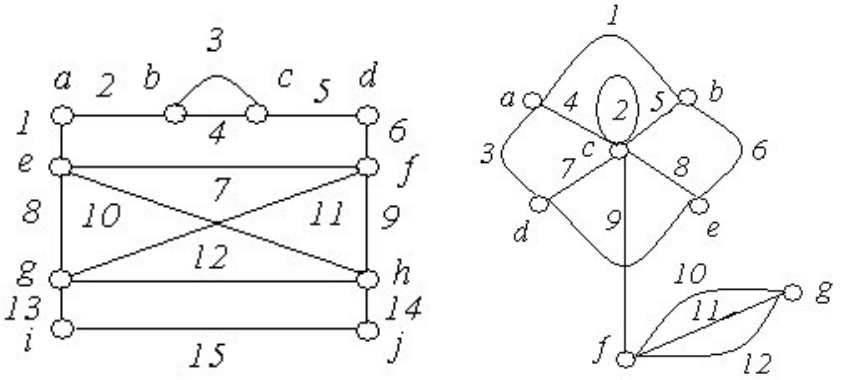


Рис. 5.8.

5.5. Задати матрицями інцидентності, суміжності і списком ребер орієнтовані графи, зображені на рис. 5.9:

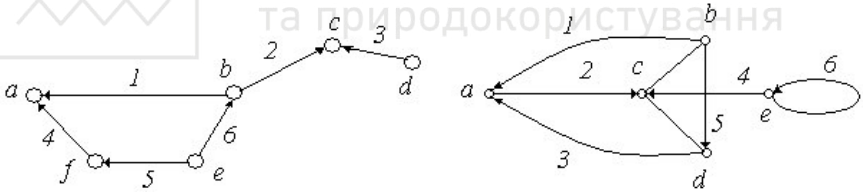


Рис. 5.9.

5.6. Для заданої матриці інцидентності знайти відповідний граф.

	1	2	3	4	5	6	7	8
a	1	0	1	0	0	1	0	0
b	0	1	0	1	0	0	1	0
c	0	1	1	0	1	0	0	1
d	1	0	0	1	1	0	0	0
e	0	0	0	0	0	1	1	1

Національний університет
водного господарства
та природокористування

5.7. Для заданої матриці суміжності знайти відповідний граф.

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
a	0	0	1	0	1	0
b	0	0	1	0	1	1
c	1	1	0	1	0	0
d	0	0	1	0	1	1
e	1	1	0	1	0	0
f	0	1	0	1	0	0

Заняття 6. Маршрут, шлях, ланцюг та цикл. Ейлерові та гамільтонові графи

Контрольні питання

1. Яке ребро називають «ребром розрізу»? «мостом»?
2. Який граф називають ейлеровим?
3. Який граф називають гамільтоновим?
4. Що таке хроматичне число графа?
5. З яких елементів складається матриця відстаней графа?

Приклади розв'язування задач

Приклад 6.1. Визначити можливі маршрути (і їхню довжину) з вершини v_0 в v_8 у графі, зображеному на рис. 6.1.

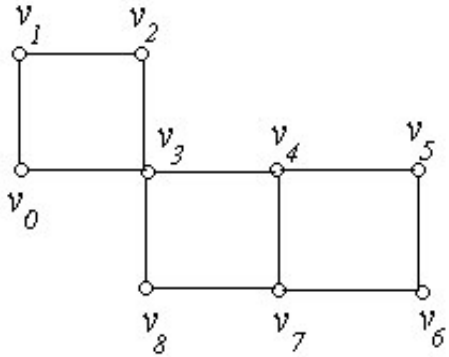


Рис. 6.1.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Розв'язування:

З вершини v_0 у v_8 ведуть, наприклад, шляхи:

1) $v_0v_3v_8$ - довжини 2;
2) $v_0v_1v_2v_3v_8$ - довжини 4;
3) $v_0v_3v_4v_7v_8$ - довжини 4;
4) $v_0v_3v_4v_5v_6v_7v_8$ - довжини 6;
5) $v_0v_3v_4v_5v_4v_7v_8$ - довжини 6;
6) $v_0v_1v_2v_3v_4v_7v_8$ - довжини 6;
7) $v_0v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_7v_8$ - довжини 8;
8) $v_0v_1v_2v_3v_4v_7v_6v_5v_4v_3v_8$ - довжини 10.

Шляхи: 6), 8) не є простими.

Визначення 6.1. Множина ребер C зв'язного графа G називається *множиною розрізу*, якщо видалення ребер із множини C порушує зв'язність графа, а видалення власної підмножини множини C залишає граф зв'язним. Якщо множина C складається з одного ребра, то це ребро називається *ребром розрізу*.

Приклад 6.2. Визначити ребра розрізу графа, зображеного на рис. 6.2.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

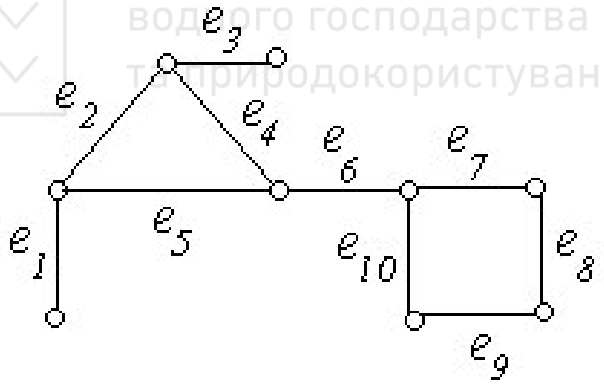


Рис. 6.2.

Розв'язування.

Ребра e_1, e_3 і e_6 - є ребрами розрізу. Їх видалення порушує зв'язність графа.

Приклад 6.3. Визначити множини розрізу для графа, зображеного на рис. 6.3.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

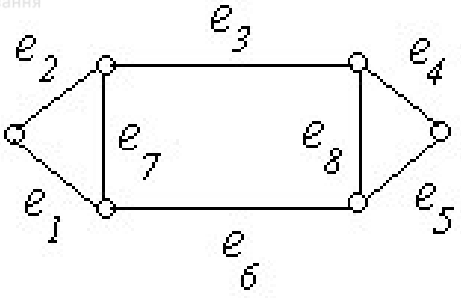


Рис. 6.3.

Розв'язування:

Множинами розрізу для даного графа можуть бути, наприклад: $\{e_1, e_2\}$, $\{e_4, e_5\}$, $\{e_3, e_6\}$, $\{e_2, e_4, e_7, e_8\}$, $\{e_1, e_4, e_7, e_5\}$ і т.д.

