1133 Г. Арой
531
~~624~~ П
П-88

Пуансо

СТАТИКА

(STATIQUE)

ПЕРЕВОДЪ СЪ ФРАНЦУЗСКАГО

Съ дополненіями Техн. П. А. Федорова.

Съ 103 рисунками въ текстѣ

1797 Ча
ПО

С.-ПЕТЕРБУРГЪ
Изданіе Ив. Ив. Иванова
1898

У книгопродавца-издателя Ив. Ив. Иванов

С.-Петербургъ, Вознесенскій проспектъ

ПРОДАЮТСЯ СЛѢДУЮЩІЯ КНИГИ:

1. **В. Безе.** Теорія сопротивленія матеріаловъ безъ высшаго математическаго анализа. Съ рисунками и таблицами въ текстѣ. Переводъ и дополненія П. Федорова. С.-Петербургъ. 1897 г. Ц. 1 р.

2. **Виньоло.** Архитектурные ордера (Le vignole de poche, mémorile des artistes). Памятная книжка для архитекторовъ. Текстъ и рис. Тьери, переводъ съ французскаго, техн. П. Федорова. Спб. 1897 г. Ц. 1 р. 50 к.

3. **Кренке.** Руководство къ разбивкѣ закругленій на обыкновенныхъ и желѣзныхъ дорогахъ съ полными таблицами и чертежами. Переводъ съ нѣмецкаго, техника П. А. Федорова. Спб. 1896 г. Ц. 1 р.

4. **Руа.** Исторія рыцарства (Histoire de la chevalerie). Перев. съ французск. подъ редакц. Н. М. Федоровой, съ 6-ю на отдѣльныхъ листахъ рисунками. Спб. 1898 г. Ц. 1 р. 25 к.

5. **Д-ръ Георгъ Гартвигъ.** Природа и человѣкъ на крайнемъ сѣверѣ, съ 8-ю гравюрами, переводъ съ нѣмецкаго, Федорова, Спб. 1897 г. Ц. 2 р.

6. **Кеннанъ Георгъ.** Кочевая жизнь въ Сибири. Приключенія коряковъ и другихъ инородцевъ. Перев. съ англійскаго. Спб. 1896 г. Ц. 1 р. 50 к.

7. **Спенсеръ Гербертъ.** Научныя основанія нравственности. 3 части. Переводъ съ англійскаго съ примѣчаніями и вступительнымъ очеркомъ, Спб. 1896 г. Ц. 2 р. 50 к.

8. **Его-же.** Соціологія какъ предметъ изученія. Съ примѣчаніями и вступи... очеркомъ. Спб. 1896 г. Ц. 2 р.

9. **Кленке. Германъ.** Жен... супруга; тѣлесная и душевная ... женщины въ любви и бракѣ. ... съ нѣмецк. 2-е изд. Спб. 18...

10. **Амфитеатровъ, А.** Психопат... да и вымыселъ. М. 1893 г.

11. **Барсовъ, Е. В.** Слово о ... ревѣ, какъ художественный ... Кіевской дружинной Руси. 3 т. ... Ц. 10 р. 50 к.

12. **Бенеке, Д-ръ.** Руководст... питанію и ученію. Ч. 1-ая. ... нѣмецк. изданіе Веселя. Сп... Ц. 1-ой части 2 р. 50 к.

13. **Больманъ А. К.** Описа... шенствованія новаго привил... наго строительнаго матеріала ... званіемъ: «Польмановскій к... представляющій радикальное ... ное средство пресѣченія пож... Россіи, какъ въ городахъ, т... селеніяхъ, съ 32 чертеж. Спб... Ц. 1 р.

14. **Бріо, К.** Начало начер... геометріи. Кіевъ. 1881 г. Ц. ...

15. **Брунсъ.** Астрономическі... переводъ съ нѣмецкаго Е. ... подъ редакціей Р. Гришина. ... лож. 21 табл. гравирован. и ли... рован. Ф. Брокгаузомъ въ Л... Спб. 1875 г. Ц. 3 р.

16. **Гансенъ, Т.** Монеты. С... конныхъ постановленій о мо... стемѣ всѣхъ странъ. Спб. 188...

17. **Геннади, Григорій.** Спра... варь о русскихъ писателяхъ и... умершихъ въ XVIII и XIX ... списокъ русскихъ книгъ съ ... 1825 г. 2 т. Берлинъ. 1...

У

531
~~624~~
П-88

Пуансо

СТАТИКА

(STATIQUE)

ПЕРЕВОДЪ СЪ ФРАНЦУЗСКАГО

Съ дополненіями Техн. П. А. Федорова.

Съ 103 рисунками въ текстѣ

...рено
966 г.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ
Изданіе книгопродавца Ив. Ив. Иванова
1898

Дозволено цензурою. С.-Петербургъ, 10 Іюля 1897 г.

Типографія И. М. Комелова, Б. Подъяческая ул., д. № 17—21.

Предисловіе къ русскому переводу.

Раціональная или такъ называемая теоретическая механика, какъ одна изъ отраслей прикладной математики, даетъ обширное поле для самостоятельной обработки, въ смыслѣ изложенія, того научнаго матеріала, который является предметомъ ея изложенія. Поэтому-то въ каждой работѣ, посвященной раціональной механикѣ, всегда найдется много оригинальнаго въ научной постановкѣ и положеній, частныхъ или общихъ, и самаго предмета; такимъ образомъ, заслуживаетъ вниманія всякая попытка самостоятельной обработки предмета раціональной механики, въ смыслѣ оригинальной системы приложенія къ ней математическихъ основаній и положеній, геометрическихъ и алгебраическихъ.

Такую именно попытку и представляетъ собою предлагаемая нами въ русскомъ переводѣ знаменитая «статика» Пуансо; этотъ старый трудъ даровитаго французскаго геометра уже заслужилъ себѣ почетную извѣстность не только во Франціи, но и далеко за ея предѣлами, также и у насъ въ Россіи, и потому, разумѣется, не нуждается въ нашей рекомендаціи. Два различныхъ перевода, уже изданные въ разное время и теперь давно распроданные, ясно указываютъ на то обстоятельство, что у насъ, какъ и вездѣ, работа Пуансо по самостоятельной научной постановкѣ основного отдѣла раціональной математики, такъ наз. *статики*, признана полезною и необходимою.

Такимъ образомъ, предлагая нынѣ новый переводъ этого труда Пуансо, уже третій по счету, мы не будемъ говорить о томъ, какое значеніе имѣетъ этотъ научный трудъ въ отношеніи руководства къ правильному усвоенію основныхъ положеній раціональной механики. Мы скажемъ только нѣсколько словъ о самомъ переводѣ, который предлагаемъ благосклонному вниманію читателя.

Въ нашемъ изданіи книга Пуансо представляетъ собою почти буквальный переводъ французскаго оригинала; мы ничуть не измѣняли ни системы, ни порядка въ изложеніи научнаго матеріала. Поэтому-то, изданіе не можетъ служить учебникомъ для нашихъ учебныхъ заведеній, такъ-какъ не приспособлено къ ихъ программамъ; но зато, сохранивъ, по возможности, всѣ детали талантливой работы Пуансо, мы вмѣстѣ съ тѣмъ сохранили драгоцѣннѣйшее ея качество, — служить прекраснымъ пособіемъ для самостоятельнаго научнаго усвоенія статики, что, въ настоящее время, можно смѣло считать общепризнаннымъ.

Мы льстимъ себя надеждою, что благосклонный читатель сочувственно приметъ и нашъ переводъ, какъ были приняты два предъидущихъ, которые и намъ лично принесли не малую долю пользы, являясь прекрасными и толковыми образцами русской передачи даровитой работы Пуансо.

СОДЕРЖАНІЕ.

Основанія статики.

Общія понятія.

Въ нашемъ представленіи о тѣлахъ не заключается понятія о томъ, чтобы они необходимо были въ движеніи, [такъ какъ о перемѣщеніи тѣла мы судимъ по измѣненію его положенія, относительно окружающихъ его предметовъ.] Весьма возможно, что въ природѣ ни одна частица матеріи не находится въ абсолютномъ покоѣ, даже въ теченіе самого короткаго періода времени, тѣмъ не менѣе мы ясно можемъ себѣ представить существованіе тѣла находящагося въ покоѣ.

Тѣло, находящееся въ покоѣ, будетъ находится въ немъ до тѣхъ поръ, пока какая-нибудь посторонняя причина не приведетъ его въ движеніе; такъ какъ невозможно представить себѣ движенія, не представивъ его направленія, и мы не имѣемъ причины предполагать, чтобы тѣло двигалось по одному направленію, предпочтительно передъ другимъ и притомъ по направленію, которое мы могли себѣ представить; слѣдовательно, тѣло останется въ покоѣ. И такъ, если тѣло, находящееся въ покоѣ, придетъ въ движеніе, то не само собою, но отъ дѣйствія на него посторонней причины. Эта причина, измѣняющая покой или движеніе тѣла, называется обыкновенно—*силою.*

Что такое сила, сама по себѣ, мы не знаемъ, хотя вполнѣ ясно понимаемъ, что она дѣйствуетъ въ извѣстномъ направленіи и съ извѣстнымъ напряженіемъ. Чувствуя тяжесть, дѣйствующую на насъ по направленію къ поверхности земли, видя падающія и вѣсящія тѣла, поднимая руками различныя тяжести и, наблюдая другія, однородныя явленія, мы получаемъ сознательное представленіе о направленіи и напряженіи силы, понятіе, которое, наконецъ, становится для насъ такъ-же несомнѣннымъ, какъ и собственное наше существованіе.

И такъ, совершенно очевидно, что *сила дѣйствуетъ на тѣло въ точкѣ ея приложенія къ тѣлу, по извѣстному направленію и съ извѣстнымъ напряженіемъ.*

Далѣе, если мы обозначимъ направленіе силъ прямыми линіями, то напряженія ихъ выразятся числами, или пропорціональными частями прямыхъ, представляющихъ направленіе силъ. Отсюда понятно, что силы, какъ и всѣ величины, подчиняются математическому анализу и составляютъ общую задачу, рѣшеніе которой будетъ предметомъ *механики.*

Задача эта состоитъ въ слѣдующемъ: *даны силы, дѣйствующія на тѣло или систему тѣлъ по извѣстному направленію и извѣстной величины требуется опредѣлить, какое произойдетъ движеніе отъ побужденій этихъ силъ?*

И на оборотъ: *какія силы необходимо приложить къ системѣ, чтобы она имѣла должное движеніе?*

Рѣшеніе этой общей задачи приводится къ рѣшенію частнаго случая, въ которомъ необходимо опредѣлить, какое должно быть отношеніе между силами, чтобы онѣ взаимно уничтожались, т. е. чтобы онѣ были въ равновѣсіи?

Часть механики имѣющую предметомъ изученія *равновѣсія тѣлъ* принято называть *статикою.*

Другая часть механики, занимающаяся рѣшеніемъ вопросовъ относящихся къ движенію тѣлъ, называется *динамикою,* или наукою о движеніи. Мы, въ этомъ сочиненіи, будетъ заниматься только наукою о равновѣсіи или статикою.

Не мѣшаетъ замѣтить, что въ статикѣ нѣтъ надобности знать, какія именно силы производятъ дѣйствія на тѣла, т. е., какія движенія и напряженія и по какому направленію онѣ могутъ сообщить. Достаточно, если мы будемъ разсматривать силы какъ величины однородныя и, слѣдовательно, возможныя для сравненія, если покажемъ, при какомъ отношеніи между силами онѣ могутъ уравновѣшиваться. Другое дѣло, при разсматриваніи законовъ движенія, тамъ необходимы другія правила для измѣренія силъ, потому что въ динамикѣ разсматриваются не одни только отношенія между силами, но также ихъ дѣйствія на тѣла, для чего необходимо знать, какъ измѣрять силы по ихъ дѣйствіямъ. Положимъ намъ нужно узнать, что сила *вдвое* большая сообщаетъ тѣлу *двойную* скорость, или-же что сила приложенная къ тѣлу вдвое большей массы, производитъ вдвое меньшую скорость, и т. д. Но, каково бы ни было дѣйствіе силъ на тѣла, будутъ ли онѣ пропорціональны или нѣтъ ихъ дѣйствіямъ, истины, которыя мы изложимъ, ни сколько отъ этого не зависятъ, такъ какъ эти истины выводятся изъ силъ, которыя не производятъ никакого дѣйствія, но взаимно уничтожаются; такъ что равновѣсіе будетъ только частный случай движенія, въ которомъ дѣйствія силъ уничтожаются и гдѣ измѣреніе силъ, чрезъ ихъ дѣйствія, не составляетъ необходимости.

Вообще говоря, равновѣсіе и покой мы можемъ принимать за одно и тоже состояніе тѣла; потому что если силы уничтожены или уничтожаются по мѣрѣ проявленія, если онѣ непрерывно проявляются, то каждое тѣло, будучи въ равновѣсіи, должно двигаться отъ дѣйствія какой нибудь одной силы такъ, какъ бы оно двигалось отъ той-же самой силы, находясь въ покоѣ. Тѣмъ не менѣе, можно отличить равновѣсіе отъ покоя тѣмъ, что, во второмъ случаѣ, тѣло не побуждается никакою силою; а ~~только~~ въ случаѣ равновѣсія, оно подвержено дѣйствію силъ, которыя взаимно уничтожаются.

Такое различіе не можетъ существовать въ строго понимаемомъ порядкѣ вещей, но оно чувствительно въ случаяхъ равновѣсія, представляемыхъ природою, гдѣ ни одно тѣло не находится въ совершенномъ равновѣсіи, если-же оно находится въ этомъ состояніи, то, безъ сомнѣнія, между дѣйствующими на него силами, должна существовать борьба, колеблющая его безконечно мало и непрерывно приводящая въ положеніе, которое она постоянно покидаетъ ~~измѣняетъ~~. Но, въ *математическомъ рѣшеніи задачъ должно разсматривать тѣло въ равновѣсіи такъ, какъ если-бы оно было въ покоѣ, и обратно, если тѣло находится въ покоѣ, или подвержено дѣйствію нѣкоторыхъ силъ, то можно къ нему приложить такія новыя силы, которыя находились бы между собою въ равновѣсіи, и состояніе тѣла не измѣнится.*

Сдѣлавъ эти общія замѣчанія, посмотримъ, какъ опредѣлить условія равновѣсія неизмѣняемой системы тѣлъ, подверженныхъ дѣйствію нѣкоторыхъ силъ P, Q, R, S и т. д., приложенныхъ къ точкамъ a, b, c, d.... системы.

Предположимъ, что всѣ разсматриваемыя тѣла не имѣютъ тяжести, т. е. что дѣйствуютъ однѣ только силы P, Q, R, S и т. д., которыя, въ случаѣ равновѣсія, взаимно уничтожаются.

Мы увидимъ далѣе, что достаточно будетъ найти условія равновѣсія для системы однихъ только точекъ приложенія a, b, c, d, неизмѣнно соединенныхъ между собою.

Въ самомъ дѣлѣ, означимъ черезъ a', b', c', d', и т. д., тѣ-же точки a, b, c, d, и т. д. системы, но расположенныя, какъ соединенныя не гибкими и нерастяжимыми прямыми линіями и положимъ, что силы P, Q, R, S, и т. д., удерживаютъ ихъ въ равновѣсіи, то понятно, также, что тѣ-же силы P, Q, R, S, и т. д. будутъ удерживать также свою систему въ равновѣсіи, потому что можно представить систему въ такомъ положеніи, что точки a, b, c, d, и т. д., совершенно совпадаютъ съ точками a', b', c', d', и т. д. Если система будетъ въ покоѣ въ этомъ положеніи, то равновѣсіе точекъ a', b', c', d', и т. д. не нарушится. Также очевидно, что равновѣсіе не будетъ нарушено и въ томъ случаѣ, когда вмѣсто предположенія, что a съ a', b съ b', c съ c', d съ d', совпадаютъ, предположимъ, что они неизмѣнно соединены такъ, что a не можетъ отдѣлиться отъ a', b отъ b', c отъ c', d отъ d'; откуда заключаемъ, что условія равновѣсія между силами P, Q, R, S, приложенными къ какой нибудь системѣ тѣлъ, будутъ тѣ-же, какія имѣли бы мѣсто для равновѣсія силъ P, Q, R, S, приложенныхъ къ системѣ однихъ точекъ a, b, c, d, неизмѣнно между собою соединенныхъ.

И такъ, если требуется найти отношенія между извѣстными силами, приложенными къ какой нибудь системѣ, находящейся въ равновѣсіи, можно откинуть всѣ тѣла системы и предположить, что остаются только однѣ точки приложенія a, b, c, d, связанныя между собою такъ, что не могутъ измѣнять взаимныхъ своихъ разстояній.

И такъ, мы можемъ не принимать во вниманіе вѣсъ и объемъ тѣлъ, чрезъ что вопросъ значительно упростится. Впослѣдствіи, мы можемъ возвратить тѣламъ ихъ тяжесть и тогда вѣсъ ихъ будемъ принимать за новыя силы, которыя для полученія равновѣсія необходимо соединить съ другими силами.

Такимъ образомъ, выводы статики мы можемъ приложить къ равновѣсію тѣлъ находящихся въ природѣ, т. е. такихъ, которыя, безусловно, всѣ имѣютъ тяжесть.

Такъ какъ, при равновѣсіи, мы будемъ только разсматривать величины силъ, ихъ направленія и ихъ точки приложенія, то, очевидно, что условія равновѣсія будутъ ни что иное, какъ отношенія, которыя должны существовать между этими тремя принадлежностями силъ для того, чтобы равновѣсіе системы имѣло мѣсто. Понятно, что эти отношенія могутъ быть выражены уравненіями, въ которыхъ будутъ заключаться величины силъ, ихъ направленія, посредствомъ угловъ составляемыхъ силами съ опредѣленными прямыми линіями въ пространствѣ и точки приложенія силъ посредствомъ координатъ опредѣляющихъ положенія этихъ точекъ.

И такъ, мы можемъ составить понятіе о какой нибудь задачѣ статики, а слѣдовательно и узнать, въ чемъ состоитъ сущность вопроса.

Намъ могутъ замѣтить, что все это мы говоримъ относительно тѣлъ свободныхъ, между тѣмъ, всѣмъ извѣстно, что тѣло можетъ находиться въ различныхъ условіяхъ, какъ напримѣръ, вращаться около неподвижной точки или оси, упираться на непроницаемую поверхность, и т. д. Мы увивимъ, впослѣдствіи, что сопротивленія которыя тѣла претерпѣваютъ отъ постороннихъ причинъ, могутъ быть всегда замѣнены соотвѣтствующими силами, а послѣ такой подстановки силъ вмѣсто сопротивленій, тѣло можетъ быть разсматриваемо какъ свободное въ пространствѣ, при чемъ, чтобы вопросъ не сдѣлать сложнымъ въ самомъ его началѣ, мы говорили только о тѣлахъ свободныхъ.

Для отыскиванія пути, который привелъ бы насъ къ опредѣленію условій равновѣсія, представимъ себѣ себѣ тѣло или систему, удерживаемую въ равновѣсіи какими нибудь силами P, Q, R, S и т. д., направленными произвольно въ пространствѣ.

Такъ какъ всѣ эти силы находятся въ равновѣсіи, то, очевидно, что нѣкоторыя изъ нихъ, напримѣръ сила P, сопротивляется дѣйствію всѣхъ другихъ силъ Q, R, S, и т. д.; можно положить, что дѣйствіе послѣднихъ силъ будетъ такое же, какъ и дѣйствіе одной силы равной и противоположной силѣ P.

Все сказанное нами можетъ быть доказано на основаніи сдѣланнаго выше примѣчанія и той аксіомы, по которой двѣ силы равныя и противоположныя, необходимо, находятся въ равновѣсіи.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что къ системѣ приложена сила P' равная и противоположная силѣ P. Двѣ силы P и P', будучи въ равновѣсіи, уничтожаться сами собою, и тогда тѣло можно разсматривать какъ подверженное только дѣйствію силъ Q, R, S, и т. д. Но, съ другой стороны, сила P будетъ въ равновѣсіи съ силами Q, R, S, и т. д., и такъ какъ дѣйствія ихъ также уничтожаются сами собою, то и можно положить, что на тѣло дѣйствуетъ только одна сила P'. Состояніе тѣла не измѣнится, будетъ ли оно подвержено дѣйствію силъ Q, R, S, и т. д., или только дѣйствію одной силы P', равной и противоположной той, которая приводитъ ихъ въ равновѣсіе.

Но, такъ какъ можетъ случиться, что одна сила будетъ способна производить на тѣло то-же дѣйствіе, что и нѣсколько силъ, то мы можемъ отыскать способъ, по которому многія силы могутъ быть замѣнены меньшимъ числомъ ихъ, и формулировать законъ такого приведенія силъ. Тогда условія равновѣсія между нѣсколькими силами приведутся къ условіямъ равновѣсія между меньшимъ числомъ силъ, которыя могутъ замѣнить первыя, и искомыя условія можно будетъ легко выразить простѣйшимъ образомъ.

Сила способная произвести на тѣло то-же дѣйствіе, что и нѣсколько силъ, и которая можетъ одна совершенно замѣнить совокупность другихъ силъ, называется *равнодѣйствующею.* Отсюда видно, припомнивъ сказанное выше, что, *если нѣсколько силъ находятся въ равновѣсіи, то одна, какая нибудь, изъ нихъ равна и прямо противоположна равнодѣйствующей всѣхъ прочихъ силъ.*

Другія силы, относительно равнодѣйствующей, называются *составляющими.* Законъ, по которому находится равнодѣйствующая многихъ силъ помощію своихъ составляющихъ называется *сложеніемъ силъ.* Тотъ-же законъ, взятый въ обратномъ порядкѣ, т. е., когда одну силу замѣняютъ нѣсколькими другими, способными произвести то-же дѣйствіе, называется *разложеніемъ силъ.*

Мы начнемъ съ изложенія способовъ сложенія и разложенія силъ, что̀ составляетъ законъ, связывающій равнодѣйствующую съ ея составляющими.

Въ дальнѣйшемъ изложеніи мы, будемъ называть *параллельными силами* тѣ, которыхъ направленія параллельны, и *силами сходящимися* тѣ, которыхъ направленія пересѣкаются въ одной точкѣ.

Также точно мы будемъ обозначать силы буквами P, A, R, S, и т. д., ставя ихъ на линіяхъ представляющихъ направленія силъ, при чемъ, если буква A означаетъ точку приложенія силы P, то должно всегда полагать, что дѣйствіе этой силы направлено отъ A къ P, или, что сила двигаетъ тѣло отъ A къ P.

Для представленія величины силы P, возьмемъ на ея направленіи отъ точки приложенія A линію AB, въ ту сторону, въ которую сила стремится двигать точку A. И такъ, когда мы говоримъ, что сила выражается по величинѣ и направленію извѣстною частію прямой линіи, взятою отъ точки приложенія силы, то по принятому нами условію, надо понимать, что сила стремится двигать эту точку къ концу данной части прямой линіи.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Основныя начала.

1. Сложеніе и разложеніе силъ.

Само собою понятно, что *всѣ силы, равныя и противоположныя, приложенныя къ одной и той же точкѣ, находятся въ равновѣсіи.*

Также очевидно, что *двѣ силы равныя и противоположныя, приложенныя къ концамъ прямой линіи, неизмѣняемой длины, и дѣйствующія по направленію этой прямой будутъ въ равновѣсіи;* такъ какъ нѣтъ никакой причины, отчего-бы движеніе произошло въ одну сторону, предпочтительнѣе предъ другой.

Отсюда вытекаетъ слѣдствіе, что дѣйствіе силы на тѣло не измѣнится въ какой бы точкѣ своего направленія сила ни была приложена, при условіи, чтобы точка принадлежала къ тому-же самому тѣлу, или была бы съ нимъ неизмѣнно соединена.

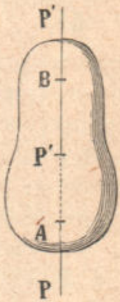


Рис. 1.

Положимъ, что какая нибудь сила P (Рис. 1) будетъ приложена къ тѣлу, или системѣ тѣлъ въ точкѣ A; если возьмемъ на направленіи этой силы другую точку B, неизмѣнно соединенную съ системою, такъ чтобы длина AB оставалась всегда постоянною, и если къ точкѣ B приложимъ двѣ силы P′, и—P′ равныя между собою и равныя силѣ P, дѣйствующія по направленію AB, то точка A будетъ подвержена такому же дѣйствію, какъ и прежде, потому что дѣйствіе силъ P, и —P уничтожится само собою. Далѣе сравнивая силу P съ равною и противоположною ей силою —P', приложенною къ точкѣ B, увидимъ, что дѣйствіе ихъ также уничтожится. Слѣдовательно ихъ можно отбросить, и тогда останется только одна сила P′, равная силѣ P и приложенная по направленію ея къ точкѣ B; дѣйствіе же на точку A будетъ такое-же, какъ и прежде.

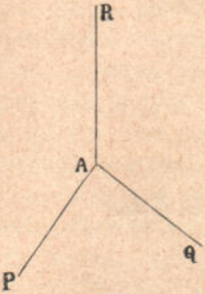


Рис. 2.

Когда мы будемъ перемѣщать точки приложенія силъ, мы не будемъ говорить, что новыя точки неизбѣжно соединены съ начальными точками приложенія, такъ какъ это надо всегда подразумѣвать.

Когда двѣ силы P и Q (рис. 2), приложенныя къ точкѣ A, составляютъ между собою нѣкоторый уголъ, то можно представить третью силу R, которая будучи, извѣстнымъ образомъ, приложена къ точкѣ A, уравновѣситъ двѣ силы P и Q, потому что, вслѣдствіе совокупнаго дѣйствія двухъ силъ P и Q, точка A должна будетъ двигаться по нѣкоторыму направленію; а слѣдовательно, если приложимъ къ ней, съ противоположной стороны нужную силу, то эта точка останется въ равновѣсіи.

