



Національний університет  
водного господарства  
та природокористування

Міністерство освіти і науки України

Національний університет водного господарства  
та природокористування

Кафедра економічної кібернетики



**06-11-25**

## МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ЗАВДАННЯ до виконання лабораторних робіт з дисципліни „Моделювання і прогнозування стану довкілля”

студентами напряму підготовки 6.040106 «Екологія, охорона навколо-  
лишнього середовища та збалансоване природокористування»  
денної та заочної форми навчання

Рекомендовано методичною комісією за  
напрямом підготовки 6.040106 «Еколо-  
гія, охорона навколо-лишнього середови-  
ща та збалансоване природокористу-  
вання»

Протокол № 5 від 23.12.2013р.

**Рівне – 2014**



Методичні вказівки та завдання до виконання лабораторних робіт з дисципліни «Моделювання і прогнозування стану довкілля» студентами напряму 6.040106 «Екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування» 06-11-25 / Грицюк П.М. – Рівне: НУВГП, 2014. – 58 с.

Упорядник: Грицюк П.М., д.е.н., професор, завідувач кафедри економічної кібернетики

Відповідальний за випуск: Грицюк П.М., завідувач кафедри економічної кібернетики

## Зміст

Вступ.....	3
Тема 1. Розрахунок залежності складників водного балансу від лісистості території.....	4
Тема 2. Парна лінійна регресія.....	9
Тема 3. Множинна лінійна регресія.....	12
Тема 4. Побудова аналітичної моделі тренду часового ряду..	15
Тема 5. Оцінювання якості моделі тренду часового ряду.....	20
Тема 6. Моделювання циклічної компоненти часового ряду..	23
Тема 7. Прогнозування погоди з використанням ланцюгів Маркова	29
Тема 8. Чисельні методи розв'язування задачі Коші .....	33
Тема 9. Моделювання динаміки популяцій .....	35
Тема 10. Дослідження стійкості нелінійної динамічної системи..	39
Тема 11. Моделювання поширення забруднення у водному середовищі .....	44
Тема 12. Побудова картодіаграми забруднення території викидами діючих підприємств .....	47
Тема 13. Прийняття рішень в умовах невизначеності .....	53
Література.....	58



## Вступ

Засвоєння методів моделювання та прогнозування складних систем, якими є біоценози – важлива складова підготовки інженера-еколога. Методи математичного моделювання екосистем, а також математичні методи дослідження отриманих моделей розглядаються в курсі “Моделювання і прогнозування стану довкілля”. Мета даної навчальної дисципліни полягає у формування вмінь побудови математичних моделей задач з області екології та отриманні навичок розв’язування задач з області екології та охорони довкілля із застосуванням сучасних математичних методів і сучасного програмного забезпечення.

В результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен знати:

- основні поняття теорії часових рядів;
- основні математичні методи розв’язування задач з області екології та охорони довкілля;
- алгоритми реалізації математичних методів у сучасних пакетах прикладного програмного забезпечення.

Студент повинен вміти:

- будувати математичні моделі основних задач з області біології, екології та охорони навколишнього середовища;
- аналізувати математичні моделі за допомогою сучасних математичних методів.
- використовувати основні методи короткострокового та довгострокового прогнозування

Методичні вказівки призначені для студентів, які навчаються за напрямом «Екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування» освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр». Методичні вказівки містять матеріал для проведення лабораторних робіт з дисципліни «Моделювання і прогнозування стану довкілля» з використанням комп’ютерних технологій. Методичні вказівки відповідають вимогам ECTS (European Credit Transfer System).



## Тема 1. Розрахунок залежності складників водного балансу від лісистості території

**Завдання.** Використовуючи дані Таблиці 1.1 провести розрахунки:

- фактичного відсотка лісистості;
- залежності зміни річної кількості опадів  $\Delta O$ , річної норми випарування  $\Delta V$ , річної норми поверхневого стоку  $\Delta Sp$ , річної норми підземного стоку  $\Delta Sg$  від параметра  $L(%)$  – лісистості (відношення території, зайятої лісами до загальної території регіону);
- графічно зобразити залежність  $\Delta Sp (L\%)$ ;
- визначити оптимальний відсоток лісистості (значення лісистості, при якому збільшення підземного стоку є максимальним);
- використовуючи значення фактичного і оптимального відсотка лісистості видати рекомендацію щодо залишення регіону.

### Теоретичні відомості

Для вихідних даних, які служать характеристикою регіону введемо наступні позначення:  $O(\text{мм})$  - опади (річна норма);  $V(\text{мм})$  - випаровування (річна норма);  $Sp(\text{мм})$  - поверхневий сток (річна норма);  $Sg(\text{мм})$  - підземний сток (річна норма);  $L(%)$  – лісистість (відношення території, зайятої лісами до загальної території регіону). Вищенаведені параметри зв'язує рівняння водного балансу

$$Sg = O - Sp - V. \quad (1.1)$$

Кожен з параметрів рівняння (1.1) є немонотонною функцією від лісистості (рис. 1.1). Завдання даної роботи полягає в наступному: підібрати такий відсоток лісистості, при якому підземний стік буде максимальним (саме цей параметр виявляє вирішальне значення для екологічної ситуації).

### Хід виконання роботи

1. За даними табл. 1.1 вибрati данi для розрахункiв (данi для однiєї з областей вибираються за номером варiантu). Розрахувати фактичний вiдсоток лiсистостi.
2. Заповнити верхню частину розрахункової табл. 1.3 даними пунктiв 1 - 2.



**Таблиця 1.1. Зміни опадів, поверхневого стоку, випаровування і підземного стоку при 100-відсотковій лісистості**

	Область	Опади		Поверхневий сток		Випаровування		Підземний сток		Площа загальнна	Площа під лісами
		факт	при-ріст	факт	змен-шення	факт	при-ріст	факт	при-ріст		
		O, м м	DO, мм	Sp, м м	Dsp, мм	V, м м	Dv, мм	Sg, м м	Dsg, мм	тис. га	тис. га
1	АР Крим	300	13	135	-115	135	62	30	66	2608	296
2	Вінницька	600	43	270	-216	270	66	60	193	2649	374
3	Волинська	500	50	225	-113	225	87	50	75	2014	678
4	Дніпропетрська	450	19	203	-172	203	67	45	124	3192	189
5	Донецька	450	16	203	-162	203	62	45	116	2652	202
6	Житомирська	550	51	248	-161	248	87	55	124	2983	1040
7	Закарпатська	700	63	315	-205	315	81	70	187	1275	716
8	Запорізька	450	16	203	-172	203	57	45	131	2718	114
9	Івано-Франківська	650	56	293	-190	293	80	65	166	1393	630
10	Київська	550	41	248	-161	248	80	55	122	2811	648
11	Кіровоградська	450	25	203	-172	203	63	45	134	2459	175
12	Луганська	450	14	203	-172	203	68	45	119	2668	338
13	Львівська	700	62	315	-205	315	81	70	185	2183	678
14	Миколаївська	350	15	158	-134	158	62	35	87	2459	120
15	Одеська	400	17	180	-153	180	63	40	107	3331	223
16	Полтавська	500	32	225	-180	225	73	50	139	2875	271
17	Рівненська	550	54	248	-149	248	87	55	115	2005	793
18	Сумська	550	35	248	-161	248	82	55	114	2383	446
19	Тернопільська	600	49	270	-176	270	77	60	148	1382	198
20	Харківська	550	22	248	-198	248	74	55	146	3142	416
21	Херсонська	350	15	158	-134	158	62	35	87	2846	152
22	Хмельницька	600	46	270	-189	270	69	60	166	2063	281
23	Черкаська	500	33	225	-180	225	71	50	142	2092	341
24	Чернівецька	600	49	270	-176	270	79	60	146	810	257
25	Чернігівська	550	42	248	-161	248	85	55	118	3192	710

3. Використовуючи залежність  $\Delta O(L)$  (%) розрахувати залежність  $\Delta O(L)$  (мм). Аналогічно вирахувати залежності  $\Delta Sp(L)$  (мм),  $\Delta V(L)$  (мм).



### ВПЛИВ ЛІСИСТОСТІ НА ВОДНИЙ БАЛАНС

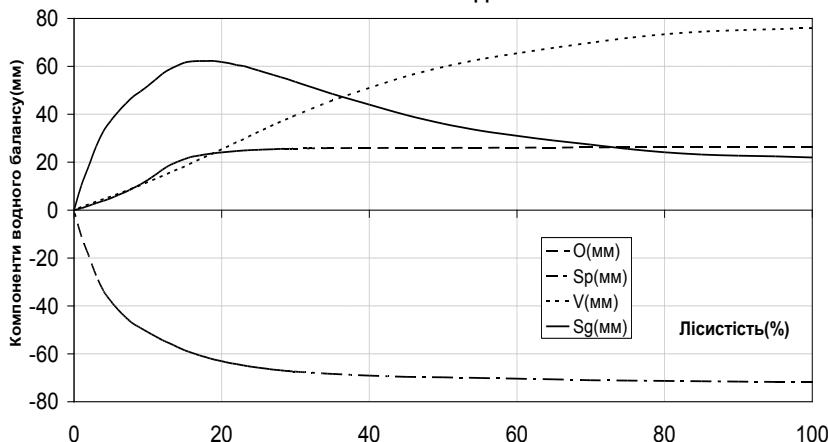


Рис.1.1. Типова залежність зміни опадів, випаровування, поверхневого і підземного стоку від лісистості

4. Заповнити таблицю 1.3. Визначити максимальне значення  $\Delta Sg_{max}$  і  $L(\%)$ , що йому відповідає.
5. Побудувати графік залежності  $\Delta Sg(L)$  на окремому листі.
6. Використовуючи фактичне значення лісистості  $L$  і оптимальне значення лісистості  $L_0$  видати рекомендацію щодо залишення регіону.
7. Перенести табличні значення і графік залежності  $\Delta Sg(L)$  в зошит.

### Зразок оформлення розрахунків

Область	-	Рівненська
Загальна площа	-	2005 тис.га
Площа під лісами	-	793 тис.га
Фактичний відсоток лісистості	-	$793/2005*100\% = 40\%$

Таблиця 1.2. Основні складники водного балансу регіону

	Фактичне значення (мм)	Зміна при 100% лісисто- сті (мм)
Опади	570	56
Випаровування	290	87
Поверхневий сток	250	-154
Підземний сток	30	123



Значення приросту (зменшення) відповідного складника водного балансу в мм розраховується на підставі даних про приріст (зменшення) даного складника у відсотках при даному відсотку заліснення території (табл. 1.1). В якості прикладу розглянемо розрахунок збільшення кількості опадів при різних значеннях відсотка лісистості у порівнянні з випадком нульової лісистості. Розрахункова формула:

$$\Delta O(\text{мм}) = \Delta O_{100\%}(\text{мм}) * \Delta O(\%) / 100\%. \quad (1.2)$$

(тут  $\Delta O_{100\%}$  - збільшення кількості опадів при стовідсотковій лісистості). Візьмемо відсоток лісистості  $L = 55\%$ . Тоді  $\Delta O(\text{мм}) = 56 \text{ мм} * 99,3\% / 100\% = 55,6 \text{ мм}$ . Візьмемо відсоток лісистості  $L = 5\%$ . Тоді  $\Delta O(\text{мм}) = 56 \text{ мм} * 19\% / 100\% = 10,6 \text{ мм}$ .

Для досягнення оптимальної екологічної ситуації необхідно добитися такого відсотка заліснення території, при якому збільшення підземного стоку  $\Delta S_g$  буде максимальним. Знаючи оптимальний відсоток лісистості для даного регіону можна зробити висновок про те, яку територію регіону доцільно додатково заліснити для досягнення оптимальної екологічної ситуації.

Наприклад: для Рівненської області оптимальний відсоток лісистості – 55%, фактичний відсоток лісистості – 40%. Отже для досягнення оптимальної екологічної ситуації рекомендується додатково заліснити ще  $(55 - 40) / 100 * 2005 = 301$  (тис.га).

Таблиця 1.3. Розрахунок фактичних змін складників водного балансу при різних відсотках лісистості.

Лісистість L	Приріст опадів $\Delta O$		Зменшення поверхневого стоку $\Delta S_p$			Збільшення сумарного випаровування $\Delta V$			Збільшення підземного стоку $\Delta S_g$	
	%	%	мм	%	%	мм	%	%	мм	мм
100	100		100	100		100	100			
95	100		99.9	100		99.4	99.4			
90	100		99.8	99.8		98.8	98.8			
85	100		99.6	99.6		98	98			
80	100		99.3	99.4		96.6	96.6			



75	100		98.8	99.2		94.5	94.5	
70	99.8		97.9	99		91.9	91.9	
65	99.6		97	98.5		89.1	89.1	
60	99.5		95.7	98.1		86.1	86.1	
55	99.3		94	97.7		82.8	82.8	
50	99.2		90.8	97.3		78.6	78.6	
45	99.1		87.2	97		73.5	75	
40	99		82.9	96.3		67.1	71	
35	98.7		77	95.3		60.2	67	
30	98		70.2	94		52.1	62	
29	97.7		68.6	93.7		50.3	61	
28	97.5		67	93.2		48.6	60	
27	97		65.4	92.8		46.8	58.5	
26	96.6		63.7	92.2		44.9	57	
25	96		62	91.7		43	56	
24	95.6		60	91.1		41.1	55	
23	95		58	90.4		39	54	
22	94		55.9	89.6		37.3	53	
21	93		53.8	88.9		35.3	52	
20	92		51.6	87.9		33.4	50.7	
19	90.6		49.3	87		31.5	49.3	
18	89		47.2	85.7		29.7	48	
17	87		45	84.5		27.9	46.8	
16	85		42.5	83		26	45.5	
15	81.4		40	81.5		24	44	
14	77		37.5	79.6		22.4	42.8	
13	71.8		35.3	77.6		20.6	41.5	
12	64.5		33	75.7		18.8	40	
11	56		30.5	73.4		17.1	38	
10	48		28	71		15.4	35.9	
9	41		25.5	68.5		13.7	33.2	
8	35		22.6	66		12.1	31	
7	29		19.8	62.4		10.5	28	
6	24		17	58		9	24.8	
5	19		14.3	53		7.5	21.4	
4	14.9		11.5	47		6.1	18	
3	11		8.8	38		4.7	14	
2	7		6	26.4		3.2	9.6	
1	3		3	15		1.7	5	

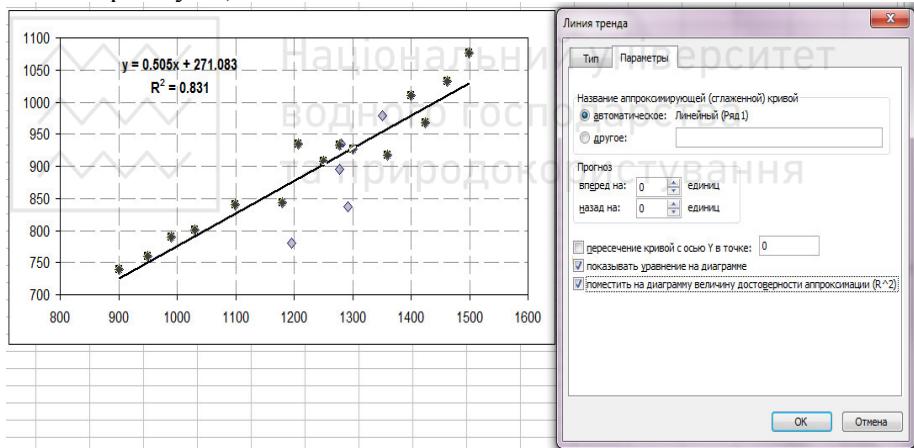


## Тема 2. Парна лінійна регресія

**Завдання.** За табличними даними побудувати рівняння лінійної регресії  $y^* = a_0 + a_1 x$  і виконати його дослідження. Зміст параметрів моделі:  $x_1$  - кількість опадів на протязі вегетативного періоду (мм),  $y$  - врожайність сільськогосподарської культури (ц/га або кг/га).

### Хід виконання роботи.

1. В середовищі Microsoft Excel розмістити початкові дані у вигляді таблиці, зображеній на наступній сторінці (табл. 2.1).
2. За даними стовпців  $x$ ,  $y$  побудувати точковий графік (Диаграмма, Точечная).
3. Додати лінію тренду (права кнопка миші, Добавить линию тренда, Параметры, Показывать уравнение на диаграмме, Поместить на диаграмму  $R^2$ ).