Алгоритм знаходження відстаней від даної вершини v_0 ***до інших вершин графа*** G:

1) позначаємо через $A_0 = \{v_0\}$;
2) позначаємо індексом 0 всі вершини, суміжні з вершиною v_0, виписуємо множину A_1 всіх цих вершин з їхніми позначками;
3) кожну вершину, що не належить множині $A_0 \cup A_1$ і суміжну з кожною з вершин, що належать множині A_1, позначаємо індексом v'; виписуємо множину A_2 всіх цих вершин з їхніми позначками …;

n) повторюємо описану процедуру доти, поки множина непомічених вершин не виявиться порожньою.

Приклад 6.4. Визначити відстань від вершини 7 (для зручності запису позначимо вершини графа арабськими цифрами) до всіх вершин графа G, зображеного на рис. 6.4.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

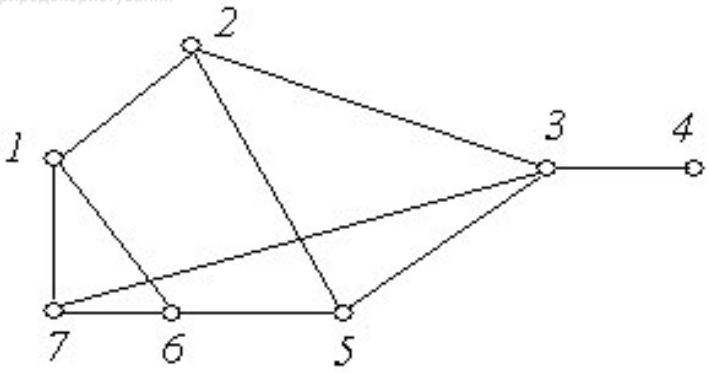


Рис. 6.4.

Розв'язування:

Згідно алгоритму відстань від вершини 7 будемо шукати в такий спосіб:

1) $A_0 = \{7\}$; 2) $A_1 = \{1_7, 3_7, 6_7\}$; 3) $A_2 = \{2_{1,3}, 5_{3,6}, 4_3\}$.

Більше непомічених вершин немає. Тобто відстані від вершини 7 до кожної з вершин графа такі:

$$d(7,1) = d(7,3) = d(7,6) = 1;\ d(7,2) = d(7,4) = d(7,5) = 2.$$

Для визначення центра і радіуса графа необхідно побудувати для нього *матрицю відстаней* A, кожен елемент якої a_{ij} описує відстань між вершинами i і j графа G, тобто $a_{ij} = d(v_i, v_j)$. Очевидно, що матриця відстаней A симетрична щодо головної діагоналі (елементи якої дорівнюють нулю, тому що $d(v_i, v_i) = 0$).

Визначення 6.2. *Центром графа* називається вершина, від якої максимальна з відстаней до інших вершин була б мінімальною.

Визначення 6.3. *Периферійною точкою графа* називається вершина, від якої максимальна з відстаней до інших вершин була б максимальна.

Визначення 6.4. Максимальна відстань від центра графа G до його вершин називається *радіусом графа* $r(G)$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Приклад 6.5. Визначити центр, периферійні вершини, радіус і діаметр графа G, зображеного на рис. 6.5.

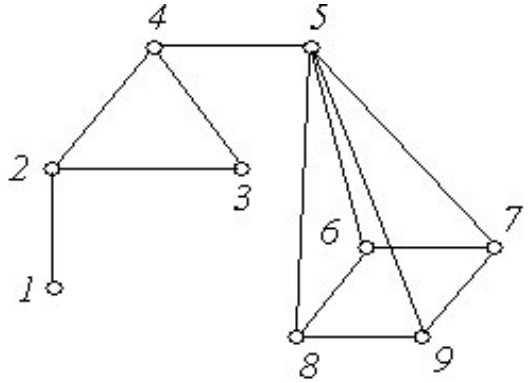


Рис. 6.5.

Розв'язування:

Матриця відстаней графа G має вигляд.

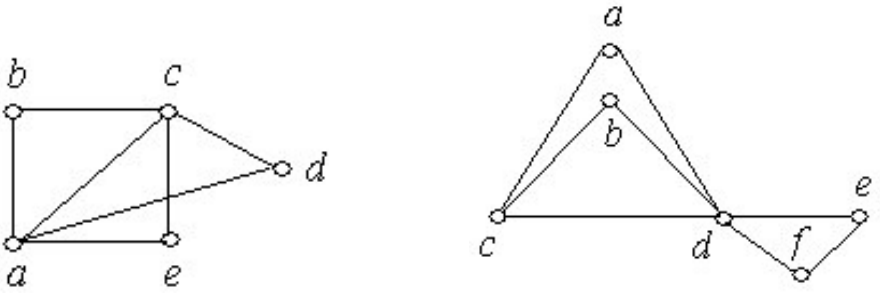
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	0	1	1	2	3	4	4	4	4
2	1	0	1	1	2	3	3	3	3
3	1	1	0	1	2	3	3	3	3
4	2	1	1	0	1	2	2	2	2
5	3	2	2	1	0	1	1	1	1
6	4	3	3	2	1	0	1	1	2
7	4	3	3	2	1	1	0	1	1
8	4	3	3	2	1	1	1	0	1
9	4	3	3	2	1	2	1	1	0

Знайдемо максимальну відстань від кожної з вершин графа $l(v_i)$ як $\max\limits_{1\le j\le 9} a_{ij}$: $l(1)=4$; $l(2)=3$; $l(3)=3$; $l(4)=2$; $l(5)=3$; $l(6)=4$; $l(7)=4$; $l(8)=4$; $l(9)=4$.

Отже, згідно з визначеннями 6.2- 6.4, центром графа є вершина 4; периферійні вершини – 1, 6, 7, 8, 9. Радіус графа $r(G)=2$, а діаметр графа $D(G)=4$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Приклад 6.6. Чи мають графи, зображені на рис. 6.6 (а, б), ейлеров цикл?



(а) (б)

Рис. 6.6.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Розв'язування:

Щоб відповістити на поставлене запитання, порахуємо степені вершин графа:

а) $\deg(a)=4$; $\deg(b)=2$; $\deg(c)=4$; $\deg(d)=2$; $\deg(e)=2$.