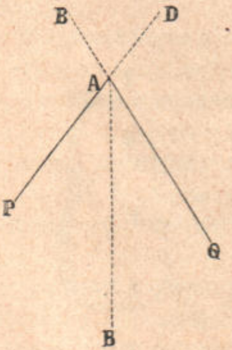


Рис. 3.

Если къ точкѣ A будутъ приложены три силы P, Q, R, находящіяся въ равновѣсіи, то сила R будетъ равна и прямо противоположна равнодѣйствующей двухъ силъ.

Слѣдовательно двѣ сходящіяся силы P и Q всегда могутъ быть замѣнены третьей ихъ равнодѣйствующей.

Съ другой стороны понятно, что эта равнодѣйствующая должна быть въ плоскости направленій AP и AQ (рис. 3), потому что нѣтъ причины, почему бы она была по одну сторону плоскости, предпочтительнѣе чѣмъ, въ совершенно симметричномъ положеніи, по другую. Кромѣ того, она должна быть направлена въ уголъ PAQ двухъ силъ, потому что точка A не можетъ двигаться въ части плоскости находящейся за линiею AQ, т. е. къ D; точно также она не можетъ двигаться и за линiею AP къ B; слѣдовательно, она должна двигаться въ углѣ PAQ, а потому равнодѣйствующая R должна быть направлена внутри этого угла.

Въ одномъ только случаѣ, можно видѣть *a priori*, какое будетъ направленiе равнодѣйствующей; это, когда обѣ силы P и Q равны; въ этомъ случаѣ, равнодѣйствующая дѣлитъ уголъ составляющихъ пополамъ, потому что нѣтъ никакой причины, чтобы равнодѣйствующая образовала бы съ одною изъ составляющихъ уголъ меньшiй, чѣмъ съ другою.

Если двѣ силы P и Q дѣйствуютъ по одному направленiю и въ одну и ту же сторону, то, очевидно, что эти силы можно сложить и онѣ дадутъ равнодѣйствующую равную ихъ суммѣ $P + Q$.

Эта основная аксiома науки о равновѣсiи. Мы, необходимо, должны ее допустить безъ всякаго доказательства, потому что она вытекаетъ изъ самаго понятiя о силѣ, принимаемой нами какъ *величину*. Въ самомъ дѣлѣ, какое понятiе можно составить о силѣ *вдвое*, *втрое* больше другой, если мы не будемъ разсматривать ту силу, какъ соединенiе *двухъ* или *трехъ* силъ равныхъ, дѣйствующихъ на одну точку, въ одну и ту же сторону? Впрочемъ это положенiе (postulatum) одно только и нужно для науки, всѣ же другiе законы статики, на основанiи его, должны быть доказаны.

Изъ предъидущей аксiомы также слѣдуютъ, что равнодѣйствующая произвольнаго числа силъ, дѣйствующихъ по одному и тому-же направленiю и въ одну и ту же сторону, равна ихъ суммѣ и дѣйствуетъ по тому же направленiю. Такимъ образомъ, если двѣ неравныя силы дѣйствуютъ по одному направленiю, но въ противоположныя стороны, то равнодѣйствующая ихъ равна разности этихъ силъ $P - Q$ и дѣйствуетъ въ сторону бóльшей силы, потому что можно предположить въ бóльшей силѣ, которая положимъ будетъ P, силу равную и противоположную меньшей силѣ Q и которая ее уничтожитъ. Точка приложенiя будетъ подвержена тогда дѣйствiю разности $P - Q$ двухъ силъ P и Q.

Изъ всего только что сказаннаго понятно, что *равнодѣйствующая нѣсколькихъ силъ, дѣйствующихъ по одному и тому-же направленiю, равна избытку суммы силъ дѣйствующихъ въ одну* *сторону, надъ суммою силъ дѣйствующихъ въ сторону противоположную, и направляется въ сторону бо́льшей суммы.*

Тотъ случай, когда силы дѣйствуютъ по одному направленію. принадлежитъ къ самымъ простѣйшимъ случаямъ въ теоріи сложенія силъ; здѣсь равнодѣйствующая открывается съ перваго взгляда. Во всѣхъ-же другихъ случаяхъ, болѣе сложныхъ, сложеніе силъ приводится къ только что разсмотренному нами случаю.

2. Сложеніе силъ дѣйствующихъ по направленіямъ параллельнымъ.

Теорема I. Положимъ, что *двѣ параллельныя силы* P *и* Q (рис. 4) *дѣйствующія въ одну сторону, приложены къ концамъ* A *и* B *прямой, неизмѣняемой линіи* AB, *то увидимъ, что равнодѣйствующая этихъ двухъ силъ должна быть приложена къ линіи* AB, *между точками* A *и* B; *и, что эта равнодѣйствующая параллельна составляющимъ* P *и* Q *и равна ихъ суммѣ.*

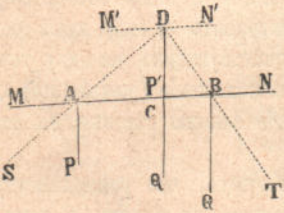


Рис. 4.

Приложимъ къ точкамъ A и B двѣ произвольныя силы M и N, равныя, противоположныя и дѣйствующія по направленію AB. Дѣйствіе этихъ силъ будетъ равно пулю; а слѣдовательно дѣйствіе силъ P и Q не измѣнится. Но силы M и P, приложенныя къ точкѣ A имѣютъ равнодѣйствующую S, также приложенную къ точкѣ A и направленную къ углу MAP. Также точно силы N и Q имѣютъ равнодѣйствующую T, приложенную въ точкѣ B и направленную въ углу NBQ. Можно принять, что равнодѣйствующія S и T приложены въ точкѣ D взаимнаго пересѣченія ихъ направленій. Равнодѣйствующая двухъ силъ S и T, необходимо, будетъ та-же, что и силъ P и Q; но, будучи приложена въ D, направляясь въ углѣ ADB, она пройдетъ между A и B черезъ нѣкоторую точку C, которую и можно будетъ принять за точку ея приложенія.

Мы можемъ доказать, что эта равнодѣйствующая параллельна силамъ P и Q и равна ихъ суммѣ. Представимъ себѣ силу S, которая при точкѣ D разложена на двѣ составляющія M' и P', соотвѣтственно равныя и параллельныя силамъ M и P; точно также, силу T разложимъ на двѣ составляющія N' и Q', равныя и параллельныя силамъ N и Q. Двѣ силы M' и N' равны между собою, и такъ какъ онѣ приложены къ одной точкѣ D и параллельны той-же прямой MN, то направленія ихъ будутъ противоположны, а слѣдовательно дѣйствіе ихъ равно нулю. Слѣдовательно, останутся только двѣ силы P' и Q'—равныя и параллельныя силамъ P и Q. Но, очевидно, эти двѣ силы, дѣйствуя по одному направленію слагаются въ одну R, равную суммѣ $P' + Q'$ или $P + Q$; что и требовалось доказать.

Слѣдствіе I. Если двѣ силы P и Q (рис. 5) равны, то точка C приложенія равнодѣйствующей будетъ находиться на срединѣ линіи AB. Положимъ, что двѣ силы M и N, взятыя произвольно, равны силамъ P и Q, тогда равнодѣйствующая S двухъ равныхъ силъ M и P раздѣлитъ уголъ MAP на двѣ равныя части, а такъ какъ CD параллельна AP, то треугольники ACD и BCD будутъ равнобедренные; слѣдовательно, съ одной стороны $AC = CD$, а съ другой $CD = CB$; откуда $AC = CB$.

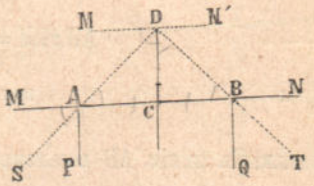


Рис. 5.

Слѣдствіе II. Отсюда понятно, что равнодѣйствующая сколькихъ угодно силъ, равныхъ по двѣ и симметрично приложенныхъ на равныхъ разстояніяхъ отъ средины той-же прямой, равна суммѣ всѣхъ составляющихъ, параллельна имъ и проходитъ чрезъ средину прямой, на которой онѣ имѣютъ точки приложенія. Потому что соединяя, послѣдовательно, по двѣ равныя силы, удаленныя отъ средины прямой, по ту и по другую сторону, на одинаковыя разстоянія, соотвѣтственныя имъ равнодѣйствующія пройдутъ чрезъ эту точку, и такъ какъ онѣ дѣйствуютъ въ одну и ту же сторону и по тому же направленію, то по соединеніи получимъ только одну силу.

Наоборотъ, всякую силу P приложенную къ прямой линіи, можно разложить на нѣсколько параллельныхъ силъ, приложенныхъ къ различнымъ точкамъ этой прямой, такъ, чтобы онѣ были равны по двѣ, находились бы въ равныхъ разстояніяхъ отъ точки приложенія силы P, и чтобы сумма ихъ равнялась этой силѣ.

Теорема II. *Точка приложенія C* (рис. 6) *равнодѣйствующей двухъ параллельныхъ силъ* P и Q, *дѣйствующихъ на концы* A и B *прямой* AB, *раздѣлитъ эту линію на части обратно пропорціональныя силамъ* P и Q.

$$P : Q = BC : AC.$$

Положимъ, что силы P и Q, соизмѣримы, т. е. что онѣ относятся между собою какъ цѣлыя числа m и n. Тогда раздѣливъ AB въ точкѣ H на двѣ части пропорціональныя силамъ P и Q, такимъ образомъ, чтобы:

$$AH : BH = P : Q,$$

или какъ: $m : n$.

На продолженіи линіи AB возьмемъ $AG = AH$ и $BK = BH$. Точка A будетъ средина линіи GH, а точка B средина линіи HK.

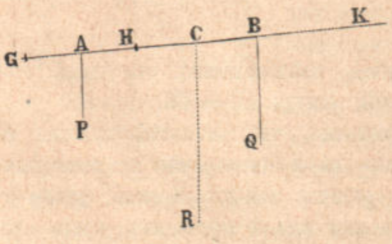


Рис. 6.

Такъ какъ силы P и Q относятся между собою какъ линіи AH и BH, то онѣ будутъ также относиться, какъ и удвоенныя тѣ-же линіи, т. е. какъ линіи GH и HK. но такъ какъ, по положенію, линія AH содержитъ m, а линія BH n равныхъ мѣръ. то въ GH будетъ $2m$, а въ HK $2n$ такихъ мѣръ. Но силу P можно разложить на $2m$ силъ равныхъ и параллельныхъ, приложенныхъ къ $2m$ точкамъ линіи GH, равно удаленныхъ отъ точки A; а силу Q на $2n$ силъ параллельныхъ равныхъ между собою и первымъ, приложенныхъ къ $2n$ точкамъ линіи HK, равно удаленнымъ отъ точки B. Всѣ эти равныя силы находятся по двѣ въ равныхъ разстояніяхъ отъ средины

C линіи GK, а слѣдовательно общая ихъ равнодѣйствующая, которая, въ то же время, будетъ равнодѣйствующей силъ P и Q, необходимо пройдетъ чрезъ средину линіи GK.

Но, такъ какъ $GC = AB$, то вычитая общую часть AC, получимъ $BC = AG = AH$; придивая-же, съ обѣихъ сторонъ, по CH, будетъ: $AC = BH$. Но, такъ какъ мы имѣемъ

$$P : Q = AH : BH,$$

то

$$P : Q = BC : AC.$$

Затѣмъ положимъ, что силы P и Q несоизмѣримы тогда замѣчаемъ, что если равнодѣйствующая двухъ какихъ нибудь силъ P и Q (рис. 7), приложенныхъ къ точкамъ A и B, проходитъ чрезъ C, то равнодѣйствующая силъ P и силы $Q + 1 > Q$ пройдетъ между точками C и B; т. е. что точка приложенія равнодѣйствующей приблизится къ точкѣ приложенія силы, которая была увеличена. Чтобы найти равнодѣйствующую двухъ силъ P и $Q + 1$, нужно сначала взять равнодѣйствующую силъ P и Q, равную R, проходящую чрезъ точку C, по положенію, а потомъ равнодѣйствующую силѣ R и I, точка приложенія которой будетъ между C и B.

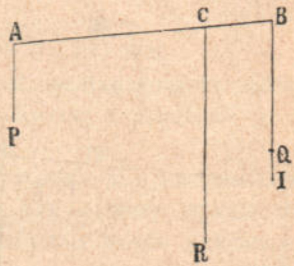


Рис. 7.

Затѣмъ, если равнодѣйствующая двухъ несоизмѣримыхъ силъ P и Q (рис. 8) не проходитъ чрезъ точку C, которая дѣлитъ линію въ отношеніи $P : Q = BC : AC$, то она пройдетъ чрезъ другую точку лежащую между A и C, или между C и B. Положимъ, что она проходитъ чрезъ G между A и C. Раздѣлимъ линію AB на равныя части, по кото-

Рис. 8.

рыя менѣе нежели GC то тогда хоть одна точка дѣленія будетъ находиться между C и G. Положимъ эта точка будетъ I. тогда двѣ линіи BI и AI будутъ соизмѣримыя, и точку I можно разсматривать какъ точку приложенія равнодѣйствующихъ двухъ такихъ силъ P и Q′, что $P : Q' = BI : AI$, откуда $Q' < Q$ (потому что по положенію $P : Q = BC : AC$). Но равнодѣйствующая силъ P и Q′ проходитъ чрезъ I, то и равнодѣйствующая силъ P и $Q > Q'$, пройдетъ также между I и B, а потому не упадетъ въ G, что противорѣчитъ положенію.

Также точно увидимъ, что равнодѣйствующая не можетъ проходить между C и B, а слѣдовательно она должна пройти чрезъ C.

Слѣдствіе I. Если три параллельныя силы P, Q, R, (рис. 9) находятся въ равновѣсіи на линіи AB, то одна изъ нихъ должна быть равна и противоположна равнодѣйствующей двухъ другихъ силъ.

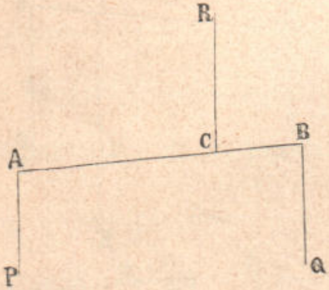


Рис. 9.

Сила Q, взятая въ противоположную сторону, будетъ равнодѣйствующей двухъ силъ P и R. Но, такъ какъ двѣ силы P и Q дѣйствуютъ въ одну сторону, то сила $R=P+Q$, а слѣдовательно $Q=R-P$, откуда слѣдуетъ, что равнодѣйствующая двухъ параллельныхъ силъ, дѣйствующихъ въ противоположныя стороны, равна ихъ разности и дѣйствуетъ въ сторону большей силы.

Если даны силы P и R, дано разстояніе AC между точками ихъ приложенія и требуется найти точку приложенія равнодѣйствующей, то получимъ такое отношеніе:

$$P : Q = BC : AC$$

откуда:

$$P + Q : Q = BC + AC : AC$$

или:

$$R : Q = AB : AC$$

Послѣднее отношеніе даетъ AB, а слѣдовательно и точку B.

Слѣдствiе II. Положимъ, что двѣ силы P и R равны между собою, то равнодѣйствующая Q будетъ равна нулю и разстоянiе AB до точки ея приложенiя будетъ, по предъидущему

$$\frac{R \times AC}{0} = \text{безконечности.}$$

Если силы P и R, вмѣсто того, чтобы быть равными, будутъ разниться между собою на весьма малую величину, то равнодѣйствующая Q, равная этой разности будетъ весьма мала, а разстоянiе

$$AB = \frac{R \times AC}{Q}$$

весьма велико, потому что знаменатель Q очень малъ.

Слѣдовательно, чѣмъ болѣе двѣ силы приближаются къ равенству, тѣмъ и равнодѣйствующая ихъ уменьшается, а разстоянiе до точки ея приложенiя увеличивается.

Если же обѣ силы совершенно равны, та равнодѣйствующая ихъ будетъ равна нулю и будетъ имѣть точку приложенiя на безконечномъ разстоянiи. Изъ этого слѣдствiя можно догадаться, что равнодѣйствующей тогда вовсе не будетъ, такъ такъ двѣ силы равныя и параллельныя, дѣйствующiя въ противоположныя стороны, не могутъ быть уравновѣшены одною силою.

Но, для того, чтобы не осталось никакого сомнѣнiя относительно предъидущаго заключенiя, предположимъ, что сила R находится въ равновѣсiи съ двумя силами P и —P, совершенно равными, параллельными и противоположными. Каково бы ни было положенiе равнодѣйствующей относительно составляющихъ, непремѣнно будетъ другое положенiе, совершенно подобное въ направленiи противоположномъ первому. Слѣдовательно, если сила R уравновѣшиваетъ силы P и — P, то непремѣнно существуетъ и другая сила — R, ей равная, параллельная и противоположнаго направленiя, которая также ихъ уравновѣшиваетъ. Приложимъ эту другую силу — R и, чтобы ничего не измѣнить, уничтожимъ ее непосредственно силою R′, равною и противоположною. Слѣдовательно пять силъ R, P, — P, — R и R′ будутъ въ равновѣсiи. Но такъ какъ три изъ нихъ P, — P и — R ~~и R′~~ находятся между собою въ равновѣсіи, то и остальныя силы R и R′ должны также находиться въ равновѣсіи, что невозможно, потому что эти двѣ равныя и паралельныя силы дѣйствуютъ въ ту-же самую сторону. Слѣдовательно, силы P и —P не могутъ быть удерживаемы въ равновѣсіи одною силою и потому не имѣютъ равнодѣйствующей.

Слѣдствіе III. Такъ какъ двѣ паралельныя силы слагаются въ одну, то и наоборотъ силу R (рис. 6), приложенную къ точкѣ C неизмѣняемой прямой можно разложить на двѣ паралельныя силы P и Q, дѣйствующія въ данныхъ точкахъ A и B на той-же прямой. Для этого надо силу R раздѣлить на двѣ другія пропорціональныя разстояніемъ BC AC; чтобы найти силу Q, должно составить слѣдующую пропорцію: $R : Q = AB : AC$, въ которую входитъ только одна неизвѣстная Q. Сила же P будетъ равна $R - Q$.

Если же точка C приложенія силы R (рис. 10), которую мы хотимъ разложить, не находилась бы между точками приложенія A и B искомыхъ силъ P и Q, то мы получили бы пропорцію: $R : Q = AB : CA$, которая даетъ величину силы Q, но тогда уже сила P будетъ равна $R + Q$.

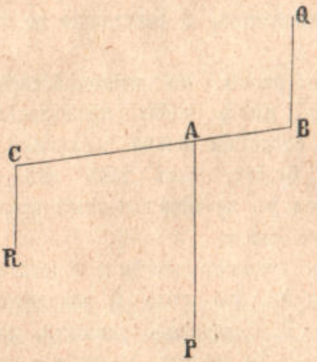


Рис. 10.

Слѣдствіе IV. Зная какъ опредѣлить равнодѣйствующую двухъ паралельныхъ силъ, не трудно опредѣлить ее и для скольких угодно силъ, приложенныхъ къ различнымъ точкамъ неизмѣняемой системы.

Положимъ, даны четыре паралельныя силы, P, P′, P″, P‴ (рис. 11), приложенныя къ четыремъ точкамъ A, B, C, D, взятымъ произвольно въ пространствѣ и соединеннымъ неизмѣняемымъ образомъ.

Разсматривая эти силы по двѣ, видимъ, что онѣ находятся въ той-же плоскости. Мы можемъ сначала взять равнодѣйствующую X двумъ силамъ P и P′; она будетъ равна ихъ суммѣ $P + P'$ и пройдетъ черезъ точку I на линіи AB, которую найдемъ, раздѣливъ линію AB на части обратно пропорціональныя силамъ P и P′.

Для опредѣленія равнодѣйствующей X, точку ея приложенія I соединяютъ съ точкою C третьей силы P''. Двѣ силы X и P'' также параллельны, слѣдовательно сложатся въ одну равнодѣйствующую X', равную суммѣ ихъ $X + P''$; точка ея приложенія F найдется, раздѣливъ линію CI въ обратномъ отношеніи силъ X и P''. Наконецъ, соединяя F съ точкою приложенія четвертой силы P''' и, раздѣляя линію FD по двѣ части обратно-пропорціональныя силамъ X' и P''', найдемъ точку G приложенія равнодѣйствующей R, которая будетъ параллельна двумъ силамъ X' и P''', а слѣдовательно и всѣмъ составляющимъ и будетъ равна ихъ суммѣ $X' + P'''$ и суммѣ всѣхъ составляющихъ.

Подобное же разсужденіе можетъ быть приложено и къ сложенію какого угодно числа параллельныхъ силъ.

Если между силами P, P' и P'' и т. д. однѣ дѣйствуютъ въ одну сторону, а другія въ другую, то должно сперва найти равнодѣйствующую всѣхъ силъ, дѣйствующихъ въ одну сторону, потомъ равнодѣйствующую силъ направленыхъ въ сторону противоположную, и когда всѣ силы будутъ приведены къ двумъ параллельнымъ силамъ дѣйствующимъ въ противоположныя стороны, то, какъ выше объяснено, легко найдемъ ихъ равнодѣйствующую.

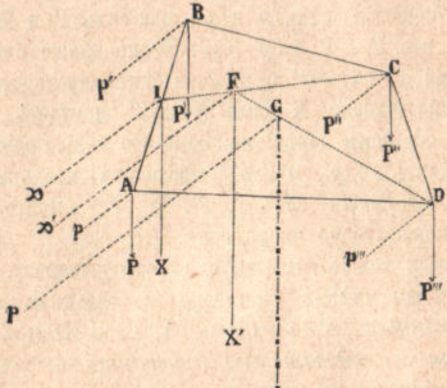


Рис. 11.

-1794-

И такъ, вообще можно найти величину и направленіе равнодѣйствующей сколькихъ угодно параллельныхъ силъ; при чемъ *эта равнодѣйствующая будетъ параллельна даннымъ силамъ и равна избытку суммы силъ, дѣйствующихъ въ одну сторону надъ суммою силъ дѣйствующихъ въ сторону противоположную.*

Мы сказали вообще, потому что можетъ случиться, что равнодѣйствующая силъ дѣйствующихъ въ одну сторону, совершенно равна равнодѣйствующей тѣхъ, которыя дѣйствуютъ въ сторону противоположную, но только не прямо противоположна ей; тогда, какъ мы уже видѣли, невозможно замѣнить ихъ одною силою.

Слѣдствіе V. Положимъ, что четыре силы P, P′, P″, P‴, не измѣняя своей величины, оставаясь параллельными и проходя чрезъ тѣ-же точки A, B, C, D, примутъ въ пространствѣ положенія p, p', p'', p'''.

Если будемъ искать равнодѣйствующую по вышеизложенному порядку, то найдемъ, что равнодѣйствующая x силъ p и p' пройдетъ черезъ ту-же точку I, какъ и равнодѣйствующая X силъ P и P′ и будетъ ей равна.

Равнодѣйствующая эта должна пройти чрезъ ту-же точку, потому что точка ея приложенія должна раздѣлить ту-же линію AB въ обратномъ отношеніи силъ p и p', или силъ P и P′ и будетъ равна ей, потому что $P + P' = p + p'$. Точно также найдемъ, что равнодѣйствующая x' силъ x и p'' проходитъ чрезъ ту-же точку F, какъ и равнодѣйствующая X′ силъ X и P″ и будетъ ей равна; продолжая такимъ образомъ далѣе, найдемъ, что общая равнодѣйствующая четыремъ силатъ p, p', p'', p''' проходитъ чрезъ ту-же точку, какъ и равнодѣйствующая силъ P, P′, P″, P‴, и это будетъ имѣть мѣсто при какомъ угодно числѣ силъ.

Отсюда можно вывести слѣдующую теорему.

Если мы имѣемъ *систему нѣсколькихъ параллельныхъ силъ, приложенныхъ къ точкамъ* A, B, C, D *и т. д. и будемъ эту систему послѣдовательно приводить въ различныя положенія такъ, чтобы тѣ-же силы всегда проходили чрезъ тѣ-же точки и сохраняли бы параллельное направленіе и величины, то найденныя, при каждомъ ихъ положеніи, равнодѣйствующія будутъ пересѣкаться въ той-же точкѣ.*

Эта точка пересѣченія послѣдовательныхъ равнодѣйствующихъ называется *центромъ параллельныхъ силъ.* О ней мы будемъ говорить въ главѣ о центрѣ тяжести.

Впрочемъ, въ предъидущемъ доказательствѣ нѣтъ необходимости предполагать, чтобы силы всегда сохраняли тѣ-же величины, такъ какъ совершенно достаточно, что-бы въ послѣдовательныхъ положеніяхъ группъ онѣ были пропорціональны тѣмъ-же величинамъ.

3. Сложеніе силъ, направленія которыхъ сходятся въ одной и той же точкѣ.

Теорема III. *Равнодѣйствующая двухъ силъ* P и Q (рис. 12), *приложенныхъ къ той-же точкѣ* A *и дѣйствующихъ подъ угломъ, направляется по діагонали параллелограмма* ABCD, *построеннаго на двухъ линіяхъ* AB *и* AC, *которыя представляютъ величины и направленія двухъ силъ* P *и* Q.

Мы знаемъ, что эта равнодѣйствующая должна быть въ плокости P и Q и, что она должна быть приложена къ точкѣ A, такъ какъ эта равнодѣйствующая, по положенію, производитъ на эту точку такое-же дѣйствіе, какое производятъ двѣ силы P и Q. Можно доказать, что она также дожна пройти черезъ конечную точку D, діагонали AD.