4. Перевіряємо гіпотезу про адекватність моделі парної регресії. Для цього слід обчислити коефіцієнт кореляції  $r = \sqrt{R^2}$  та оцінити його статистичну значущість за критерієм  $|t_r| > t_{kp}$ . Тут статистика  $t_r = r \cdot \sqrt{n-2} / \sqrt{1-r^2}$ ,  $n=20$  - обсяг досліджуваної вибірки,  $t_{kp} = t_{\alpha/2, n-2}$  де  $\alpha=0.05$  - рівень значущості, пов'язаний з рівнем надійності  $P = 0.95$  співвідношенням  $\alpha = 1 - P$ . Виконання критерію статистичної значущості коефіцієнта кореляції означає адекватність моделі парної регресії у цілому.



5. Використовуючи оцінки коефіцієнтів парної лінійної регресії  $a_0, a_1$ , отримані з діаграми, розрахувати теоретичні значення параметра  $y^*$  за формулою  $y^* = a_0 + a_1 x$ .
6. Використовуючи функцію Предсказ., розрахувати теоретичні значення параметра  $y^{**}$ . Порівняти значення  $y^*$  і  $y^{**}$ . Пояснити причину розбіжностей.
7. Заповнивши три останні стовпці таблиці, розрахувати загальну суму квадратів відхилень  $SQ_y = \sum (y_i - y_c)^2$ ; факторну (пояснену) суму квадратів відхилень  $SQ_{\text{факт}} = \sum (y_i^{**} - y_c)^2$ ; залишкову суму квадратів відхилень  $SQ_{\text{ост}} = \sum (y_i - y_i^{**})^2$ .
8. Перевірити рівність  $SQ_y = SQ_{\text{факт}} + SQ_{\text{ост}}$ .
9. Обчислити загальну дисперсію  $D = SQ_y / (n-1)$ , факторну дисперсію  $D_{\text{факт}} = SQ_{\text{факт}}$  та залишкову дисперсію  $D_{\text{ост}} = SQ_{\text{ост}} / (n-2)$ .
10. Визначити параметри лінійної регресії, використовуючи функцію ЛІНЕЙН. Виділяємо в таблиці вільний блок клітин розміром 5 рядків і 2 стовпці. Мастер функцій, Статистические, ЛІНЕЙН. Завершуємо виконання функції одночасним натисканням клавіш CTRL+SHIFT+ENTER.
11. Перевірити рівність  $F = D_{\text{факт}} / D_{\text{ост}}$ .
12. Перевірити гіпотезу про адекватність лінійної моделі за критерієм Фішера  $F > F_{kp}$ . Тут  $F_{kp} = FPACSPLOBR(\alpha, 1, n-2)$ .  $\alpha = 0.05; n = 20$ .
13. Перевіряємо статистичну значущість коефіцієнтів регресії. Для цього слід визначити фактичне значення  $t$  – критерію Стьюдента для кожного з коефіцієнтів регресії:  $t_i = a_i / m_{a_i}$ . Тут  $m_{a_i}$  - статистична похибка оцінювання коефіцієнта. Значення  $a_i$  знаходяться в першому рядку таблиці результатів функції ЛІНЕЙН (табл.1 - виділено сірим фоном), значення  $m_{a_i}$  - в другому рядку цієї таблиці.
14. Використовуючи функцію СТЬЮДРАСПОБР( $\alpha, n-2$ ), визначити критичне значення параметра Стьюдента  $t_{kp}$ .  $\alpha = 0.05; n = 20$ .



**Таблиця 2.1. Розрахунки параметрів лінійної регресії**

		<b>a1=</b>	0.5049				
		<b>a0=</b>	271.082				
№	x1	y	y*	y**	(y-yc) <sup>2</sup>	(y**-yc) <sup>2</sup>	(y-y**) <sup>2</sup>
1	1462	1033	1009.2	1009.3	18947.5	12974.8	563.7
2	1500	1077	1028.4	1028.4	32996.7	17713.9	2357.7
3	1351	978	953.2	953.2	6831.0	3348.1	614.4
4	1300	926	927.5	927.5	939.4	1031.2	2.1
5	900	740	725.5	725.5	24133.6	28849.3	210.3
6	1425	967	990.6	990.6	5133.7	9067.9	555.8
7	1280	935	917.4	917.4	1572.1	484.6	311.0
8	950	760	750.7	750.7	18319.6	20910.7	85.7
9	1400	1010	977.9	978.0	13144.6	6823.2	1027.0
10	1292	837	923.4	923.4	3404.7	788.1	7468.9
11	990	790	770.9	770.9	11098.6	15477.6	363.2
12	1360	917	957.7	957.8	468.7	3894.6	1661.1
13	1207	934	880.5	880.5	1493.8	220.4	2861.6
14	1196	781	874.9	875.0	13075.9	416.1	8826.9
15	1278	933	916.3	916.4	1417.5	441.2	277.1
16	1100	840	826.5	826.5	3063.6	4743.0	182.8
17	1030	801	791.1	791.1	8901.9	10860.3	97.3
18	1277	896	915.8	915.8	0.4	420.2	394.0
19	1180	844	866.9	866.9	2636.8	810.9	523.2
20	1250	908	902.2	902.2	160.0	47.2	33.4
		<b>895</b>	- yc	<b>SQ =</b>	<b>167741</b>	<b>139323</b>	<b>28417</b>
	<b>t<sub>a1</sub></b>	<b>t<sub>a0</sub></b>			загальна	факторна	залишків
	9.39	4.04		<b>Df =</b>	<b>19</b>	<b>1</b>	<b>18</b>
	<b>a1</b>	<b>a0</b>		<b>Disp =</b>	<b>8828</b>	<b>139323</b>	<b>1579</b>
<b>a=</b>	<b>0.505</b>	<b>271.1</b>	Коефіцієнти регресії				
<b>m<sub>a</sub>=</b>	0.054	67.044	Похибки коефіцієнтів регресії				
<b>R<sup>2</sup>=</b>	<b>0.831</b>	39.733	Коефіцієнт детермінації і станд. помилка оцінки у				
<b>F=</b>	<b>88.25</b>	18	Критерій Фішера і кількість ступенів свободи				
<b>S=</b>	139323	28417	Пояснена дисперсія і дисперсія залишків				
<b>t<sub>kr</sub>=</b>	<b>2.10</b>		Критичне значення критерію Стьюдента				
<b>F<sub>kp</sub>=</b>	<b>4.41</b>		Критичне значення критерію Фішера				



15. Перевірити статистичну значущість коефіцієнтів  $a_0$  і  $a_1$  за критерієм  $t_i > t_{kp}$ .

## Контрольні запитання

1. Функціональний і кореляційний зв'язок. Навести приклади.
2. Лінійний і нелінійний кореляційний зв'язок.
3. Парна і множинна кореляційна залежність. Навести приклади.
4. Роль графічно-візуального аналізу у дослідженні кореляційного зв'язку.
5. Етапи дослідження кореляційного зв'язку
6. Поняття регресії.
7. Метод найменших квадратів.
8. Визначення параметрів парної лінійної регресії  $y^* = a_0 + a_1 x$ .
9. Статистичне пояснення коефіцієнта детермінації.
10. Властивості коефіцієнта кореляції.
11. Перевірка гіпотези про адекватність лінійної моделі регресії.
12. Визначення стандартної похибки коефіцієнтів.
13. Перевірка статистичної значущості коефіцієнтів.

## Тема 3. Множинна лінійна регресія

**Завдання.** За табличними даними побудувати рівняння лінійної множинної регресії  $y^* = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$  і виконати його дослідження. Зміст параметрів моделі:  $x_1$  - кількість опадів за вегетативний період (мм),  $x_2$  - середня температура за вегетативний період ( $^{\circ}\text{C}$ ),  $y$  - врожайність (ц/га або кг/га).

### Хід виконання роботи.

1. В середовищі Microsoft Excel розмістити початкові дані у вигляді таблиці, зображені на наступній сторінці (табл. 3.1).
2. Визначити параметри множинної лінійної регресії, використовуючи функцію ЛІНЕЙН. Для цього виділяємо блок клітин розміром 5 рядків і 3 стовпці. Мастер функцій, Статистические, ЛІНЕЙН. CTRL+SHIFT+ENTER.



3. Використовуючи оцінки коефіцієнтів парної лінійної регресії  $a_0, a_1, a_2$  (перший рядок таблиці результатів функції ЛІНЕЙН) розрахувати теоретичні значення параметра  $y^*$  за формулою  $y^* = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$ .
4. Використовуючи функцію Тенденція, розрахувати теоретичні значення параметра  $y^{**}$ . Порівняти значення  $y^*$  і  $y^{**}$ .
5. Заповнивши три останні стовпці таблиці, розрахувати загальну суму квадратів відхилень  $SQ_y = \sum (y_i - y_c)^2$ ; факторну (пояснену) суму квадратів відхилень  $SQ_{\text{факт}} = \sum (y_i^{**} - y_c)^2$ ; залишкову суму квадратів відхилень  $SQ_{\text{ост}} = \sum (y_i - y_i^{**})^2$ .
6. Перевірити рівність  $SQ_y = SQ_{\text{факт}} + SQ_{\text{ост}}$ .
7. Обчислити загальну дисперсію  $D = SQ_y / (n-1)$ , факторну дисперсію  $D_{\text{факт}} = SQ_{\text{факт}} / 2$  та залишкову дисперсію  $D_{\text{ост}} = SQ_{\text{ост}} / (n-m-1)$ . Тут  $n=20$ ,  $m=2$  - кількість пояснюючих факторів.
8. Перевірити рівність  $F = D_{\text{факт}} / D_{\text{ост}}$ .
9. Перевірити гіпотезу про адекватність моделі множинної регресії за критерієм Фішера  $F > F_{kp}$ , якщо  $F_{kp} = FPPACПOB(\alpha, 1, n-m-1)$ .  $\alpha = 0.05$ ;  $n = 20$ ;  $m = 2$ .
10. Використовуючи функцію СТҮОДРАСПОБР( $\alpha, n-m-1$ ), визначити критичне значення параметра Стьюдента  $t_{kp}$ .  $\alpha = 0.05$ ;  $n = 20$ ;  $m = 2$ .
11. Перевірити гіпотезу про адекватність моделі множинної регресії за критерієм  $R^2$ : якщо  $\frac{R^2}{1-R^2}(n-m-1) > t_{kp}^2$  - модель адекватна.
12. Визначити фактичне значення  $t$  - критерію Стьюдента для всіх коефіцієнтів регресії:  $t_i = \frac{a_i}{\sigma_{a_i}}$ .
13. Перевірити статистичну значущість коефіцієнтів  $a_0, a_1$  і  $a_2$  за критерієм  $t_i > t_{kp}$ .



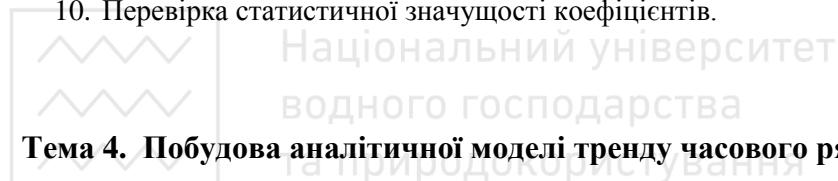
**Таблиця 3.1. Розрахунки параметрів множинної регресії**

				<b>a2</b>	<b>a1</b>	<b>a0</b>		
				<b>0.558</b>	<b>7.069</b>	<b>-98.070</b>		
<b>№</b>	<b>x1</b>	<b>x2</b>	<b>y</b>	<b>y*</b>	<b>y**</b>	<b>(y-yc)<sup>2</sup></b>	<b>y***-yc)<sup>2</sup></b>	<b>(y-y**)<sup>2</sup></b>
1	1090	28	704	707.6	707.6	33892.8	35235.1	13.0
2	971	19	580	577.6	577.6	3612.0	3333.6	5.6
3	879	12	445	476.9	476.9	5610.0	1852.7	1014.9
4	794	5	326	380.0	380.0	37597.2	19577.8	2913.8
5	931	15	547	527.1	527.1	734.4	51.2	397.7
6	844	9	385	436.1	436.1	18198.0	7016.7	2614.7
7	1070	26	654	682.3	682.3	17982.8	26380.4	802.0
8	686	9	380	348.0	348.0	19572.0	29535.9	1021.4
9	1087	26	662	691.8	691.8	20192.4	29549.2	888.0
10	903	8	493	462.0	462.0	723.6	3356.9	963.4
11	909	11	446	486.5	486.5	5461.2	1114.6	1641.4
12	955	14	565	533.4	533.4	2034.0	181.4	1000.5
13	815	6	380	398.8	398.8	19572.0	14675.5	351.8
14	1100	29	729	720.3	720.3	43722.8	40142.1	76.5
15	859	10	448	451.6	451.6	5169.6	4669.4	12.7
16	1006	18	615	590.1	590.1	9044.0	4925.6	620.9
17	864	8	441	440.2	440.2	6225.2	6349.5	0.6
18	924	10	553	487.8	487.8	1095.6	1029.9	4249.9
19	773	6	400	375.3	375.3	14376.0	20897.6	608.1
20	992	24	645	624.7	624.7	15650.0	10981.4	412.4
			<b>520</b>	<b>- yc</b>	<b>SQ =</b>	<b>280466</b>	<b>260856</b>	<b>19609</b>
			<b>t<sub>a1</sub></b>	<b>t<sub>a0</sub></b>		загальна	факторна	Залишків
	3.10	3.47	0.82		<b>Df =</b>	<b>19</b>	<b>2</b>	<b>17</b>
	<b>A2</b>	<b>a1</b>	<b>a0</b>		<b>Disp =</b>	<b>14761</b>	<b>130428</b>	<b>1153</b>
<b>a=</b>	<b>7.069</b>	<b>0.558</b>	<b>-98.070</b>		Коефіцієнти регресії			
<b>m<sub>a</sub>=</b>	2.280	0.160	118.925		Похибки коефіцієнтів регресії			
<b>R<sup>2</sup>=</b>	<b>0.930</b>	33.963			Коеф. детермінації і стандартна помилка оцінки у			
<b>F=</b>	<b>113.07</b>	17			Критерій Фішера і к-сть ступенів свободи			
<b>S=</b>	260856	19609			Пояснена дисперсія і дисперсія залишків			
<b>t<sub>kr</sub>=</b>	<b>2.11</b>				Критичне значення критерію Стьюдента			
<b>F<sub>kp</sub>=</b>	<b>3.52</b>				Критичне значення критерію Фішера			



## Контрольні запитання

1. Поняття про кореляцію випадкових величин.
2. Дві основні задачі регресійно-кореляційного аналізу.
3. Поняття парної і множинної регресії.
4. Метод найменших квадратів.
5. Визначення параметрів множинної лінійної регресії  $y^* = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$  за методом найменших квадратів.
6. Визначення параметрів множинної лінійної регресії з використанням функції ЛІНЕЙН().
7. Перевірка гіпотези про адекватність моделі множинної регресії (критерій  $R^2$ ).
8. Перевірка гіпотези про адекватність моделі множинної регресії (критерій Фішера).
9. Визначення стандартної похибки коефіцієнтів регресії.
10. Перевірка статистичної значущості коефіцієнтів.



## Тема 4. Побудова аналітичної моделі тренду часового ряду

**Завдання.** За табличними даними (табл. 4.2) побудувати графік часової залежності параметра  $y(t)$ . Побудувати три моделі тренду (лінійна, квадратична та степенева) і вибрати з них оптимальну. Для оптимальної моделі тренду обчислити ряд залишків та побудувати його графік. Зміст параметрів моделі:  $t$  - час,  $y$  - врожайність (ц/га або кг/га).

### Хід виконання роботи

1. За табличними даними побудувати графік (Точечная диаграмма).
2. Побудувати лінію тренду (Диаграма, Права кнопка миші, Добавить линию тренда, Линейная, Параметры, Показывать уравнение на диаграмме, Поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации  $R^2$ ). Записати рівняння регресії  $y_1^* = a_0 + a_1t$  і значення коефіцієнта детермінації  $R^2$ .



3. Використовуючи оцінки коефіцієнтів парної лінійної регресії  $a_0, a_1$  розрахувати теоретичні значення параметра  $y^*$  за формулою  $y_1^* = a_0 + a_1 t$ .