Степені всіх вершин графа, зображеного на рис. 6.6 (а), парні, отже, граф має ейлеров цикл;

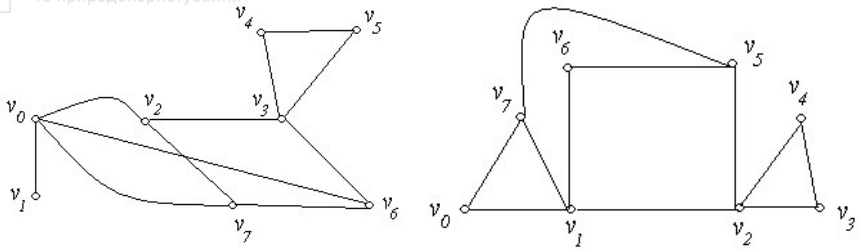
б) $\deg(a)=2$; $\deg(b)=2$; $\deg(c)=3$; $\deg(d)=5$; $\deg(e)=2$; $\deg(f)=2$.

Степені вершин c і d графа, зображеного на рис. 6.6 (б), непарні, отже, граф не має ейлерового циклу.

Задачі для виконання

6.1. Для неорієнтованих графів, зображених на рис. 6.7 (а,б), привести приклади: маршруту; ланцюга; простого ланцюга; циклічного маршруту; циклу; простого циклу.

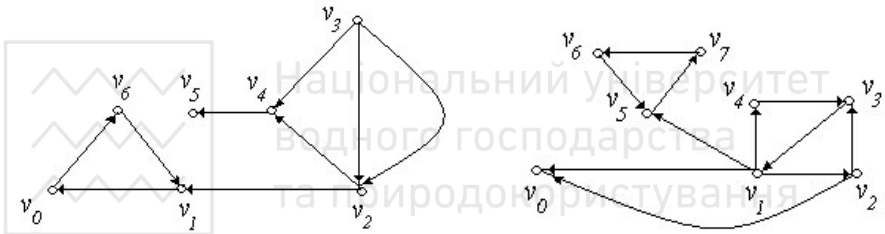
Національний університет
водного господарства
та природокористування



(а) (б)

Рис. 6.7.

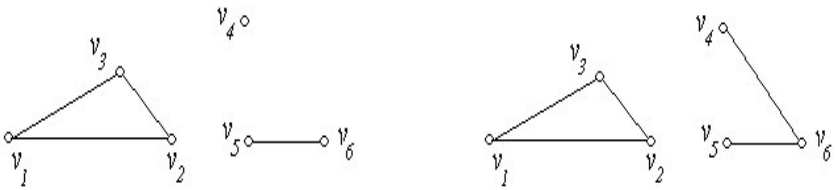
6.2. Для орієнтованих графів, зображених на рис. 6.8 (а,б), привести приклади: шляху; орієнтованого ланцюга; простого ланцюга; контуру; циклу; простого циклу.



(а) (б)

Рис. 6.8.

6.3. Визначити число компонент зв'язності у графах G, зображених на рис. 6.9 (а,б).

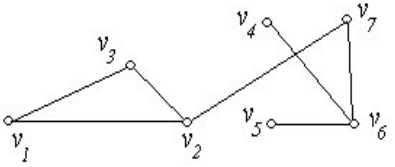


(а) (б)

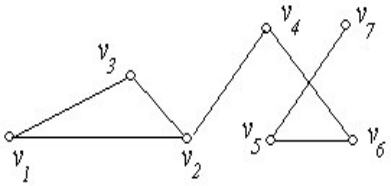
Рис. 6.9.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

6.4. Знайти на графах G, зображених на рис. 6.10 (а,б), всі точки зчленування і мости:



(а)

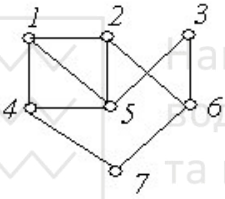


(б)

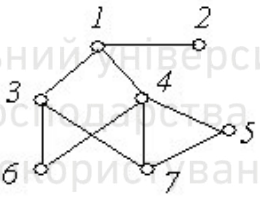
Рис. 6.10.

6.5. Визначити відстані від зазначеної вершини до всіх вершин графа G, зображеного на рис 6.11 (а,б):

а) від вершини 5; б) від вершини 2;



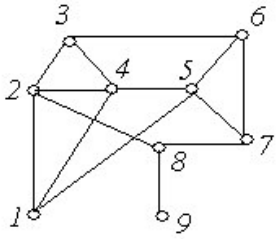
(а)



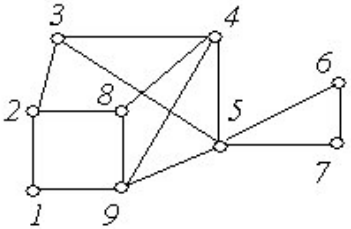
(б)

Рис. 6.11.

6.6. Визначити центр, периферійні точки, радіус, діаметр графа G, зображеного на рис. 6.12 (а,б):



(а)



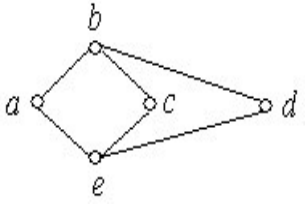
(б)

Рис. 6.12.

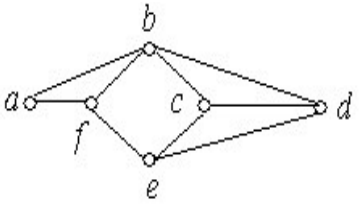
Національний університет
водного господарства
та природокористування

6.7. Серед графів, що наведені на рис. 6.13 (а-д), знайти ті, які мають ейлеров цикл. Обґрунтувати відповідь.

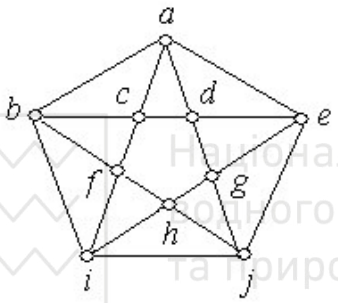
а)



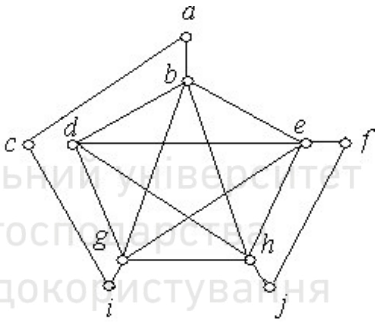
б)



в)



г)



д)

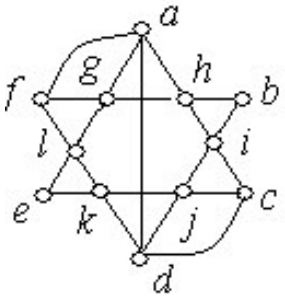
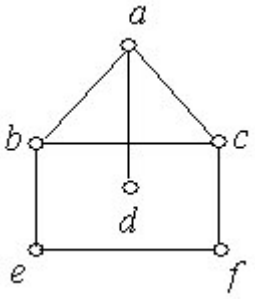


Рис. 6.13.