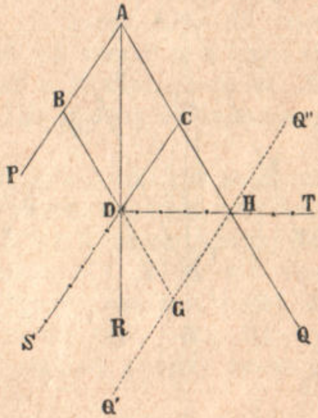


Рис. 12.

Для этого возьмемъ на продолженіи линіи BD часть DG=DC и построимъ ромбъ CDGH. Приложимъ къ точкамъ G и H, по направленію GH, двѣ силы Q' и Q'' противоположныя, равныя между собой и силѣ Q. Очевидно, что равнодѣйствующая четырехъ силъ P, Q, Q' и Q'' должна пройти черезъ точку D, потому что, вслѣдствіе равенства Q' = Q, двѣ параллельныя силы P и Q относятся между собою, какъ стороны AB, AC, или какъ DC и DB, или по причинѣ равенства DC = DG, какъ линіи DG и DB и слѣдовательно, ихъ равнодѣйствующая S проходитъ черезъ D; продолженіе равнодѣйствующей T двухъ равныхъ силъ Q и Q'' раздѣлитъ уголъ CHG ромба CDGH пополамъ и также пройдетъ чрезъ точку D, которую можно принять за точку ея приложенія. Слѣдовательно, равнодѣйствующая силъ S и T пройдетъ черезъ точку D.

Но, такъ какъ двѣ силы Q′ и Q″, приложенныя къ GH, равны и противоположны, то слѣдовательно онѣ взаимно уничтожаются; равнодѣйствующая-же силъ P, Q, Q′ и Q″ будетъ, въ то-же время, и равнодѣйствующей силъ P и Q, а такъ какъ первая проходитъ черезъ D, то равнодѣйствующая силъ P и Q пройдетъ также черезъ эту точку.

И такъ, равнодѣйствующая, проходя въ одно время чрезъ точку A и D, необходимо направится къ діагонали AD.

Слѣдствіе. Отсюда понятно, что если намъ извѣстны одни только направленія силъ P и Q (рис. 13) и равнодѣйствующей ихъ R, то можно опредѣлить и отношенія между силами P и Q. Для чего, взявъ по направленіи равнодѣйствующей какую нибудь точку D, проведя

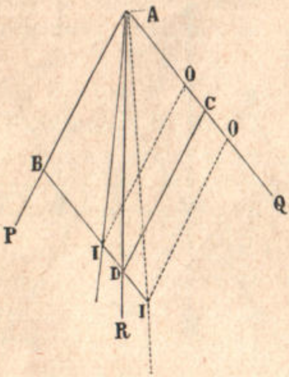


Рис. 13.

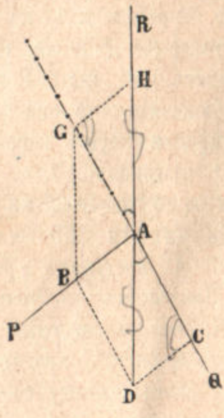


Рис. 14.

черезъ нее линіи DC и DB параллельныя направленіямъ силъ P и Q и продолживъ ихъ до встрѣчи съ этими направленіями въ C и B, получимъ: $P : Q = AB : AC$; иначе P относилось-бы къ Q, какъ AB относилось къ линіи AO не равной AC. Тогда равнодѣйствующая силъ P и Q была-бы направлена по діагонали AI параллелограмма AOIB, отличающагося отъ параллеграмма ABDC, что противорѣчитъ предположенію, по которому точка D находится на равнодѣйствующей.

Теорема IV. *Равнодѣйствующая двухъ силъ* P *и* Q (рис. 14), *приложенныхъ къ одной и той-же точкѣ* A, *изображается по ве-*

личинъ и направленію діагональю параллелограмма ABDC, *построеннаго на линіяхъ* AB, AC, *которыя представляютъ величины и направленія составляющихъ.*

Мы знаемъ, что эта равнодѣйствующая направляется по діагонали; намъ остается доказать, что она ей равна. Положимъ R будетъ эта равнодѣйствующая приложенная къ точкѣ A на продолженіи діаганали DA въ сторону противоположную. Понятно, что три силы P, Q, R, будутъ въ равновѣсіи, а слѣдовательно одна изъ нихъ, напримѣръ сила Q, будетъ равна и противоположна равнодѣйствующей двухъ другихъ силъ P и R. И такъ продолженное направленіе силы Q представитъ направленіе равнодѣйствующей силъ P и Q. Слѣдовательно, если черезъ точку B проведемъ по направленію AR параллельную линію BG, встрѣчающую продолженіе линіи QA, въ G и чрезъ ту-же точку, по направленію AP, параллельную GH, пересѣкающую направленіе силы R и H, то двѣ силы P и R будутъ относиться между собою, какъ стороны AB и AH параллелограмма ABGH. Но линія AB представляетъ силу P. По свойству же параллельныхъ линій имѣемъ: AH = BG = AD.

Следствie I. Такъ какъ силы P, Q и R относятся между собою, какъ линіи AB, AC, AD, и кромѣ того въ параллелограмѣ ABDC имѣемъ AB = CD, то можно сказать, что силы P, Q и R относятся между собою, какъ стороны CD, CA и AD треугольника ACD. Но эти три стороны относятся между собою какъ синусы противолежащихъ угловъ CAD, CDA. и ACD, а по причинѣ параллельности линіи уголъ CDA = углу BAD, уголъ же ACD есть дополненія угла BAC, а потому имѣемъ тотъ же синусъ; слѣдовательно мы получимъ:

$$P : Q : R = \text{Sin } CAD : \text{Sin } BAD : \text{Sin } BAC.$$

Отсюда можно заключить, что если равнодѣйствующую двухъ силъ P и Q выразимъ синусомъ угла между направленіями этихъ силъ, то сами силы P и Q будутъ наоборотъ равны синусамъ угловъ, составляемыхъ ими съ направленіемъ равнодѣйствующей, или, что *каждая изъ силъ* P, Q, R *пропорціональна синусу угла составляемаго направленіемъ другихъ двухъ силъ.*

Отсюда, а также изъ непосредственнаго разсматриванія параллелограмма силъ видно, что когда двѣ силы дѣйствуютъ на точку подъ угломъ не равнымъ двумъ прямымъ, равнодѣйствующая ихъ не можетъ уничтожаться, кромѣ только того случая когда каждая изъ составляющихъ силъ отдѣльно равна нулю.

Въ томъ случаѣ, когда ни одна изъ этихъ силъ не будетъ равна нулю, то можно построить параллелограммъ на двухъ линіяхъ, представляющихъ ихъ величины и направленія, при чемъ діагональ этого параллелограмма будетъ ихъ равнодѣйствующая.

Если только одна изъ составляющихъ силъ равна нулю, то другая будетъ равнодѣйствующая и не иначе можетъ быть равна нулю, какъ въ томъ слѣчаѣ, когда обѣ составляющія равны нулю.

Когда двѣ силы дѣйствуютъ подъ угломъ равнымъ двумъ прямымъ, тогда направленія ихъ противоположны и равнодѣйстующая можетъ быть равна нулю не только въ томъ случаѣ, когда обѣ силы равны нулю, но еще и тогда, когда онѣ равны между собою.

Слѣдствіе II. Данную силу Q можно разложить на двѣ другія P и Q направленныя по линіямъ AP и AQ (рис. 15), находящіяся въ одной плоскости съ R и встрѣчающіяся съ нею въ той-же точкѣ A. Взявъ на направленіи силы R величину ея AD и проведя чрезъ точку D линіи DC, DB параллельныя даннымъ направленіямъ AP, AQ, составимъ параллелограмъ ABDC, стороны котораго AB и AC представляютъ искомыя силы P и Q.

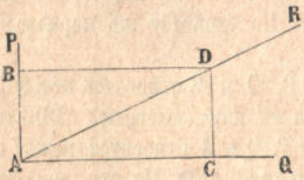


Рис. 13.

Для того, чтобы непосредственно ихъ вычислить, нужно составить слѣдующія двѣ пропорціи:

$$R : P = \operatorname{Sin} BAC : \operatorname{Sin} CAD,$$

$$R : Q = \operatorname{Sin} BAC : \operatorname{Sin} BAD,$$

въ которыхъ только P и Q неизвѣстны.

Если бы уголъ BAC былъ прямой, то полагая радіусъ равнымъ 1, $\operatorname{Sin} BAC = 1$; $\operatorname{Sin} CAD = \operatorname{Cos} BAD$; и обратно, $\operatorname{Sin} BAD = \operatorname{Cos} BAD$, то предъидущія двѣ пропорціи измѣняются такъ:

$$R : P = 1 : \mathrm{Cos}\, BAD$$

$$R : Q = 1 : \mathrm{Cos}\, CAD$$

откуда:

$$P = R\, \mathrm{Cos}\, BAD, \text{ и } Q = R\, \mathrm{Cos}\, CAD.$$

Слѣдовательно, если разложить одну силу на двѣ другія, дѣйствующія по перпендикулярнымъ между собою направленіямъ, то каждая составляющая найдется чрезъ умноженіе данной силы на синусъ угла составляемаго ею, съ направленіемъ искомой составляющей.

Каждая изъ составляющихъ выражается проэкціею равнодѣйствующей на ея направленіе. Проэкціею силы на данномъ направленіи часто называютъ силою отнесенною къ этому направленію или взятою на этомъ направленіи. И такъ R Cos BAD, или составляющая P, есть сила R, приложенная на направленіи AP.

Слѣдствіе III. Зная какъ найти равнодѣйствующую двухъ силъ, приложенныхъ къ одной точкѣ, можно опредѣлить равнодѣйствующую другихъ силъ P, Q, R, S и т. д., приложенныхъ къ одной точкѣ A и произвольно направленныхъ въ пространствѣ. Для этого разсмотримъ сначала двѣ какія нибудь изъ данныхъ силъ, напримѣръ силы P и Q, эти двѣ силы будутъ находиться въ одной плоскости и ихъ равнодѣйствующая, которую назовемъ чрезъ X, опредѣлится по вышесказанному; также точно найдется равнодѣйствующая силы X и другой всякой силы R. Соединяя эту равнодѣйствующую, которую означимъ чрезъ Y, съ новою силою S, получимъ ихъ равнодѣйствующую Z, которая, въ тоже время, будетъ равнодѣйствующая четырехъ силъ P, Q, R, S; продолжая такимъ образомъ получимъ равнодѣйствующую всѣхъ силъ вообще.

Если силы P, Q, R, S, и т. д. находятся въ одной плоскости, то и равнодѣйствующія ихъ X, Y, Z и т. д. будутъ находиться въ той-же плоскости. Въ случаѣ если эти силы находятся въ равновѣсіи, равнодѣйствующая ихъ будетъ равна нулю.

И такъ, чрезъ послѣдовательное соединеніе силъ приложенныхъ къ одной точкѣ, мы видимъ, что если начертимъ въ пространствѣ многоугольникъ, послѣдовательныя стороны котораго будутъ параллельны и пропорціональны даннымъ силамъ, то прямая смыкающая обводъ, т. е. закавчивающая многоугольникъ, будетъ параллельна и пропорціональна равнодѣйствующей всѣхъ силъ, при чемъ, если бы многоугольникъ самъ собою сомкнулся, то равнодѣйствующая будетъ равна нулю и всѣ силы уравновѣсятся.

Слѣдующая теорема въ сущности только частный случай этого предложенія.

Теорема V. *Если три силы* X, Y, Z, *приложенныя къ одной и той-же точкѣ* A (рис. 16) *будутъ изображены тремя линіями* AB, AC, AD, *и на этихъ линіяхъ построить параллелипипедъ* A...F, *то равнодѣйствующая этихъ трехъ силъ выразится діагональю* AF *этого параллелипипеда.*

Въ самомъ дѣлѣ, двѣ силы X и Y, выраженныя двумя сторонами параллелограмма ABDC, дадутъ равнодѣйствующую силу P, представленную діагональю параллелограмма AG.

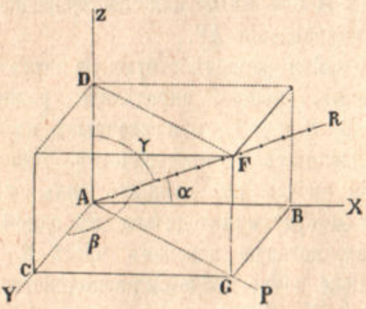


Рис. 16.

Такъ какъ AD равна и параллельна GF, фигура AGFD будетъ параллелограммъ, а слѣдовательно двѣ силы P и Z дадутъ равнодѣйствующую R, выраженную діагональю AF, будетъ діагональю параллелипипеда.

Если силы X, Y, Z находятся не въ одной плоскости, то ихъ равнодѣйствующая не можетъ уничтожиться, исключая только частнаго случая, когда эти силы каждая порознь равны нулю. Если-же ни одна изъ нихъ не равна нулю, то можно построить на линіяхъ представляющихъ ихъ величины и направленія, параллелипипедъ, діагональ котораго будетъ равнодѣйствующая. Когда только одна изъ нихъ равна нулю, то двѣ другія, по положенію, не находящіяся на одной линіи, имѣютъ равнодѣйствующую. Наконецъ, если двѣ силы равны нулю, то третья будетъ равнодѣйствующей, а слѣдовательно составляющія силы X, Y, Z, должны быть равны нулю, для того, чтобы равнодѣйствующая ихъ была равна нулю.

Слѣдствіе I. Изъ этой теоремы, которую можно назвать теоремою *параллелипипеда* силъ, видно, что данная сила R всегда можетъ быть разложена на три другія силы X, Y, Z, параллельныя тремъ даннымъ линіямъ въ пространствѣ, если только двѣ изъ нихъ не параллельны между собою. Взявъ часть AF для выраженія величины силы R, и проведя черезъ точку A приложенія этой силы три линіи параллельныя даннымъ прямымъ, затѣмъ чрезъ ту-же точку A проведемъ три плоскости XY, XZ, YZ, а чрезъ точку F три другія плоскости параллельныя первымъ, то эти шесть плоскостей опредѣлятъ параллелипипедъ, котораго три смежныя ребра AB, AC, AD будутъ представлять три составляющія силы X, Y, Z.

Слѣдствіе II. Если параллелипипедъ прямоугольный, то въ прямоугольникѣ ADFG будемъ имѣть:

$$AF^2 = AD^2 + AG^2;$$

но въ прямоугольникѣ ABGC имѣемъ:

$$AG^2 = AC^2 + AB^2$$

подставивъ эту величину получимъ:

$$AF^2 = AD^2 + AC^2 + AB^2$$

слѣдовательно:

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

Откуда:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

Если бы мы желали имѣть три составляющія въ функціи равнодѣйствующей и угловъ, которые онѣ составляютъ съ равнодѣйствующей, то называя чрезъ α уголъ составляемый равнодѣйствующею R, съ составляющею X, получимъ.

$$AF : AB = 1 : \operatorname{Cos} \alpha;$$

слѣдовательно:

$$R : X = 1 : \operatorname{Cos} \alpha;$$

откуда:

$$X = R. \operatorname{Cos} \alpha.$$ $\cos\alpha = \frac{X}{R}$

Означимъ также чрезъ β и γ углы, которые составляетъ равнодѣйствующая съ Y и Z, получимъ:

$$Y = R \operatorname{Cos} \beta, \ Z = R \operatorname{Cos} \gamma;$$

откуда слѣдуетъ, что величина каждой составляющей силы найдется, помножая равнодѣйствующую на косинусъ угла составляемаго этою силою съ направленіемъ искомой составляющей.

Мы нашли, что:

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

то поставивъ на мѣсто X, Y, Z ихъ величины, т.-е.

$R. \operatorname{Cos} \alpha$, $R. \operatorname{Cos} \beta$, $R. \operatorname{Cos} \gamma$, то получимъ:

$$R^2 = R^2 \operatorname{Cos}^2 \alpha + R^2 \operatorname{Cos}^2 \beta + R^2 \operatorname{Cos}^2 \gamma;$$

или:

$$R^2 = R^2 (\operatorname{Cos}^2 \alpha + \operatorname{Cos}^2 \beta + \operatorname{Cos}^2 \gamma);$$

откуда

$$\operatorname{Cos}^2 \alpha + \operatorname{Cos}^2 \beta + \operatorname{Cos}^2 \gamma = 1.$$

Послѣднее уравненіе выражаетъ отношеніе всегда существующее между углами, которые составляетъ прямая линія съ тремя прямоугольными осями въ пространствѣ.

4. Сложеніе и разложеніе паръ.

Парою силъ въ статикѣ называютъ двѣ силы P и — P (рис. 17) равныя, параллельныя и противоположныя, но приложенныя къ разнымъ точкамъ. Перпендикуляръ AB проведенный между направленіями силъ называется *плечемъ пары*; а произведеніе $P \times AB$ одной изъ этихъ силъ на плечо *моментомъ пары*.

Каково бы ни было дѣйствіе двухъ силъ P и —P на тѣло, къ которому онѣ прилежны, оно не можетъ быть замѣнено дѣйствіемъ одной силы, произвольно приложенной къ тому-же тѣлу, а слѣдовательно, усиліе пары не можетъ быть сравниваемо ни съ какою простою силою. Для означенія этой новой причины движеніе необходимо особое названіе: *пара*, которое достаточно выражаетъ совокупность двухъ противоположныхъ силъ, и, въ то же время, даетъ намъ понятіе объ усиліи, производимомъ этою парою. Впрочемъ, какъ мы сейчасъ увидимъ, что усиліе пары измѣряется ея *моментомъ*, а потому мы можемъ замѣнить первое слово вторымъ или брать одно вмѣсто другого.

Сложеніе паръ принадлежитъ къ числу основныхъ правилъ статики и будетъ почти также часто употребляться въ нашемъ изложеніи какъ и соединеніе силъ. Мы увидимъ далѣе, что теорія паръ весьма просто и естественно приводитъ къ законамъ равновѣсія твердыхъ тѣлъ и потому не будутъ излишни тѣ подробности, въ которыя мы войдемъ относительно этой теоріи и которыя дадутъ намъ прямой способъ для достиженія главной нашей цѣли.

Рис. 17.

Все, что мы скажемъ о парахъ, ни мало не зависитъ отъ дѣйствія производимаго ими на тѣло; но если-бы мы желали узнать, въ какую сторону дѣйствуютъ различныя пары, находящіяся въ той же плоскости, то совершенно достаточно представить себѣ, что средины ихъ плечъ неподвижны, тогда дѣйствіе каждой пары будетъ стремиться вращать тѣло около неподвижной средины плеча и не трудно узнать сторону ея дѣйствія, различая пары, стремящіяся произвести вращеніе въ одну сторону отъ паръ, стремящихся вращать въ сторону противоположную. Не должно однако-же упускать изъ вида, что въ дѣйствительности въ системѣ нѣтъ ни одной неподвижной точки и что понятіе о вращеніи служитъ намъ только для помощи воображенію.

Мы говорили выше, что сила можетъ быть перенесена въ какую угодно точку ея направленія при условіи, чтобы эта точка была неизмѣнно соединена съ точкою приложенія. Подобное предложеніе мы можемъ доказать и для паръ, оно также замѣчательно, какъ и первое и впослѣдствіи мы будемъ употреблять его весьма часто.

Пара можетъ быть перенесена куда угодно въ ея плоскости, или во всякую другую плоскость ей параллельную, безъ измѣненія ея дѣйствія на тѣло; она можетъ быть обращена какъ угодно въ этой плоскости, съ условіемъ, чтобы новое плечо было неизмѣнно соединено съ прежнимъ.

Для доказательства этого предложенія, мы разложимъ его на два другія.

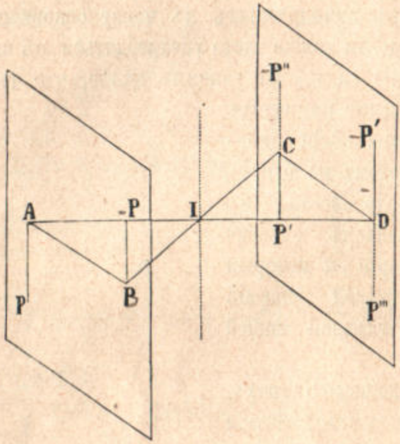


Рис. 18.

Положимъ во-первыхъ, что пара (P, — P) (рис. 18), приложена перпендикулярно къ AB; возьмемъ произвольно въ плоскости этой пары или въ плоскости ей параллельной, прямую CD, равную и параллельную AB; проведемъ прямыя AD и BC, которыя будутъ находиться въ одной плоскости и пересѣкутся въ точкѣ I общей ихъ срединѣ; положимъ, что линіи AB и CD соединены между собою неизмѣннымъ образомъ.

Если приложимъ къ линіи CD, параллельно силамъ P и — P, двѣ противоположныя пары (P′, — P′) и (P″, — P″) равныя между собою и предложенной парѣ (P,—P), то очевидно, что эти двѣ пары уничтожатся сами собою, а слѣдовательно, дѣйствіе пары (P,—P) не измѣнится. Но, съ другой стороны, также совершенно понятно, что пары (P,—P) и (P″,—P″) уничтожаются сами собою; такъ какъ точка I есть средина двухъ линій AD и BC, а двѣ силы P и P″ равныя и параллельныя, приложенныя къ AD, даютъ равнодѣйствующую равную и противоположную равнодѣйствующей двухъ силъ —P и —P″, приложенныхъ къ BC. Слѣдовательно, можно уничтожить пары (P,—P), (P″,—P″) и останется только пара (P′—P′), приложенная къ линіи CD, которая очевидно и будетъ данная пара, перенесенная параллельно самой себѣ и притомъ такъ, что ея плечо AB перешло въ положеніе CD параллельное AB.

Во вторыхъ, если пара (P,—P) (рис. 19) будетъ приложена перпендикулярно къ AB. Проведемъ въ плоскости этой пары прямую CD=AB, составляющую съ AB какой-нибудь уголъ и положимъ, что эти двѣ прямыя пересѣкаются въ точкѣ I, ихъ общей召 срединѣ и неизмѣнно соединены между собою.

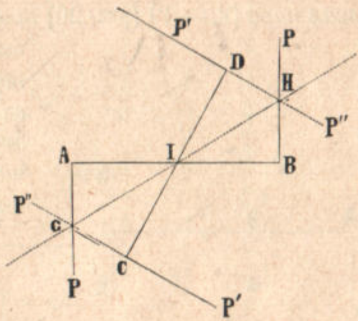


Рис. 19.

Приложимъ къ линіи CD подъ прямымъ угломъ двѣ противоположныя пары (P′,—P′) (P″,—P″), равныя между собою и предложенной парѣ (P,—P′), то эти пары уничтожатся сами собою, а слѣдовательно дѣйствіе пары (P—P) не перемѣнится; съ другой стороны, двѣ пары (P,—P) и (P″,—P″) уничтожаются сами по себѣ, потому что двѣ равныя силы P и —P″, встрѣчающіяся въ точкѣ G, даютъ равнодѣйствующую равную и противоположную равнодѣйствующей двухъ силъ —P и P″, пересѣкающихся въ точкѣ H. Такимъ образомъ можно уничтожить двѣ пары (P,—P) и (P″—P″), причемъ останется только пара (P′,—P′), приложенная къ CD, которая и будетъ данная пара, обороченная въ своей плоскости такъ, что ея плечо AB перешло въ положеніе CD, наклонное къ прежнему.

Изъ предъидущихъ двухъ предложеній можно вывести то заключеніе, что всякая пара, не измѣняя своего дѣйствія, можетъ быть перенесена куда угодно въ своей плоскости, или въ плоскости ей параллельной, и принять тамъ какое угодно положеніе, потому что во первыхъ, можно ее перенести параллельно силамъ въ данную плоскость, такъ чтобы средина плеча рычага упадала въ данную точку, а затѣмъ мы можемъ вращать ее около этой точки, пока не приведемъ ее въ данное положеніе; или наоборотъ, можно ее сначала повернуть на выходъ изъ плоскости, пока силы не будутъ параллельными даннымъ направленіямъ, и потомъ перенести въ данное положеніе.

5. Превращеніе паръ и мѣра ихъ.

Всякая пара (P, — P) (рис. 20) *приложенная къ плечу можетъ быть превращена въ другую пару* (Q, — Q), *дѣйствующую въ ту-же сторону и приложенную къ плечу* BC, *отличающемуся от* AB *съ условіемъ чтобъ*

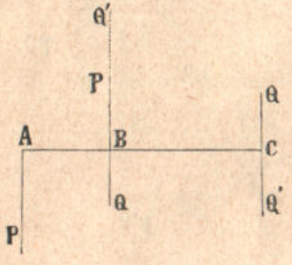


Рис. 20.

$$P : Q = BC : AB$$

или

$$P \times AB = Q \times BC,$$

т. е. *чтобы моменты паръ были равны.*

Для доказательства возьмемъ на продолженіи линіи AB какую нибудь часть BC и приложимъ къ ней параллельно силамъ P, и — P, двѣ пары (Q, — Q) (Q′ и — Q′) равныя и противоположныя; дѣйствіе этихъ паръ будетъ равно нулю, а слѣдовательно дѣйствіе пары не (P, — P) измѣнится.

Съ другой стороны предположимъ, что силы P, Q, а слѣдовательно и силы P, Q′, обратно пропорціональны линіямъ AB и BC, то равнодѣйствующая ихъ, равная P + Q′, пройдетъ чрезъ B, и уничтожитъ противоположныя силы — P и — Q′. Слѣдовательно можно уничтожить четыре силы P, Q′, — P, — Q′; при чемъ останется одна только пара (Q, — Q) приложенная къ BC, замѣняющая данную пару (P, — P) приложенную къ AB.