4. Для побудованої моделі розрахувати суму квадратів відхилень теоретичних значень моделі від фактичних значень параметра  $y$

$$S_1 = \sum_{t=1}^n (y_t - y_{1t}^*)^2 \text{ попередньо заповнивши стовпець } (y_t - y_{1t}^*)^2. \text{ Тут } n = 20 - \text{розмір вибірки.}$$

5. Для побудованої моделі розрахувати середню відносну похибку  $\varepsilon_c = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |y_t - y_{1t}^*| / y_t$  попередньо заповнивши стовпець  $|y_t - y_{1t}^*| / y_t$ .

6. Побудувати квадратичний тренд (Поліноміальна, Степень 2, Параметри, Показывать уравнение на диаграмме, Поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации  $R^2$ ). Записати рівняння регресії  $y_2^* = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$  і значення коефіцієнта детермінації  $R^2$ .  
*Примітка:* для побудови графіка квадратичного тренду можна скопіювати графік лінійного тренду і розмістити копію у вільній частині листа. Потім змінити лінійний тренд на квадратичний за допомогою команди: Права кнопка миші, Формат лінії тренда, Поліноміальна, Степень 2.

7. Використовуючи коефіцієнти регресійного рівняння  $a_0, a_1, a_2$  розрахувати теоретичні значення параметра  $y^*$  за формулою  $y_2^* = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ .

8. Для побудованої моделі розрахувати суму квадратів відхилень  $S_2 = \sum_{t=1}^n (y_t - y_{2t}^*)^2$  попередньо заповнивши стовпець  $(y_t - y_{2t}^*)^2$ .

9. Для побудованої моделі розрахувати середню відносну похибку  $\varepsilon_{2c} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |y_t - y_{2t}^*| / y_t$  попередньо заповнивши стовпець  $|y_t - y_{2t}^*| / y_t$ .



**Таблиця 4.1. Моделювання тренду часового ряду**

					A2=	0.08042				
		a1=	0.6377		A1=	-1.051		a1=	0.1663	
		a0=	14.764		A0=	20.956		a0=	14.889	
t	Y	y1	(y-y1) <sup>2</sup>	y-y1 /y	y2	(y-y2) <sup>2</sup>	y-y2 /y	Y3	(y-y3) <sup>2</sup>	y-y3 /y
1	15.9	15.40	0.25	0.031	19.99	16.69	0.257	15.90	0.00	0.000
2	18.6	16.04	6.56	0.138	19.18	0.33	0.031	15.90	7.29	0.145
3	20.1	16.68	11.72	0.170	18.53	2.48	0.078	17.70	5.76	0.119
4	19.8	17.31	6.18	0.126	18.04	3.10	0.089	18.20	2.56	0.081
5	17.8	17.95	0.02	0.009	17.71	0.01	0.005	19.50	2.89	0.096
6	21.4	18.59	7.89	0.131	17.55	14.86	0.180	19.23	4.69	0.101
7	21.9	19.23	7.14	0.122	17.54	19.01	0.199	19.67	4.99	0.102
8	16.1	19.87	14.18	0.234	17.69	2.54	0.099	20.37	18.20	0.265
9	14.9	20.50	31.40	0.376	18.01	9.68	0.209	19.80	24.01	0.329
10	20.9	21.14	0.06	0.012	18.49	5.82	0.115	17.63	10.67	0.156
11	13.8	21.78	63.66	0.578	19.13	28.36	0.386	17.30	12.25	0.254
12	21.9	22.42	0.27	0.024	19.92	3.90	0.090	16.53	28.80	0.245
13	20.5	23.05	6.52	0.125	20.88	0.15	0.019	18.87	2.67	0.080
14	20.9	23.69	7.79	0.134	22.00	1.22	0.053	18.73	4.69	0.104
15	20.6	24.33	13.91	0.181	23.29	7.21	0.130	21.10	0.25	0.024
16	27.9	24.97	8.60	0.105	24.73	10.06	0.114	20.67	52.32	0.259
17	28.0	25.60	5.74	0.086	26.33	2.79	0.060	23.13	23.68	0.174
18	20.5	26.24	32.98	0.280	28.09	57.67	0.370	25.50	25.00	0.244
19	32.6	26.88	32.71	0.175	30.02	6.66	0.079	25.47	50.88	0.219
20	35.1	27.52	57.49	0.216	32.10	8.98	0.085	27.03	65.07	0.230
Сума (середнє)		<b>315.06</b>	<b>0.163</b>		<b>201.53</b>	<b>0.132</b>			<b>346.69</b>	<b>0.161</b>
Коеф детер- мінації $R^2$		<b>0.462</b>			<b>0.656</b>			<b>0.510</b>		

10. Використовуючи метод копіювання графіка, побудувати степеневий тренд: Права кнопка миші, Формат линии тренда, Степенная, Параметры, Показывать уравнение на диаграмме, Поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации  $R^2$ . Записати рівняння регресії  $y_3^* = a_0 t^{a_1}$  і значення коефіцієнта детермінації  $R^2$ .



11. Для побудованої моделі розрахувати суму квадратів відхилень

$$S_3 = \sum_{t=1}^n (y_t - y_{3t}^*)^2 \text{ попередньо заповнивши стовпець } (y_t - y_{3t}^*)^2.$$

12. Для побудованої моделі розрахувати середню відносну похибку  $\varepsilon_{3c} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |y_t - y_{3t}^*| / y_t$  попередньо заповнивши стовпець  $|y_t - y_{3t}^*| / y_t$ .

13. Використовуючи результати розрахунків, зробити висновок щодо оптимальної моделі часового ряду за наступними критеріями:

- ◆ Максимальне значення коефіцієнту детермінації  $R^2 \rightarrow \max$ ;
- ◆ Мінімальна сума квадратів відхилень

$$S_i = \sum_{t=1}^n (y_t - y_{it}^*)^2 \rightarrow \min;$$

- ◆ Мінімальна середня відносна похибка

$$\varepsilon_{ic} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |y_t - y_{it}^*| / y_t \rightarrow \min.$$

14. Для найкращої моделі тренду обчислити ряд залишків за формулою  $e_t = y_t - y_t^*$ ,  $t = 1..n$ ,  $n = 20$ . Побудувати графік ряду залишків: Мастер діаграмм, Точечная диаграмма.

## Контрольні питання.

1. Поняття часового ряду.
2. Адитивна модель часового ряду.
3. Поняття тренду. Види тренду.
4. Циклічна компонента часового ряду.
5. Моделювання циклічної компоненти.
6. Випадкова компонента часового ряду.
7. Поворотна точка. Критерій Кендала.
8. Трендостійкі, реверсивні та випадкові ряди.
9. Автокореляція. Автокореляційна функція.
10. Типові випадки корелограм та їх інтерпретація.
11. Стационарний часовий ряд.
12. Зведення часового ряду до стационарного вигляду.



**Таблиця 4.2. Дані для виконання лабораторної роботи**

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10
1	19.4	20.1	21.9	17.5	14.6	21.3	18.4	15.9	15	16.6
2	10.5	11.8	14.5	11.6	7.9	9.6	18.2	17.6	12	12.2
3	16.3	16.8	18	20.2	18.9	18.7	23.7	20.1	17.7	17.6
4	18.4	16.6	19.4	20.7	19	19.8	22.3	20.5	17.7	17.3
5	19.1	18.8	19	21.6	22.9	17.7	22.7	17.8	20	18.3
6	16.4	16.5	17.8	21.5	13.8	15.1	19.9	21.4	17.8	17.1
7	19.1	18.2	24.9	26.6	23.1	23.9	26.6	22.1	17.3	21.5
8	19.5	18.5	17.1	20.4	20.1	17.4	20.8	15.1	16.4	17.2
9	11.6	14.6	10.5	15.7	14.7	14.4	10.3	12.7	13.5	13.9
10	12.2	16.8	15.2	14.9	14.5	11.4	22.9	20.9	14.3	16.6
11	18.1	16.7	17.5	28.4	29.9	21.7	16	13.8	24.2	20.8
12	26.7	26	24.9	29	30	25.1	22.9	21.9	23.3	24.3
13	21.1	25.7	23.6	26	22.2	23.2	22.4	20.5	23.5	22.6
14	18.9	20.6	20.7	21.4	23	19.2	25.5	20.9	19.3	20
15	21.9	23.9	19	31.3	26.5	28.2	16.9	20.6	24.3	22.8
16	27.8	31.4	24.3	26.3	21	26.9	28.4	27.9	27.3	25.3
17	31.9	30.1	31.7	37.8	29.6	37.1	23.5	28	30.3	29.2
18	24.1	19.8	17.2	34.2	28.3	27	18	17.3	27.9	24.7
19	31	34.5	32.9	39.4	32.8	33.4	35.4	34.1	31.2	31.1
20	33.5	35.5	32.6	37.8	32.7	33.2	35.7	36.5	27.6	30.7



## Тема 5. Оцінювання якості моделі тренду часового ряду

Оцінювання якості моделі тренду часового ряду здійснюється шляхом тестування ряду залишків цієї моделі. Модель тренду є адекватною до дослідних даних, якщо щодо ряду залишків виконуються чотири умови: умова статистичної близькості до нуля середнього значення залишків, умова випадковості залишків, умова незалежності залишків та умова нормального розподілу залишків.

### Завдання.

- Для ряду залишків, отриманого у темі 4 визначити середнє значення  $e_c$ . Якщо воно відмінне від нуля – модель є неадекватною. Оцінка близькості до нуля виконується на основі  $t$ - критерію значущості. Якщо виконується умова  $|t| < t_{kr}$ , середнє значення можна вважати статистично близьким до нуля. Тут  $t = e_c \cdot \sqrt{N} / S_e$ ,  $S_e$  - середньоквадратичне відхилення ряду залишків,  $t_{kr}$  визначається за допомогою функції СТЬЮДРАСПОБР( $\alpha$ , N-1). Зробити висновок щодо виконання критерію близькості  $e_c$  до нуля.
- Перевірити випадковість рівнів ряду залишків  $e_t$  на основі критерію поворотних точок. Кожен рівень ряду порівнюється з двома сусіднimi (попереднім і наступним). Якщо він більше чи менше їх обох, то ця точка вважається поворотною. Необхідно підрахувати кількість поворотних точок  $P$  у ряду залишків. Після цього підраховуються критичні значення

$$P^* = \left[ \frac{2 \cdot (N-2)}{3} - 2\sqrt{\frac{16N-29}{90}} \right]; \quad P^{**} = \left[ \frac{2 \cdot (N-2)}{3} + 2\sqrt{\frac{16N-29}{90}} \right]. \quad (5.1)$$

Квадратні дужки означають, що від результату обчислень береться ціла частина числа. Якщо виконується нерівність  $P^* < P < P^{**}$ , ряд залишків можна вважати випадковим. Якщо виконується нерівність  $P \leq P^*$ , ряд залишків вважають трендостійким. Такий випадок є свідченням низької якості трендової моделі ряду. Якщо виконується нерівність  $P \geq P^{**}$ , ряд залишків вважають реверсивним



(коливним). Даний випадок свідчить про наявність циклічної компоненти у залишках ряду. Зробити висновок щодо ступеня випадковості ряду залишків.

3. Перевірити відсутність автокореляції у ряду залишків  $e_t$  на основі критерію Дарбіна – Уотсона відповідно до якого визначається коефіцієнт:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^N (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^N e_t^2}. \quad (5.2)$$

Обчислена величина цього критерію порівнюється з двома табличними рівнями (нижнім  $d_L = 1.20$  і верхнім  $d_U = 1.41$  при  $n=20$ ):

- ◆ якщо  $d > 2$  - це свідчить про **негативну кореляцію** і перед перевіркою критерію необхідно виконати перетворення:  $d' = 4 - d$ ;
- ◆ якщо  $0 < d < d_L$  - то **рівні залишки сильно автокорелювані, і модель неадекватна**;
- ◆ якщо  $d_U < d < 2$  - **рівні ряду є незалежними і модель адекватна**;
- ◆ якщо  $d_L < d < d_U$  - **однозначні висновки зробити не можна і необхідне застосування інших критеріїв**.

Розрахунки представити у вигляді розрахункової таблиці 5.1. Зробити висновок щодо відсутності автокореляцій.

4. Перевірити відповідність ряду залишків  $e_t$  нормальному закону розподілу за допомогою RS-критерію:

$$RS = \frac{e_{\max} - e_{\min}}{S} \quad (5.3)$$

де  $e_{\max}$  - максимальне значення ряду залишків;  $e_{\min}$  - мінімальне значення ряду залишків;  $S$  - середньоквадратичне відхилення значень ряду залишків. Якщо розраховане значення  $RS$  потрапляє між верхньою та нижньою межею з заданим рівнем ймовірності, то гіпотеза про нормальній розподіл приймається. Відповідна статистична таблиця наведена в табл. 5.2. Зробити висновок щодо відповідності ряду залишків нормальному закону розподілу.

5. Зробити загальний висновок щодо виконання всіх чотирьох критеріїв та адекватності оціненої моделі тренду часового ряду.



**Таблиця 5.1. Розрахунок критеріїв оцінки ряду залишків**

$T$	Відхилення $e_t$	Точки повороту	$e_t^2$	$(e_t - e_{t-1})^2$
1				
...				
20				
Сума				

**Таблиця 5.2. Критичні граници відношення  $R/S$**

Об'єм вибірки (N)	Нижні граници						Верхні граници					
	Ймовірність помилки											
	0,000	0,005	0,01	0,025	<b>0,05</b>	0,10	0,10	<b>0,05</b>	0,025	0,01	0,005	0,000
3	1,732	1,735	1,74	1,74	<b>1,76</b>	1,782	1,997	<b>2,00</b>	2,000	2,000	2,000	2,000
4	1,732	1,83	1,87	1,93	<b>1,98</b>	2,04	2,409	<b>2,43</b>	2,439	2,445	2,447	2,449
5	1,826	1,98	2,02	2,09	<b>2,15</b>	2,22	2,712	<b>2,75</b>	2,782	2,803	2,813	2,828
6	1,826	2,11	2,15	2,22	<b>2,28</b>	2,37	2,949	<b>3,01</b>	3,056	3,095	3,115	3,162
7	1,821	2,22	2,26	2,33	<b>2,40</b>	2,49	3,143	<b>3,22</b>	3,282	3,338	3,369	4,465
8	1,821	2,31	2,35	2,43	<b>2,50</b>	2,59	3,308	<b>3,40</b>	3,471	3,543	3,585	3,742
9	1,897	2,39	2,44	2,51	<b>2,59</b>	2,68	3,449	<b>3,55</b>	3,634	3,720	3,772	4,000
10	1,897	2,46	2,51	2,59	<b>2,67</b>	2,76	3,57	<b>3,68</b>	3,777	3,875	3,935	2,243
11	1,915	2,53	2,58	2,66	<b>2,74</b>	2,84	3,68	<b>3,80</b>	3,903	4,012	4,079	4,472
12	1,915	2,59	2,64	2,72	<b>2,80</b>	2,90	3,78	<b>3,91</b>	4,02	4,134	4,208	4,690
13	1,927	2,64	2,70	2,78	<b>2,86</b>	2,96	3,87	<b>4,00</b>	4,12	4,244	4,325	4,899
14	1,927	2,70	2,75	2,83	<b>2,92</b>	3,02	3,95	<b>4,09</b>	4,21	4,34	4,431	5,099
15	1,936	2,74	2,80	2,88	<b>2,97</b>	3,07	4,02	<b>4,17</b>	4,29	4,44	4,53	5,292
16	1,936	2,79	2,84	2,93	<b>3,01</b>	3,12	4,09	<b>4,24</b>	4,37	4,52	4,62	5,477
17	1,944	2,83	2,88	2,97	<b>3,06</b>	3,17	4,15	<b>4,31</b>	4,44	4,60	4,70	5,657
18	1,944	2,87	2,92	3,01	<b>3,10</b>	3,21	4,21	<b>4,37</b>	4,51	4,67	4,78	5,831
19	1,949	2,90	2,96	3,05	<b>3,14</b>	3,25	4,27	<b>4,43</b>	4,57	4,74	4,85	6,000
20	1,949	2,94	2,99	3,09	<b>3,18</b>	3,29	4,32	<b>4,49</b>	4,63	4,80	4,91	6,164
25					<b>3,35</b>			<b>4,83</b>				
30					<b>3,49</b>			<b>5,07</b>				
50					<b>3,87</b>			<b>5,73</b>				
56					<b>3,95</b>			<b>5,87</b>				
75					<b>4,17</b>			<b>6,25</b>				



## Тема 6. Моделювання циклічної компоненти часового ряду

- Для даних табл. 6.3 побудувати графічне зображення автокореляційної функції (корелограму) використовуючи команди Statistics, Advanced Linear / Nonlinear Models, Time Series / Forecasting, ARIMA & autocorrelation functions, Autocorrelations – рис. 6.1. Інший варіант побудови автокореляційної функції – використання функції Корелл() в середовищі Microsoft Excel. Наприклад: коррел(B4:B30; B5:B31), коррел(B4:B30; B6:B32) тощо.