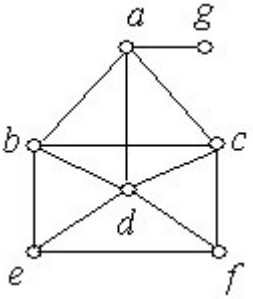
6.8. Серед графів, що наведені на рис. 6.14 (а-е), знайти ті, які мають власний ейлеров шлях. Обґрунтувати відповідь.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

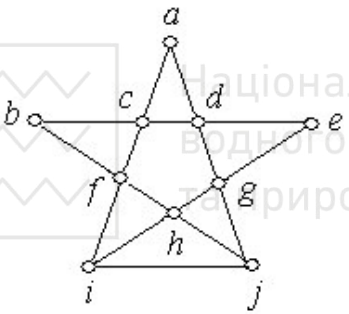
а)



б)

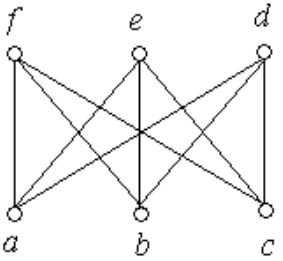


в)



г)

д)



е)

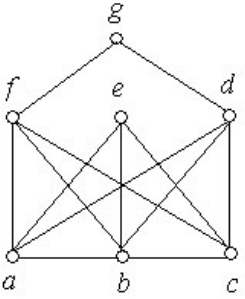
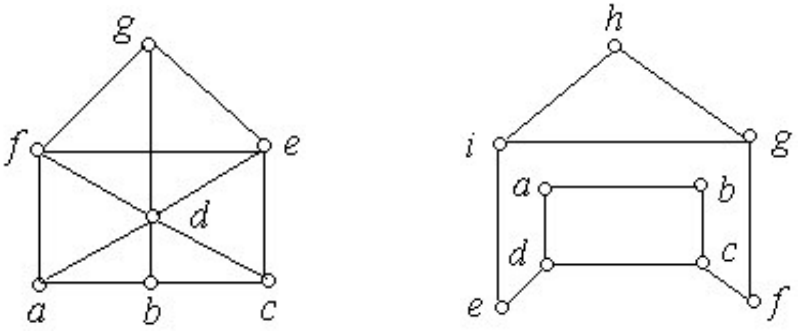


Рис. 6.14.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

6.9. Знайдіть цикл Гамільтона, якщо він існує, для кожного з графів наведених на рис. 6.15 (а-г).

а) б)



в) г)

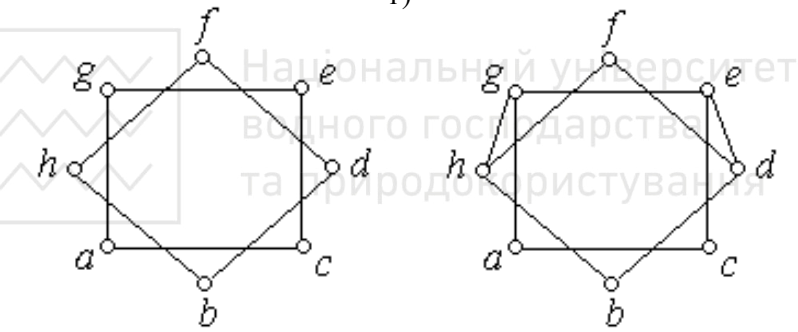


Рис. 6.15.

2. Знайдіть шлях Гамільтона, якщо він існує, для кожного з наведених графів (рис. 6.15).

Заняття 7. Дерева. Бінарне дерево пошуку. Побудова мінімальних кістякових дерев

Контрольні питання

1. Який граф називають деревом?
2. Як визначити висоту дерева?
3. Що таке цикломатичне число графа?
4. Що означає «мінімальне покриваюче дерево»?

Національний університет
водного господарства
та природокористування

5. За допомогою якого алгоритму можна побудувати мінімальне покриваюче дерево?
6. За допомогою якого алгоритму можна визначити найкоротші маршрути між вершинами графа?

Приклади розв'язування задач

Приклад 7.1. Для кореневого дерева, зображеного на рис. 7.1, визначити рівень вершини d , висоту дерева.

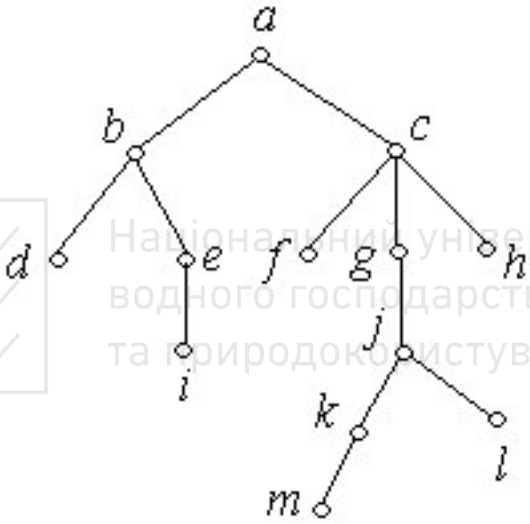


Рис. 7.1.

Розв'язування:

Рівень вершини d дорівнює двом; а висота дерева з коренем у вершині a дорівнює максимальному шляху від кореня до вершини m - $acgjkm$ -дорівнює п'яти.

Приклад 7.2. Визначити батьків і синів, братів, предків і нащадків кореневого орієнтованого дерева, зображеного на рис. 7.2.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

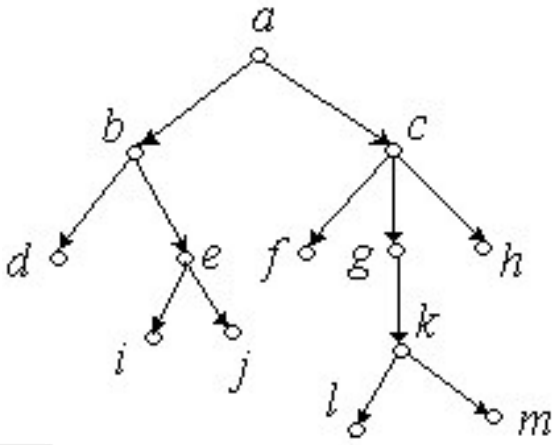


Рис. 7.2.