Изъ предъидущаго можно вывести то заключеніемъ, что усилія паръ пропорціональны ихъ моментамъ.

Дѣйствительно, двѣ пары (P, — P) и (Q, — Q) (рис. 21) приложенныя къ равнымъ плечамъ AB и CD, относятся между собою какъ ихъ силы P и Q, потому что если предположить, что силы относятся между собою какъ цѣлыя числа, напримѣръ как 5 и 3, то раздѣляя каждую изъ силъ P и — P на 5 равныхъ частей, а каждую изъ силъ Q и — Q на 3 части, равныя между собою и первымъ, мы можемъ разсматривать пару (P, — P) какъ сумму 5 равныхъ паръ,

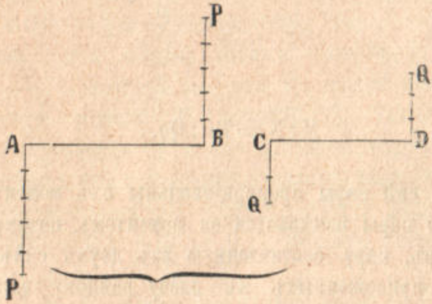


Рис. 21.

дѣйствующихъ въ ту же сторону и приложенныхъ одна къ другой, а (Q, — Q) какъ сумму 3 паръ равныхъ между собою и первымъ, и приложенныхъ также одна къ другой. Слѣдовательно усилія паръ (P, — P) и (Q, — Q) будутъ относиться какъ 5 къ 3, или какъ P къ Q.

Возьмемъ какія нибудь двѣ пары (P, — P) и (Q, — Q); при чемъ p будетъ плечо первой пары, а q плечо второй; пара (Q, — Q) дѣйствующая на линію q будетъ равна парѣ

$$\left(\frac{q}{p}\,Q - \frac{q}{p}\,Q\right),$$

которая дѣйствуетъ на линію p, потому что моменты ихъ

$$Qq \text{ и } \frac{q}{p} Q \cdot p = Qq,$$

равны между собою.

И такъ вмѣсто двухъ данныхъ паръ мы получимъ слѣдующія:

$$(P, -P) \text{ и } \left(\frac{q}{p} Q, -\frac{q}{p} Q\right),$$

приложенныя къ тому плечу p. Но усилія M и N этихъ двухъ паръ, относятся какъ силы, составляющія эти пары; слѣдовательно будетъ:

$$M : N = P : \frac{q}{p} Q$$

или:

$$M : N = Pp : Qq.$$

Такъ какъ двѣ пары пропорціональны ихъ моментамъ, то слѣдовательно усиліе пары измѣряется ея моментомъ, потому что, принявъ за единицу паръ, пару составленную изъ двухъ силъ равныхъ единицѣ силъ и приложенныхъ къ плечу равному единицѣ линейной мѣры, то пара $(P, -P)$, приложенная къ плечу рычага p, будетъ содержать въ себѣ столько разъ единицу паръ, сколько моментъ $P \times p$ содержитъ въ себѣ разъ моментъ 1×1, т. е. единицу.

Для сравненія между собою усилій паръ, можно взять вмѣсто произведеній Pp, Qq силъ на прямоугольныя плечи, произведенія тѣхъ же силъ на плечи наклонныя къ ихъ направленіямъ. При этомъ необходимо, чтобы для всѣхъ паръ плечи составляли съ силами тотъ-же уголъ, тогда всѣ наклонныя плечи будутъ пропорціональны прямоугольнымъ плечамъ, а слѣдовательно и моменты принадлежащіе этимъ плечамъ будутъ также пропорціональны моментамъ при плечахъ прямоугольныхъ.

6. Сложеніе паръ, находящихся въ одной плоскости или въ плоскостяхъ параллельныхъ.

Теорема. *Двѣ пары, лежащія въ одной плоскости или въ двухъ параллельныхъ плоскостяхъ, слагаются въ одну пару равную ихъ суммѣ, если онѣ стремятся вращать систему въ одну сторону, и равную ихъ разности, если онѣ стремятся повернуть систему въ разныя стороны.*

Для доказательства можно сначала перенести двѣ данныя пары въ одну плоскость, затѣмъ, силы можно сдѣлать параллельными между собою; наконецъ замѣнить двумя другими равными парами, имѣющими одно и то-же плечо и тогда приложить одну пару къ другой.

Положимъ, P и Q будутъ силы составляющія данныя пары, p и q ихъ плечи; и D длина плеча общаго обѣимъ превращеннымъ парамъ. Вмѣсто пары $(P, -P)$, которой моментъ Pp можно подставить пару $(P', -P')$, имѣющую моментъ $P'D$ равный Pp. Также точно пару $(Q, -Q)$, имѣющую моментъ Qq можно замѣнить парою $(Q' - Q')$ съ моментомъ $Q'D = Qq$; и эти двѣ преобразованныя пары, имѣющія одно и тоже плечо, будучи приложены одна къ другой дадутъ равнодѣйствующую пары $[(P' + Q') - (P' + Q')]$, моментъ которой будетъ:

$$(P' + Q')D, \text{ или } P'D + Q'D = Pp + Qq.$$

Такимъ образомъ, моментъ равнодѣйствующей пары будетъ равенъ или суммѣ моментовъ паръ составляющихъ, или разности, смотря по тому, будутъ ли силы P' и Q' приложенныя къ одному изъ концовъ плеча D дѣйствовать въ одну сторону или въ стороны противоположныя.

Отсюда понятно, что сколько бы ни было паръ и какъ бы ни были онѣ расположены въ одной и той же плоскости или въ плоскостяхъ параллельныхъ, всегда можно, соединяя ихъ по двѣ или замѣнить одною парою равною суммѣ тѣхъ изъ данныхъ паръ, которыя стремятся произвести вращеніе въ одну сторону безъ суммы тѣхъ паръ, которыя стремятся вращать въ сторону противоположную. Также обратно, данную пару можно разложить на нѣсколько паръ, находящихся съ ней въ одной плоскости или въ плоскостяхъ параллельныхъ. Можно даже взять произвольно всѣ пары, исключая одной, потому что достаточно выполнить одно только условіе, чтобы сумма паръ дѣйствующихъ въ одну сторону безъ суммы паръ противоположныхъ равнялась бы данной парѣ.

7. Сложеніе паръ, находящихся въ разныхъ плоскостяхъ.

Теорема. *Двѣ пары лежащія въ двухъ различныхъ плоскостяхъ, пересѣкающихъ подъ какимъ угодно угломъ слагаются въ одну пару.*

Если мы изобразимъ моменты составляющихъ паръ чрезъ

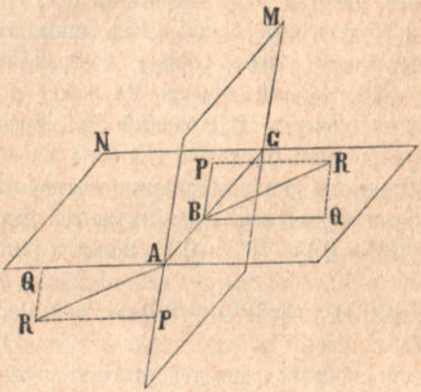


Рис. 22.

длины двухъ линій, проведенныхъ подъ угломъ равнымъ наклоненію плоскостей, и построимъ параллелограмъ, взявъ эти линіи за его стороны, то моментъ равнодѣйствующей пары будетъ представленъ діагональю этого параллелограмма; плоскость этой пары раздѣлитъ уголъ наклоненія плоскостей составляющихъ паръ также, какъ діагональ параллелограма дѣлитъ уголъ между двумя прилежащими сторонами.

Положимъ, что данныя пары лежатъ въ плоскостяхъ AGM и AGN (рис. 22) пересѣкающихся по AG, и положимъ, что мы замѣнили эти двѣ пары двумя другими, соотвѣтственно имъ равными и имѣющими равныя плечи. Тогда гдѣ бы ни находилась пара (P, — P) въ плоскости AGM всегда можно ее перенести такъ, чтобы ея плечо AB падало на пересѣченіе AG, а силы ея были-бы перпендикулярны къ этому пересѣченію. Также точно парѣ (Q, — Q), въ той-же плоскости можно дать такое положеніе, чтобы ея силы были перпендикулярны къ пересѣченію AG, а плечо ея, равное первому, совмѣщалось бы съ AB.

Тогда двѣ силы P и Q, приложенныя къ A, сложатся въ одну R, приложенную къ той же точкѣ A, которая будетъ діагональю AR параллелограма, построеннаго на двухъ линіяхъ AP AQ, представляющихъ силы P и Q. Двѣ силы — P′ и — Q сложатся также въ одну — R, приложенную къ B, равную, параллельную и противоположную къ первой силѣ R; тогда вмѣсто двухъ паръ (P, — P) и (Q, — Q, мы получимъ одну пару (R, — R). приложенную къ плечу AB.

Такъ какъ три пары, двѣ данныя, а третья ихъ равнодѣйствующая, имѣютъ общее плечо, то моменты ихъ будутъ пропорціональны величинамъ силъ P, Q и R. Если принять, что моменты двухъ составляющихъ паръ пропорціональны линіямъ AP и AQ, то моментъ равнодѣйствующей имъ пары выразится діагонально AR, параллелограмма APRQ, построеннаго на этихъ линіяхъ. Очевидно, что углы, между линіями AP, AQ и AR измѣряютъ углы, составляемые тремя плоскостями паръ; а потому и плоскость равнодѣйствующей пары раздѣляетъ уголъ между плоскостями составляющихъ паръ, какъ діагональ AR параллелограмма APQR раздѣляетъ уголъ PAQ между сторонами его AP и AQ.

Слѣдовательно, можно какое угодно число паръ, приложенныхъ къ твердому тѣлу соединить въ одну, потому что, по предъидущему, соединяя пары по двѣ, необходимо дойдемъ до одной пары, замѣняющей всѣ прочія и притомъ величина и положеніе плоскости этой пары будутъ извѣстны.

Также точно можно наоборотъ, всегда разложить пару на двѣ другія, лежащія въ двухъ данныхъ плоскостяхъ, пересѣкающихся съ плоскостью данной пары по одной прямой линіи, или по прямымъ параллельнымъ, потому что перенесеніе плоскости одной изъ этихъ паръ, параллельно самой себѣ, мы можемъ сдѣлать такъ, что пересѣченіе трехъ плоскостей совмѣстится.

Для того чтобы произвести это разложеніе, необходимо или слѣдовать въ обратномъ порядкѣ данному правилу для соединенія двухъ паръ; или-же употребить нижеслѣдующій простой способъ, который намъ будетъ весьма полезенъ и впослѣдствіи.

Положимъ AZ (рис. 23) будетъ общее пересѣченіе трехъ плоскостей; проведемъ произвольно четвертую плоскость YAX, пересѣкающую три предъидущія по прямымъ AY, AV, AX и пусть будетъ ZAV плоскость данной пары.

Но, какъ-бы пара (P, — P) ни лежала въ плоскости ZAV, всегда можно ее перенести такъ, что силы ея будутъ параллельны пересѣченію AZ, а направленіе одной изъ нихъ, напримѣръ силы — P, совмѣстится съ этимъ пересѣченіемъ. Тогда направленіе другой силы P встрѣтитъ прямую AV гдѣ-нибудь въ точкѣ B и мы получимъ пару (P, — P), приложенную къ наклонному плечу AB, какъ это видно на нашемъ рисункѣ. Затѣмъ, принимая AB за діагональ, построимъ на направленіяхъ AY и AX параллелограммъ BCAD и къ одному изъ угловъ его C или D; положимъ къ D, приложимъ двѣ противоположныя силы P′,—P′, равныя и параллельныя силамъ P и —P данной пары, отчего дѣйствіе этой пары не перемѣнится. Вмѣсто пары (P, — P), приложенной къ діагонали AB, можно разсматривать двѣ другія пары: одну (P′, —P), приложенную къ сторонѣ AD въ данной плоскости ZAY; другую (P, — P′), приложенную къ BD параллельно другой данной плоскости ZAX. Эта пара можетъ быть перенесена параллельно самой себѣ въ плоскость ZAX. и приложена къ AC = BC; тогда получимъ вмѣсто пары (P, — P), приложенной къ діагонали AB, двѣ пары (P′, — P), (P, — P′), составленныя изъ силъ равныхъ и параллельныхъ первымъ и приложенныхъ къ сторонамъ AB и AC въ двухъ данныхъ плоскостяхъ.

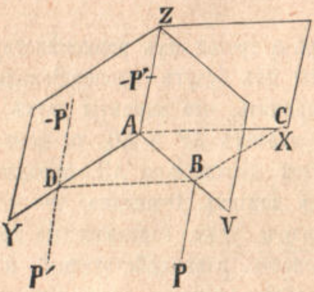


Рис. 23.

Если-бы мы предположили, что плоскость YAX проведена перпендикулярно къ общему пересѣченію AZ плоскостей трехъ паръ, то силы этихъ трехъ паръ были перпендикулярны къ линіямъ YA, AV, AX; а такъ какъ силы равны, то моменты паръ пропорціональны ихъ плечамъ AD, AB, AC; словомъ, мы пришли-бы къ предъидущей теоремѣ и имѣли-бы новое для нее доказательство.

Это двойное доказательство теоремы происходитъ отъ того, что можно прежде соединенія двухъ паръ, превращать ихъ двумя различными способами. По первому, онѣ будутъ имѣть, при томъ-же плечѣ, различныя силы, а по-второму, при тѣхъ же силахъ, различныя плечи.

Эту же теорему можно доказать безъ всякихъ измѣненій въ двухъ данныхъ парахъ. Если (P, — P) и (Q, — Q) (рис. 24) будутъ двѣ пары, приложенныя перпендикулярно къ плоскости треугольника къ плечамъ AB, AC и положимъ, что силы P и Q дѣйствующія въ B и C, направлены въ одну сторону, тогда эти двѣ силы сложатся въ одну P + Q, дѣйствующую съ ними въ одну сторону и приложенную къ точкѣ q, раздѣляющей основаніе BC на двѣ части обратно пропорціональныя силамъ P и Q. Двѣ силы — P и — Q, дѣйствующія на точку A, сложатся въ одну — (P + Q), приложенную къ A, и если, для краткости, положимъ, что P + Q = R, то получимъ равнодѣйствующую пару (R, — R) приложенную къ Aq въ плоскости перпендикулярной къ треугольнику ABC.

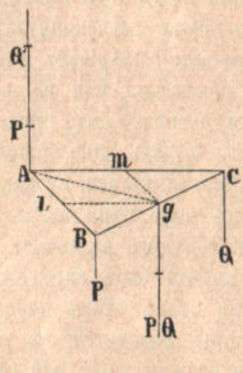


Рис. 24.

Затѣмъ, если черезъ точку q проведемъ линіи параллельныя сторонамъ AB и AC, то составится параллелограммъ Algm, и тогда мы можемъ доказать, что моменты нашихъ трехъ паръ т. е.

$$P \times AB;\ Q \times AC,\ R \times Ag$$

относятся между собою какъ стороны Al, Am и діагональ Ag параллелограмма Algm, потому что если подставивъ вмѣсто силъ P, Q, R пропорціональныя имъ линіи Cg, Bg, BC, то моменты паръ будутъ относиться, какъ произведенія

$$Cg \times AB,\ Bg \times AC,\ BC \times Ag.$$

Но, изъ подобія треугольниковъ имѣемъ, что:

$$Cg \times AB = BC \times Al \text{ и } Bg \times AC = BC \times Am;$$

подставляя эти два произведенія на мѣсто двухъ первыхъ и, сокративъ на общаго множителя BC, получимъ, что наши три момента относятся между собою какъ линіи Al, Am и Ag, что и требовалось доказать.

Переходимъ къ другому, болѣе простѣйшему способу выраженія теоремъ, относящихся къ сложенію паръ.

Положеніе пары можно опредѣлить не только чрезъ ея плоскость, но чрезъ прямую перпендикулярную къ этой плоскости и которую принято называть *осью пары*. Такъ какъ пара можетъ быть приложена въ своей плоскости, или во всякой другой плоскости ей параллельной, то очевидно, что положеніе пары въ пространствѣ опредѣлится, если будетъ дано направленіе ея оси, потому что плоскость перпендикулярная къ оси, въ какой-бы точкѣ она эту линію не встрѣтила, можетъ быть принята за плоскость данной пары.

Такимъ образомъ различное положеніе параллельныхъ между собою паръ можетъ быть опредѣлено одною прямою линіею, перпендикулярною ко всѣмъ этимъ парамъ, которая будетъ общею ихъ осью.

Если пары находятся въ различныхъ плоскостяхъ, то для простоты предположимъ, что всѣ онѣ перенесены въ плоскости имъ параллельныя, проведенныя чрезъ ту же точку A, взятую произвольно въ пространствѣ, и которая поэтому будетъ общимъ центромъ всѣхъ паръ. Если чрезъ эту точку проведемъ линіи перпендикулярныя ко всѣмъ перенесенымъ парамъ, то различныя положенія этихъ паръ опредѣлятся направленіемъ прямыхъ линій, которыя всѣ пройдутъ чрезъ точку A, образуя между собою такіе-же углы, какъ и между плоскостями данныхъ паръ.

Кромѣ того, если отъ точки A, по направленіямъ осей паръ, отложимъ длины линій AL, AM, AN, пропорціональныя моментамъ паръ, которыя означимъ здѣсь просто буквами L, M, N, то каждая изъ линій, напримѣръ AL представитъ одновременно ось и величину соотвѣтствующей ей пары L.

Наконецъ, если желаемъ, чтобы та же линія AL означала и *сторону*, въ которую соотвѣтствующая пара дѣйствуетъ, что необходимо для полнаго опредѣленія пары, то достаточно сдѣлать условіе совершенно подобное тому, какое мы употребили для простыхъ силъ. Это условіе для простой силы P, приложенной къ точкѣ A и выраженной нѣкоторою линіею AP, состоитъ въ томъ, что дѣйствіе силы всегда направлено отъ A къ P, или что сила тянетъ отъ A къ P. Здѣсь для пары L, приложенной около центра A, которой ось и величена представлены опредѣленною линіею AL, предположимъ на всегда, что сторона ея дѣйствія или вращенія, которое она стремится произвести—такова, что если-бы мы поставили себѣ въ точкѣ L, принимаемой за сѣверъ и смотрѣли-бы прямо на точку A, принимаемую за югъ, то пара стремилась-бы произвести вращеніе отъ востока къ западу, или отъ лѣвой руки къ правой, подобмо видимому движенію солнца. Такимъ образомъ дѣйствіе пары, выраженной линіею AL, будетъ происходить отъ лѣвой руки къ правой, около этой линіи.

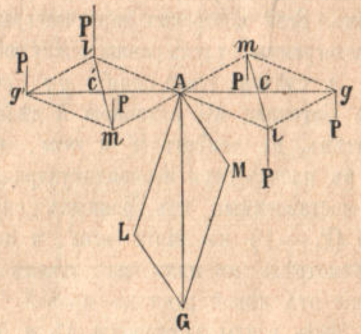


Рис. 25.

Можно принять и противное условіе, лишь-бы только оно сохранилось при разсматриваніи всѣхъ паръ, данныхъ на чертежѣ, или содержаніемъ теоремы.

Тѣмъ не менѣе очевидно, что одно изъ этихъ условій, напримѣръ первое, для насъ достаточно; потому что если-бы нужно было обозначить на рисункѣ пару L противоположную парѣ L′, то мы ее выразили-бы линіею AL на продолженіи линіи AL′, но только по другую сторону точки A. Понятно, что пара L′, разсматриваемая съ точки L′, производитъ вращеніе въ принятую сторону, т. е. отъ правой руки къ лѣвой, слѣдовательно дѣйствіе ея противоположно дѣйствію первой пары L.

Такой способъ опредѣленія положеній паръ и сторонъ ихъ дѣйствій показываетъ, что геометрическое изображеніе произвольнаго числа паръ, приложенныхъ къ тѣлу, въ какихъ угодно плоскостяхъ, совершенно подобное тому, которое употребляется для простыхъ силъ, приложенныхъ къ одной точкѣ. Можно доказать, что сложеніе паръ выражается законами совершенно подобными законамъ сложенія силъ, что видно изъ слѣдующей теоремы, которую можно назвать *параллелограмомъ паръ.*

Теорема. *Если оси и величины двухъ паръ* L *и* M, *представлены двумя сторонами* AL *и* AM *параллелограмма* ALGM, *то эти двѣ пары сложатся въ одну пару* G, *которой ось и величина выразится діагональю* AG *того-же параллелограмма.*

Черезъ точку A, лежащую въ плоскости параллелограма ALMG (рис. 25) проведемъ двѣ линіи ll' и mm' перпендикулярныя и пропорціональныя сторонамъ AL и AM, и которыя точкою A дѣлятся пополамъ. Если построимъ параллелограмы A lgm и A $l'g'm'$, то эти параллелограммы будутъ равны между собою и подобны параллелограмму ALGM, а слѣдовательно линія gg' перпендикулярна и пропорціональна діагонали AG и точкою A дѣлится пополамъ.

Затѣмъ, къ линіямъ ll' и mm', какъ плечамъ рычага, приложимъ въ плоскостяхъ перпендикулярныхъ къ плоскости фигуры, двѣ пары составленныя изъ равныхъ силъ (P, — P) къ линіи ll', а другую (P, — P) къ линіи mm', и положимъ, что эти двѣ пары, когда смотрѣть на нихъ изъ точекъ L и M стремятся произвести вращеніе отъ лѣвой руки къ правой. Понятно, что эти двѣ пары могутъ быть взяты за стороны AL и AM параллелограмма ALGM, потому что онѣ находятся въ плоскостяхъ перпендикулярныхъ къ этимъ сторонамъ, моменты ихъ пропорціональны этимъ сторонамъ. Эти двѣ пары слагаются въ одну представленную діагональю AG; силы P и P, приложенныя къ точкамъ l и m слагаются въ одну 2P, параллельную, имъ дѣйствующую съ ними въ одну сторону и приложенную къ точкѣ c, срединѣ линіи Ag. Также точно силы — P и — P, приложенныя въ l' и m', слагаются въ одну — 2P, приложенную въ точкѣ c', срединѣ линіи Ag'. Мы получимъ равнодѣйствующую пару (2P,—2P), приложенную къ линіи cc', или пару (P,—P) приложенную къ удвоенной линіи gg'. Эта пара, перпендикулярна и пропорціональна діагонали AG, и разсматриваемая изъ точки G производитъ также вращеніе отъ лѣвой руки къ правой

Изъ этого видно, что равнодѣйствующая двухъ паръ, находящихся въ плоскостяхъ пересѣкающихся, т. е. непараллельныхъ, никогда не можетъ быть равна нулю, если, по крайней мѣрѣ, обѣ пары не уничтожаются.

Если плоскости двухъ составляющихъ паръ перпендикуляры между собою, то и оси ихъ AL и AM также перпендикулярны между собою, и въ прямоугольникѣ ALGM будемъ имѣть:

$$AG^2 = AL^2 + AM^2.$$

Обозначивъ чрезъ α и β углы составляемые діагональю AG со сторонами AL и AM получимъ:

$$AL = AG \operatorname{Cos} \alpha, \quad AM = AG \operatorname{Cos} \beta.$$

Если моменты трехъ паръ назовемъ соотвѣтственно буквами L, M, G, тогда для момента G будетъ:

$$G^2 = L^2 + M^2$$

откуда:

$$G = \sqrt{L^2 + M^2};$$

а для угловъ α и β составляемыхъ осью момента G съ осями моментовъ L и M, найдемъ:

$$L = G.\operatorname{Cos} \alpha, \text{ и } M = G.\operatorname{Cos} \beta;$$ cos

откуда

$$\operatorname{Cos} \alpha = \frac{L}{G}; \quad \operatorname{Cos} \beta = \frac{M}{G}.$$

Вообще, если назовемъ чрезъ φ уголъ заключающійся между двумя составляющими парами, или ихъ осями AL и AM, то изъ параллелограмма ALGM, получимъ:

$$AG^2 = AL^2 + AM^2 + 2AL \times AM \operatorname{Cos} \varphi,$$

слѣдовательно:

$$G^2 = L^2 + M^2 + 2LH \operatorname{Cos} \varphi.$$

Это даетъ намъ равнодѣйствующую пару G въ функціи составляющихъ L и M и угла φ, заключающагося между ними.

Если уголъ $\varphi = 0$, то $\cos\varphi = 1$; тогда будетъ:

$$G = L + M,$$

т. е. что пары находящіяся въ одной плоскости и дѣйствующія въ туже сторону, слагаются въ одну, равную ихъ суммѣ.

Если же уголъ φ равенъ двумъ прямымъ, то $\cos\varphi = -1$, тогда:

$$G = L - M,$$

въ этомъ случаѣ пары дѣйствуютъ въ стороны противоположныя, а потому слагаются въ одну, равную ихъ разности.

Когда уголъ φ прямой, то $\cos\varphi = 0$, и тогда:

$$G = \sqrt{L^2 + M^2}.$$

Отъ сложенія двухъ паръ легко перейти къ сложенію произвольнаго числа паръ, совершенно подобно тому, какъ мы говорили относительно соединенія силъ, приложенныхъ около одной точки.

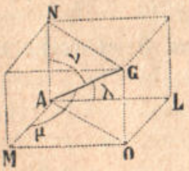


Рис. 26.

Теорема. *Три пары, которыхъ оси и величины выражены тремя смежными ребрами параллелопипеда, слагаются въ одну пару, которой ось и величина выражаются діаганалью этого параллелепипеда.*

Пусть (рис. 26) A...... C будетъ параллелопипедъ, AL, AM, AN его ребра, которыя представляютъ оси и моменты трехъ данныхъ паръ.