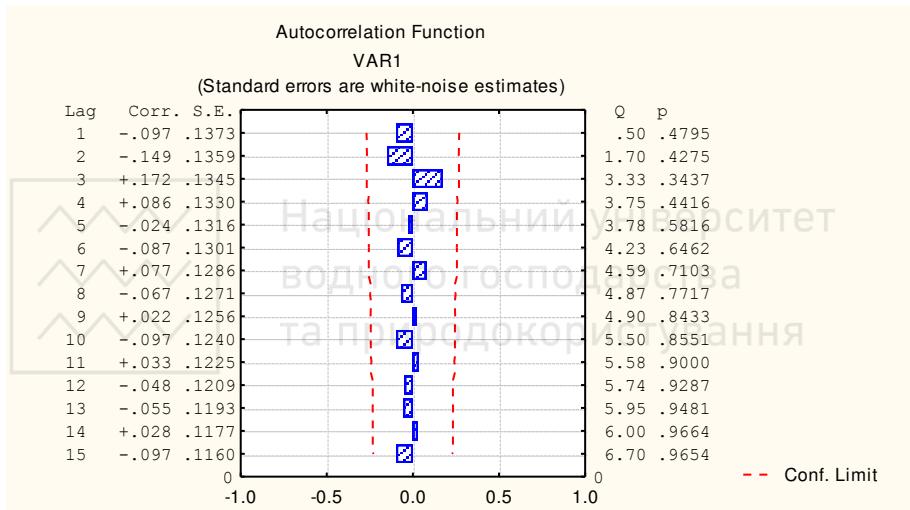


Рис.6.1. Автокореляційна функція ряду залишків

- Виявити можливу циклічність ряду (великі додатні значення коефіцієнта кореляції для лагів, відмінних від 1).
- Виконати спектральний аналіз ряду даних використовуючи команди Statistics, Advanced Linear / Nonlinear Models, Time Series / Forecasting, Spectral (Fourier) analysis, Single Series Fourier Analysis, Period, Spectral density. Вигляд графіка спектральної щільності (спектрограми – рис.6.2) дозволяє судити про наявність періодичної компоненти ряду.



Spectral analysis: VAR1

No. of cases: 50

Hamming weights: .0357 .2411 .4464 .2411 .0357

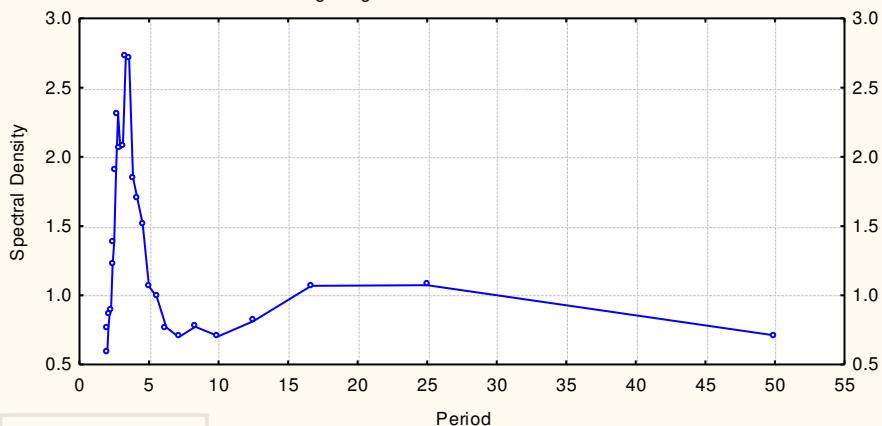


Рис.6.2. Функція спектральної щільності ряду залишків

Таблиця 6.1. Розрахунок параметрів гармонічної компоненти ряду

	A	B	C	D	E	F
3	T	Y	T	W		
4	1	8.72	18	0.349		
5	2	9.95	<b>Нормальна система</b>			
6	3	7.95	50	-3.21	1.85	470.08
7	4	9.48	-3.21	24.28	1.25	-36.69
8	5	9.06	1.85	1.25	25.72	14.16
9	6	8.13	<b>Обернена матриця</b>			<b>Розв'язок</b>
10	7	9.41	0.0202	0.0028	-0.0016	<b>9.389</b>
11	8	8.50	0.0028	0.0417	-0.0022	<b>-0.266</b>
12	9	11.09	-0.0016	-0.0022	0.0391	<b>-0.112</b>
53	50	8.33				



4. Виконати моделювання циклічної складової ряду залишків методом гармонічного аналізу за наступною схемою. Розмістити вихідні (табл.6.3) у діапазоні листа Microsoft Excel  $B4:B53$ . Побудувати графік (*Точечная диаграмма*).
5. Ввести початкове значення періоду коливань  $T = 10$  у комірку C4 (табл.6.1). У комірці D4 розрахувати значення циклічної частоти за формулою  $\omega = 2\pi/T$ .
6. Ввести у комірки H4 та I4 наступні змінні  $x_1 = \cos(\omega \cdot t)$  та  $x_2 = \sin(\omega \cdot t)$ . Ввести у комірки K4, L4, M4, N4 та O4 вирази  $x_1^2, x_1x_2, x_2^2, y \cdot x_1, y \cdot x_2$ .
7. Скопіювати формули рядка 4 на рядки 5 – 53. У рядку 54 підбити суми стовпців.
8. Суми, одержані у рядку 54, ввести у діапазон комірок C6 : F8 у ролі коефіцієнтів нормальnoї системи рівнянь, розв'язками якої є коефіцієнти гармоніки  $a_0, a_1, a_2$

$$\begin{bmatrix} N & \sum x_1 & \sum x_2 & \sum y \\ \sum x_1 & \sum x_1^2 & \sum x_1x_2 & \sum y \cdot x_1 \\ \sum x_2 & \sum x_1x_2 & \sum x_2^2 & \sum y \cdot x_2 \end{bmatrix}. \quad (6.1)$$

Розв'язування системи виконати методом оберненої матриці.

**Таблиця 6.2. Моделювання гармонічної компоненти ряду**

	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
3	N	X1	x2	Y	x11	x12	x22	Yx1	Yx2	y*	(y-y*)^2
4	1	0.94	0.34	8.72	0.883	0.321	0.117	8.194	2.982	9.10	0.145
5	2	0.77	0.64	9.95	0.587	0.492	0.413	7.619	6.393	9.11	0.693
53	50	0.50	0.87	7.95	0.250	0.433	0.750	3.975	6.885	9.16	1.461
54	Сума	$\Sigma$									

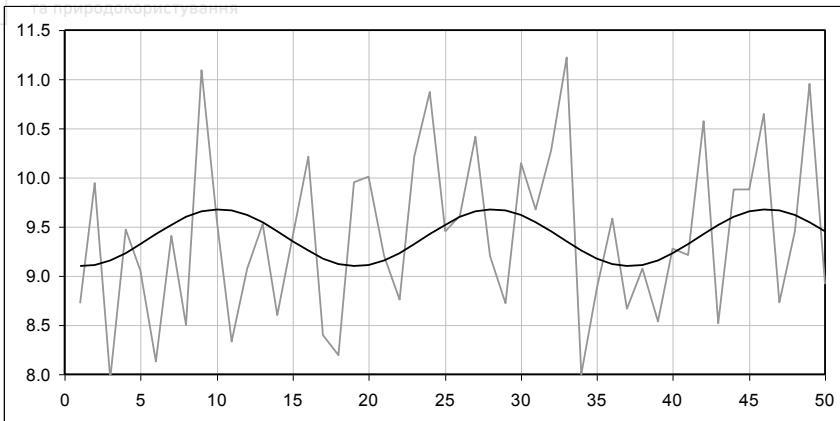


Рис. 6.3. Моделювання гармонічної компоненти ряду залишків

9. Використовуючи функцію МОБР у комірках C10 : E12 розрахувати матрицю, яка є оберненою до нормальній матриці.
10. Використовуючи функцію МУМНОЖ виконати множення оберненої матриці (діапазон C10 : E12) та стовпчика вільних членів F6 : F8.
11. У комірку P4 ввести вираз для гармонічної компоненти ряду
$$y^* = a_0 + a_1 \cos(\omega t) + a_2 \sin(\omega t). \quad (6.2)$$
12. У комірку Q4 ввести вираз для розрахунку квадрату похибки моделі гармонічної складової ряду  $(y - y^*)^2$ .
13. Скопіювати формули з рядка номер 4 на рядки 5 – 53. У рядку 54 підбити суми стовпців. Кінцевий вигляд розрахункової таблиці представлений у табл. 6.2.
14. У комірці C4 змінювати значення періоду з кроком 1 ( $T = 11, 12, 13, \dots, 20$ ) до максимального значення  $T = 20$ . Вибрati таке значення періоду, при якому сума квадратів відхилень (комірка Q54) буде мінімальною.
15. Побудувати графік гармонічної складової ряду (діапазон P4:P53, Точечная диаграмма) – Рис.6.3.



16. Повторити розрахунки пунктів 5 – 14 для побудови другої гармоніки, яка входить у ряд. Значення періоду змінювати від 4 до 6 з кроком 0.1.
17. Побудувати графік другої гармоніки.
18. Побудувати графік суми першої та другої гармонік на фоні початкових даних.

**Таблиця 6.3. Дані для розрахунків**

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10
1	6.75	7.67	9.43	5.53	6.71	12.22	11.89	5.43	7.11	11.08
2	5.20	6.29	11.13	7.14	7.36	10.58	12.76	6.89	9.09	10.04
3	6.47	9.53	8.07	6.29	10.32	8.93	9.22	3.16	7.73	4.05
4	5.21	6.04	9.20	6.95	10.07	8.61	9.20	3.52	3.81	4.69
5	4.89	7.88	5.44	7.61	7.82	4.75	7.60	4.77	1.25	2.81
6	5.84	6.61	3.50	5.83	4.51	2.59	2.83	5.88	2.01	-0.46
7	5.95	4.97	1.10	2.86	6.41	6.15	1.95	3.75	2.01	0.43
8	3.17	3.81	3.24	3.89	6.17	5.46	5.33	4.38	4.54	5.39
9	2.75	5.54	3.16	3.30	2.73	3.22	1.72	2.17	4.49	5.94
10	1.46	3.34	2.46	2.54	6.64	4.91	2.78	-0.05	8.71	11.44
11	4.76	4.95	2.81	5.09	6.31	5.55	6.98	1.12	7.81	9.79
12	2.10	2.58	5.17	3.53	7.14	5.62	9.10	5.35	10.02	9.48
13	1.54	2.97	6.10	3.15	3.85	6.34	11.83	5.52	9.04	10.26
14	5.24	3.89	5.58	4.99	5.62	10.80	8.39	6.34	6.21	4.05
15	6.40	5.08	7.95	4.19	5.71	8.61	8.72	3.43	5.92	4.83
16	3.99	4.73	10.31	4.20	6.84	10.16	12.31	3.35	5.39	0.43
17	3.94	9.21	11.16	5.36	8.75	10.85	7.98	2.10	-0.72	2.76
18	4.87	6.41	10.34	3.41	10.36	8.19	9.28	2.87	-0.44	0.88
19	8.97	6.20	8.83	7.07	8.79	9.36	8.28	5.45	1.85	3.06
20	9.13	5.93	9.43	7.00	6.53	3.56	5.17	4.97	0.57	8.35
21	9.07	7.24	10.55	7.01	6.17	6.38	6.22	3.79	3.45	8.24
22	5.72	7.05	5.35	7.24	7.73	1.24	2.23	1.62	4.78	11.75
23	6.33	8.44	7.03	5.08	4.48	0.89	5.81	3.14	8.12	12.71
24	7.78	7.47	5.05	3.73	3.27	5.23	5.61	0.81	12.14	8.34
25	3.26	3.39	2.54	3.25	5.72	4.48	6.77	2.36	8.63	7.96
26	4.03	3.78	3.49	4.09	6.52	2.94	6.56	4.16	8.73	5.44



27	2.14	4.19	4.11	2.28	6.64	6.29	11.92	2.72	5.63	-0.73
28	4.67	5.12	4.68	0.80	3.60	8.46	8.60	4.67	1.81	2.16
29	2.65	4.99	3.92	0.91	7.45	10.71	9.55	3.76	0.84	0.62
30	1.90	6.14	5.18	3.70	5.61	12.09	8.56	5.73	-0.20	3.14
31	4.04	6.11	5.20	1.31	9.08	9.69	11.77	4.96	0.58	4.83
32	5.47	4.20	5.36	4.66	6.92	11.12	6.96	2.06	5.00	8.70
33	3.67	4.21	9.50	2.27	10.77	8.76	8.34	0.42	5.88	8.49
34	5.40	5.59	8.06	4.54	10.55	4.94	4.56	3.92	9.08	8.62
35	6.62	6.86	9.16	6.82	11.07	3.80	1.65	4.36	8.01	10.13
36	7.12	7.21	8.98	8.16	7.05	4.06	4.54	0.08	9.26	8.84
37	4.54	9.60	8.71	6.59	8.01	5.44	3.22	1.36	8.44	5.61
38	5.52	8.98	10.33	4.50	9.04	4.90	6.39	2.26	9.90	1.98
39	5.46	9.70	9.21	5.15	6.76	1.67	8.29	5.83	6.47	2.56
40	6.48	8.25	8.50	6.62	3.78	5.39	8.26	5.51	2.54	0.44
41	5.29	6.48	3.51	4.09	4.93	2.74	10.06	7.26	3.55	5.94
42	7.80	7.35	2.76	2.95	6.03	5.31	9.54	6.22	-1.01	4.77
43	6.04	7.38	4.69	2.87	5.37	9.33	12.63	4.32	0.85	7.47
44	3.78	6.13	0.41	4.77	3.06	9.17	9.00	4.43	3.30	7.60
45	5.21	3.19	0.56	3.00	3.95	8.41	7.24	1.80	6.75	9.14
46	5.46	4.31	3.58	4.41	4.51	11.61	7.03	5.14	5.28	6.82
47	3.78	2.52	4.25	4.48	6.78	10.45	6.28	4.72	10.12	7.10
48	5.34	2.13	4.94	3.14	6.93	9.67	3.34	3.49	11.33	6.31
49	3.16	3.53	5.69	4.11	6.79	7.76	4.25	0.28	7.15	1.86
50	1.20	4.56	5.31	5.71	7.26	4.43	4.36	1.08	8.57	1.46



## Тема 7. Прогнозування погоди з використанням ланцюгів Маркова

**Завдання.** Погода може перебувати в одному із трьох станів:  $S_1$  - ясно,  $S_2$  - похмуро,  $S_3$  – йде дощ. Імовірність стану погоди на наступний день залежить лише від сьогоднішньої погоди. На підставі статистичних даних встановлено, що матриця імовірностей переходів від одного погодного стану до іншого має вигляд

$$\Pi = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{ясно} \\ \text{похмуро} \\ \text{дощ} \end{array}$$

*ясно похмуро дощ*

Тут  $p_{11}$  визначає імовірність ясної погоди завтра, якщо сьогодні погода також ясна;  $p_{12}$  визначає імовірність похмурої погоди завтра, якщо сьогодні погода ясна тощо. Нам відома сьогоднішня погода (стан, який описується тривимірним вектором  $S^0$ ). Потрібно:

1. Заповнити таблицю зміни імовірності погодних станів на протязі наступних двох тижнів після початку спостережень.
2. Виписати кінцеві імовірності погодних станів.
3. Виписати матриці імовірностей переходів від початкового стану до погодного стану для першого ( $\Pi^1$ ), другого ( $\Pi^2$ ) і третього ( $\Pi^3$ ) днів та пояснити ймовірнісне значення їх елементів.
4. Побудувати графік зміни імовірностей станів у залежності від часу.

**Математична модель процесу.** Вищенаведена задача є прикладом марковського випадкового процесу. При проходженні процесу зміни погоди вектор імовірностей станів змінюються так

$$\begin{aligned} \overline{S^{(1)}} &= \overline{S^{(0)}} * \Pi \\ \overline{S^{(2)}} &= \overline{S^{(1)}} * \Pi = \overline{S^{(0)}} * \Pi^2 \\ &\dots \\ \overline{S^{(n)}} &= \overline{S^{(n-1)}} * \Pi = \overline{S^{(0)}} * \Pi^n \end{aligned} \tag{7.1}$$



Формула (7.1) носить називу рівняння Колмогорова – Чепмена. Вона і служить основою для прогнозування імовірностей погодних станів на кожен з наступних днів, за умови, що відомий початковий погодний стан і матриця імовірностей переходів.