Розв'язування:

a є батьком b і c; b - батьком d і e; c - батьком f, g і h; e - батьком i і j; g - батьком k; k - батьком l і m. І навпаки: b і c - сини a; d і e - сини b; f, g і h - сини c; i і j - сини e; k - син g; l і m - сини k.

Груп нащадків і предків можна виділити дуже багато, наведемо лише деякі приклади: d, e, i, j - нащадки b, отже, b - предок для d, e, i, j; l є нащадком c, отже, c - предок l.

Приклад 7.3. Побудувати бінарне дерево пошуку для такого списку слів в українському алфавіті: математика, фізика, географія, зоологія, метеорологія, біологія, психологія, хімія.

Процес побудови бінарного дерева пошуку зображено на рис. 7.3

Національний університет
водного господарства
та природокористування

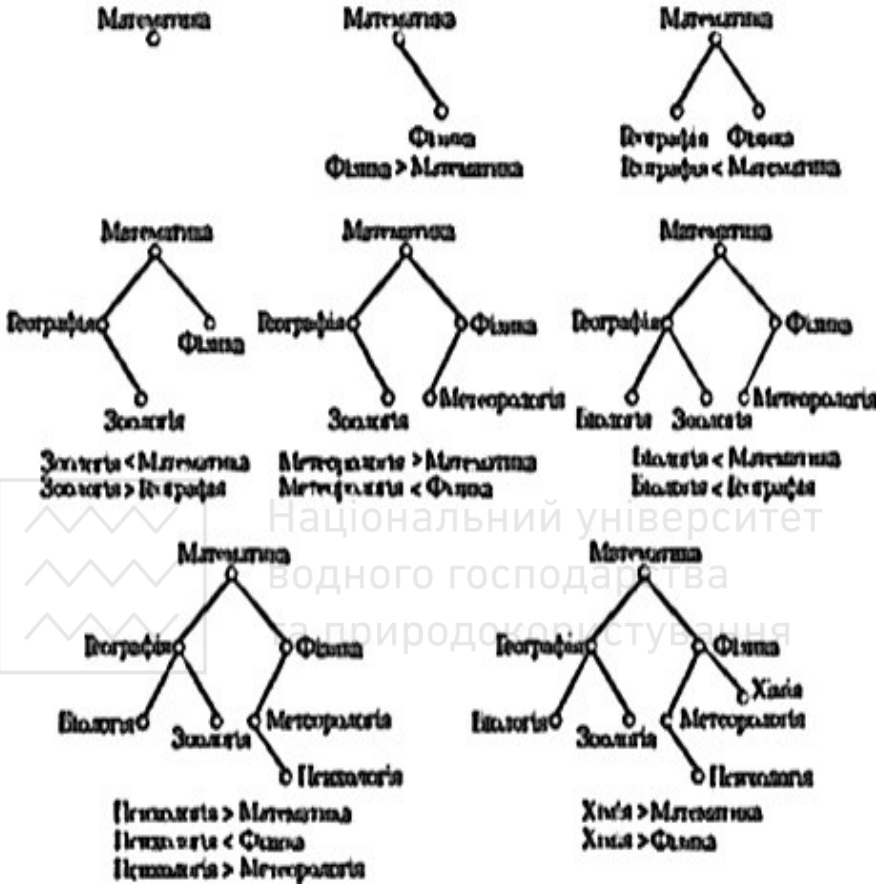


Рис. 7.3.

Приклад 7.4. Заданий зв'язний зважений граф з 9 вершинами (рис.7.4). Побудувати мінімальне покриваюче дерево.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

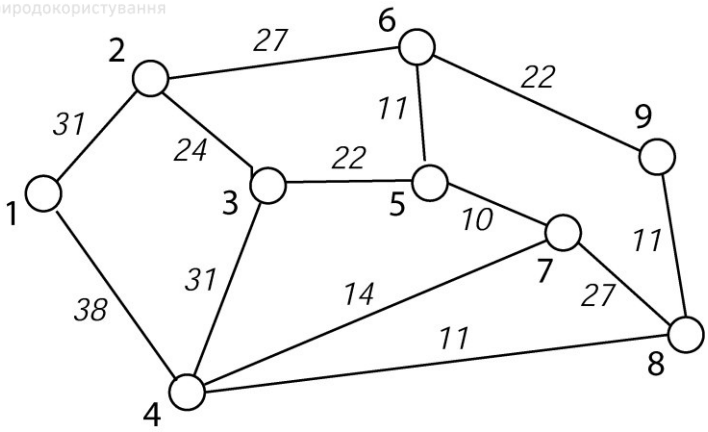


Рис. 7.4.

Застосовуємо алгоритм Пріма – Краскала (жадібний алгоритм). Він має наступний вигляд.

1.1. Вибираємо ще не розглянуте ребро мінімальної довжини. У нашому випадку це ребро (5,7). Помічаємо розглянуте ребро хрестиком.

1.2. Приєднуємо розглянуте ребро (5,7) до раніше вибраних ребер при умові, що при цьому не утвориться цикл. Сполучаємо на схемі відповідні вершини. Якщо не всі ребра переглянуті, повертаємось до пункту 1.

В результаті перегляду всіх ребер із застосуванням алгоритму Пріма – Краскала отримано мінімальне покриваюче дерево для розглядуваного графа, представлене на рис.7.5. Сума ваг ребер становить 134.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

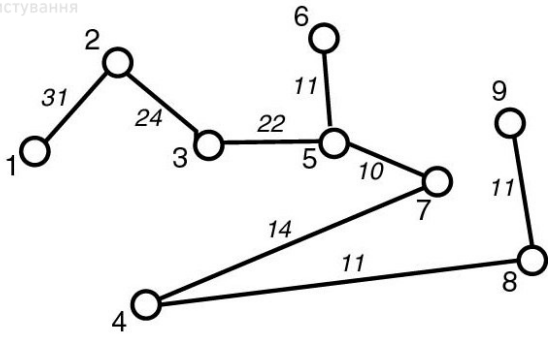
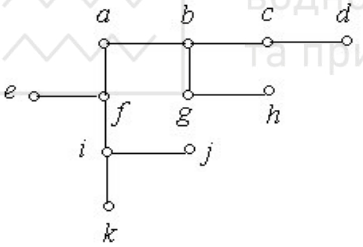


Рис.7.5.