Двѣ пары, выраженныя сторонами AL и AM параллолограмма ALOM, слагаются въ одну пару, ось и величина которой будетъ діаганалью AO параллелограмма. Теперь эта пара и третья, представленная чрезъ AN, слагаются въ одну, выраженную діагональю AG параллелограмма ANGO, которая, въ то-же время будетъ діагональю параллелопипеда.

Отсюда видно, что если три пары дѣйствуютъ въ трехъ плоскостяхъ, составляющихъ трехгранный уголъ или пересѣкающихся въ одной точкѣ, то равнодѣйствующая пара ихъ будетъ равна нулю только тогда, когда каждая изъ трехъ составляющихъ паръ порознь равна нулю.

Если параллелопипедъ будетъ прямоугольный, то называя буквами L, M, N составляющія моменты, а чрезъ G равнодѣйствующій моментъ, получимъ:

$$G^2 = L^2 + M^2 + N^2.$$

Означая чрезъ λ, μ, ν три угла, которые діагональ, или ось равнодѣйствующей дѣлаетъ съ тремя осями составляющихъ паръ, получимъ:

$$L = G. \operatorname{Cos} \lambda, \; M = G \operatorname{Cos} \mu, \; N = G \operatorname{Cos} \nu;$$

откуда:

$$\operatorname{Cos} \lambda = \frac{L}{G}, \;\; \operatorname{Cos} \mu = \frac{M}{G}, \;\; \operatorname{Cos} \nu = \frac{N}{G}.$$

Слѣдовательно, чтобы вычислить равнодѣйствующій моментъ G трехъ составляющихъ моментовъ L, M, N, которыхъ оси взаимно перпендикулярны, то величина его будетъ,

$$G = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2},$$

а углы λ, μ, ν, составляемые его осью съ тремя осями составляющихъ моментовъ, получатся изъ уравненій

$$\operatorname{Cos} \lambda = \frac{L}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}.$$

$$\operatorname{Cos} \mu = \frac{M}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}.$$

$$\operatorname{Cos} \nu = \frac{N}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}.$$

Наоборотъ, если бы, требовалось разложить пару G на три другія, лежащія въ трехъ плоскостяхъ взаимно перпендикулярныхъ, или на три пары, которыхъ оси между собою перпендикулярны, то имѣли бы слѣдующія величины для составляющихъ моментовъ:

$$L = G.\ \mathrm{Cos}\,\lambda,\ M = G.\ \mathrm{Cos}\,\mu,\ G = \mathrm{Cos}\,\nu;$$

гдѣ λ, μ, ν углы, составляемые осью данной пары съ осями искомыхъ составляющихъ паръ.

Мы не будемъ болѣе останавливаться на этихъ подробностяхъ, замѣтимъ только, что между семью величинами L, M, N, G, Cos λ и Cos μ существуютъ четыре слѣдующія уравненія:

$$G^2 = L^2 + M^2 + N^2$$

$$L = G.\,\mathrm{Cos}\,\lambda,\ M = G\,\mathrm{Cos}\,\mu,\ N = G\,\mathrm{Cos}\,\nu,$$

посредствомъ которыхъ, зная три изъ этихъ величинъ, можно опредѣлить остальныя четыре за исключеніемъ того случая, въ которомъ извѣстны три угла λ, μ, ν; потому что тогда получили бы только отношенія между моментами L, M, N и G.

8. Общія замѣчанія.

Переходимъ къ общимъ замѣчаніямъ относительно сложенія силъ направленныхъ какъ угодно въ пространствѣ.

Дано нѣсколько силъ $P_{,}$, $P_{,}$, $P_{,,}$, $P_{,,,}$, и приложенныхъ къ тѣлу, или къ свободной системѣ тѣлъ.

Разсмотримъ, сначала, одну изъ этихъ силъ, напримѣръ P (рис. 27), приложенную къ точкѣ B. Затѣмъ, къ точкѣ A, произвольно взятой на тѣлѣ, или внѣ тѣла приложимъ двѣ противоположныя силы $P' - P'$, равныя и параллельныя силѣ P. Отчего система не измѣнится; но можно вмѣсто силы P приложенной къ точкѣ B, разматривать силу P' приложенную къ точкѣ A и пару $(P, -P')$ дѣйствующую на линію AB. Для большей ясности перенесемъ эту пару изъ ея плоскости въ другую ей параллельную плоскость, то въ точкѣ A останется одна только сила P, которая будетъ таже самая сила P, только перенесенная параллельно самой себѣ изъ B въ A.

Если мы, подобно этому, перенесемъ всѣ силы системы въ одну точку A, то онѣ перейдутъ туда параллельно самимъ себѣ, и, кромѣ того, къ системѣ будетъ приложено столько паръ, сколько было перенесено силъ. Всѣ силы приложенныя къ точкѣ A, сложатся въ одну силу R, и всѣ пары происшедшія отъ перенесенія силъ дадутъ одну пару (S, — S) (рис. 28), приложенную къ нѣкоторой прямой BC.

Отсюда слѣдуетъ, что *сколько бы ни было силъ приложенныхъ къ тѣлу всегда онѣ могутъ быть приведены къ одной силѣ и къ одной парѣ, которыя, вообще, будутъ находиться въ различныхъ плоскостяхъ.*

Не мѣшаетъ замѣтить, что величина, направленіе и сторона дѣй-

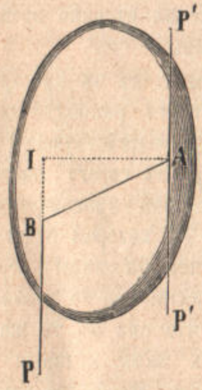


Рис. 27.

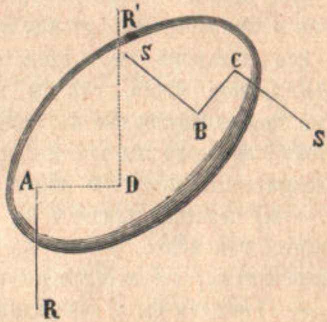


Рис. 28.

ствія равнодѣйствующей R будутъ всегда тѣ-же въ какомъ бы мѣстѣ ни взята была точка A. Измѣняя положеніе этой точки, равнодѣйствующая R будетъ только переноситься параллельно самой себѣ въ различныя мѣста пространства; но плоскость и величина равнодѣйствующей пары (S, — S) будетъ необходимо измѣняться.

Между этими различными проиведеніями силъ къ одной, относительно всѣхъ точекъ A пространства, мы замѣчаемъ другія точки, гдѣ плоскость равнодѣйствующей пары перпендикулярна къ направленію дѣйствующей силы. Это не трудно доказать. По приведеніи всѣхъ силъ къ одной силѣ R и къ одной парѣ (S, — S) относительно извѣстной точки A, положимъ, что пара (S,—S) разложена на двѣ другія: одну (T, — T) въ плоскости перпендикулярной къ направленію равнодѣйствующей, другую (V, — V) проходящую чрезъ это направленіе AR. Если въ плоскости, гдѣ находятся въ одно время и пара (V, — V), и сила R, перенесемъ эту силу параллельно самой себѣ изъ A въ O въ такую сторону и на такое разстояніе AO, что пара (R, — R), происшедшая отъ такого перенесенія, будетъ равна и противоположна парѣ (V, — V), и уничтожится, то остается одна только сила R, приложенная къ новой точкѣ O, и пара (T, — T), лежащая въ плоскости перпендикулярной къ направленію этой силы.

Изъ этого видно, что нѣсколько силъ можно привести къ одной силѣ и къ одной парѣ, плоскость которой будетъ перпендикулярна къ направленію силы, и потому мы всегда имѣемъ въ пространствѣ извѣстную прямую OR, которая въ одно время служитъ и направленіемъ равнодѣйствующей пары.

Это приведеніе будетъ единственнымъ, какъ такъ въ пространствѣ нѣтъ другого мѣста, гдѣ бы могла находиться равнодѣйствующая пара, перпендикулярная къ направленіямъ равнодѣйствующей силы, потому что, если мы хотимъ перенести силу изъ своего настоящаго положенія OR въ какую нибудь сторону, то она произведетъ пару (R, — R) перпендикулярную къ парѣ (T, — T), которая будетъ наибольшая изъ всѣхъ, потому что двѣ составляющія пары перпендикулярны между собою. Отсюда совершенно понятно что не только пара (T, — T) можетъ быть перпендикулярна, но что она въ то же время наименьшая изъ всѣхъ равнодѣйствующихъ паръ, которыя можно найти относительно всѣхъ точекъ пространства. Въ то-же время понятно, что для точекъ взятыхъ около линіи OR, на равныхъ разстояніяхъ отъ нея, равнодѣйствующія пары имѣютъ величины равныя и находятся въ различныхъ плоскостяхъ, равно наклонныхъ къ этой оси OR, которую можно назвать *центральною осью* системы паръ.

Удаляясь отъ этой оси мы найдемъ пары имѣющія наибольшую величину и имѣющія то общее свойство, что каждая изъ нихъ проэктированная на плоскость перпендикулярную къ направленію постоянной силы R дастъ ту-же пару (T, — T); изъ этого видно, что величина этой пары будетъ наименьшая изъ всѣхъ другихъ паръ и можетъ быть найдена если равнодѣйствующую одной изъ паръ умножить на косинусъ ея наклоненія къ плоскости, въ которой она дѣйствуетъ.

Мы не будемъ останавливаться на изложеніи теоріи этой центральной оси, но ограничимся только тѣми главными ея выводами, которыя имѣютъ значеніе въ элементарной статикѣ.

Прежде всего разсмотримъ *законы равновѣсія всякой свободной системы.*

Такъ какъ пару нельзя уравновѣсить никакою простою силою, произвольно направленною въ пространствѣ, то изъ этого слѣдуетъ, что система можетъ быть въ равновѣсіи только тогда, когда равнодѣйствующая R уничтожается сама собою и когда моментъ равнодѣйствующей пары (S, — S) самъ по себѣ равенъ нулю.

Итакъ, *если всѣ силы, приложенныя къ системѣ, будутъ перенесены параллельно самимъ себѣ въ какую нибудь точку системы или пространства, то должны быть между собою въ равновѣсіи; а всѣ пары, произведенныя перенесеніемъ силъ, также должны быть между собою въ равновѣсіи.*

Для равновѣсія какой угодно неизмѣняемой системы, совершенно достаточно предъидущихъ двухъ условій, безъ которыхъ система не можетъ быть въ равновѣсіи, и наоборотъ, если они имѣютъ мѣсто, то система непремѣнно находится въ равновѣсіи.

Для большей ясности этихъ условій, надобно разсмотрѣть величины равнодѣйствующей силы R и равнодѣйствующей пары (S, — S) сохраняя законы, связывающіе первую съ составляющими силами, а вторую съ составляющими парами. Опредѣливъ R и (S, — S) должно приравнять ихъ нулю, черезъ что получимъ отношеніе между данными силами, что дастъ намъ способъ выражать условія равновѣсія посредствомъ уравненій, содержащихъ однѣ данныя силы, при чемъ предложенная задача получитъ надлежащее рѣшеніе.

Переходимъ къ разсмотрѣнію условій, необходимыхъ для того, чтобы силы дѣйствующія на систему, по произвольнымъ направленіямъ, имѣли одну равнодѣйствующую.

Мы уже видѣли, что всѣ силы, приложенныя къ системѣ, могутъ быть приведены къ одной силѣ R и къ одной парѣ (S, — S): полагая, что эта сила и пара замѣнятся одною силою, или, что одна сила R′ удерживаетъ въ равновѣсіи пару (S, — S), и силу R. Такъ какъ двѣ силы R и R′ и пара (S, — S) находятся въ равновѣсіи между собою, то необходимо, чтобы силы R и R′ составляли пару, равную и противоположную парѣ (S, — S), которая находилась бы съ нею въ одной плоскости, или, въ плоскости ей паралельной.

Здѣсь могутъ быть три случая: 1) когда двѣ силы R и R′ слагаются въ одну, и тогда эта сила не можетъ быть въ равновѣсіи съ парою (S, — S); 2) когда силы R и R′ даютъ силу и пару, тогда пара, въ совокупности съ (S, — S), дастъ такую пару, которая не можетъ уравновѣсить силы; наконецъ, 3) когда эти силы составляютъ пару. Послѣдній случай только и будетъ имѣть мѣсто.

Итакъ надо, чтобы силы R, и R′ составляли пару, которая должна быть въ равновѣсіи съ парою (S, — S), для чего необходимо, чтобы онѣ находились въ одной плоскости или въ плоскостяхъ паралельныхъ, иначе эти двѣ пары сложились-бы въ одну, которая никогда не уничтожилась бы, а слѣдовательно не было бы и равновѣсія. Итакъ, направленіе равнодѣйствующей R должно быть паралельно плоскости равнодійствующей пары (S, — S); такимъ образомъ *всѣ силы, приложенныя къ системѣ только тогда могутъ быть замѣнены одною силою, когда по перенесеніи силъ параллельно ихъ направленіямъ въ одну точку и по сложеніи ихъ въ одну равнодѣйствующую, послѣдняя будетъ параллельна плоскости равнодѣйствующей пары, замѣняющей всѣ тѣ пары, которыя произошли отъ перенесенія силъ.*

Условіе это понятное само по себѣ, вполнѣ достаточно въ томъ случаѣ, когда равнодѣйствующая R не равна нулю, потому что мы всегда можемъ къ системѣ приложить силу R′ равную, параллельную и противоположную силѣ R, составляющую съ нею пару (R, — R), дѣйствующую въ противоположную сторону относительно пары (S, — S), съ которою она имѣетъ равный моментъ. Сила R′, взятая въ сторону противоположную, будетъ общая равнодѣйствующая.

Можно непосредственно найти эту равнодѣйствующую, такъ какъ если сила R, приложенная къ A, параллельно плоскости пары (S, — S′), то можно будетъ перенести эту пару въ одну плоскость съ силою R, и тогда три силы R, S и — S, будучи въ одной плоскости, сложатся въ одну равную и параллельную R, которая и будетъ равнодѣйствующая всѣхъ силъ.

Когда сила R равна нулю, равнодѣйствующей не будетъ, потому что въ этомъ случаѣ всѣ силы системы замѣнятся одною парою (S, — S), которая не можетъ быть замѣнена одною силою.

Итакъ, къ предъидущему условію, которое требуетъ, чтобы сила R была параллельна плоскости пары (S, — S), должно еще прибавить, какъ частное условіе, *чтобы сила* R *не была равна нулю*, исключая тотъ случай, когда система находится въ равновѣсіи, тогда равнодѣйствующая сила и равнодѣйствующая пара уничтожаются.

Когда равнодѣйствующая пара (S, — S) и сила R не находятся въ плоскостяхъ параллельныхъ, то также силы не будутъ имѣть равнодѣйствующей (рис. 29). Но, если перенесемъ пару (S, — S) параллельно самой себѣ, тогда можно привести оконечность B или C ея плеча въ точку A, и двѣ силы R и S, приложенныя къ A сложатся въ одну силу S; а слѣдовательно всѣ силы системы приведутся къ двумъ силамъ T и — S, не находящимися въ одной плоскости.

Отсюда понятно, что *произвольное число силъ направленныхъ въ пространствѣ, можно всегда привести къ двумъ силамъ, не находящимся въ одной плоскости.*

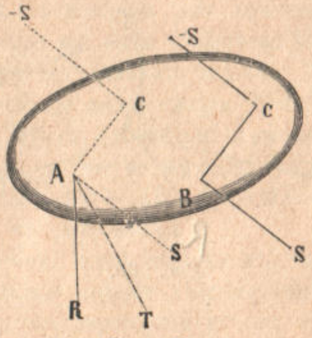


Рис. 29.

Такое приведеніе можетъ быть произведено различными способами и даже тогда, когда точка A, въ которую перенесены всѣ силы, не будетъ перемѣщена, потому что пара (S, — S) можетъ быть измѣнена въ безчисленное множество другихъ равныхъ ей паръ и, кромѣ того, вращаясь около своей оси, можетъ придти въ какое угодно положеніе; мы дойдемъ до множества различныхъ системъ, составленныхъ изъ двухъ силъ, не лежащихъ въ одной плоскости.

Изъ всѣхъ системъ можно отличить ту, въ которой одна изъ силъ перпендикулярна къ плоскости пары, а другая направлена къ этой плоскости, потому что, представивъ себѣ, что сила R разложена на двѣ части: одну V перпендикулярную, другую U параллельную плоскости пары (S, — S), сила U и параллельная ей пара (S, — S) всегда сведутся въ одну силу U′ равную и параллельную U; и всѣ приложенныя силы сведутся на двѣ V и U′, направленія которыхъ въ пространствѣ между собою перпендикулярны.

Итакъ, *всякія силы могутъ быть приведены къ двумъ между собою перпендикулярнымъ силамъ, изъ которыхъ одна проходитъ чрезъ произвольную точку* A.

Изъ предъидущаго можно вывести обратное предложеніе: *что силы, не находящіяся въ одной плоскости, не могутъ имѣть одной равнодѣйствующей.* Такъ какъ, всегда можно предположить, что эти двѣ силы происходятъ отъ третьей силы и пары, которая не была ей параллельна.

Можно наше предложеніе вывести проще. Положимъ, что линія AB (рис. 30) перпендикулярна къ направленіямъ двухъ силъ P и Q, не лежащихъ въ одной плоскости, и что ни одна изъ этихъ силъ не равна нулю. Перенесемъ силу P параллельно самой себѣ изъ B въ A, тогда мы получимъ двѣ силы P′ и Q, приложенныя къ той-же точкѣ A и пару, приложенную къ AB. Но, по положенію, силы P′ и Q составляютъ при точкѣ A уголъ QAP′, слѣдовательно слагаются въ одну силу R, направленную внутри этого угла. Эта сила не можетъ быть параллельна плоскости пары (P, — P′), потому что составляетъ съ нею уголъ RAP′, который не можетъ быть равный нулю, если сила Q не равна нулю, что противно положенію. Итакъ, двѣ силы P и Q, не лежащія въ одной плоскости, не могутъ никогда имѣть одной равнодѣйствующей.

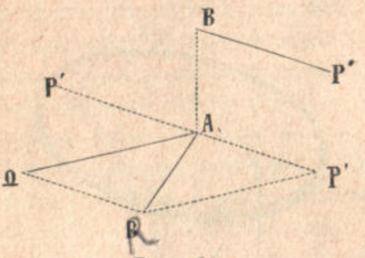


Рис. 30.

Впрочемъ, только въ этомъ случаѣ силы не имѣютъ равнодѣйствующей, потому что разсматривая только ~~эти~~ силы, по нашей теоріи слѣдуетъ, что онѣ могутъ имѣть равнодѣйствующую даже и тогда, когда направленія ихъ не встрѣчаются въ пространствѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ три силы P, Q и R и положимъ, что двѣ изъ нихъ не лежатъ въ одной плоскости, или находятся въ одной плоскости, то третья ни съ первою, ни со второю не была-бы въ одной плоскости.

Возьмемъ двѣ изъ этихъ силъ P и Q, которыя не лежатъ въ одной плоскости и представимъ ихъ перенесенными въ ту-же точку A, взятую на направленіи третьей силы R. Эти двѣ силы P и Q соединятся въ одну V и дадутъ двѣ пары, которыя слагаются въ одну (S, — S), плоскость которой не будетъ проходить чрезъ направленіе AV силы V.

Если равнодѣйствующая двухъ силъ V и R, приложенныхъ къ точкѣ A, находилась-бы въ плоскости пары (S, — S), проходящей чрезъ ту же точку, то три данныя силы P, Q и R могли-бы сложиться въ одну. Не перемѣняя направленія силы R, можно сдѣлать, располагая ея стороною дѣйствія и величиною, чтобы равнодѣйствующая силъ V и R, вращаясь около точки A, въ плоскости этихъ двухъ силъ, направлялась-бы по пересѣченію этой плоскости съ плоскостью пары (S, — S), а потому находилась-бы въ самой плоскости пары. Итакъ, взявъ приличную величину и сторону дѣйствія одной изъ трехъ силъ P, Q и R, неизмѣняя ихъ взаимныхъ положеній, можно, вообще, эти три силы привести къ одной.

Есть, однако, частный случай, въ которомъ это приведеніе не можетъ имѣть мѣста, а именно: когда мы, имѣя извѣстное отношеніе между данными силами P и Q, будемъ измѣнять величину третьей силы R, потому что, если-бы отношеніе между силами P и Q было таково, что пересѣченіе плоскости VAR съ плоскостью пары выражало самое направленіе AR третьей силы, то мы не могли-бы тогда дать равнодѣйствующей силъ V и R направленіе AR, не дѣлая составляющую R равную безконечности, что невозможно.

Но, въ этомъ-же частномъ случаѣ, когда перемѣнимъ отношеніе двухъ силъ P и Q, или просто только сторону дѣйствія одной изъ нихъ, пара (S, — S), происходящая отъ перенесенія ихъ въ точку A, не пройдетъ болѣе черезъ направленіе третьей силы R, потому что, если-бы плоскость пары проходила еще чрезъ ту-же прямую AR, то слѣдовало-бы, что AR есть общее пересѣченіе двухъ плоскостей, въ которыхъ лежатъ пары составляющей (S, — S) и, что слѣдовательно, сила R находится въ той-же плоскости, въ которой и сила P и въ одной плоскости съ силою Q, что противно предположенію.

Итакъ, *когда изъ трехъ силъ* P, Q *и* R, *ни одна не можетъ находиться въ одной плоскости, то всегда можно дать имъ, не измѣняя направленія силъ, такія величины, при которыхъ онѣ приведутся къ одной равнодѣйствующей.*

Мы уже знаемъ, что пара не можетъ быть въ равновѣсіи около неподвижной точки, напримѣръ, около средины своего плеча, однако, нужно замѣтить различіе между равновѣсіемъ силъ, приложенныхъ къ тѣлу, заключающему неподвижную точку и равновѣсіемъ силъ паръ, приложенныхъ къ тому-же тѣлу. Въ первомъ случаѣ нѣтъ необходимости, чтобы равнодѣйствующая силъ была сама по себѣ равна нулю; но достаточно, чтобы она переходила чрезъ неподвижную точку, гдѣ она и уничтожается. Во второмъ,—необходимо, чтобы пары и равнодѣйствующая паръ, приложенныхъ къ тѣлу были равны нулю, какъ и въ томъ случаѣ, если-бы не было въ тѣлѣ вовсе неподвижной точки; потому что если эта пара сама собою не уничтожается, то перенеся ее такъ, чтобы средина плеча упадала на неподвижную точку, увидимъ, что двѣ ея силы не могутъ быть въ равновѣсіи около этой точки.

Также понятно, что эти силы не будутъ находиться въ равновѣсіи, когда въ точкѣ предположимъ неподвижную ось лишь-бы только плоскость пары не проходила чрезъ эту ось, т. е. не была-бы параллельна ея направленію.

Итакъ, *если различныя пары, находящіяся произвольно въ пространствѣ, дѣйствуютъ на тѣло или систему, которая должна вращаться около неподвижной точки, то условія равновѣсія будутъ тѣ-же, какъ и въ случаѣ совершенно свободнаго тѣла.*

ГЛАВА II.

Условія равновѣсія.

Если силы, приложенныя къ твердому тѣлу имѣютъ равнодѣйствующую равную нулю, то онѣ находятся въ равновѣсіи. Силы, находящіяся въ равновѣсіи никакого измѣненія въ состояніи тѣла не производятъ, такъ что если тѣло находилось въ покоѣ, то оно и не выйдетъ изъ этого состоянія, пока силы на него дѣйствующія будутъ въ равновѣсіи.

Всякую силу P (рис. 31), дѣйствующую на систему въ какой-нибудь точкѣ B′, можно преобразовать въ другую силу P′, равную, параллельную, дѣйствующую въ ту-же сторону и приложенную къ другой точкѣ A, произвольно взятой въ пространствѣ и въ пару (P, — P′), приложенную къ AB, которой сила измѣряется моментомъ $P \times AI$; гдѣ AI есть перпендикуляръ, опущенный изъ точки A на направленіе силы P.

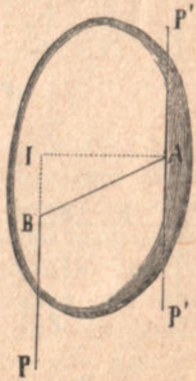


Рис. 31.

Мы знаемъ, что помощію этого способа можно разсматривать систему, какъ бы побуждаемою равнодѣйствующею всѣхъ силъ, перенесенныхъ параллельно самимъ себѣ въ точку A, и равнодѣйствующею всѣхъ паръ, происшедшихъ отъ такихъ преобразованій. Для равновѣсія необходимо, чтобы эта равнодѣйствующая сила и моментъ равнодѣйствующей пары были въ одно время равны нулю.

Не входя въ разсмотрѣніе этихъ двухъ условій, въ общемъ случаѣ, когда на тѣло или систему дѣйствуетъ произвольное число силъ въ пространствѣ и, вывода изъ нихъ условій равновѣсія, которыя можно приложить ко всѣмъ частнымъ случаямъ, разсмотримъ сначала нѣкоторые простые вопросы, а затѣмъ уже приступимъ къ рѣшенію общей задачи. Это даетъ намъ случай показать различныя предложенія относящіяся къ моментамъ, употребленіе которыхъ весьма важно въ статикѣ.

Доказавъ же общую теорему равновѣсія, мы можемъ на ней остановиться, и увидимъ, что она заключаетъ въ себѣ изложенные выше частные случаи.

1. Равновѣсіе параллельныхъ силъ, находящихся въ одной и той же плоскости.

Положимъ, что P, P', P'', P'''.. будетъ (рис. 32) различныя параллельныя силы. Изъ точки A, произвольно взятой на ихъ плоскости, опустимъ перпендикуляръ на ихъ направленія, который пересѣчетъ эти направленія въ точкахъ B, C, D...