**Приклад виконання розрахунків.** Нехай, наприклад, відомо, що сьогодні похмура погода. Це означає, що вектор  $S^0$  має вигляд:  $\bar{S}^0 = (0,1,0)$ . Матриця ймовірностей переходів також відома і має наступний вигляд:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.75 & 0.25 \\ 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді імовірності погодних станів на завтрашній день визначаються так:

$$\bar{S}^1 = \bar{S}^0 \times P = (0 \ 1 \ 0) \times \begin{pmatrix} 0 & 0.75 & 0.25 \\ 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} = (0.3 \ 0 \ 0.7).$$

Тобто імовірність ясної погоди на завтрашній день – 0.3, імовірність похмурої погоди – 0, імовірність дощу – 0.7. Імовірності погодних станів на післязавтрашній день визначаються так:

$$\bar{S}^2 = \bar{S}^1 \times P = (0.3 \ 0 \ 0.7) \times \begin{pmatrix} 0 & 0.75 & 0.25 \\ 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} = (0.35 \ 0.57 \ 0.08).$$

Тобто імовірність ясної погоди на післязавтрашній день – 0.35, імовірність похмурої погоди – 0.57, імовірність дощу – 0.08. Ми могли б відразу визначити імовірності переходів від сьогоднішнього погодного стану до післязавтрашнього. Для цього необхідно вирахувати матрицю  $P^2$

$$P^2 = P \times P = \begin{pmatrix} 0.35 & 0.12 & 0.53 \\ 0.35 & 0.57 & 0.08 \\ 0.15 & 0.37 & 0.48 \end{pmatrix}$$



Другий рядок цієї матриці відповідає вищезаведеному прогнозу на післязавтра. Перший рядок дозволяє передбачити погоду на післязавтра у випадку, якщо сьогодні – сонячна погода; третій рядок – у випадку, якщо сьогодні – дощ. Результати розрахунків оформляємо у вигляді таблиці.

дні	імовірності станів		
	ясно	похмуро	дощ
1	$s_1^1$	$s_2^1$	$s_3^1$
2	$s_1^2$	$s_2^2$	$s_3^2$
...	...	...	...
14	$s_1^{14}$	$s_2^{14}$	$s_3^{14}$

Останній рядок таблиці, як правило, дає кінцеві імовірності погодних станів. Крім цього необхідно навести вигляд матриць  $\Pi^2$ ,  $\Pi^3$  і пояснити зв'язок їх елементів із відповідними імовірностями погодних станів у той, чи інший день. Вихідні дані для виконання роботи наведені у наступній таблиці.

Таблиця 7.1. Вихідні дані для розрахунків

варіа- нт	$P_{11}$	$p_{12}$	$P_{13}$	$p_{21}$	$p_{22}$	$p_{23}$	$p_{31}$	$p_{32}$	$p_{33}$	$s_1^0$	$s_2^0$	$s_3^0$
1	0	0.25	0.75	0.33	0	0.67	0.5	0.5	0	1	0	0
2	0	0.5	0.5	0.25	0	0.75	0.33	0.67	0	1	0	0
3	0	0.33	0.67	0.5	0	0.5	0.25	0.75	0	1	0	0
4	0	0.3	0.7	0.6	0	0.4	0.2	0.8	0	1	0	0
5	0	0.6	0.4	0.2	0	0.8	0.3	0.7	0	1	0	0
6	0	0.2	0.8	0.3	0	0.7	0.6	0.4	0	1	0	0
7	0	0.9	0.1	0.35	0	0.65	0.55	0.45	0	1	0	0
8	0	0.35	0.65	0.55	0	0.45	0.9	0.1	0	1	0	0
9	0	0.55	0.45	0.9	0	0.1	0.35	0.65	0	1	0	0
10	0	0.85	0.15	0.4	0	0.6	0.5	0.5	0	1	0	0
11	0	0.4	0.6	0.5	0	0.5	0.85	0.15	0	1	0	0
12	0	0.5	0.5	0.85	0	0.15	0.4	0.6	0	1	0	0
13	0	0.35	0.65	0.2	0	0.8	0.6	0.4	0	1	0	0
14	0	0.2	0.8	0.6	0	0.4	0.35	0.65	0	1	0	0
15	0	0.6	0.4	0.35	0	0.65	0.2	0.8	0	1	0	0



16	0	0.55	0.45	0.25	0	0.75	0.65	0.35	0	1	0	0	0
17	0	0.25	0.75	0.65	0	0.35	0.55	0.45	0	1	0	0	0
18	0	0.25	0.75	0.33	0	0.67	0.5	0.5	0	0	0	1	0
19	0	0.5	0.5	0.25	0	0.75	0.33	0.67	0	0	1	0	0
20	0	0.33	0.67	0.5	0	0.5	0.25	0.75	0	0	1	0	0
21	0	0.3	0.7	0.6	0	0.4	0.2	0.8	0	0	1	0	0
22	0	0.6	0.4	0.2	0	0.8	0.3	0.7	0	0	1	0	0
23	0	0.2	0.8	0.3	0	0.7	0.6	0.4	0	0	1	0	0
24	0	0.9	0.1	0.35	0	0.65	0.55	0.45	0	0	1	0	0
25	0	0.35	0.65	0.55	0	0.45	0.9	0.1	0	0	1	0	0
26	0	0.55	0.45	0.9	0	0.1	0.35	0.65	0	0	1	0	0
27	0	0.85	0.15	0.4	0	0.6	0.5	0.5	0	0	1	0	0
28	0	0.4	0.6	0.5	0	0.5	0.85	0.15	0	0	1	0	0
29	0	0.5	0.5	0.85	0	0.15	0.4	0.6	0	0	1	0	0
30	0	0.35	0.65	0.2	0	0.8	0.6	0.4	0	0	1	0	0
31	0	0.2	0.8	0.6	0	0.4	0.35	0.65	0	0	1	0	0
32	0	0.6	0.4	0.35	0	0.65	0.2	0.8	0	0	1	0	0
33	0	0.55	0.45	0.25	0	0.75	0.65	0.35	0	0	1	0	0
34	0	0.25	0.75	0.65	0	0.35	0.55	0.45	0	0	1	0	0
35	0	0.25	0.75	0.33	0	0.67	0.5	0.5	0	0	0	1	0
36	0	0.5	0.5	0.25	0	0.75	0.33	0.67	0	0	0	1	0
37	0	0.33	0.67	0.5	0	0.5	0.25	0.75	0	0	0	1	0
38	0	0.3	0.7	0.6	0	0.4	0.2	0.8	0	0	0	1	0
39	0	0.6	0.4	0.2	0	0.8	0.3	0.7	0	0	0	1	0
40	0	0.2	0.8	0.3	0	0.7	0.6	0.4	0	0	0	1	0
41	0	0.9	0.1	0.35	0	0.65	0.55	0.45	0	0	0	1	0
42	0	0.35	0.65	0.55	0	0.45	0.9	0.1	0	0	0	1	0
43	0	0.55	0.45	0.9	0	0.1	0.35	0.65	0	0	0	1	0
44	0	0.85	0.15	0.4	0	0.6	0.5	0.5	0	0	0	1	0
45	0	0.4	0.6	0.5	0	0.5	0.85	0.15	0	0	0	1	0
46	0	0.5	0.5	0.85	0	0.15	0.4	0.6	0	0	0	1	0
47	0	0.35	0.65	0.2	0	0.8	0.6	0.4	0	0	0	1	0
48	0	0.2	0.8	0.6	0	0.4	0.35	0.65	0	0	0	1	0
49	0	0.6	0.4	0.35	0	0.65	0.2	0.8	0	0	0	1	0
50	0	0.55	0.45	0.25	0	0.75	0.65	0.35	0	0	0	1	0



## Тема 8. Чисельні методи розв'язування задачі Коші

**Завдання.** Знайти чисельний розв'язок задачі Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку методом Ейлера, модифікованим методом Ейлера та методом Рунге-Кутта на проміжку  $[0,1]$ . Величина кроку  $h=0,1$ . Початкова умова  $y(0)=1$ . За результатами розрахунків побудувати графік.

Варіант 1	$y' = x + y$	Варіант 26	$y' = e^x - x$
Варіант 2	$y' = x^2 + y$	Варіант 27	$y' = e^x + \sqrt{y}$
Варіант 3	$y' = x + \sqrt{y}$	Варіант 28	$y' = e^x - y^2$
Варіант 4	$y' = x^2 + \sqrt{y}$	Варіант 29	$y' = \sin x + \exp(-y)$
Варіант 5	$y' = x - y$	Варіант 30	$y' = \cos x + \exp(-y)$
Варіант 6	$y' = x^2 - y$	Варіант 31	$y' = \sin y + \exp x$
Варіант 7	$y' = x - y^2$	Варіант 32	$y' = \cos y + \exp x$
Варіант 8	$y' = x^2 - y^2$	Варіант 33	$y' = \sin x - \exp y$
Варіант 9	$y' = \sin x + y$	Варіант 34	$y' = \cos x - \exp y$
Варіант 10	$y' = \sin x - y$	Варіант 35	$y' = \sin y - \exp x$
Варіант 11	$y' = \sin y + x$	Варіант 36	$y' = \cos y - \exp x$
Варіант 12	$y' = \sin y - x$	Варіант 37	$y' = -\sin x + \exp(-y)$
Варіант 13	$y' = \cos x + y$	Варіант 38	$y' = -\cos x + \exp(-y)$
Варіант 14	$y' = \cos x - y$	Варіант 39	$y' = -\sin y + \exp x$
Варіант 15	$y' = \cos y + x$	Варіант 40	$y' = -\cos y + \exp x$
Варіант 16	$y' = \cos y - x$	Варіант 41	$y' = \sin(x + y)$
Варіант 17	$y' = e^x + y$	Варіант 42	$y' = \cos(x + y)$
Варіант 18	$y' = e^x - y$	Варіант 43	$y' = \sin(x - y)$
Варіант 19	$y' = e^x + \sqrt{x}$	Варіант 44	$y' = \cos(x - y)$
Варіант 20	$y' = e^x - x^2$	Варіант 45	$y' = x + \ln y$
Варіант 21	$y' = x + e^{-y}$	Варіант 46	$y' = x - \ln y$
Варіант 22	$y' = x - e^y$	Варіант 47	$y' = y + \ln(x + 1)$



Варіант 23	$y' = x^2 + e^{-y}$	Варіант 48	$y' = y - \ln(x+1)$
Варіант 24	$y' = x^2 - e^y$	Варіант 49	$y' = x * \exp(-y)$
Варіант 25	$y' = e^x + x$	Варіант 50	$y' = y * \exp(-x)$

## Теоретичні відомості.

### 1. Метод Ейлера.

Знаходимо чисельний розв'язок задачі Коші методом Ейлера. Результати обчислень оформляємо у вигляді розрахункової таблиці наступного вигляду:

K	$x_k$	$y_k$	$f(x_k, y_k)$	$Y_{k+1}$

Розрахункова формула методу:

$$y_{k+1} = y_k + h * f(x_k, y_k). \quad (8.1)$$

### 2. Удосконалений метод Ейлера.

Знаходимо чисельний розв'язок задачі Коші удосконаленим методом Ейлера. Результати обчислень оформляємо у вигляді розрахункової таблиці наступного вигляду:

k	$x_k$	$y_k$	$f(x_k, y_k)$	$x_k + h/2$	$x_k + h/2 * f(x_k, y_k)$	$f(x_k^*, y_k^*)$	$Y_{k+1}$

Розрахункові формули методу:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + h * f(x_k^*, y_k^*); \\ x_k^* &= x_k + h/2; y_k^* = y_k + h/2 * f(x_k, y_k). \end{aligned} \quad (8.2)$$

### 3. Метод Рунге – Кутта.

Знаходимо чисельний розв'язок задачі Коші методом Рунге-Кутта. Результати обчислень оформляємо у вигляді розрахункової таблиці наступного вигляду:

k	$x_k$	$y_k$	$K_0$	$x_k + h/2$	$y_k + K_0/2$	$K_1$	$x_k + h/2$	$y_k + K_1/2$	$K_2$	$X_k + h$	$Y_k + K_2$	$K_3$	$y_{k+1}$



### Розрахункова формула методу:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(K_0 + 2K_1 + 2K_2 + K_3); \quad (8.3)$$

тут  $K_0 = h * f(x_k, y_k); \quad K_1 = h * f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{K_0}{2});$   
 $K_2 = h * f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{K_1}{2}); \quad K_3 = h * f(x_k + h, y_k + K_2).$

За результатами розрахунків пп. 1 – 3 будуємо графіки розв’язків методом Ейлера, удосконаленим методом Ейлера та методом Рунге-Кутта.

## Тема 9. Моделювання динаміки популяцій

**Задача 1. Модель ”хижак - жертва”.** У замкненій водоймі існує два типи риб: великі риби-хижаки і менші риби-фітофаги, які служать джерелом корму для хижаків. Риби-фітофаги харчуються водоростями, кількість яких вважається необмеженою. Позначимо  $x_1$  – кількість хижаків,  $x_2$  – кількість жертв (риб-фітофагів). Необхідно дослідити динаміку зміни чисельності обох популяцій, використовуючи наступну математичну модель:

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= -ax_1^n + bx_1^n x_2^n \\ dx_2/dt &= cx_2^n - dx_1^n x_2^n \end{aligned} \quad (9.1)$$

Тут:  $a, b, c, d$  – додатні коефіцієнти, які мають наступний зміст:

- $a$  – коефіцієнт самоотруєння в середовищі хижаків;
- $b$  – коефіцієнт розмножуваності хижаків;
- $c$  – коефіцієнт розмножуваності жертв;
- $d$  – коефіцієнт зменшення кількості жертв внаслідок самоотруєння і поїдання хижаками;
- $n$  - номер часового етапу.

### Алгоритм виконання розрахунків.

1. Розрахувати коефіцієнти моделі за формулами:  $A=6+0.1*N; \quad B=10;$   
 $C=16+0.1*N; \quad D=10; \quad x_{01}=0.7; \quad x_{02}=1.4; \quad dt=0.025$  (рік),  $t_{max}=1$  рік (тут  $N$  - номер варіанту).



2. Обчислити значення координат стаціонарної точки процесу  $x_{1c}=C/D; x_{2c}=A/B$ . Координати стаціонарної точки визначають рівноважні значення кількості хижаків і жертв.
3. Заповнити розрахункову таблицю удосконаленого методу Ейлера, використовуючи розрахункові формули

$$\begin{aligned} f_1(x_1^n, x_2^n) &= -ax_1^n + bx_1^n x_2^n; \quad x_1^{n+1/2} = x_1^n + dt/2 * f_1(x_1^n, x_2^n); \\ f_2(x_1^n, x_2^n) &= cx_2^n - dx_1^n x_2^n \quad x_2^{n+1/2} = x_2^n + dt/2 * f_2(x_1^n, x_2^n) \\ x_1^{n+1} &= x_1^n + dt * f_1(x_1^{n+1/2}, x_2^{n+1/2}) \\ x_2^{n+1} &= x_2^n + dt * f_2(x_1^{n+1/2}, x_2^{n+1/2}) \end{aligned} \quad (9.2)$$

$t$	$x_{1n}$	$x_{2n}$	$f_{1n}$	$f_{2n}$	$x_{1n+1/2}$	$x_{2n+1/2}$	$f_{1n+1/2}$	$f_{2n+1/2}$
$0$								
$0.025$								
$0.05$								
$\dots$								
$1$								

4. За результатами розрахунків п.3 побудувати графіки залежностей  $x_1(t), x_2(t)$ . Типовий вигляд графіка представлений на Рис. 9.1.
5. Побудувати фазову діаграму процесу  $x_2(x_1)$ . Вказати на ній стаціонарну точку. Типовий вигляд фазової діаграми представлений на Рис.9.2.
6. Зробити висновок про закономірності зміни чисельності популяцій обох видів. Визначити період коливань чисельності видів.