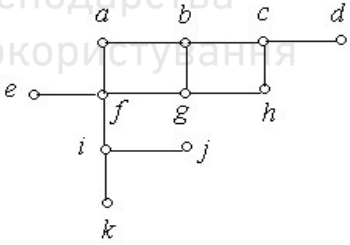
Задачі для виконання

7.1. Які з наведених на рис. 7.6 (а- г) графів є деревами:

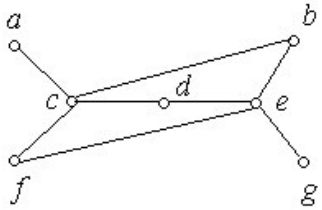
а)



б)



в)



г)

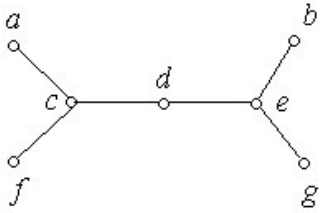


Рис. 7.6.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

7.2. Для кожного дерева з попередньої вправи:

а) використати як корінь вершину d і намалювати кореневе дерево;

б) намалювати породжене кореневе орієнтоване дерево.

7.3. Для кореневих орієнтованих дерев, отриманих у завданні 7.2:

а) знайдіть нащадків вершини c ;

б) знайдіть предків вершини e ;

в) знайдіть батька вершини f ;

г) знайдіть синів вершини d ;

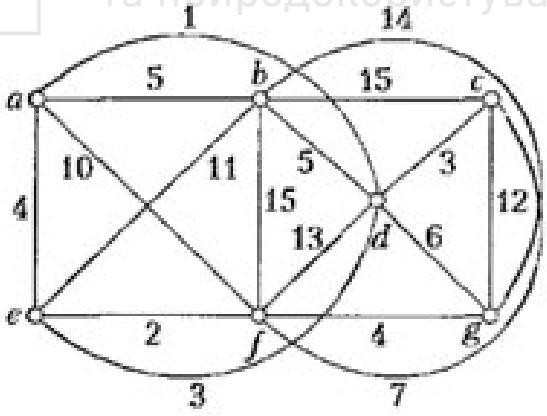
д) знайдіть висоту дерева;

е) знайдіть рівень вершини g ;

ж) знайдіть листи дерева.

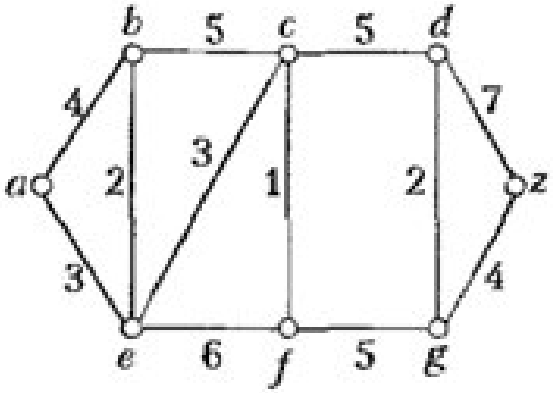
7.4. Побудувати бінарне дерево пошуку для слів: *banana, peach, pear, apple, coconut, mango, papaya.*

7.5. За алгоритмом Пріма-Краскала для наведеного нижче графа побудувати мінімальний каркас.

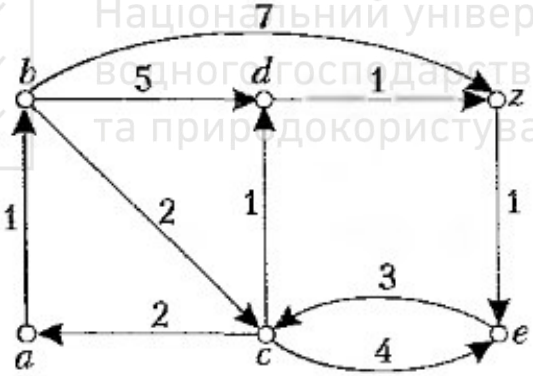


7.6. За допомогою алгоритму Дейкстри знайти найкоротший шлях у неорієнтованому графі

Національний університет
водного господарства
та природокористування



7.7. За допомогою алгоритму Дейкстри знайти найкоротший шлях у орієнтованому графі



Заняття 8. Теорія алгоритмів. Алгоритми на графах

Контрольні питання

1. Які основні вимоги до алгоритмів?
2. Які основні властивості алгоритмів?
3. В чому сутність алгоритму бектрекінгу?
4. Як перевірити, чи є заданий граф гамільтоновим?
5. Як формулюється задача комівояжера?

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Приклади розв'язування задач

Приклад 8.1. Необхідно знайти у графі G на рис. 8.1 (а) маршрут, який з'єднує вершини v_1 та v_5.

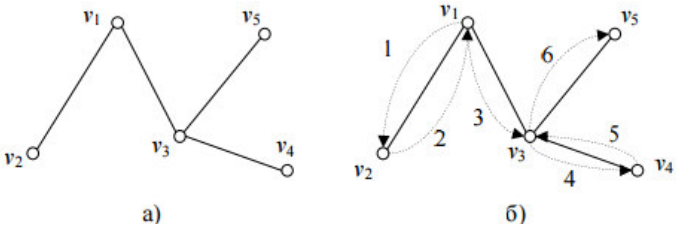
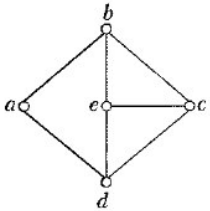


Рис. 8.1. Приклад роботи алгоритму Террі

На рис. 8.1 (б) показаний один із можливих варіантів руху по графу G згідно з алгоритмом Террі. Пронумерованими штриховими дугами зображено схему руху по графу G. Ця схема руху відповідає маршруту (v_1, v_2, v_1, v_3, v_4, v_3, v_5). Після того, як із вершини v_1 зайшли у вершину v_3 (дуга 3), не можна повернутися у v_1, оскільки існують інші можливості, а (v_1, v_3) є першим ребром, що заходить у v_3. Далі, після того, як із вершини v_4 зайшли у вершину v_3 (дуга 5), не можна рухатися до вершини v_1, і, таким чином, залишається єдина можливість – рухатися до вершини v_5.