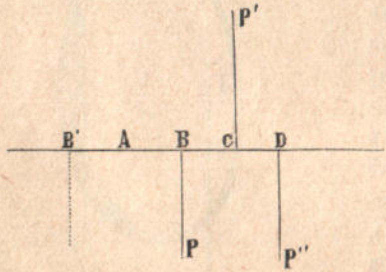


Рис. 32.

Разсмотримъ сначала силу P; къ точкамъ A приложимъ двѣ противоположныя силы P и $-P$, равныя и параллельныя первой; тогда вмѣсто силы P, приложенной въ B получимъ другую силу ей равную и параллельную, приложенную въ A и пару $(P, -P)$, дѣйствующую на AB и имѣющую моментъ равный $P \times AB$. Вмѣсто силы P', приложенной въ точкѣ C, точно также подставимъ силу равную, параллельную, дѣйствующую съ нею въ одну сторону и приложенную въ точкѣ A, и пару $(P', -P')$, приложенную къ AC, съ моментомъ $P \times AC$.

Если мы поступимъ также и съ другими силами P', P'', P''' . . и для большей ясности перенесемъ всѣ пары въ плоскость, отличающуюся отъ плоскости силъ, то въ точкѣ A останутся только силы P, P', P'', . . . равныя и параллельныя первымъ силамъ, приложеннымъ въ B, C, D, дѣйствующія съ ними въ одну сторону.

Мы знаемъ, что для равновѣсія необходимо:

1) Чтобы равнодѣйствующая силъ, приложенныхъ въ точкѣ A, была сама по себѣ равна нулю. Такъ какъ эти силы дѣйствуютъ по одному направленію, то слѣдовательно, равнодѣйствующая будетъ равна ихъ суммѣ; слѣдовательно:

$$P + P' + P'' = 0.$$

Это будетъ первое уравненіе равновѣсія.

2) Чтобы равнодѣйствующій моментъ всѣхъ моментовъ составляющихъ паръ, также былъ самъ по себѣ нуль. Но этотъ равнодѣйствующій моментъ равенъ суммѣ составляющихъ моментовъ, потому что всѣ пары находятся въ одной плоскости. Итакъ, называя для краткости, чрезъ p, p', p'', . . . плечи AB, AC, AD получимъ:

$$Pp + P'p' + P''p'' = 0,$$

т. е. получимъ второе уравненіе равновѣсія.

Если въ первомъ уравненіи, всѣ силы, дѣйствующія въ одну сторону мы будемъ разсматривать какъ положительныя, то силы дѣйствующія въ противоположную сторону необходимо принимать за отрицательныя. Далѣе мы будемъ принимать за положительныя силы, силы дѣйствующія вверхъ относительно линіи AD, какъ напримѣръ сила P', а за отрицательныя тѣ, которыя дѣйствуютъ внизъ отъ линіи AD; таковы силы P, P''. . . . . Такимъ образомъ мы можемъ сказать, что для равновѣсія необходимо, чтобы сумма силъ была равна нулю.

Относительно знаковъ моментовъ Pp, $P'p'$, . . . , во второмъ уравненіи, должно замѣтить: 1) знакъ силы и 2) знакъ плеча.

Положимъ, что сила P перемѣняетъ свой знакъ, не переставая дѣйствовать на линію B'B съ той-же стороны, относительно точки A, то новая пара, которую она произвела въ отношеніи точки A, будетъ противоположна первой, слѣдовательно моментъ Pp тогда мѣняетъ знакъ, когда сила P его перемѣняетъ.

Положимъ, что сила P, не перемѣняя своего знака, дѣйствуетъ на точку B′ съ другой стороны относительно точки A, то очевидно, что новая пара, которую она произведетъ, относительно точки A будетъ дѣйствовать противоположно первой; слѣдовательно моментъ Pp перемѣнитъ знакъ, когда плечо p его перемѣнитъ.

Итакъ, если возьмемъ плечи находящіяся вправо отъ точки A, напримѣръ AB, за положительныя, то плечи находящіяся по лѣвую сторону той-же точки, какъ AB′, будутъ уже отрицательныя, и тогда можно всегда сказать, что давая приличныя знаки силамъ и плечамъ, сумма моментовъ будетъ равна нулю.

Положимъ, что силы $P, P', P''....$ не находятся въ равновѣсіи, но, что онѣ имѣютъ одну равнодѣйствующую R, а слѣдовательно, $-R$ будетъ сила способная произвести равновѣсіе.

Предъидущія два уравненія имѣютъ мѣсто и тогда, когда въ нихъ введемъ силу $-R$.

Тогда получимъ:

$$P + P' + P'' + \ldots - R = 0.$$

Откуда:

$$R = P + P' + P'' + \ldots\ldots$$

т. е., что равнодѣйствующая равна суммѣ составляющихъ силъ, что ужé намъ извѣстно.

Если назовемъ черезъ r разстояніе равнодѣйствующей до точки A, то получимъ:

$$Pp + P'p' + P''p'' + \ldots\ldots - Rr = 0,$$

Откуда:

$$Rr = Pp + P'p' + P''p'' + \ldots\ldots$$

Отсюда видно, что произведеніе равнодѣйствующей на ея разстояніе r до точки A, взятой въ плоскости силъ, равно суммѣ произведеній составляющихъ силъ на разстоянія ихъ до той-же точки.

Раздѣляя послѣднее уравненіе на R, или на ея величину

$$P + P' + P'' + \ldots\ldots$$

получимъ:

$$r = \frac{Pp + P'p' + P''p'' + \ldots}{P + P' + P'' + \ldots}$$

Это выраженіе опредѣляетъ разстояніе равнодѣйствующей отъ точки A, а слѣдовательно мы можемъ знать и ея положеніе, такъ какъ она должна быть параллельна составляющимъ силамъ.

Произведенія Pp, $P'p'$.... обыкновенно называютъ моментами силъ, понимая подъ словомъ *моментъ,* простое произведеніе двухъ чиселъ, изъ которыхъ одно выражаетъ силу, а другое ея разстояніе отъ нѣкоторой точки; мы же понимаемъ моментъ, какъ мѣру извѣстнаго рода силы, а именно какъ мѣру пары происшедшей отъ силы перенесенной параллельно самой себѣ въ разсматриваемую точку. Но какъ здѣсь, такъ и во многихъ другихъ сочиненіяхъ о статикѣ, моментъ означаетъ одну и ту-же численную величину, съ различіемъ только въ понятіи, какое мы имѣемъ о немъ; то мы лучше сохранимъ это слово, вошедшее въ употребленіе, и которое выражаетъ довольно ясно наше понятіе о немъ; потому что латинское слово *momentum,* отъ котораго происходитъ слово *моментъ,* означаетъ также *вѣсъ, силу,* или болѣе точное то, *чему равна сила относительно своей величины и плеча,* къ которому она приложена.

Впрочемъ, когда мы будемъ говорить только о простомъ, численномъ произведеніи силы на ея разстояніе отъ извѣстной точки, отъ нѣкоторой оси перпендикулярной къ силѣ, или отъ плоскости параллельной ея направленію, то будемъ называть также это произведеніе моментомъ силы относительно точки, или оси, или параллельной плоскости. Полагаемъ, что тутъ не можетъ встрѣтиться какое-нибудь недоразумѣніе, потому что можно понимать подъ этимъ произведеніемъ моментъ пары происшедшей отъ перенесенія силы параллельно самой себѣ, въ точку, на ось, или въ плоскость, которую разсматриваемъ. Такимъ образомъ предъидущее уравненіе можно выразить такъ:

$$Rr = Pp + P'p' + P''p'' + \ldots$$

Это и составляетъ извѣстную теорему моментовъ, для параллельныхъ силъ находящихся въ одной плоскости: *Сумма моментовъ произвольнаго числа параллельныхъ силъ, относительно какой-*

нибудь точки взятой въ плоскости силъ, равна моменту ихъ равнодѣйствующей относительно той-же точки.

2. Равновѣсіе параллельныхъ силъ, дѣйствующихъ на различныя точки тѣла, находящагося въ пространствѣ.

Даны $P, P', P'', \ldots$ (рис. 33) различныя параллельныя силы. Проведемъ произвольно двѣ плоскости ZAY и ZAX параллельныя направленіямъ силъ и пересѣкающіяся по прямой AZ, подъ прямымъ угломъ. Теперь разсмотримъ: во-первыхъ силу P приложенную въ B.

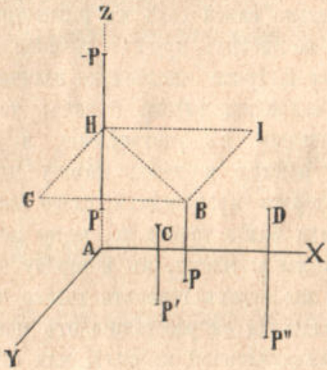


Рис. 33.

Изъ точки приложенія B опустимъ перпендикуляръ BH на общее пересѣченіе AZ, и приложимъ въ H двѣ противоположныя силы P и —P, равныя и параллельныя первой; тогда вмѣсто силы P приложенной къ B, можно разсматривать силу ей равную, параллельную, дѣйствующую съ нею въ ту-же сторону и приложенную въ H, и пару (P, — P), дѣйствующую на BH. Сдѣлаемъ такое-же преобразованіе и для всѣхъ силъ $P', P'' \ldots$ и для большей ясности положимъ, что всѣ пары перенесены, каждая въ плоскость параллельную ея плоскости, то на оси AZ останутся только силы $P, P', P'' \ldots$, равныя и параллельныя первымъ, и дѣйствующія съ ними въ одну и ту-же сторону.

Но, по первому условію равновѣсія необходимо, чтобы равнодѣйствующая всѣхъ силъ сама по себѣ была равна нулю, а такъ какъ всѣ онѣ дѣйствуютъ по той-же прямой, то равнодѣйствующая равна ихъ суммѣ; слѣдовательно:

$$P + P' + P'' + \ldots = 0.$$

Второе условіе равновѣсія требуетъ, чтобы равнодѣйствующій моментъ всѣхъ моментовъ паръ былъ также самъ по себѣ равенъ нулю. Но этотъ моментъ не можетъ быть найденъ чрезъ сложеніе составляющихъ моментовъ, потому что пары не находятся ни въ одной плоскости, ни въ плоскостяхъ параллельныхъ.

Для отысканія этого момента, разсмотримъ во-первыхъ пару $(P, -P)$, которая, положимъ, приведена въ прежнее свое положеніе, т. е. что она приложена къ BH. Изъ точки B опустимъ два перпендикуляра BG и BI на плоскости ZAY и ZAX и построимъ параллелограммъ BGHI, разложимъ пару $(P, -P)$ приложенную къ діагонали BH, на двѣ другія, составленныя изъ силъ равныхъ, но приложенныхъ къ двумъ сторонамъ HI и GH. Называя черезъ x и y эти стороны или равныя имъ линіи BG и BI, данный моментъ $P \times BH$ разложится на два другіе момента Px и Py, находящіеся въ плоскостяхъ ZAX и ZAY.

Если означимъ чрезъ x' и y' два перпендикуляра, опущенные изъ точки приложенія силы P' на эти двѣ плоскости, то моментъ пары $(P', -P')$ разложится на два момента $P'x'$ и $P'y$, находящіеся въ этихъ-же плоскостяхъ и такъ далѣе, для всѣхъ слѣдующихъ паръ.

Но моменты, находящіеся въ плоскости ZAX, сводятся въ одинъ L, равный ихъ суммѣ $Px + P'x' + P''x' + \ldots$, всѣ другіе моменты, находящіеся въ плоскости ZAY сведутся также въ одинъ M, равный ихъ суммѣ $Py + P'y'' + P''y'' \ldots$ наконецъ, эти два равнодѣйствующіе момента слагаются въ одинъ G, который и будетъ общій равнодѣйствующій моментъ, т. е. для равновѣсія необходимо, чтобы $G = 0$.

Такъ какъ два момента L и M находятся въ пересѣкающихся плоскостяхъ, то ихъ равнодѣйствующій моментъ только тогда будетъ равенъ нулю, когда онѣ сами порознь равны нулю; а потому второе общее условіе равновѣсія $G = 0$ требуетъ двухъ равновѣсій: $L = 0$ и $M = 0$, т. е.

$$Px + P'x' + P''x'' + \ldots = 0.$$

$$Py + P'y' + P''y'' + \ldots = 0.$$

Итакъ, мы доказали, что *для равновѣсія системы параллельныхъ силъ необходимы слѣдующія условія: 1) чтобы сумма всѣхъ силъ была равна нулю, 2) чтобы суммы ихъ моментовъ, взятыя относительно двухъ плоскостей параллельныхъ направленій силъ, должны быть для каждой изъ этихъ двухъ плоскостей порознь, равными нулю.*

Въ послѣдущихъ уравненіяхъ мы будемъ принимать тѣ силы за положительныя, которыя дѣйствуютъ снизу вверхъ, а за отрицательныя тѣ, которыя дѣйствуютъ въ сторону противоположную.

Что касается до знаковъ моментовъ, то понятно, что они измѣняются вмѣстѣ съ перемѣною знаковъ при силахъ. Но съ другой стороны, если сила, напримѣръ какъ P, не мѣняя своего знака, будетъ дѣйствовать въ B′, но, по другую сторону плоскости ZAX, то она произведетъ пару, дѣйствующую противоположно первой парѣ; а слѣдовательно, знакъ момента перемѣнится и тогда, когда плечо перемѣнитъ свой знакъ. Слѣдовательно, если мы примемъ точки, находящіяся по одну сторону плоскости за положительныя, то за отрицательныя плечи должно будетъ принять тѣ, которыя находятся по другую сторону той-же плоскости, и потому всегда можно сказать, если дадимъ приличные знаки силамъ и плечамъ, что сумма моментовъ равна нулю.

Положимъ, что силы $P, P', P'', \ldots$ не находятся въ равновѣсіи, но имѣютъ одну равнодѣйствующую R, а слѣдовательно—R будетъ сила, способная произвести равновѣсіе. Тогда предъидущія три уравненія будутъ имѣть мѣсто по введеніи въ нихъ силы—R. Слѣдовательно мы получимъ:

$$R = P + P' + P'' + \ldots$$

уравненіе, которое даетъ величину равнодѣйствующей.

Далѣе, означивъ чрезъ p и q разстоянія этой равнодѣйствующей отъ двухъ плоскостей DAY и ZAX, получимъ:

$$Rp = Px + P'x' + P''x'' + \ldots\ldots$$

$$Rq = Py + P'y' + P''y'' + \ldots\ldots$$

или замѣняя R равною ей величиною, получимъ:

$$p = \frac{Px + P'x' + P''x'' + \ldots.}{P + P' + P'' + \ldots.}$$

$$q = \frac{Py + P'y' + P''y'' + \ldots.}{P + P' + P'' + \ldots.}$$

что даетъ разстоянія равнодѣйствующей отъ двухъ плоскостей и положеніе ея въ пространствѣ; потому что, если проведемъ на этихъ разстояніяхъ двѣ плоскости параллельныя первымъ, то направленіе равнодѣйствующее должно находиться въ одно время на обѣихъ плоскостяхъ, т. е. взаимномъ ихъ пересѣченіи.

Итакъ предъидущія уравненія даютъ два другія, которыя можно выразить такъ:

1) *Сумма моментовъ произвольнаго числа параллельныхъ силъ, относительно какой-нибудь плоскости параллельной ихъ направленіямъ, равна моменту ихъ равнодѣйствующей.*

2) *Разстояніе равнодѣйствующей отъ этой плоскости равно суммѣ моментовъ силъ, раздѣленной на сумму всѣхъ силъ.*

Центръ параллельныхъ силъ. Такъ какъ центръ параллельныхъ силъ находится на направленіи равнодѣйствующей этихъ силъ, то разстояніе этого центра отъ произвольной плоскости параллельной направленіямъ силъ, найдется точно также, какъ и разстояніе равнодѣйствующей отъ этой плоскости, т. е. чрезъ раздѣленіе суммы моментовъ всѣхъ силъ, относительно плоскости, на сумму всѣхъ силъ.

Если необходимо знать разстояніе этого центра отъ какой-нибудь другой плоскости, то положимъ, что силы, не перемѣняя своихъ величинъ, не переставая быть параллельными между собою и проходя чрезъ тѣ-же точки приложенія, вращаются до тѣхъ поръ, пока не сдѣлаются параллельными новой плоскости; тогда, раздѣляя сумму новыхъ моментовъ на сумму всѣхъ силъ, получимъ искомое разстояніе.

Также точно найдемъ разстояніе искомаго центра и отъ третьей плоскости, и если тогда проведемъ три плоскооти, параллельныя тремъ первымъ, центръ силъ будетъ находиться въ этихъ трехъ плоскостяхъ, а слѣдовательно будетъ въ общемъ ихъ пересѣченіи.

Если бы всѣ силы были равны и дѣйствовали бы въ одну сторону, то выраженіе:

$$\frac{Px + P'x' + P''x'' + \ldots}{P + P' + P'' + \ldots}$$

которое даетъ разстояніе центра отъ какой-нибудь плоскости, превратилось бы въ

$$\frac{Px + P_{,}x' + P''x'' + \ldots}{P + P' + P'' + \ldots} = \frac{x + x' + x'' + \ldots}{n};$$

гдѣ n число параллельныхъ силъ.

Слѣдовательно, разстояніе центра параллельныхъ силъ отъ произвольной плоскости будетъ равно суммѣ разстояній всѣхъ точекъ приложенія этихъ силъ, раздѣленной на ихъ число, или равно среднему разстоянію между разстояніями всѣхъ точекъ приложенія. Отсюда видно, что въ случаѣ, когда силы равны, положеніе ихъ центра зависитъ только отъ фигуры, образуемой точками приложенія.

3. Равновѣсіе силъ, дѣйствующихъ въ одной и той-же плоскости по различнымъ направленіямъ.

Пусть будутъ P', P'', P''', ... (рис. 34) различныя силы, находящіяся въ одной плоскости. Изъ какой-нибудь точки А, взятой въ этой плоскости, опустимъ на направленія силъ перпендикуляры AB, AC, AD ...., которые встрѣтятъ ихъ въ точкахъ B, C, D, ..., и назовемъ эти перпендикуляры чрезъ P', P''. P'''......

Но сила P' можетъ быть замѣнена другою, равною, параллельною, дѣйствующею съ нею въ одну сторону и приложенною въ точкѣ А, и парою, моментъ которой будетъ $P' \times AB$ или $P'p'$. Также точно сила P'' можетъ быть замѣнена другою силою, равною, параллельною, дѣйствующею съ нею въ одну сторону и приложенною въ A, и парою, которой моментъ будетъ $P'' \times AC$, или $P''p''$, и такъ далѣе для всѣхъ слѣдующихъ силъ P'''....

Но такъ какъ для равновѣсія необходимо, чтобы равнодѣйствующая всѣхъ силъ, приложенныхъ въ A, была сама по себѣ равна нулю, и чтобы равнодѣйствующій моментъ всѣхъ моментовъ $P'p$, $P''p''$, $P'''p'''$, ..., былъ также самъ по себѣ равенъ нулю. Это послѣднее условіе можно выразить уравненіемъ, потому что всѣ пары, находящіяся въ одной плоскости, слагаются въ одну пару равную ихъ суммѣ, тогда получимъ:

$$P'p' + P''p'' + P'''p''' + \ldots = 0.$$

Для выраженія другаго условія положимъ, что каждая изъ силъ P', P'', P''' ..., приложенныхъ въ A, разложена на двѣ другія по

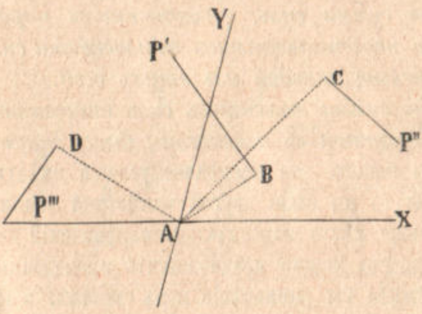


Рис. 34.

направленіямъ какихъ-нибудь линій AX и AY, которыя пересѣкаются въ A и проведенныхъ въ плоскости силъ. Назовемъ чрезъ X' и Y' двѣ составляющія силы P', направленныя по осямъ AX и AY; также чрезъ X'', Y'', X''', Y''' .... соотвѣтствующія составляющія другихъ силъ P'', P''' ..., направленныхъ по тѣмъ-же осямъ. Всѣ силы X', X'', X''' ..., направленыя по той-же прямой AX, сложатся въ одну $X = X' + X'' + X'''$ .... Точно также силы Y', Y'', Y''' .... сложатся въ одну: $Y = Y' + Y'' + Y''' + \ldots$

Эти двѣ частныя равнодѣйствующія дадутъ одну R. которая и будетъ общая равнодѣйствующая. Итакъ для равнодѣйствія нужно, чтобы $R = 0$. Но двѣ силы X и Y, дѣйствующія по двумъ пересѣкающимся линіямъ, могутъ имѣть равнодѣйствующую равною нулю только тогда, когда обѣ порознь равны нулю. Слѣдовательно, условіе $R = 0$ требуетъ двухъ уравненій: $X = 0$ и $Y = 0$; т. е.

$$X' + X'' + X''' + \ldots = 0,$$

$$Y' + Y'' + Y''' + \ldots = 0.$$

Такъ какъ силы P', P'', P''' ..., приложенныя къ точкѣ A, совершенно равны и параллельны первоначальнымъ силамъ, приложеннымъ къ плоскости, то и величины составляющихъ X', Y', X'', Y'', X''', Y''' .... равны тѣмъ, которыя мы могли бы получить, разлагая каждую ихъ первоначальныхъ силъ P', P'', P''', ... въ своемъ мѣстѣ. Слѣдовательно, условія равновѣсія между произвольнымъ числомъ силъ, находящихся въ одной плоскости, будутъ:

1-е. *Чтобы сумма силъ, разложенныхъ параллельно двумъ осямъ, взаимно пересѣкающимися въ плоскости силъ, была равна нулю относительно каждой изъ этихъ осей.*

2-е. *Чтобы сумма моментовъ силъ относительно какой ни на есть точки взятой въ плоскости, была также равна нулю.*

Если бы мы нашли, что послѣднее условіе имѣетъ мѣсто относительно какой бы то ни было другой извѣстной точки, и что два первые имѣютъ также мѣсто относительно направленій двухъ извѣстныхъ осей, которыя всегда можно предположить проведенными чрезъ ту-же точку, то мы имѣли бы равновѣсіе и въ системѣ; а такъ какъ равновѣсіе существуетъ, то тѣ-же самыя условія имѣли бы мѣсто для всѣхъ возможныхъ осей, взятыхъ въ плоскости силъ.

Если силы P', P'', P'''.... не находятся въ равновѣсіи между собою, то онѣ могутъ быть приведены къ одной силѣ R, тогда $-R$ будетъ сила, способная произвести равновѣсіе. Слѣдовательно, по введеніи силы $-R$ въ предъидущее уравненіе моментовъ, оно должно имѣть мѣсто.

Итакъ, означивъ чрезъ r разстояніе этой силы отъ точки A, мы получимъ уравненіе:

$$-Rr + P'p' + P''p'' + P'''p''' + \ldots = 0,$$

или:

$$Rr = P'p' + P''p'' + P'''p''' + \dots$$

т. е., что *моментъ равнодѣйствующей, относительно какой либо точки, взятой на плоскости силъ, равенъ суммѣ моментовъ составляющихъ относительно той-же точки,* что даетъ намъ извѣстную теорему моментовъ.

Если-бы точка, относительно которой были взяты моменты, и которую, обыкновенно, называютъ *центромъ моментовъ,* находилась на направленіи равнодѣйствующей R, то разстояніе r было-бы равно нулю, а слѣдовательно и моментъ Rr былъ-бы, также равенъ, нулю т. е.

$$P'p' + P''p'' + P'''p''' + \dots = 0.$$

Итакъ, *сумма моментовъ произвольнаго числа силъ, находящихся въ одной плоскости, относительно точки, взятой произвольно на направленіи равнодѣйствующей, равна нулю.*

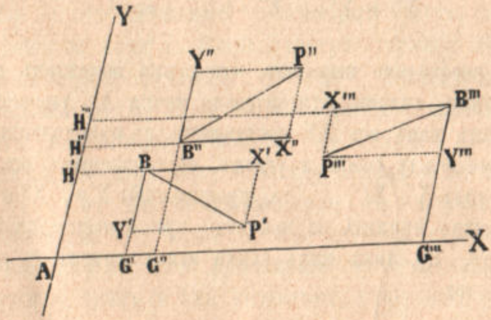


Рис. 35.

Въ послѣднемъ уравненіи, которое выражаетъ второе общее условіе равновѣсія, надо всегда отличать моменты паръ, дѣйствующихъ въ одну сторону отъ тѣхъ паръ, которыя дѣйствуютъ въ сторону противоположную, и давать имъ различные знаки.

Впрочемъ, для бо́льшей ясности и точности можно дать этому уравненію другой видъ.

Пусть будутъ B', B'', B'''.... (рис. 35) точки непосредственнаго приложенія силъ P', P'', P'''.... въ плоскости; x' и y' будутъ координаты AG' и $G'B'$ точки B', относительно какихъ-нибудь осей AX и AY'; x'', y'' координаты точки B''.... Положимъ, что мы разложили сначала всѣ силы P', P'', P''' параллельно двумъ осямъ AX и AY; и означимъ, чрезъ X' и Y' двѣ составляющія силы P', чрезъ X'' и Y'' двѣ составляющія силы P''..., и будемъ разсматривать, вмѣсто данныхъ силъ P', P'', P'''.... двѣ группы силъ X', X'', X'''... и Y', Y'', Y'''....