**Задача 2. Конкуренція двох видів, що споживають одинаковий корм.** Розглянемо біоценоз, який містить два типи тварин - фітофагів, які харчуються одним кормом. Кількість корму є обмеженою. Позначимо  $x_1$  – кількість тварин першого типу,  $x_2$  – кількість тварин другого типу. Необхідно дослідити динаміку зміни чисельності обох популяцій, використовуючи наступну математичну модель:

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= ax_1^n - b * (k_1 x_1^n + k_2 x_2^n) * x_1^n \\ dx_2/dt &= cx_2^n - d * (k_1 x_1^n + k_2 x_2^n) * x_2^n \end{aligned} \quad (9.3)$$

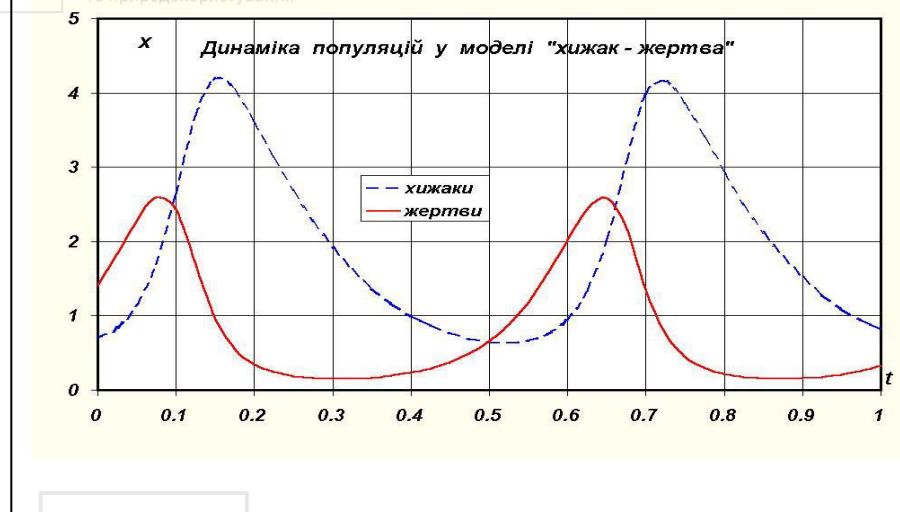


Рис.9.1. Динаміка зміни кількості хижаків і жертв з бігом часу.

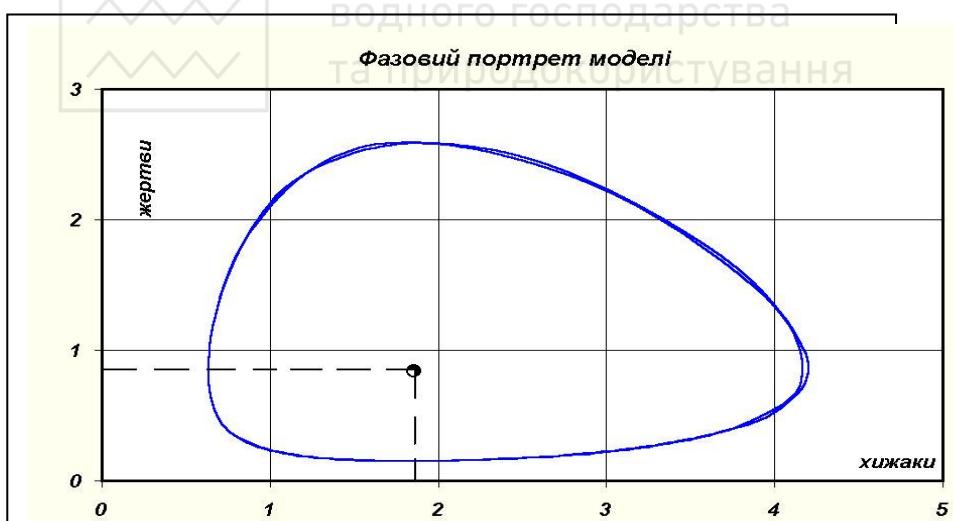


Рис.9.2. Фазовий портрет моделі "хижак - жертва" у координатах "кількість хижаків – кількість жертв". Точка всередині контура – стаціонарна точка процесу.

Тут:  $a, b, c, d$  – додатні коефіцієнти, які мають наступний зміст:



- $a$  – коефіцієнт розмножуваності тварин первого типу;
- $b$  – коефіцієнт самоотруєння тварин первого типу;
- $c$  – коефіцієнт розмножуваності тварин другого типу;
- $d$  – коефіцієнт самоотруєння тварин другого типу;
- $k_1, k_2$  – трофічні коефіцієнти;  $n$  - номер часового етапу.

### Алгоритм виконання розрахунків.

1. Розрахувати коефіцієнти моделі за формулами:  $A=10$ ;  $B=20-0.2*N$ ;  $C=8-0.03*N$ ;  $D=10$ ;  $x_{01}=1+0.01*N$ ;  $x_{02}=5.0$ ;  $k_1=0.1$ ;  $k_2=0.05$ ;  $dt=0.1$ (рік),  $t_{max}=3$  роки (тут  $N$  - номер варіанту).
2. Обчислити значення параметрів  $x_{1c}=A/(B*k_1)$ ;  $x_{2c}=C/(D*k_2)$ . Використовуючи їх значення зробити прогноз щодо розвитку видів.
3. Заповнити розрахункову таблицю удосконаленого методу Ейлера, використовуючи розрахункові формули

$$\begin{aligned} x_1^{n+1} &= x_1^n + dt * f_1(x_1^{n+1/2}, x_2^{n+1/2}) \\ x_2^{n+1} &= x_2^n + dt * f_2(x_1^{n+1/2}, x_2^{n+1/2}) \\ x_1^{n+1/2} &= x_1^n + dt / 2 * f_1(x_1^n, x_2^n) \\ x_2^{n+1/2} &= x_2^n + dt / 2 * f_2(x_1^n, x_2^n) \end{aligned} \quad (9.4)$$

$$f_1(x_1^n, x_2^n) = ax_1^n - b * (k_1 x_1^n + k_2 x_2^n) * x_1^n$$

$$f_2(x_1^n, x_2^n) = cx_2^n - d * (k_1 x_1^n + k_2 x_2^n) * x_2^n$$

$t$	$X_{1n}$	$x_{2n}$	$f_{1n}$	$f_{2n}$	$x_{1n+1/2}$	$x_{2n+1/2}$	$f_{1n+1/2}$	$F_{2n+1/2}$
0								
0.1								
...								
3								

4. За результатами розрахунків п.3 побудувати графіки залежностей  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ .
5. Зробити висновок про закономірності зміни чисельності популяцій обох видів.



## Тема 10. Дослідження стійкості нелінійної динамічної системи

**Завдання.** Нелінійна динамічна система задана системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x, y); \\ \frac{dy}{dt} = b(x, y). \end{cases} \quad (10.1)$$

Тут  $a(x, y)$ ,  $b(x, y)$  - нелінійні функції. Необхідно:

1. Знайти стаціонарні точки системи. Дослідити одну із стаціонарних точок на стійкість.
2. Побудувати характеристичний визначник та характеристичне рівняння системи.
3. Розв'язати характеристичне рівняння. Зробити висновок про характер динаміки системи.

### Теоретичні відомості

Знайдемо стаціонарні точки системи (10.1). Для цього необхідно розв'язати систему нелінійних числових рівнянь

$$\begin{cases} a(x, y) = 0; \\ b(x, y) = 0. \end{cases} \quad (10.2)$$

Кількість розв'язків системи (2) може бути достатньо великою. Наприклад у випадку, коли коли функція  $a(x, y)$  є лінійною, а функція  $b(x, y)$  - поліномом другого степеня, система (10.2) має дві пари розв'язків. У випадку, коли обидві функції є поліномами другого степеня, кількість розв'язків становить чотири.

Дослідимо динаміку системи в околі однієї із знайдених стаціонарних точок. Для цього використаємо метод лінеаризації. Побудуємо характеристичний визначник системи (10.1). Для цього знайдемо частинні похідні

$$a_{11} = \frac{\partial a(x_1, x_2)}{\partial x_1}; a_{12} = \frac{\partial a(x_1, x_2)}{\partial x_2}; a_{21} = \frac{\partial b(x_1, x_2)}{\partial x_1}; a_{22} = \frac{\partial b(x_1, x_2)}{\partial x_2}, \quad (10.3)$$



і, підставляючи координати стаціонарної точки, побудуємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (10.4)$$

Або, розкриваючи визначник,

$$\lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0. \quad (10.5)$$

З цього рівняння визначаємо  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  – корені характеристичного рівняння. Значення коренів визначають стійкість системи у даній точці. Можливі наступні випадки:

1. Якщо  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  дійсні ( $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ), то:

1.1. Якщо  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  різних знаків, то фазовий портрет називається сідлом (рис. 8.1). Дві пари траекторій проходять через стаціонарну точку, а інші виглядають так, як горизонталі на карті місцевості, котра є гірським перевалом. Динаміка нестійка.

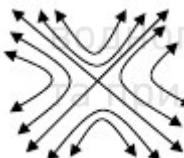


Рис. 10.1. Сідло

1.2. Якщо  $\lambda_1 > 0$  і  $\lambda_2 > 0$ , то фазовий портрет називається нестійким вузлом. Кожна фазова траекторія примикає до особливої точки і з часом розбігається (рис 10.2). Динаміка нестійка.

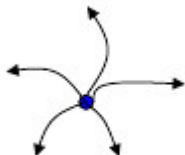


Рис.10.2. Нестійкий вузол

1.3. Якщо  $\lambda_1 < 0$  і  $\lambda_2 < 0$ , то фазовий портрет називається стійким вузлом. Усі траекторії проходять через стаціонарну точку і з часом до неї збігаються (рис. 10.3). Динаміка стійка.

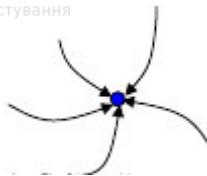


Рис.10.3. Стійкий вузол

2. Якщо  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  комплексно-спряжені:  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ , то

2.1. Якщо  $\alpha < 0$ , то фазовий портрет називається стійким фокусом. Траєкторії асимптотично наближаються до особливої точки, навиваючись на неї у вигляді спіралей (рис. 10.4). Динаміка стійка.



Рис.10.4. Стійкий фокус

2.2. Якщо  $\alpha > 0$  (дійсна частина додатна), то фазовий портрет називається нестійким фокусом (рис. 10.5). Динаміка нестійка.



Рис.10.5. Нестійкий фокус

2.3. Якщо  $\alpha = 0$ , тобто характеристичні числа  $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$  мають тільки уявну частину, то фазовий портрет називається граничним циклом (рис. 10.6). Цей тип поведінки відповідає описаній вище моделі "хижак - жертва". Висновок щодо типу динаміки зробити неможливо.



Рис.10.6. Границний цикл

Класифікація типів поведінки фазових кривих в околі особливої точки була здійснена французьким математиком Анрі Пуанкарє.



## Приклад розв'язування

Нелінійна динамічна система задана системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} dx/dt = x - 3y; \\ dy/dt = x + y + x^2; \end{cases} \quad (10.6)$$

Для знаходження координат стаціонарної точки складаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} x - 3y = 0; \\ x + y + x^2 = 0; \end{cases} \quad (10.7)$$

Система (10.7) має два наступних розв'язки:  $(x = 0; y = 0)$  та  $(x = -4/3; y = -8/3)$ , які описують стаціонарні точки системи. Дослідимо першу стаціонарну точку. Знаходимо частинні похідні

$$\frac{\partial a}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial a}{\partial y} = -3; \quad \frac{\partial b}{\partial x} = 1 + 2x; \quad \frac{\partial b}{\partial y} = 1. \quad (10.8)$$

Для стаціонарної точки  $(x = 0; y = 0)$  матриця частинних похідних має наступний вигляд

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Будуємо характеристичний визначник і характеристичне рівняння системи

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (10.9)$$

або

$$\lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0. \quad (10.10)$$

Детермінант рівняння  $D = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -12$ . Отже корені є комплексні і мають наступний вигляд  $\lambda_1 = 1 + i\sqrt{3}$ ;  $\lambda_2 = 1 - i\sqrt{3}$ . Оскільки дійсна частина коренів  $Re(\lambda_{1,2}) = 1 > 0$ , досліджувана стаціонарна точка відповідає нестійкому руху системи. Стационарна точка такого роду є нестійким фокусом (рис. 10.5).



Таблиця 10.1. Варіанти завдань

Варіант	$a(x, y)$	$b(x, y)$	Варіант	$a(x, y)$	$b(x, y)$
1	$3x - y$	$x + y + y^2$	26	$-2x + y - y^2$	$3x - y$
2	$3x + y$	$x - y + y^2$	27	$2x + y + y^2$	$3x + y$
3	$3x - y$	$x + y - y^2$	28	$-2x + y + y^2$	$3x - y$
4	$3x + y$	$X - y - y^2$	29	$2x + y - y^2$	$3x + y$
5	$X + 2y - y^2$	$2x - y$	30	$x - 2y$	$x + 3y - y^2$
6	$x - 2y - y^2$	$2x + y$	31	$x + 2y$	$x + 3y - y^2$
7	$x + 2y + y^2$	$2x - y$	32	$x - 2y$	$x + 3y + y^2$
8	$x - 2y + y^2$	$2x + y$	33	$x + 2y$	$x + 3y + y^2$
9	$x - 3y$	$x + y - y^2$	34	$4x - y - y^2$	$2x - y$
10	$x + 3y$	$-x + y - y^2$	35	$4x + y - y^2$	$2x - y$
11	$x - 3y$	$x + y + y^2$	36	$4x - y + y^2$	$2x - y$
12	$x + 3y$	$-x + y - y^2$	37	$4x + y + y^2$	$2x - y$
13	$-2x + y - y^2$	$3x - y$	38	$3x - y$	$x + y + y^2$
14	$2x + y + y^2$	$3x + y$	39	$3x + y$	$x - y + y^2$
15	$-2x + y + y^2$	$3x - y$	40	$3x - y$	$x + y - y^2$
16	$2x + y - y^2$	$3x + y$	41	$3x + y$	$x - y - y^2$
17	$x - 2y$	$x + 3y - y^2$	42	$x + 2y - y^2$	$2x - y$
18	$x + 2y$	$x + 3y - y^2$	43	$x - 2y - y^2$	$2x + y$
19	$x - 2y$	$x + 3y + y^2$	44	$x + 2y + y^2$	$2x - y$
20	$x + 2y$	$x + 3y + y^2$	45	$x - 2y + y^2$	$2x + y$
21	$4x - y - y^2$	$2x - y$	46	$x - 3y$	$x + y - y^2$
22	$4x + y - y^2$	$2x - y$	47	$x + 3y$	$-x + y - y^2$
23	$4x - y + y^2$	$2x - y$	48	$x - 3y$	$x + y + y^2$
24	$4x + y + y^2$	$2x - y$	49	$x + 3y$	$-x + y - y^2$
25	$4x - y - y^2$	$2x + y$	50	$x - 3y$	$x + y - y^2$



## Тема 11. Моделювання поширення забруднення у водному середовищі

**Постановка задачі.** Розглянемо ділянку неширокої водойми із стоячою водою, довжиною  $L$ . На лівому березі водойми ( $L = 0$ ) розташоване підприємство. В результаті залпового викиду стічних вод концентрація забруднення  $c$  в точці  $x = 0$  змінюється за законом

$$\alpha(t) = \frac{N}{N+10} t^3 e^{-t/3} + 0.1. \quad \text{Концентрація забруднення біля правого}$$

берега водойми залишається сталою:  $\beta(t) = 0.01$ . Лінійні розміри водойми  $L = 0.6 \text{ км}$ . У початковий момент часу ( $t = 0$ ) розподіл концентрації забруднювача відповідає лінійному закону:  $\varphi(x) = 0.01 + 0.15 * (0.6 - x)$ .

**Математична модель задачі.** Процес молекулярної дифузії для одновимірного випадку описується диференціальним рівнянням параболічного типу

$$\frac{\partial c}{\partial t} = a \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}. \quad (11.1)$$

Тут  $c(x,t)$  – концентрація дифундуючої речовини,  $a$  – коефіцієнт дифузії,  $x$  – координата,  $t$  – час. Для знаходження однозначного розв'язку задачі (11.1) в деякій області  $D$  ( $D = \{0 \leq x \leq L; 0 \leq t \leq T\}$ ) задають країві умови такого вигляду:  $c(0,t) = \alpha(t)$  - зміна концентрації з часом на початку ділянки (ліва гранична умова);  $c(L,t) = \beta(t)$  - зміна концентрації з часом на кінці ділянки (права гранична умова);  $c(x,0) = \varphi(x)$  - розподіл концентрації забруднювача у початковий момент часу (початкова умова).