Приклад 8.2. Знайти гамільтонів цикл у заданому графі.



Розв'язування:

Починаємо з довільної вершини. Будуємо шлях без повторення вершин, доки це можливо. Якщо вдалося пройти всі вершини, то

Національний університет
водного господарства
та природокористування

перевіряємо, чи існує ребро, що з'єднує останню й початкову вершини цього шляху. Якщо описаний процес у певний момент неможливо продовжити, то повертаємося на одну вершину назад і намагаємося продовжити побудову шляху (без повторення вершин) іншим способом.

Пошук усіх гамільтонових циклів у заданому графі проілюстровано за допомогою дерева, зображеного на рис. 8.2. Роботу алгоритму почато з одноелементної послідовності, бо в циклі вибір першої вершини неістотний. Розв'язки задачі обведено, і до них у прямокутних рамках приписано відповідні гамільтонові цикли.

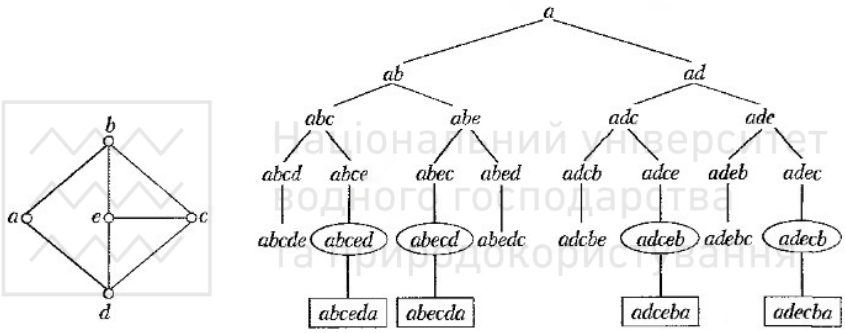
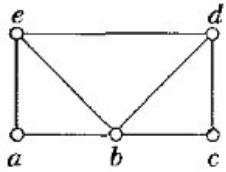


Рис. 8.2.

Приклад 8.3. Розфарбувати граф в 3 кольори.



Розв'язування.

Спочатку розфарбуємо вершину a в колір 1, а потім — вершину b в той самий колір, якщо b не суміжна з вершиною a, а ні, то розфарбуємо вершину b в колір 2. Перейдемо до третьої вершини c. Використаємо для вершини c колір 1, якщо це можливо, а ні, то колір 2, якщо це можливо. Тільки якщо жоден із кольорів 1 і 2 не можна

Національний університет
водного господарства
та природокористування

використовувати, розфарбуємо вершину *c* в колір 3. Продовжимо цей процес, доки це можливо, використовуючи один з *n* кольорів для кожної повної вершини, причому завжди братимемо перший можливий колір зі списку кольорів. Досягнувши вершини, яку не можна розфарбувати в жоден з *n* кольорів, повертаємося до останньої розфарбованої вершини, відміняємо її колір і присвоюємо наступний можливий колір зі списку. Якщо й це неможливо, то ще раз повертаємося до попередньої вершини, відміняємо її колір і намагаємося присвоїти новий колір, наступний можливий зі списку. Цей процес продовжуємо аналогічно.

На рис. 8.3 зображено граф і процес присвоювання трьох кольорів вершинам із використанням алгоритму бектрекінг.

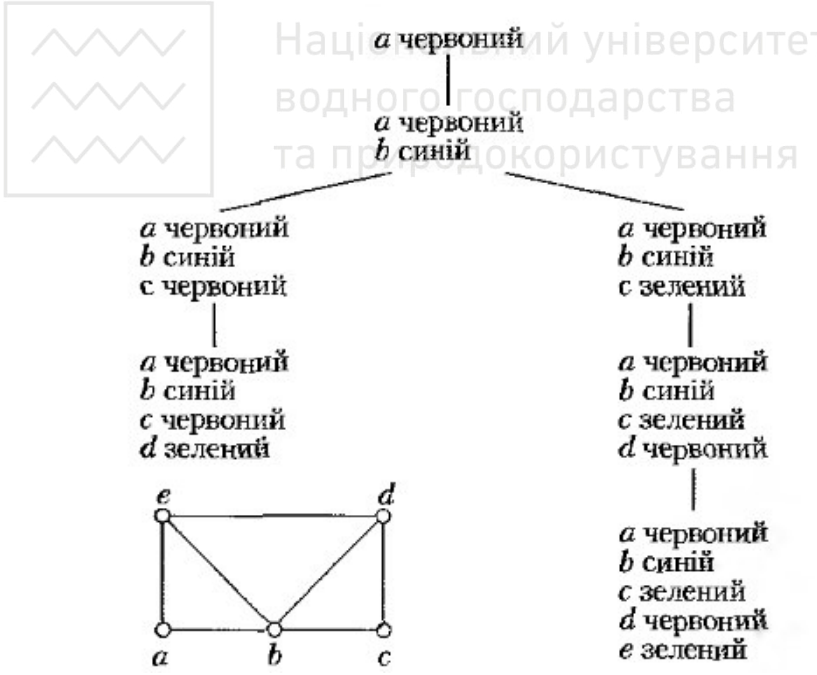


Рис. 8.3.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Приклад 8.4. ***Суми елементів підмножин.*** Задано множину натуральних чисел {31, 27, 15, 11, 7, 5}. Потрібно знайти її підмножину, сума елементів якої дорівнює 39.

Розв'язування.

Починаємо з порожньої множини. Нагромаджуємо суму, послідовно добираючи доданки. Число з послідовності {31, 27, 15, 11, 7, 5} долучають до суми, якщо сума після додавання цього числа не перевищує 39. Якщо сума настільки велика, що додавання будь-якого нового числа перевищує 39, то повертаємось і змінюємо останній доданок у сумі.

На рис. 8.4 проілюстровано розв'язування задачі із застосуванням алгоритму бектрекінг.