Тогда, параллельныя силы X', X'', X'''..., перенесенныя параллельно самимъ себѣ на ось AX, сложатся въ одну равную ихъ суммѣ. Параллельныя силы Y', Y'', Y'''..., перенесенныя на ось AY, также сложатся въ одну равную ихъ суммѣ. Эти двѣ частныя равнодѣйствующія сложатся въ одну, приложенную въ A и, по первому общему условію равновѣсія, которое требуетъ, чтобы общая равнодѣйствующая была равна нулю, мы получимъ два уравненія:

$$X' + X'' + X''' + \ldots = 0.$$

$$Y' + Y'' + Y''' + \ldots = 0.$$

Затѣмъ, необходимо выразить, что сумма моментовъ паръ, составленныхъ этими силами относительно точки A, уничтожается сама собою. Но, такъ какъ ось AX составляетъ съ направленіями силъ Y', Y''.... равныя между собою и угломъ, составляемымъ осью AY съ направленіями силъ X', X''..., то, произведенія $X'y'$, $X''y''$..., $Y'x'$, $Y'x''$.... можно принять за моменты, при относительной мѣрѣ различныхъ паръ. Но, такъ какъ сумма этихъ моментовъ должна быть равна нулю, то:

$$X'x' + X''x'' + \ldots + Y'x' + Y''x'' + \ldots = 0.$$

Это уравненіе замѣняетъ предъидущее:

$$P'p' + P''p'' + P'''p''' + \ldots = 0;$$

но вмѣсто перпендикуляровъ p', p'', p'''..., опущенныхъ изъ точки A на направленія силъ, оно содержитъ координаты точекъ непосредственнаго приложенія силъ въ плоскости. Оно имѣетъ то преимущество, что члены его $X'y'$, $X''y''$, $Y'x'$, $Y''x''\ldots$, которые представляютъ моменты паръ, примутъ знаки, соотвѣтствующіе сторонамъ дѣйствія паръ, когда дадимъ силамъ и координатамъ приличные знаки.

Можно принять, что абсциссы x', $x''\ldots$, находящіяся вправо отъ начала, за положительныя, а находящіяся влѣво — за отрицательныя; ординаты-же y', $y''\ldots$, простирающіеся вверхъ отъ оси абсциссъ за положительныя, а внизъ — за отрицательныя.

Что-же касается силъ, то понятно, что въ каждой группѣ необходимо дать знаки противоположные тѣмъ силамъ, которыя дѣйствуютъ въ противоположныя стороны.

Затѣмъ, разсматривая въ первой группѣ силу X'', которая дѣйствуетъ вправо отъ оси AY, а во второй силу Y', дѣйствующую внизъ относительно оси AX, мы видѣмъ, что эти двѣ силы дадутъ пары, дѣйствующія относительно точки A въ одну сторону, если только координаты AH'' и AG' или y'' и x' имѣютъ одинакіе знаки. Такимъ образомъ необходимо, чтобы силы первой группы, дѣйствующія вправо отъ оси ординатъ, имѣли-бы тотъ-же знакъ, какъ и силы второй группы, дѣйствующія внизъ отъ оси абсциссъ; поэтому, принявъ первыя силы за положительныя, то и вторыя будутъ положительныя; чрезъ что моменты примутъ знаки, соотвѣтствующіе дѣйствію паръ.

Если-же въ первой группѣ X', X'', $X'''\ldots$ мы будемъ принимать всегда за положительныя силы тѣ, которыя дѣйствуютъ вправо отъ оси ординатъ, или которыя стремятся увеличивать абсциссы точекъ ихъ приложенія, то для удобства нужно принять и во второй группѣ Y', Y'', $Y'''\ldots$ за положительныя силы тѣ, которыя дѣйствуютъ вверхъ относительно оси абсциссъ, или которыя стремятся увеличивать ординаты точекъ ихъ приложенія, и тогда надо будетъ дать противоположный знакъ всѣмъ моментамъ, относящимся къ этой послѣдней группѣ. Предъидущее уравненіе приметъ слѣдующій видъ:

$$X'y' + X''y'' + \ldots - Y'x' - Y''x'' - \ldots = 0.$$

Въ дальнѣйшемъ изложеніи, мы будемъ предпочитать это выраженіе первому; т. е. будемъ принимать, что въ обѣихъ группахъ положительныя силы тѣ, которыя стремятся увеличивать координаты ихъ точекъ приложенія, а отрицательныя тѣ, которыя стремятся уменьшить тѣ-же координаты.

Если-бы оси AX, AY (рис. 36) составляли между собою прямой уголъ, то абсциссы и ординаты сами превратились-бы въ плечи паръ, а моменты $X'y' \ldots \; Y'x \ldots$ дали-бы абсолютную мѣру паръ Кромѣ того, означая чрезъ α' уголъ, составляемый направленіемъ силы P' съ осью абсциссъ, мы получили-бы для ея составляющей X', параллельной этой оси, выраженіе $P' \operatorname{Cos} \alpha'$. Для другой-же ея составляющей Y' получили-бы выраженіе $P' \operatorname{Sin} \alpha'$.

Означая чрезъ α'' уголъ, составляемый направленіемъ силы P'' съ осью абсциссъ, мы получили-бы:

$$X'' = P'' \operatorname{Cos} \alpha'', \; Y'' = P'' \operatorname{Sin} \alpha'' \ldots$$

Тогда предъидущія уравненія перемѣнились-бы въ слѣдующія:

$$P' \operatorname{Cos} \alpha' + P'' \operatorname{Cos} \alpha'' + P''' \operatorname{Cos} \alpha''' + \ldots = 0,$$

$$P' \operatorname{Sin} \alpha' + P'' \operatorname{Sin} \alpha'' + P''' \operatorname{Sin} \alpha''' + \ldots = 0,$$

$$P' (y' \operatorname{Cos} \alpha' - x' \operatorname{Sin} \alpha') + P'' (y'' \operatorname{Cos} \alpha'' - x'' \operatorname{Sin} \alpha'') + P''' (y''' \operatorname{Cos} \alpha''' - x''' \operatorname{Sin} \alpha''') + \ldots = 0.$$

Въ этихъ уравненіяхъ намъ нѣтъ надобности обращать вниманіе на знаки силъ, но на знаки абсциссъ и ординатъ необходимо.

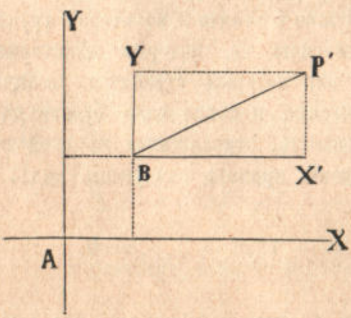


Рис. 36.

Принимая-же всѣ силы P', P'', $P''' \ldots$ за положительныя, знаки синусовъ и косинусовъ, представили-бы знаки составляющихъ $P' \operatorname{Cos} \alpha' \ldots P' \operatorname{Sin} \alpha' \ldots$, какъ это легко замѣтить, разсматривая цѣлую окружность круга, описанную направленіемъ силы P', около точки ея приложенія B.

Это тотъ видъ уравненія равновѣсія, для произвольнаго числа силъ, находящихся въ одной и той-же плоскости, содержитъ главныя данныя вопроса, именно: величины силъ, ихъ направленія, посредствомъ угловъ, составляемыхъ ими съ неподвижною прямою, имѣющею опредѣленное положеніе, и точки ихъ приложенія, посредствомъ прямоугольныхъ координатъ. Мы могли-бы сначала представить эти уравненія, а потомъ уже вывести и тѣ, которыя относятся къ наклоннымъ осямъ; но такъ какъ уравненія равновѣсія, относящіяся къ прямоугольнымъ осямъ, обыкновенно доказываются на томъ основаніи, что двѣ группы параллельныхъ силъ между собою перпендикулярны, что̀ и считается необходимымъ для доказательства условій равновѣсія, то мы и сочли нужнымъ показать, что перпендикулярность осей или группъ силъ вовсе не нужна для опредѣленія условій равновѣсія, и что условія эти относительно прямоугольныхъ осей, только частный случай тѣхъ, которыя имѣютъ мѣсто и при наклонныхъ осяхъ.

Положимъ, что силы P', P'', P''' .... не находятся въ равновѣсіи, но что онѣ могутъ быть приведены къ одной R, которая и будетъ ихъ равнодѣйствующая. Въ этомъ случаѣ предъидущія три уравненія равновѣсія будутъ имѣть мѣсто и по введеніи въ нихъ силы $-R$.

Пусть будетъ α уголъ составляемый направленіемъ силы $-R$ съ осью абсциссъ; x, y координаты точки взятой произвольно по направленіи этой силы.

Полагая для краткости:

$$P' \operatorname{Cos} \alpha' + P'' \operatorname{Cos} \alpha'' + P''' \operatorname{Cos} \alpha''' + \ldots = X$$

$$P' \operatorname{Sin} \alpha' + P'' \operatorname{Sin} \alpha'' + P''' \operatorname{Sin} \alpha''' + \ldots = Y$$

$$P' (y' \operatorname{Cos} \alpha' - x \operatorname{Sin} \alpha') + P'' (y'' \operatorname{Cos} \alpha'' - x'' \operatorname{Sin} \alpha'') \\ + P''' (y''' \operatorname{Cos} \alpha''' - x''' \operatorname{Sin} \alpha''') + \ldots = G,$$

получимъ:

$$X - R \operatorname{Cos} \alpha = 0, \qquad Y - R \operatorname{Sin} \alpha = 0;$$

но, такъ какъ:

$$\operatorname{Sin}^2 \alpha + \operatorname{Cos}^2 \alpha = 1, \text{ выводимъ:}$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$\operatorname{Cos} \alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}},$$

$$\operatorname{Sin} \alpha = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$$

Эти уравненія опредѣляютъ величину равнодѣйствующей и уголъ α, составляемый ея направленіемъ съ осью абсциссъ.

Зачѣмъ, мы имѣемъ:

$$G - R(y\,Cos\,\alpha - x\,Sin\,\alpha) = 0$$

или, вставляя вмѣсто $R\,Cos\,\alpha$ и $R\,Sin\,\alpha$ ихъ величины X и Y, будетъ:

$$G - Xy + Yx = 0.$$

Такъ какъ у насъ одно только уравненіе для опредѣленія двухъ координатъ x и y, то одною изъ нихъ мы можемъ располагать произвольно. Положимъ, напримѣръ $x = 0$; случай, въ которомъ равнодѣйствующая пересѣкаетъ ось, y, слѣдовательно:

$$y = \frac{G}{X}$$

Если-же $y = 0$, то получимъ точку, въ которой равнодѣйствующая пересѣкаетъ ось абсциссъ, тогда:

$$x = \frac{G}{Y}.$$

Такимъ образомъ, мы имѣемъ все, что нужно для опредѣленія величины и положенія равнодѣйствующей нѣсколькихъ силъ, находящихся въ одной плоскости.

Для опредѣленія координаты x и y точки приложенія равнодѣйствующей, мы нашли одно только уравненіе; что и должно быть, потому что равнодѣйствующая можетъ быть приложена къ какой угодно точкѣ ея направленія. Слѣдовательно невозможно и требовать, чтобы вычисленіе давало одну изъ точекъ этого направленія предпочтительнѣе предъ другими. Вычисленіе также даетъ всѣ точки направленія равнодѣйствующей, а слѣдовательно и ихъ геометрическое мѣсто; предъидущее уравненіе.

$$G - Xy + Yx = 0$$

выражаетъ уравненіе направленія равнодѣйствующей.

Мы видѣли выше, что приводя всѣ силы къ одной равнодѣйствующей R и къ одной парѣ (S, — S), всегда можно было привести систему къ одной равнодѣйствующей, если только сила R не равна нулю, потому что сила R и пара (S, — S) находились въ одной плоскости или въ плоскостяхъ параллельныхъ, а слѣдовательно слагались всегда въ одну силу. Итакъ единственно условіе, необходимое для того, чтобы параллельныя силы, или силы находящейся въ одной плоскости, имѣли одну равнодѣйствующую, состоитъ въ томъ, чтобы, по перенесеніи этихъ силъ параллельно самимъ себѣ въ точку взятую произвольно, ихъ равнодѣйствующая не была равна нулю.

Если эта равнодѣйствующая равна нулю, тогда всѣ силы системы сведутся въ одну пару, которой величина и положеніе въ плоскости будутъ извѣстны, и тогда мы можемъ привести ихъ въ равновѣсіе, только посредствомъ пары равной и противоположной дѣйствію равнодѣйствующей пары, находящейся съ нею въ одной плоскости или въ плоскости параллельной.

4. Условія равновѣсія между различнымъ числомъ силъ, направленныхъ произвольно въ пространствѣ.

Пусть P', P'', P''' (рис. 37) различныя силы. Чрезъ точку A, взятую произвольно въ пространствѣ, проведемъ три оси, AX, AY, AZ, которыя не находятся въ одной плоскости и разложивъ каждую силу на три параллельныя этимъ осямъ.

Назовемъ чрезъ X', Y', Z' составляющія силы P'; чрезъ X'', Y'', Z'' составляющія силы P''; и т. д. Тогда вмѣсто силъ P', P'', P''' приложенныхъ къ системѣ, мы получимъ три группы параллельныхъ силъ, изъ которыхъ первая будетъ составлена изъ силъ X', X'', X''', параллельныхъ оси AX; вторая изъ силъ Y', Y'', Y''', параллельныхъ оси AY и третья изъ силъ Z', Z'', Z''' параллельныхъ оси AZ.

Если перенесемъ всѣ эти силы параллельно самимъ себѣ въ точку A, то силы первой группы перейдутъ на ось AX и сложатся въ одну силу X, равную ихъ суммѣ; силы второй группы перейдутъ на ось AY и также сложатся въ одну силу Y, равную ихъ суммѣ; наконецъ силы третьей группы перейдутъ на ось AZ и дадутъ силу равную ихъ суммѣ. Три частныя равнодѣйствующія X, Y, Z, сложатся въ одну R, приложенную въ A и выраженною діагональю параллели пи-

пида, построеннаго на трехъ линіяхъ представляющихъ величины и направленія силъ X, Y, Z.

По первому общему условію равновѣсія нужно, чтобы равнодѣйствующая была равна нулю; но мы знаемъ, что равнодѣйствующая трехъ силъ X, Y, Z не находящихся въ одной плоскости, только тогда будетъ равна нулю, когда ея составляющія порознь равны нулю; слѣдовательно условія $R = 0$, требуетъ трехъ частныхъ уравненій $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, т. е.

$$X' + X'' + X''' + \ldots\ldots = 0.$$

$$Y' + Y'' + Y''' + \ldots\ldots = 0,$$

$$Z' + Z'' + Z''' + \ldots\ldots = 0.$$

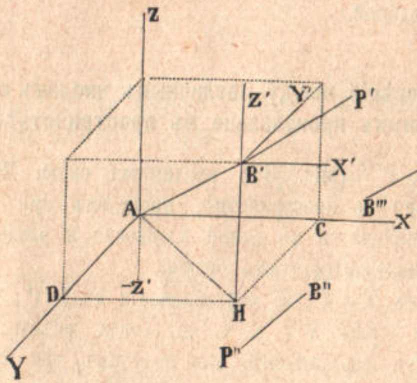


Рис. 37.

Такимъ образомъ, для равновѣсія произвольнаго числа силъ, приложенныхъ къ тѣлу или системѣ, неизмѣняемой фигуры, нужны слѣдующія условія: *чтобы сумма силъ, разложенныхъ параллельно какимъ нибудь тремъ осямъ, была равна нулю относительно каждой изъ этихъ осей.*

По второму общему условію равновѣсія необходимо, чтобы равнодѣйствующая паръ, составленныхъ перенесеніемъ всѣхъ силъ въ точку A была также равна нулю.

Разсмотримъ теперь это второе условіе.

Пусть будетъ B' точка приложенія силы P', а слѣдовательно и точка приложенія ея составляющихъ X', Y', Z'; означимъ чрезъ x', y', z' координаты AC, CH, HB этой точки относительно трехъ осей AX, AY, AZ. Назовемъ также чрезъ x'' y'' z'' координаты точки приложенія B'' трехъ составляющихъ X'', Y'', Z'', и т. д.

Разсматривая группу силъ Z', Z'', Z'''....., мы замѣчаемъ, что сила Z, приложенная въ B', производитъ пару $(Z', -Z')$, приложенную къ AB', или (полагая, что сила Z' приложена въ H, гдѣ ея направленіе встрѣчаетъ плоскость YAZ), производитъ пару $(Z', -Z)$, приложенную къ діагонали AH параллелограмма $ACHD$, котораго двѣ стороны AC и AD равны координатамъ x' и y'. Но эта пара можетъ быть разложена на двѣ другія пары, составленныя изъ силъ равныхъ и параллельныхъ первымъ, но приложенныхъ къ сторонамъ AC и AD или x' и y' находящихся въ плоскостяхъ XAZ и YAZ.

Если мы сдѣлаемъ такое-же разложеніе для всѣхъ паръ, происшедшихъ отъ группы силъ Z', Z'', Z''' на двѣ пары, находящихся въ плоскостяхъ XAZ и YAZ параллельныхъ силамъ Z', Z'', Z'''.... и такимъ-же образомъ разложимъ и пары, происшедшія отъ двухъ другихъ силъ, т. е. каждую изъ этихъ паръ на двѣ, находящіяся въ плоскостяхъ параллельныхъ силамъ той-же группы, которой принадлежитъ и пара, то, вслѣдствіе такого разложенія пары, системы приведутся къ другимъ парамъ находящимся въ трехъ плоскостяхъ координатъ.

Эти пары, находящіяся въ каждой плоскости, сведутся въ одну, равную ихъ суммѣ. И эти три частныя равнодѣйствующія пары сложатся въ одну, которая и будетъ общая равнодѣйствующая пара и которая для равновѣсія должна быть равна нулю. Но три пары, находящіяся въ плоскостяхъ составляющихъ между собою трехгранный уголъ, только тогда будутъ имѣть равнодѣйствующую равную нулю, когда сами составляющія порознь пары равны нулю. Итакъ, сумма моментовъ паръ должна быть равна нулю, относительно каждой изъ трехъ плоскостей координатъ.

Но въ плоскости YAZ мы найдемъ во первыхъ пары:

$$(Z', -Z),\ (Z'', -Z''),\ (Z''', -Z''')\ldots.$$

приложенныя къ линіямъ

$$y', y'', y'''\ldots.$$

затѣмъ пары:

$$(Y', -Y'), (Y'', -Y''), (Y''', -Y''')\ldots.$$

приложенныя къ линіямъ

$$z', z'', z'''\ldots.$$

А такъ какъ ось AY составляетъ съ направленіями силъ Z', Z'', Z''' углы равные между собою и тѣмъ угламъ, которые образуютъ ось AZ съ направленіями силъ Y', Y'', Y''', то произведенія $Z'y'$.. $Y'z'$... можно принять за моменты при относительной мѣрѣ паръ находящихся въ плоскости. YAZ.

Слѣдовательно, если сумма этихъ паръ должна быть равна нулю, то получимъ:

$$Y'z' + Y''z'' + \ldots. - Z'y' - Z''y''\ldots = 0.$$

Для другихъ двухъ плоскостей, уравненія будетъ:

$$Z'x' + Z''x'' + \ldots. - X'y' + X''y'' + \ldots = 0.$$

$$X'y' + X''y'' + \ldots - Y'x' - Y''x'' + \ldots = 0.$$

Для равновѣсія системы, кромѣ трехъ уравненій найденныхъ выше, необходимы еще три уравненія, выражающія, что *сумма произведеній составляющихъ силъ, параллельныхъ плоскости двухъ осей, на ихъ координаты, относительно третьей оси, для каждой изъ трехъ плоскостей равна нулю.*

Въ предъидущихъ уравненіяхъ, знаки координатъ необходимо принимать за положительные тѣ, которые находятся въ пространствѣ того-же угла X A Y Z, а за отрицательные тѣ, которые находятся въ противоположномъ углу.

Также точно и силы, въ каждой группѣ, должно принять за положительныя тѣ, которыя стремятся увеличивать координаты точекъ ихъ приложенія, а за отрицательныя силы тѣ, которыя уменьшаютъ эти координаты.

Если-бы предъидущія шесть уравненій имѣли мѣсто и для трехъ частныхъ осей, не находящихся въ той-же плоскости, то система была-бы въ равновѣсіи, а слѣдовательно тѣ-же уравненія имѣли-бы мѣсто и для всѣхъ возможныхъ осей.

Если три оси AX, AY, AZ будутъ перпендикулярны между собою, то координаты сдѣлаются плечами паръ, а произведенія $Z'y'$, $Y'x'$ $X'z'$.... представятъ истинныя выраженія ихъ моментовъ.

Кромѣ того, означая чрезъ α', β', γ' углы, составляемые направленіемъ силы P' съ тремя осями AX, AY, AZ, или съ тремя прямыми параллельными этимъ осямъ, мы получимъ выраженія для трехъ составляющихъ силы P:.

$$X' = P' \operatorname{Cos} \alpha', \; Y' = P' \operatorname{Cos} \beta', \; Z' = P' \operatorname{Cos} \gamma',$$

Означивъ чрезъ α'', β'', γ''.... углы составляемые направленіемъ силы P'',.... съ тѣми же осями, получимъ:

$$X'' = P'' \operatorname{Cos} \alpha'', \; Y'' = P'' \operatorname{Cos} \beta'', \; Z'' = P'' \operatorname{Cos} \gamma''.$$

Тогда предъидущія формулы примутъ такой видъ:

$$P' \operatorname{Cos} \alpha' + P'' \operatorname{Cos} \alpha'' + P''' \operatorname{Cos} \alpha''' + \ldots. = 0,$$

$$P' \operatorname{Cos} \beta' + P'' \operatorname{Cos} \beta'' + P''' \operatorname{Cos} \beta''' + \ldots. = 0,$$

$$P' \operatorname{Cos} \gamma' + P'' \operatorname{Cos} \gamma'' + P''' \operatorname{Cos} \gamma''' + \ldots. = 0,$$

$$P' (z' \operatorname{Coo} \beta' + y' \operatorname{Cos} \gamma') + P'' (z'' \operatorname{Cos} \beta'' - y'' \operatorname{Cos} \gamma'') \\ + P''' (z''' \operatorname{Cos} \beta''' - y''' \operatorname{Cos} \gamma''') + \ldots. = 0,$$

$$P' (x' \operatorname{Cos} \gamma' - z' \operatorname{Cos} \alpha') + P'' (x'' \operatorname{Cos} \gamma'' - z'' \operatorname{Cos} \alpha'') \\ + P''' (x''' \operatorname{Cos} \gamma''' - z''' \operatorname{Cos} \alpha''') \ldots. = 0,$$

$$P' (y' \operatorname{Cos} \alpha' - x' \operatorname{Cos} \beta') + P'' (y'' \operatorname{Cos} \alpha'' - x'' \operatorname{Cos} \beta'') \\ + P''' (y''' \operatorname{Cos} \alpha''' - x''' \operatorname{Cos} \beta''') + \ldots = 0.$$

Въ такомъ видѣ, обыкновенно, представляются шесть уравненій равновѣсія. Они выражаютъ величины силъ P', P'', P'''..., точки ихъ приложенія, посредствомъ прямоугольныхъ координатъ относящихся къ тремъ осямъ, и ихъ направленія, посредствомъ косинусовъ угловъ, которые составляютъ эти силы съ осями координатъ.

Силамъ, дѣйствующимъ подъ прямымъ угломъ, обыкновенно приписываютъ независимость, которая имѣетъ мѣсто и въ томъ случаѣ, когда силы дѣйствуютъ подъ какимъ угодно угломъ, лишь-бы этотъ уголъ не былъ равенъ нулю. Замѣтимъ, что уравненія равновѣсія, относящіяся къ прямоугольнымъ осямъ, только частный случай уравненій, относящихся ко всякимъ другимъ осямъ, и, слѣдовательно, начало независимости между дѣйствіями перпендикулярныхъ силъ нисколько не упрощаетъ ихъ доказательства.

Съ другой стороны, мы видимъ, что это неопредѣленное начало очень легко можетъ насъ привести къ грубой ошибкѣ, потому что разсматривая, напримѣръ, двѣ группы прямоугольныхъ силъ находящихся въ одной плоскости, и предполагая независимость между дѣйствіями этихъ группъ, мы должны будемъ заключить, что когда система находится въ равновѣсіи, то каждая группа должна быть сама по себѣ въ равновѣсіи, что несправедливо.

То-же самое имѣетъ мѣсто и въ случаѣ трехъ группъ перпендикулярныхъ силъ, дѣйствующихъ въ пространствѣ; вся система можетъ быть въ равновѣсіи, между тѣмъ можетъ случиться, что каждая изъ группъ въ частности не будетъ въ равновѣсіи.

Такимъ образомъ, въ предъидущихъ двухъ случаяхъ, начало независимости силъ, дѣйствующихъ подъ прямымъ угломъ слѣдуетъ употреблять съ ограниченіемъ, а именно только при разсматриваніи однихъ переносныхъ движеній, которыя могли-бы произойти отъ силъ дѣйствующихъ на систему. Правило это можно приложить и къ случаю двухъ группъ силъ, изъ которыхъ одна состоитъ изъ силъ дѣйствующихъ перпендикулярно къ одной и той-же плоскости, а другая изъ силъ находящихся въ этой плоскости. Въ этомъ случаѣ независимость дѣйствія имѣетъ мѣсто безъ всякаго ограниченія, даже и въ томъ случаѣ, когда первая группа силъ составляетъ съ плоскостью второй уголъ не равный нулю. Замѣтимъ, что независимость, о которой здѣсь говорится, имѣетъ мѣсто не потому, что двѣ группы составляютъ между собою прямой уголъ, а потому что онѣ вообще дѣйствуютъ подъ угломъ.

Послѣднимъ тремъ уравненіямъ можно дать иной видъ, вводя вмѣсто координатъ точекъ приложенія силъ, кратчайшія разстоянія ихъ направленій отъ трехъ прямоугольныхъ осей.