**Алгоритм розв'язування.** Чисельне розв'язування змішаної задачі дифузії виконується згідно з наступним алгоритмом:

1. Обчислити значення параметрів  $a$ ,  $\Delta t$ , взявши  $\Delta x = 0.1$ ,  $N$  – номер варіанту.

$$a = \frac{1}{500 + 20 * N}; \quad \Delta t = \frac{(\Delta x)^2}{6 * a}. \quad (11.2)$$



2. Заповнити розрахункову таблицю у такій послідовності:

а) початкова умова  $c_{i0} = 0.01 + 0.15 * (0.6 - x_i)$  - перший рядок таблиці. Тут  $x_i = 0.1 * i; i = 0, 6$ .

б) крайові умови:  $c_{0j} = \frac{N}{N+10} t_j^3 \exp(-t_j/3) + 0.1$  - перший стовпець таблиці;  $c_{6j} = 0.01$  - останній стовпець таблиці. Тут  $t_j = \Delta t * j; j = 0, 20$ .

в) розрахункова формула для внутрішніх вузлів сітки

$$c_{ij} = \frac{1}{6} (c_{i-1,j} + 4c_{ij} + c_{i+1,j}), \quad i = \overline{0,6}; \quad j = \overline{0,20}. \quad (11.3)$$

Розрахунки розпочинаються з другого рядка таблиці. Кожен наступний рядок (часовий шар) використовує результати розрахунків попереднього.

#### Розрахункова таблиця:

	$i$	0	1	2	3	4	5	6
$j$	$dt \setminus dx$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0	0							
1	$\Delta t$							
	...							
20	$20\Delta t$							

4. Побудувати діаграму часових перерізів  $c(x)$  для різних  $t_j$  ( $j=5, 10, 15, 20$ ).
5. Побудувати діаграму просторових перерізів  $c(t)$  для різних точок  $x_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ). Типовий вигляд діаграм часових і просторових перерізів представлений на рис. 11.1 – 11.2.
6. Зробити висновок про розвиток процесу дифузії в часі і просторі.



*Просторові перерізи*

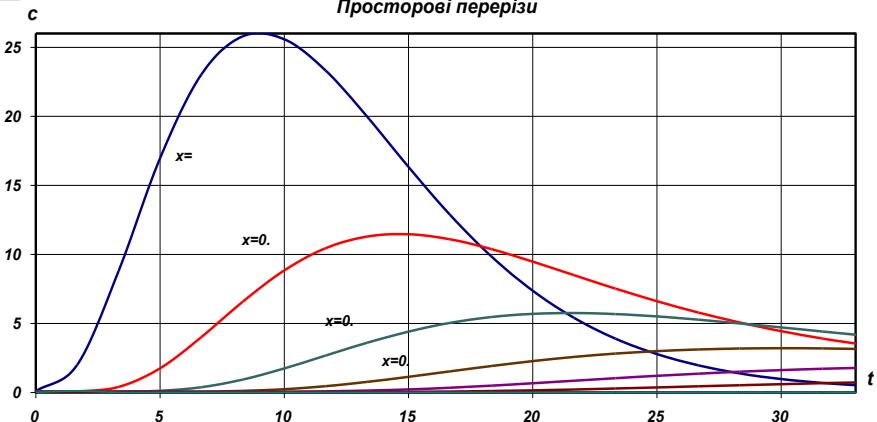


Рис. 11.1. Залежність концентрації домішки від часу в різних точках водойми

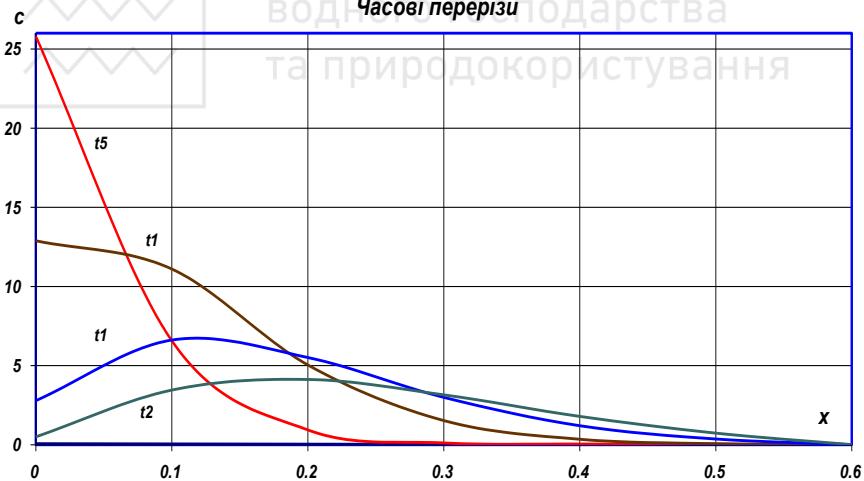


Рис. 11.2. Просторовий розподіл концентрації домішки в різні моменти часу. Зміст позначень:  $t_5 = 5\Delta t$ ,  $t_{10} = 10\Delta t$ ,  $t_{15} = 15\Delta t$ ,  $t_{20} = 20\Delta t$ .



## Тема 12. Побудова картодіаграми забруднення території викидами діючих підприємств

**Постановка задачі.** Розглянемо регіон у формі прямокутника. У регіоні розміщено 5 діючих промислових підприємств, кожне з яких забруднює атмосферу шкідливими викидами. Позначимо  $V_i$  – об’єм викиду забруднюючої речовини з  $i$ -го підприємства за одиницю часу (інтенсивність забруднення). Для спрощення будемо ігнорувати вплив вітру і вважати, що забруднення поширюється рівномірно в усі сторони через механізм дифузії. Наступне припущення полягає в тому, що при віддаленні від джерела забруднення інтенсивність забруднення зменшується за лінійним законом.

$$Q_i = \begin{cases} V_i \cdot (1 - \frac{r_i}{\rho_i}), & \text{якщо } r_i \leq \rho_i; \\ 0, & \text{якщо } r_i > \rho_i. \end{cases} \quad (12.1)$$

Тут  $r_i$  - відстань від  $i$ -го джерела;  $\rho_i$  - радіус дії  $i$ -го джерела забруднення. У довільній точці регіону з координатами  $(x, y)$  інтенсивність забруднення дорівнює сумі інтенсивностей дії усіх джерел

$$F = \sum_{i=1}^N V_i \left( 1 - \frac{r_i}{\rho_i} \right). \quad (12.2)$$

Тут  $r_i$  - відстань від підприємства з координатами  $(x_i, y_i)$

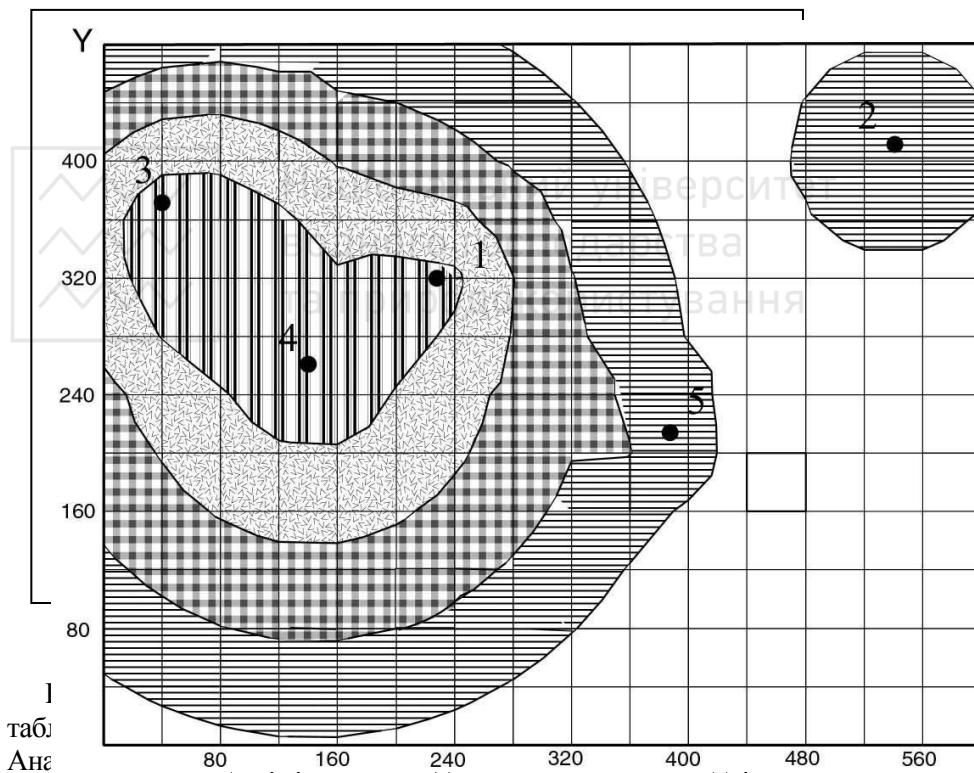
$$r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \quad (12.3)$$

до вузлової точки з координатами  $(x, y)$ . Для побудови карти необхідно, використовуючи співвідношення (12.2), отримати значення забруднення від кожного з підприємств у вузлах квадратної координатної сітки з стороною квадрата  $a$ . Таким чином результат забруднюючої дії підприємства буде представлений у вигляді матриць, елементи яких є значеннями забруднення у вузлах квадратної координатної сітки. Для отримання значення сумарного забруднення всі матриці слід додати. Отримана підсумкова матриця дозволяє побудувати карту забруднення регіону викидами підприємств. Для цього слід використати команду Мастер діаграмм, Поверхність. Отриману діаграму слід відрядагувати (Легенда, Формат легенди, Шкала) для того, щоб кількість отри-



маних кольорів (ступенів забруднення) була не менша від 5. Для побудови моделі вибираються параметри, наведені у таблиці 12.3.

**Завдання.** Для виконання розрахунків побудувати координатну сітку з кроком 40 одиниць ( $x = 0, 40, 80, \dots, 640$ ;  $y = 0, 40, 80, \dots, 480$ ). Обчислити значення забруднення від кожного окремого підприємства і сумарного забруднення в кожному з вузлів сітки. В результаті виконання розрахунків побудувати картодіаграму забруднення регіону, на якій зони різного ступеня забрудненості будуть зафарбовані різними кольорами, або ж різними типами штриховки. Один з варіантів такої картодіаграми наведений нижче на Рис. 12.1.



тим результати сумарного забруднення від всіх п'яти підприємств оформляються у підсумковій таблиці, яка має вигляд, аналогічний до Таблиці 12.2. За даними цієї таблиці і будується картодіаграма забруднення регіону (Тип диаграммы – Поверхность, Контурная диаграмма).



Таблиця 12.1. Відстань від першого підприємства до вузлів сітки

X<sub>1</sub> Y<sub>1</sub>  
532 305

x \ y	0	40	80	120	160	200	240	280	320	360	400	440	480
0	613	594	578	563	551	542	536	533	532	535	540	549	560
40	579	559	541	526	513	503	496	493	492	495	501	510	522
80	545	524	505	488	475	464	457	453	452	455	462	472	485
120	513	490	469	452	437	425	417	413	412	416	423	434	448
160	481	457	435	415	399	387	378	373	372	376	384	396	411
200	451	425	401	380	362	348	338	333	332	337	345	358	375
240	422	394	369	346	326	310	299	293	292	297	307	322	340
280	396	366	338	313	291	273	260	253	252	258	269	286	307
320	371	339	309	281	257	237	222	213	213	219	232	251	275
360	350	316	283	253	225	202	184	174	173	181	196	219	245
400	332	296	261	227	196	169	147	134	133	143	163	189	219
440	319	281	243	207	172	140	113	95	93	107	132	163	198
480	309	270	231	192	154	117	83	58	54	76	108	145	183
520	305	265	225	185	145	106	66	28	19	56	96	136	175
560	306	266	227	187	148	109	71	38	32	62	99	138	177
600	312	274	235	197	160	125	94	72	70	87	117	151	188
640	324	286	250	214	181	151	126	111	109	121	144	173	206

Таблиця 2 має такий вигляд:

Таблиця 12.2. Забруднення у вузлах сітки від першого підприємства

V<sub>1</sub> Ro<sub>1</sub>  
821 393

x \ y	0	40	80	120	160	200	240	280	320	360	400	440	480
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
80	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
120	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
160	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
200	0	0	0	0	0	0	14	32	42	43	35	19	0
240	0	0	0	0	27	64	94	114	125	127	118	100	72



	природокористування	0	0	0	51	99	140	173	196	209	210	200	180	149
280		0	0	0	57	115	168	214	251	277	292	294	282	258
320		0	0	57	115	168	214	251	277	292	294	282	258	224
360		0	45	112	175	233	284	327	358	375	377	363	336	296
400	69	90	161	229	293	351	400	437	458	460	444	411	364	
440	0	127	203	276	346	411	469	514	540	543	522	481	427	
480	0	155	235	313	389	462	529	586	622	626	597	545	480	
520	0	175	257	339	420	499	576	647	700	708	663	595	519	
560	0	183	267	350	434	517	600	683	763	781	703	621	538	
600	0	181	264	347	430	512	594	673	743	755	692	614	533	
640	0	168	249	330	409	486	560	624	670	676	638	577	505	



Національний університет  
водного господарства  
та природокористування

Таблиця 12.3. Дані для розрахунків

<i>Варіант</i>	<i>X1</i>	<i>X2</i>	<i>X3</i>	<i>X4</i>	<i>X5</i>	<i>Y1</i>	<i>Y2</i>	<i>Y3</i>	<i>Y4</i>	<i>Y5</i>	<i>V1</i>	<i>V2</i>	<i>V3</i>	<i>V4</i>	<i>V5</i>	<i>Ro1</i>	<i>Ro2</i>	<i>Ro3</i>	<i>Ro4</i>	<i>Ro5</i>
1	512	116	34	394	223	339	182	339	165	317	516	637	759	624	307	124	154	183	150	74
2	232	540	41	143	385	322	407	367	260	210	231	414	414	973	194	76	137	137	321	64
3	532	385	74	252	56	305	213	435	181	230	821	192	943	448	957	393	92	452	215	459
4	40	66	153	270	521	338	92	242	358	55	279	255	627	386	316	74	68	167	103	84
5	61	362	526	255	197	367	169	260	437	336	974	465	210	612	750	445	213	96	280	343
6	298	482	37	57	172	138	334	77	367	255	363	172	307	138	592	253	120	214	96	412
7	506	297	286	129	179	170	307	84	447	143	554	593	989	224	993	168	180	300	68	301
8	68	170	580	519	47	265	266	308	176	85	666	278	287	217	954	239	100	103	78	343
9	33	548	291	190	307	43	124	114	300	439	327	769	923	716	507	76	179	215	166	118
10	155	421	268	308	55	416	174	140	254	266	328	831	996	201	510	127	322	387	78	198
11	597	104	78	532	311	426	222	362	206	407	426	222	362	206	407	104	84	196	143	191
12	127	187	589	560	225	91	207	97	346	330	746	927	246	801	751	206	256	68	221	208
13	41	181	202	389	59	343	364	250	366	166	877	665	845	528	503	108	82	104	65	62
14	102	307	187	48	577	266	255	366	39	322	423	169	255	884	448	225	90	136	471	239
15	123	593	259	421	202	294	64	188	57	101	243	378	713	235	882	79	122	231	76	285
16	529	44	304	240	171	30	333	88	399	146	442	389	219	280	563	161	142	80	102	206
17	549	330	377	33	540	59	143	330	417	240	262	598	677	507	997	68	155	176	132	259
18	601	352	566	454	194	399	273	173	407	182	503	353	448	260	732	163	114	145	84	236
19	419	265	433	187	67	61	147	249	366	124	329	482	834	893	900	74	108	188	201	202
20	436	258	285	71	334	197	412	156	331	305	247	647	520	938	397	86	225	181	327	138
21	383	571	74	172	294	107	74	384	162	346	711	532	395	228	768	187	140	104	60	202
22	33	155	553	419	521	256	196	388	164	275	402	190	326	212	577	203	96	165	107	292
23	494	244	282	121	431	391	296	127	332	42	681	355	248	561	762	203	106	74	167	227
24	526	150	57	571	529	89	353	443	344	439	533	803	925	814	329	146	220	253	223	90
25	85	211	35	413	554	245	42	94	94	207	285	698	824	675	601	66	162	191	156	139