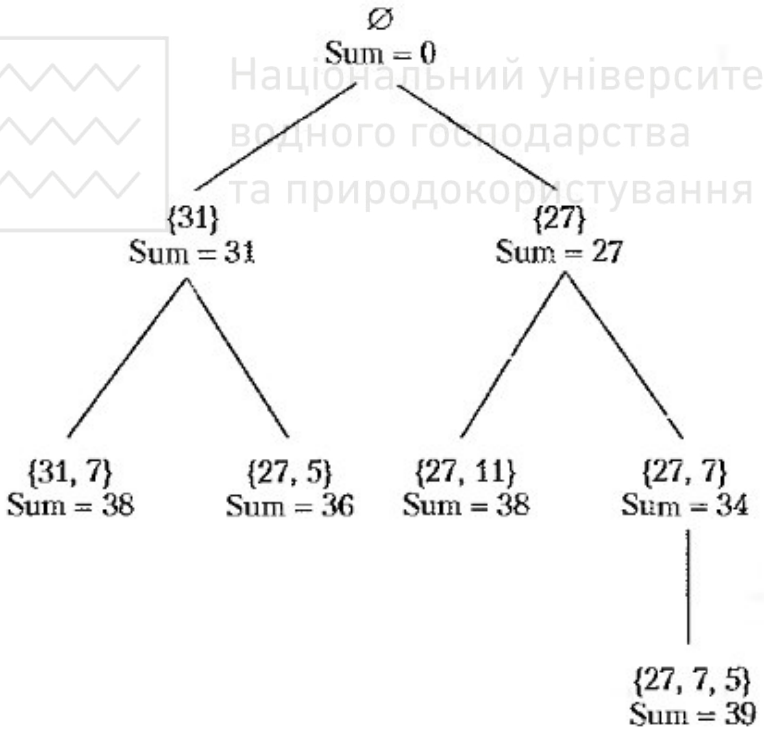


Рис. 8.4.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Задачі для виконання

8.1. Знайти у графі G маршрут, який з'єднує вершини 2 та 5 за допомогою алгоритму Террі (рис.8.5).

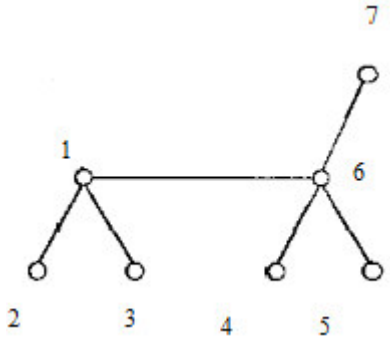


Рис. 8.5.

8.2. За допомогою алгоритму Фльорі зобразити в графі, що зображений на рис. 8.6, ейлеров цикл, якщо він існує.

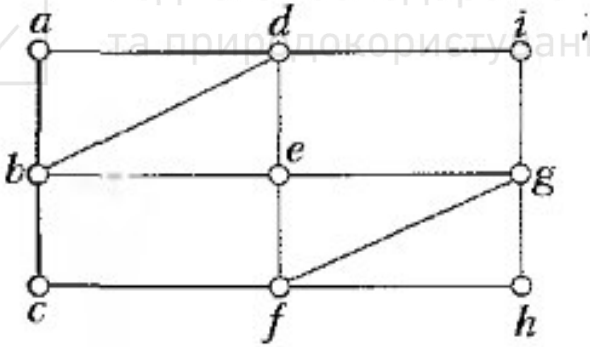


Рис. 8.6.

8.3. Знайдіть цикл Гамільтона, якщо він існує, для кожного з наведених графів (рис. 8.7) за допомогою бектрекінгу.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

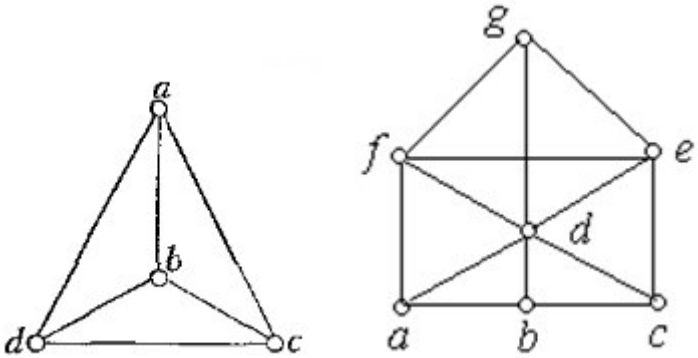


Рис. 8.7.

8.4. Розфарбувати вершини наведеного графа (рис. 8.8) в 3 кольори за допомогою бектрекінгу.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

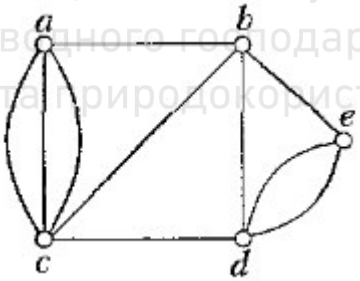


Рис. 8.8.

8.5. Відшукати за допомогою бектрекінгу підмножини множини {27, 24, 19, 14, 11, 8} із сумою:

а) 20; б) 41.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Література

1. Базилевич Л. Дискретна математика у прикладах і задачах: підручник - Львів : Видавець І.Е.Чижиков, 2013. - 487 с.

2. Бардачов Ю.М., Соколова Н.А., Ходаков В.Є. Дискретна математика. - К. Вища школа, 2007. – 383 с.

3. Ільків В.С., Каленюк П.І., Когут І.В., Пукач П.Я., Сохан П.Л., Нитребич З.М., Столярчук Р.Р., Ярка У.Б. Основи дискретної математики. Математична логіка. Теорія графів. Частина 2.—Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2011.-184 с.

4. Карнаух Т.О., Ставровський А.Б. Вступ до дискретної математики. Навчальний посібник. – Київ. – 109 с.

5. Конспект лекцій з дисципліни «Дискретний аналіз» для студентів спеціальності 7.050.102 «Економічна кібернетика» денної та заочної форм навчання / Укл.: В.М. Андрієнко, Т.Л. Будорацька. – Одеса: ОНПУ, 2007.

6. Ніколаєва К.В., Койбічук В.В. Дискретний аналіз. Частина 1: Посібник. – Суми: УАБС НБУ, 2006. – 100 с.

7. Нікольський Ю. В., Пасічник В. В., Щербина Ю. М. Дискретна математика: Підручник. — Львів: «Магнолія 2006», 2007.- 608 с.

8. Плотніков А.Д. Дискретний аналіз: Конспект лекцій (для студентів спеціальності „Економічна кібернетика" денної та заочної форм навчання). – ВФЕУ, 2007. – 42 с.

9. Семенюк В. Методичні вказівки до виконання практичних завдань з дисципліни "Дискретна математика" для студентів спеціальності "Прикладна математика" (6.080200). Ч.1. - Рівне, 1999. - 50 с.

10. Тишин В. В. Дискретная математика в примерах и задачах. — СПб.: БХВ-Петербург, 2008. – 352 с.

Національний університет
водного господарства
та природокористування