<b>26</b>	448	232	563	246	74	281	72	406	241	306	453	511	889	740	507	84	95	165	137	94
<b>27</b>	378	551	376	49	520	446	389	182	304	250	429	392	291	375	428	133	121	90	116	132
<b>28</b>	402	185	286	536	54	102	133	82	437	179	582	790	802	211	837	165	225	228	60	238
<b>29</b>	192	427	169	320	36	50	142	262	427	56	416	997	906	458	702	82	197	179	90	138
<b>30</b>	338	372	99	251	167	343	235	337	72	204	140	437	458	349	324	86	268	281	214	199
<b>31</b>	580	154	45	445	503	313	269	404	239	147	891	775	808	649	702	113	98	102	82	89
<b>32</b>	538	571	209	81	377	225	111	65	272	112	659	409	321	541	406	131	82	64	108	81
<b>33</b>	55	86	573	412	92	289	419	220	280	150	181	221	225	941	874	68	83	85	354	328
<b>34</b>	300	606	130	557	99	261	313	355	168	152	892	888	508	240	777	275	274	157	74	240
<b>35</b>	517	175	402	275	322	423	99	114	388	47	460	386	147	414	185	269	226	86	242	108
<b>36</b>	331	221	468	309	52	57	391	50	257	228	163	938	333	153	762	85	490	174	80	398
<b>37</b>	233	136	49	555	572	316	123	358	244	408	536	808	201	343	698	187	281	70	119	243
<b>38</b>	93	366	598	250	505	34	74	104	203	186	795	595	369	337	805	160	120	74	68	162
<b>39</b>	316	135	559	490	200	254	361	241	317	45	803	817	982	348	446	148	150	181	64	82
<b>40</b>	89	598	208	114	456	220	75	258	320	321	275	128	681	854	727	172	80	426	534	454
<b>41</b>	389	461	77	577	57	107	420	221	319	394	591	410	847	714	423	121	84	174	146	87
<b>42</b>	312	542	120	246	393	37	218	234	201	141	300	268	573	657	576	81	72	154	177	155
<b>43</b>	367	447	117	82	583	48	130	322	427	246	180	254	819	831	561	96	135	437	443	299
<b>44</b>	256	347	70	62	152	320	366	383	178	122	431	839	394	337	971	79	154	72	62	179
<b>45</b>	104	415	568	573	238	389	388	130	365	352	951	885	456	986	633	138	128	66	143	92
<b>46</b>	377	122	130	505	275	44	435	185	360	384	979	767	318	800	483	222	174	72	181	109
<b>47</b>	548	595	77	558	92	320	424	293	64	100	604	341	552	959	548	124	70	113	197	112
<b>48</b>	58	573	279	155	431	251	122	236	40	433	153	326	311	680	301	82	175	167	364	161
<b>49</b>	110	294	420	574	500	397	106	259	362	121	700	982	571	284	301	207	290	169	84	89
<b>50</b>	522	119	266	378	405	432	273	258	168	379	765	679	286	639	462	219	195	82	183	132



## Тема 13. Прийняття рішень в умовах невизначеності

**Завдання.** Навколошнє середовище може перебувати в наступних станах:  $C_1$  – дуже сухий рік,  $C_2$  – сухий рік,  $C_3$  – нормальний за вологістю рік,  $C_4$  – вологий рік,  $C_5$  – дуже вологий рік. Стратегії її особи, яка приймає рішення (ОПР), полягають у виборі кількості води для поливу:  $S_1$  – вода не використовується;  $S_2$  – вода використовується на 50% максимальної кількості;  $S_3$  – вода використовується на 100% максимальної кількості. Вибираючи одну із можливих стратегій, ОПР отримує в результаті деякий фінансовий виграш (програш), величина якого залежить від стану навколошнього середовища. Елементи матриці виграшів  $F_{ij}$  та імовірності станів навколошнього середовища  $p_j$  наведені в таблиці 13.2 (читати по рядках). У залежності від ситуації, інформація про імовірності погодних станів може бути відомою, або ж невідомою. Надати рекомендації щодо вибору оптимальної стратегії використовуючи критерії Байеса, мінімальної дисперсії, Вальда, Севіджа, Гурвіца ( $\lambda = 0.5$ ) та Бернуллі-Лапласа, описані нижче.

### Теоретичні відомості.

**Критерії Байеса** та мінімальної дисперсії використовуються у тих випадках, коли відомі імовірності станів навколошнього середовища. Такі імовірності розраховуються на підставі тривалих спостережень за кліматом даного регіону. Позначимо  $p_1$  - імовірність настання дуже сухого року,  $p_2$  - імовірність настання сухого року,  $p_3$  - імовірність настання нормального за вологістю року,  $p_4$  - імовірність настання вологого року,  $p_5$  - імовірність настання дуже вологого року. Повинна виконуватися умова  $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$  (події утворюють повну групу).

Критерій Байеса оцінює стратегії за максимальним значенням середнього за імовірністю виграшу ( $N=5$  - кількість можливих станів середовища)

$$F_{Bi} = \sum_{j=1}^N F_{ij} \cdot p_j \rightarrow \max. \quad (13.1)$$

**Приклад.** Матриця виграшів має наступний вигляд (Таблиця 13.1):



Таблиця 13.1. Матриця виграшів та імовірності станів

	Дуже сухий	Сухий	Середній	Вологий	Дуже вологий
S <sub>1</sub>	50	70	110	130	110
S <sub>2</sub>	80	110	120	90	60
S <sub>3</sub>	100	130	110	80	60
P	0.10	0.30	0.30	0.20	0.10

Розраховуємо значення критерію Байеса для кожної із стратегій за формулою (13.1):

$$F_{B1} = 50 * 0.10 + 70 * 0.30 + 110 * 0.30 + 130 * 0.20 + 110 * 0.10 = 96;$$

$$F_{B2} = 80 * 0.10 + 110 * 0.30 + 120 * 0.30 + 90 * 0.20 + 60 * 0.10 = 101;$$

$$F_{B3} = 100 * 0.10 + 130 * 0.30 + 110 * 0.30 + 80 * 0.20 + 60 * 0.10 = 104.$$

Згідно з критерієм Байеса оптимальною стратегією є стратегія 3.

**Критерій мінімальної дисперсії** відповідає типу поведінки – “максимальна обережність” і розраховується за мінімальним значенням виразу

$$F_{md_i} = \sum_{j=1}^N [F_{ij} - F_{bi}]^2 \cdot p_j \rightarrow \min. \quad (13.2)$$

Розраховуємо значення критерію мінімальної дисперсії для кожної із стратегій.

$$\begin{aligned} F_{md1} &= (50 - 96)^2 * 0.10 + (70 - 96)^2 * 0.30 + (110 - 96)^2 * 0.30 + \\ &\quad + (130 - 96)^2 * 0.20 + (110 - 96)^2 * 0.10 = 724; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{md2} &= (80 - 101)^2 * 0.10 + (110 - 101)^2 * 0.30 + (120 - 101)^2 * 0.30 + \\ &\quad + (90 - 101)^2 * 0.20 + (60 - 101)^2 * 0.10 = 369; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{md3} &= (100 - 104)^2 * 0.10 + (130 - 104)^2 * 0.30 + (110 - 104)^2 * 0.30 + \\ &\quad + (80 - 104)^2 * 0.20 + (60 - 104)^2 * 0.10 = 524. \end{aligned}$$

Згідно з критерієм мінімальної дисперсії оптимальною є стратегія 2.

Часто ситуація прийняття рішень характеризується повною відсутністю інформації про імовірність появи станів навколошнього середовища. У таких випадках слід застосувати інші критерії вибору оптимальної стратегії, враховуючи психологічні особливості особи, яка приймає рішення.



**Критерій Вальда** (критерій пессиміста). Даний критерій зорієнтований на найбільш несприятливий варіант реалізації навколошнього середовища. Його рекомендується застосовувати у ситуаціях, які загрожують великими потенціальними втратами. Даний критерій називають критерієм максиміну і розраховують на підставі виразу

$$F_{W_i} = \min_j F_{ij} \rightarrow \max. \quad (13.3)$$

Розрахуємо значення критерію Вальда для кожної із стратегій за даними табл. 13.1.

$$F_{W_1} = \min(50, 70, 110, 130, 110) = 50;$$

$$F_{W_2} = \min(80, 110, 120, 90, 60) = 60;$$

$$F_{W_3} = \min(100, 130, 110, 80, 60) = 60.$$

Згідно з критерієм Вальда оптимальними є стратегія 2, або стратегія 3.

**Критерій Севіджа** (критерій оптиміста). На противагу до попереднього критерію, критерій Севіджа властивий для оптимістично настроєної ОПР, оскільки орієнтований на найбільш сприятливі варіанти реалізації навколошнього середовища. Даний критерій називають критерієм максимаксу і розраховують на підставі виразу

$$F_{S_i} = \max_j F_{ij} \rightarrow \max. \quad (13.4)$$

Обчислимо значення критерію Севіджа для кожної із стратегій.

$$F_{S_1} = \max(50, 70, 110, 130, 110) = 130;$$

$$F_{S_2} = \max(80, 110, 120, 90, 60) = 120;$$

$$F_{S_3} = \max(100, 130, 110, 80, 60) = 130.$$

Згідно з критерієм Севіджа оптимальними є стратегія 1, або стратегія 3.

**Критерій Гурвіца**. Інколи, на підставі деякої додаткової інформації можна визначити співвідношення пессимістичного та оптимістичного підходів до прийняття рішення щодо вибору стратегії. Суть критерію Гурвіца полягає у визначенні зваженої комбінації стратегій Вальда і Севіджа. Використовується зважуючий коефіцієнт  $\lambda$  ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ). Критерій Гурвіца оцінює стратегії за максимальним значенням наступного зваженого виразу



$$F_{Hi} = \left[ \lambda \min_j F_{ij} + (1 - \lambda) \max_j F_{ij} \right] \rightarrow \max . \quad (13.5)$$

При  $\lambda = 0$  ми приходимо критерію Севіджа, при  $\lambda = 1$ - до критерію Вальда. Виберемо значення  $\lambda = 0.5$  і розрахуємо критерії Гурвіца для кожної із стратегій (дані табл.13.1):

$$F_{H1} = 0.5 * \min(50, 70, 110, 130, 110) + 0.5 * \max(50, 70, 110, 130, 110) = 90;$$

$$F_{H2} = 0.5 * \min(80, 110, 120, 90, 60) + 0.5 * \max(80, 110, 120, 90, 60) = 90;$$

$$F_{H3} = 0.5 * \min(100, 130, 110, 80, 60) + 0.5 * \max(100, 130, 110, 80, 60) = 95.$$

Згідно з критерієм Гурвіца оптимальною є стратегія 3.

**Критерій Бернуллі - Лапласа.** Суть його ґрунтуються на наступній гіпотезі Бернуллі. Оскільки немає підстав віддавати перевагу одному із можливих станів природного середовища, то всі вони вважаються рівноможливими. Тоді в якості математичного сподівання при стратегії  $S_i$  беруть середнє арифметичне функції виграншу для всіх можливих станів середовища. Потім вибирають максимальне значення  $F_i$

$$F_{BLi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N F_{ij} \rightarrow \max . \quad (13.6)$$

Розраховуємо значення критерію Бернуллі-Лапласа для кожної із стратегій.

$$F_{BL1} = (50 + 70 + 110 + 130 + 110) / 5 = 94;$$

$$F_{BL2} = (80 + 110 + 120 + 90 + 60) / 5 = 92;$$

$$F_{BL3} = (100 + 130 + 110 + 80 + 60) / 5 = 96.$$

Згідно з критерієм Бернуллі-Лапласа оптимальною стратегією є стратегія 3.

**Таблиця 13.2. Вихідні дані для розрахунків**

N	Значення функції виграшів															Ймовірності станів				
	S1 C1	S1 C2	S1 C3	S1 C4	S1 C5	S2 C1	S2 C2	S2 C3	S2 C4	S2 C5	S3 C1	S3 C2	S3 C3	S3 C4	S3 C5	P1	P2	P3	P4	P5
1	40	70	110	150	130	100	110	120	90	60	140	130	100	60	30	0.10	0.45	0.35	0.08	0.02
2	110	150	130	90	60	120	190	150	100	60	120	160	140	100	70	0.05	0.40	0.30	0.20	0.05
3	80	120	150	110	90	100	110	120	90	50	120	160	130	90	40	0.08	0.30	0.45	0.12	0.05
4	60	100	140	120	100	100	120	140	110	80	120	160	130	90	40	0.04	0.25	0.40	0.20	0.11
5	70	90	120	140	110	110	140	120	100	80	120	160	130	110	80	0.12	0.35	0.25	0.20	0.08
6	47	78	112	144	123	102	118	123	91	60	138	133	104	64	34	0.10	0.45	0.35	0.09	0.02
7	107	147	132	92	63	118	182	147	99	59	120	160	139	99	67	0.05	0.39	0.32	0.19	0.05
8	78	118	149	111	91	100	111	122	92	53	120	160	130	90	40	0.08	0.30	0.45	0.13	0.06
9	61	99	138	122	101	101	122	138	109	80	120	160	130	92	44	0.05	0.26	0.39	0.20	0.11
10	67	88	119	141	112	109	137	120	99	78	122	157	127	105	75	0.12	0.36	0.26	0.19	0.07
11	54	86	114	138	116	104	126	126	92	60	136	136	108	68	38	0.09	0.44	0.34	0.10	0.03
12	104	144	134	94	66	116	174	144	98	58	120	160	138	98	64	0.06	0.38	0.33	0.18	0.05
13	76	116	148	112	92	100	112	124	94	56	120	160	130	90	40	0.07	0.29	0.44	0.14	0.06
14	62	98	136	124	102	102	124	136	108	80	120	160	130	94	48	0.06	0.27	0.37	0.20	0.10
15	64	86	118	142	114	108	134	120	98	76	124	154	124	100	70	0.12	0.37	0.27	0.18	0.07
16	61	94	116	132	109	106	134	129	93	60	134	139	112	72	42	0.09	0.44	0.34	0.12	0.03
17	101	141	136	96	69	114	166	141	97	57	120	160	137	97	61	0.06	0.37	0.35	0.18	0.05
18	74	114	147	113	93	100	113	126	96	59	120	160	130	90	40	0.07	0.29	0.44	0.14	0.07
19	63	97	134	126	103	103	126	134	107	80	120	160	130	96	52	0.06	0.28	0.36	0.20	0.10
20	61	84	117	143	116	107	131	120	97	74	126	151	121	95	65	0.11	0.38	0.28	0.16	0.06
21	68	102	118	126	102	108	142	132	94	60	132	142	116	76	46	0.08	0.43	0.33	0.13	0.03
22	98	138	138	98	72	112	158	138	96	56	120	160	136	96	58	0.06	0.36	0.36	0.17	0.05
23	72	112	146	114	94	100	114	128	98	62	120	160	130	90	40	0.06	0.28	0.43	0.15	0.07
24	64	96	132	128	104	104	128	132	106	80	120	160	130	98	56	0.07	0.29	0.34	0.20	0.10
25	58	82	116	144	118	106	128	120	96	72	128	148	118	90	60	0.11	0.39	0.29	0.15	0.06



1. Адамень Ф.Ф., Вергунов В.А., Вергунова И.Н. Основы математического моделирования агробиопроцессов. – К.: Нора-принт, 2005. – 372с.
2. Ковальчук П.І. Моделювання і прогнозування стану навколошнього середовища. – К.: Либідь, 2003. – 208с.
3. Лаврик В.І., Боголюбов В.М., Полетаєва Л.М. Моделювання і прогнозування стану довкілля - К: ВЦ Академія, 2010 – 400 с.
4. Базыкин А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. – Москва-Ижевск: ИКИ, 2003. – 368с.
5. Бого보ящий В.В., Курбанов К.Р., Палій П.Б., Шмандій В.М. Принципи моделювання та прогнозування в екології. – К.: Центр навчальної літератури, 2004. – 216с.
6. Гурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 2004. – 479с.
7. Горєв Л.М. Основи моделювання в гідроекології. К.:Либідь, 1996. - 336с.
8. Гринин А.С., Орехов Н.А., Новиков В.Н. Математическое моделирование в экологии. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003. – 269с.
9. Дуброва Т.А. Статистические методы прогнозирования. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003. – 206с.
10. Ковальчук П.И., Лахно Е.С. Прогнозирование и оптимизация санитарного состояния окружающей среды. - К.:Вища школа, 1988. - 187с.
11. Ладанюк А.П. Основи системного аналізу / А.П. Ладанюк. – Вінниця: Нова книга, 2004. – 176 с.
12. Практикум по рациональному природопользованию / Н.С. Демченко и др.: под ред. И.Г. Черванева. - К.: УМК ВО, 1991 – 84 с.
13. Робертс Ф.С. Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам. - М.: Наука, 1986. – 494 с.