Такъ въ первомъ изъ этихъ уравненій вмѣсто члена

$$P'(z' \, Cos \, \beta' - y' \, Cos \, \gamma'),$$

который выражаетъ сумму моментовъ двухъ силъ $P' \, Cos \, \beta$ и $P' \, Cos \, \gamma'$, относительно точки взаимнаго пересѣченія ихъ плоскости съ осью x, можно подставить другой членъ, выражающій моментъ равнодѣйствующей этихъ силъ относительно той-же точки.

Такъ какъ двѣ силы $P' \, Cos \, \beta$, $P' \, Cos \, \gamma$ перпендикулярны между собою, то квадратъ ихъ равнодѣйствующей будетъ:

$$P'^2 \, Cos^2 \beta' + P'^2 \, Cos^2 \gamma' \text{ или } P'^2 (Cos^2 \beta' + Cos^2 \gamma')$$

но, такъ какъ

$$Cos^2 \alpha' + Cos^2 \beta' + Cos^2 \gamma = 1$$

то будетъ:

$$P'^2 (1 - Cos^2 \alpha') \text{ или } P'^2 \, Sin^2 \alpha'.$$

Итакъ, равнодѣйствующая будетъ $P' \, Sin \, \alpha'$.

Означая разстояніе этой равнодѣйствующей отъ оси x, чрезъ p', получимъ для ея момента $P'p' \, Sin \, \alpha'$, который можетъ замѣнить членъ $P'(z' \, Cos \, \beta' - y' \, Cos \, \gamma')$ точно также будемъ имѣть $P''p'' \, Sin \, \alpha'' \ldots.$ вмѣсто слѣдующихъ членовъ перваго уравненія, означая чрезъ $p'' \ldots$ соотвѣтственныя разстоянія равнодѣйствующей отъ оси x.

Итакъ, первое уравненіе получитъ слѣдующій видъ:

$$P'p' \, Sin \, \alpha' + P''p'' \, Sin \, \alpha'' + P'''p''' \, Sin \, \alpha''' + \ldots. = 0.$$

Но очевидно, что p', p'', $p''' \ldots$ будутъ кратчайшія разстоянія силъ P', P'', $P''' \ldots$ отъ оси x; потому, что сила $P' \, Sin \, \alpha'$, находящаяся въ плоскости перпендикулярной къ этой оси слагается съ силою $P' \, Cos \, \alpha'$ перпендикулярною къ той-же плоскости, что и даетъ равнодѣйствующую P', находящуюся въ пространствѣ, Итакъ, сила $P' \, Sin \, \alpha'$ будетъ ничто иное, какъ проекція силы P' на плоскости перпендикулярной къ оси x; а слѣдовательно, кратчайшее разстояніе p' отъ этой проекціи до оси x, будетъ ни что иное, какъ кратчайшее разстояніе между силою P' и тою-же осью.

Если означимъ чрезъ q', q'', q'''... и чрезъ r', r'', r'''... кратчайшія разстоянія силъ P', P'', P'''... отъ осей y и z, то найдемъ также для другихъ двухъ уравненій:

$$P'q' \operatorname{Sin} \beta' + P''q'' \operatorname{Sin} \beta'' + P'''q''' \operatorname{Sin} \beta''' + \ldots. = 0$$

$$P'r' \operatorname{Sin} \gamma' + P''r'' \operatorname{Sin} \gamma'' + P'''r''' \operatorname{Sin} \gamma''' + \ldots. = 0$$

Произведеніе, изъ проекціи силы на плоскости на ея разстояніе отъ оси перпендикулярной къ плоскости, обыкновенно, называется *моментомъ* силы относительно этой оси; поэтому предъидущія три уравненія равновѣсія можно выразить такъ:

Въ случаѣ равновѣсія сумма моментовъ силъ, относительно каждой изъ трехъ осей, должна быть равна нулю.

Если въ шести уравненіяхъ равновѣсія, положимъ, что силы P', P'', P''' .... параллельны или находятся въ одной плоскости, и что вмѣсто координатъ x', y', z' и угловъ α' β' γ' подставимъ ихъ величины, соотвѣтствующія принятымъ предположеніямъ, то получимъ уравненія равновѣсія найденныя выше для всѣхъ частныхъ случаевъ.

Положимъ, что направленія всѣхъ силъ P', P'', P'''... сходятся въ одной точкѣ; тогда принявъ эту точку за начало координатъ, косинусы угловъ α' β' γ' будутъ пропорціональны каординатамъ x' y' z' точекъ приложенія, мы получимъ:

$$x' : y' = \operatorname{Cos} \alpha : \operatorname{Cos} \beta',$$

$$x' : z' = \operatorname{Cos} \alpha' : \operatorname{Cos} \gamma' \ldots$$

или

$$y' \operatorname{Cos} \alpha' - x' \operatorname{Cos} \beta' = 0$$

$$x' \operatorname{Cos} \gamma' - z' \operatorname{Cos} \alpha' - 0$$

. . . .

. . . .

Слѣдовательно, три послѣднія уравненія уничтожатся сами собою и останутся только три первыя уравненія, которыя показываютъ, что *для равновѣсія системы силъ, которыхъ направленія сходятся* *въ одной точкѣ, достаточно, чтобы сумма силъ, разложенныхъ по направленіямъ трехъ осей, была равна нулю относительно каждой изъ этихъ осей.*

Если положимъ, что силы P', P'', P'''...... составляютъ между собою пары, тогда каждой силѣ P', составляющей съ осью x нѣкоторый уголъ α', будетъ соотвѣтствовать въ системѣ другая равная ей сила, но составляющая съ тою же осью уголъ $180^0 + \alpha'$, то получимъ для каждаго члена $P' \operatorname{Cos} \alpha'$, въ первомъ уравненіи равновѣсія, другой равный и противоположный членъ; тоже самое будетъ имѣть мѣсто и для другихъ двухъ уравненій. Слѣдовательно, три первыя уравненія пропадутъ сами собою и останутся только три послѣднія.

Итакъ *для равновѣсія какого угодно числа паръ, приложенныхъ къ тѣлу, достаточно, чтобы сумма этихъ паръ, разложенныхъ перпендикулярно къ тремъ осямъ, была равна нулю относительно каждой изъ этихъ осей.*

Переходимъ къ опредѣленію равнодѣйствующей силъ P', P'', P'''...... когда эти силы не находятся въ равновѣсіи, но могутъ быть приведены къ одной силѣ.

Положимъ, что между силами P', P'', P''' равновѣсія нѣтъ, и положимъ, что сила—R способна привести ихъ въ равновѣсіе, а слѣдовательно R будетъ ихъ равнодѣйствующая.

Предъидущія уравненія должны имѣть мѣсто, если въ нихъ введемъ силу—R.

Пусть будутъ α, β, γ углы, составляемые направленіемъ равнодѣйствующей съ тремя осями координатъ.

Полагая для краткости, что:

$$P' \operatorname{Cos} \alpha' + P'' \operatorname{Cos} \alpha'' + P''' \operatorname{Cos} \alpha''' + \ldots = X,$$

$$P' \operatorname{Cos} \beta' + P'' \operatorname{Cos} \beta'' + P''' \operatorname{Cos} \beta''' + \ldots = Y,$$

$$P' \operatorname{Cos} \gamma' + P'' \operatorname{Cos} \gamma'' + P''' \operatorname{Cos} \gamma'' + \ldots = Z,$$

мы получимъ три уравненія:

$$X - R \operatorname{Cos} \alpha = 0,$$

$$Y - R \operatorname{Cos} \beta = 0,$$

$$Z - R \operatorname{Cos} \gamma = 0;$$

изъ которыхъ получимъ:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

для величины равнодѣйствующей.

Для угловъ α, β, γ составляемыхъ ея направленіемъ съ тремя осями будетъ:

$$\operatorname{Cos} \alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2)}}$$

$$\operatorname{Cos} \beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2)}}$$

$$\operatorname{Cos} \gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2)}}$$

Означая чрезъ x, y, z, координаты какой нибудь точки взятой на направленіи равнодѣйствующей и полагая для краткости:

$$P'(z' \operatorname{Cos} \beta' - y' \operatorname{Cos} \gamma') + P''(z'' \operatorname{Cos} \beta'' - y'' \operatorname{Cos} \gamma'') + P'''(z''' \operatorname{Cos} \beta''' - y''' \operatorname{Cos} \gamma''') + \ldots = L,$$

$$P'(x' \operatorname{Cos} \gamma' - z' \operatorname{Cos} \alpha') + P''(x'' \operatorname{Cos} \gamma'' - z'' \operatorname{Cos} \alpha'') + P'''(x''' \operatorname{Cos} \gamma''' - x''' \operatorname{Cos} \alpha''') + \ldots = M,$$

$$P'(y' \operatorname{Cos} \alpha' - x' \operatorname{Cos} \beta') + P''(y'' \operatorname{Cos} \alpha'' - x'' \operatorname{Cos} \beta'') + P'''(y''' \operatorname{Cos} \alpha''' - x''' \operatorname{Cos} \beta''') + \ldots = N,$$

получимъ:

$$L - R(z \operatorname{Cos} \beta - y \operatorname{Cos} \gamma) = 0,$$

$$M - R(x \operatorname{Cos} \gamma - z \operatorname{Cos} \alpha) = 0,$$

$$N - R(y \operatorname{Cos} \alpha - x \operatorname{Cos} \beta) = 0,$$

или:

$$L + Yz - Zy = 0,$$

$$M + Zx - Xz = 0,$$

$$N + XY - Yx = 0.$$

Исключивъ изъ этихъ уравненій двѣ изъ неизвѣстныхъ x, y, z, получимъ:

$$XL + YM + ZN = 0$$

Это уравненіе не заключаетъ ни одной изъ неизвѣстныхъ и выражаетъ отношеніе, которое должно существовать между частными равнодѣйствующими X, Y, Z и тремя равнодѣйствующими моментами L, M, N, чтобы послѣднія три уравненія могли имѣть мѣсто въ одно и то-же время, а слѣдовательно, чтобы всѣ силы системы могли имѣть равнодѣйствующую.

Если это условное уравненіе имѣетъ мѣсто, то величины трехъ координатъ x, y, z, представятся въ видѣ $\frac{0}{0}$, потому что равнодѣйствующая можетъ быть приложена къ произвольной точкѣ, взятой на ея направленіи, а потому невозможно, чтобы вычисленіе опредѣлило одну точку этого направленія скорѣе, нежели другую.

Итакъ, вычисленіе можетъ только дать геометрическое мѣсто равнодѣйствующей и предъидущія три уравненія выразятъ уравненія трехъ проэкціи равнодѣйствующей на плоскостяхъ координатъ. Слѣдовательно, одно изъ этихъ уравненій будетъ необходимымъ слѣдствіемъ двухъ другихъ, такъ что, собственно говоря, мы имѣемъ только два уравненія для опредѣленія трехъ неизвѣстныхъ x, y и z; откуда слѣдуетъ, что онѣ должны представляться въ видѣ $\frac{0}{0}$.

Если зададимъ себѣ произвольно одну изъ координатъ x, y и z, то мы можемъ опредѣлить, помощью предъидущихъ уравненій и двѣ другія.

Положимъ, что $x = 0$, случай, когда требуется найти точку встрѣчи равнодѣйствующей съ вертикальною плоскостью Y A Z, то для другихъ двухъ координатъ искомой точки получимъ:

$$y = \frac{N}{X}, \qquad z = -\frac{M}{X}.$$

Полагая $y = 0$, получимъ:

$$x = -\frac{N}{Y}, \qquad z = \frac{L}{Y};$$

При $z = 0$.

$$x = \frac{M}{Z}, \qquad z = -\frac{L}{Z};$$

т. е., для полученія разстоянія точки, въ которой равнодѣйствующая пересѣкаетъ плоскость двухъ осей координатъ, отъ этихъ осей слѣдуетъ раздѣлить сумму моментовъ силъ относительно тѣхъ же осей на сумму силъ параллельныхъ третьей оси.

Итакъ, величина и положеніе равнодѣйствующей опредѣлится, если всѣ силы, приложенныя къ системѣ можно привести къ одной; это возможно, если условное уравненіе $XY + YM + ZM = 0$ удовлетворяется, съ тѣмъ однако, чтобы силы X, Y, Z, каждая отдѣльно, не были равны нулю; въ противномъ случаѣ силы P', P'', P''' . . . . . . могутъ быть приведены къ тремъ парамъ, моменты которыхъ будутъ L, M, N, ... и которыя никогда не могутъ быть приведены къ одной парѣ.

Предъидущее заключеніе, хотя и не такъ ясно, можно вывести изъ вычисленія.

Въ самомъ дѣлѣ, если силы X, Y, Z всѣ вдругъ равны нулю, то чрезъ вычисленіе найдемъ, что точки пересѣченія равнодѣйствующей съ плоскостями координатъ находятся отъ начала координатъ на безконечномъ разстояніи. Этого геометрія объяснить не можетъ, потому что воображаемая прямая, встрѣчающаяся на безконечномъ разстояніи съ тремя плоскостями координатъ, должна быть въ одно время параллельна тремъ плоскостямъ, пересѣкающимся въ одной точкѣ, что невозможно, а слѣдовательно и одна равнодѣйствующая также невозможна.

Во всѣхъ случаяхъ можно привести всѣ силы, приложенныя къ системѣ, къ одной силѣ, которая будетъ проходить чрезъ начало координатъ, и къ одной парѣ, плоскость и величину которой легко опредѣлить.

Для равнодѣйствующей R всѣхъ силъ перенесенныхъ въ начало координатъ имѣемъ:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2};$$

для трехъ же угловъ α, β, γ, составляемыхъ ею съ тремя осями получимъ:

$$\operatorname{Cos}\alpha = \frac{X}{R}, \qquad \operatorname{Cos}\beta = \frac{Y}{R}, \qquad \operatorname{Cos}\gamma = \frac{Z}{R}.$$

Но, такъ какъ L, M, N представляютъ три равнодѣйствующія пары, находящіяся въ трехъ плоскостяхъ перпендикулярныхъ къ осямъ x, y, z, то, означая чрезъ G моментъ равнодѣйствующей пары, мы получимъ для его величины:

$$G = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2};$$

а для угловъ λ, μ, ν, составляемыхъ перпендикуляромъ къ плоскости пары, съ тремя осями x, y, z будетъ:

$$\operatorname{Cos}\lambda = \frac{L}{G}, \qquad \operatorname{Cos}\mu = \frac{M}{G}, \qquad \operatorname{Cos}\nu = \frac{N}{G}.$$

Если намъ нужно выразить, что всѣ силы P', P'', P''' имѣютъ одну равнодѣйствующую, то, какъ мы уже знаемъ, необходимо, чтобы равнодѣйствующая сила R и равнодѣйствующая пара находились бы въ плоскостяхъ параллельныхъ, или, что бы ось пары была перпендикулярна къ направленію равнодѣйствующей.

Но α, β, γ, есть углы, которые сила R составляетъ съ тремя осями x, y, z и λ, μ, ν углы, составляемые осью пары съ тѣми-же осями, то, какъ извѣстно изъ геометріи, эти двѣ прямыя только тогда будутъ перпендикулярны, когда мы имѣемъ условіе:

$$\operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\lambda + \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\mu + \operatorname{Cos}\gamma \operatorname{Cos}\nu = 0.$$

Итакъ, поставивъ вмѣсто косинусовъ угловъ ихъ величины, и умножая все уравненіе на RG получимъ:

$$XL + YM + ZN = 0$$

что намъ уже извѣстно.

Необходимо подразумѣвать, что сила R не равна нулю или что мы имѣемъ:

$$\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} > 0,$$

неравенство, требующее, чтобы силы X, Y, Z не были бы въ одно и тоже равны нулю.

Слѣдовательно, условіе необходимое для существованія равнодѣйствующей всѣхъ силъ, найденное вычисленіемъ, будетъ только общимъ выраженіемъ условія, которое необходимо для того, чтобы всѣ силы всегда слагались въ одну.

Если $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, то моментъ G равнодѣйствующей пары будетъ равенъ нулю, и тогда силы приложенныя къ системѣ сведутся въ одну R, которая пройдетъ чрезъ начало координатъ.

Но такъ какъ моментъ G только въ такомъ случаѣ будетъ равенъ нулю, когда три частные равнодѣйствующіе момента L, M, N, порознь равны нулю, то слѣдовательно, если намъ нужно выразить, что нѣсколько силъ приводятся къ одной, проходящей чрезъ данную точку, необходимо, принявъ эту точку за начало, положить $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$.

Переходимъ къ разсмотрѣнію довольно замѣчательной теоремы, которая показываетъ, какъ по даннымъ проекціямъ силы и ея момента, на трехъ прямоугольныхъ осяхъ опредѣлить проэкціи этихъ осей относительно произвольной прямой.

Положимъ даны двѣ прямыя произвольно направленныя въ пространствѣ. Назовемъ чрезъ α, β, γ углы, составляемые первою линіею съ осями координатъ; чрезъ λ, μ, ν углы, составляемые второю съ тѣми-же осями; требуется доказать, что выраженіе угла Θ, заключеннаго между этимя двумя линіями, будетъ:

$$\operatorname{Cos}\Theta = \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\lambda + \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\mu + \operatorname{Cos}\gamma \operatorname{Cos}\nu.$$

Перенесемъ, для большей простоты, двѣ данныя прямыя параллельно самимъ себѣ въ начало координатъ, чрезъ что углы α, β, γ λ, μ, ν и угалъ Θ не перемѣнятся. Возьмемъ на направленіи первой линіи, отъ начала координатъ, произвольную длину d, и положимъ x, y, z будутъ координаты ея конца. Возьмемъ также на второй линіи другую какую нибудь длину d' и означимъ чрезъ x'. y', z' координаты ея конца. Тогда соединимъ оба эти конца прямою линіею h, получимъ треугольникъ, котораго три стороны будутъ d, d' и h. Такъ какъ Θ есть уголъ заключающійся между двумя первыми линіями, то

$$h^2 = d^2 + d^2 - 2dd' \operatorname{Cos} \Theta;$$

но, такъ какъ:

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$d'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

$$h^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$

то подставимъ эти величины въ первое уравненіе, и произведя надлежащія сокращенія, получимъ:

$$\operatorname{Cos} \Theta = \frac{xx' + yy' + zz'}{dd'},$$

или:

$$\operatorname{Cos} \Theta = \frac{x}{d} \cdot \frac{x'}{d'} + \frac{y}{d} \cdot \frac{y'}{d'} + \frac{z}{d} \cdot \frac{z'}{d'};$$

но понятно что:

$$\frac{x}{d} = \operatorname{Cos} \alpha, \frac{y}{d} = \operatorname{Coe} \beta, \frac{z'}{d} = \operatorname{Cos} \gamma,$$

также:

$$\frac{x'}{d'} = \operatorname{Cos} \lambda, \frac{y'}{d'} = \operatorname{Cos} \mu, \frac{z'}{d'} = \operatorname{Cos} \nu,$$

то слѣдовательно:

$$\operatorname{Cos} \Theta = \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \lambda + \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Cos} \mu + \operatorname{Cos} \gamma \,.\, \operatorname{Cos} \nu.$$

Если прямыя d и d' перпендикулярны между собою, то $\operatorname{Cos} \Theta = 0$, слѣдовательно:

$$\operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \lambda + \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Cos} \mu + \operatorname{Cos} \gamma \operatorname{Cos} \nu = 0.$$

Теперь замѣнимъ буквы λ, μ, ν буквами α', β', γ' и положимъ, что сила R направляется по первой прямой линіи, опредѣлимъ проэкцію ея R' на второй линіи.

Такъ какъ $R' = R \operatorname{Cos} \Theta$, то слѣдовательно:

$$R' = R \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \alpha' + R \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Cos} \beta' + R \operatorname{Cos} \gamma \operatorname{Cos} \gamma'.$$

но $R \operatorname{Cos} \alpha$, $R \operatorname{Cos} \beta$, $R \operatorname{Cos} \gamma$ выражаютъ три составляющія силы R направленныя по тремъ осямъ, то означивъ чрезъ X, Y, Z, эти составляющія получимъ:

$$R' = X \operatorname{Cos}\alpha' + Y \operatorname{Cos} \beta' + Z \operatorname{Cos} \gamma'.$$

Итакъ, *для проэкціи какой-нибудь силы, если составляющія ея на трехъ прямоугольныхъ осяхъ извѣстны, надо взять сумму этихъ составляющихъ, умноженныхъ на косинусы угловъ, составляемыхъ ихъ направленіями съ направленіемъ, на которомъ требуется найти проэкцію силы.*

Такъ дѣлается въ геометріи для проэктированія линіи на какой-нибудь оси, т. е. должно сначала проэктировать эту линію на трехъ прямоугольныхъ осяхъ, затѣмъ проэктировать ея три проэкціи на данную ось и сложить эти проэкціи проэкцій.

Такимъ-же образомъ разсматривая пару, моментъ которой выражается частію G взятой на ея оси, имѣющею данныя проэкціи L, M, N на трехъ другихъ взаимно перпендикулярныхъ осяхъ, мы увидимъ, что для проэкціи момента G на линіи, которая составляетъ съ прямоугольными осями углы λ', μ', ν' нужно только взять сумму произведеній L, M, N на косинусы угловъ λ', μ', ν', слѣдовательно, называя чрезъ G', искомую проэкцію момента G, получимъ:

$$G' = L . \operatorname{Cos} \lambda' + M \operatorname{Cos} \mu' + N \operatorname{Cos} \nu'.$$

Отсюда видно, что *сумма моментовъ произвольнаго числа силъ, относительно какой угодно оси, равна суммамъ ихъ моментовъ относительно трехъ прямоугольныхъ осей, умноженныхъ на косинусы угловъ, составляемыхъ этими тремя осями съ данною осью.*

Разсмотримъ условія равновѣсія, когда тѣло или система, на которую дѣйствуютъ силы, не свободна, но имѣетъ нѣкоторыя препятствія.

Здѣсь можетъ быть три главныхъ случая, къ которымъ, какъ увидимъ впослѣдствіи, легко приводятся всѣ прочіе.

Случай первый *равновѣсія тѣла вращающагося во всѣ стороны около неподвижной точки.*

Выше мы нашли шесть уравненій для равновѣсія свободнаго тѣла или системы:

$$X = 0,\ Y = 0,\ Z = 0,$$

$$L = 0,\ M = 0,\ N = 0.$$

Теперь положимъ, что мы имѣемъ въ системѣ неподвижную точку, которая взята за начало координатъ. Само собою понятно, что равновѣсіе возможно и тогда, если-бы предъидущія шесть уравненій не были удовлетворительны; такъ какъ, хотя неподвижная точка сама собой неспособна произвести никакого дѣйствія, однако, не смотря на это, она можетъ уничтожить тѣ изъ силъ, равнодѣйствующая которыхъ пройдетъ чрезъ нее, и мы можемъ принять ее за новую силу, приложенную къ системѣ.

Каковы бы ни были силы, которыя неподвижная точка можетъ замѣнить своимъ сопротивленіемъ, всѣ они должны проходить чрезъ эту точку; а потому ихъ всегда можно разсматривать какъ сложенными въ одну силу, которая замѣнитъ сопротивленіе неподвижной точки, и тогда систему можно разсматривать какъ совершенно свободную.

Предъидущія шесть уравненій должны имѣть мѣсто, если въ нихъ введемъ новую силу r, которая замѣняетъ сопротивленіе неподвижной точки.

Но эта сила, приложенная непосредственно къ началу координатъ, дастъ три новыя составляющія x, y, z по направленіямъ трехъ осей и не произведетъ никакой пары. Слѣдовательно будетъ:

$$X + x = 0,\ Y + y = 0,\ Z + z = 0$$

$$L = 0,\ M = 0,\ N = 0.$$

Эти частныя равнодѣйствующія X, Y, Z могутъ имѣть величины какія угодно, такъ какъ полагая, что сопротивленіе неподвижной точки можетъ быть распространено во всѣ стороны, необходимо допустить, что силы x, y, z могутъ принять какіе угодно величины и знаки, не исключая тѣхъ, которые въ состояніи уравновѣсить силы X, Y, Z, а слѣдовательно удовлетворять первымъ тремъ уравненіямъ.

При этомъ необходимо, чтобы три частные равнодѣйствующіе момента L, M, N были сами по себѣ равны нулю.

Такимъ образомъ, *для равновѣсія тѣла, которое свободно вращается около неподвижной точки необходимо, чтобы сумма моментовъ силъ, относительно трехъ прямоугольныхъ осей, проведенныхъ чрезъ эту точку, была равна нулю, относительно каждой изъ этихъ осей.*

Если всѣ силы приложенныя къ тѣлу параллельны между собою, то, проведя чрезъ неподвижную точку двѣ плоскости параллельныя ихъ направленіямъ, можно разложить всѣ пары, приводя ихъ въ двѣ плоскости. Въ этомъ случаѣ для равновѣсія системы будутъ достаточно, чтобы сумма моментовъ была равна нулю, относительно двухъ осей перпендикулярныхъ къ этой плоскости.

Три уравненія $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$ достаточны для равновѣсія системы, но они, вообще, выражаютъ, что силы приложенныя къ тѣлу должны имѣть одну ровнодѣйствующую, проходящую чрезъ неподвижную точку. Поэтому предположивъ, что силы приложенныя къ тѣлу, могутъ быть тогда только въ равновѣсіи около неподвижной точки, когда ихъ равнодѣйствующая направлена къ этой точкѣ, то можемъ обратно заключить, что для равновѣсія нужны три уравненія: $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$.

Переходимъ къ вычисленію давленія производимаго силами на неподвижную точку.

Хотя мы и предположили, что неподвижная точка представляетъ неопредѣленное сопротивленіе во всѣ стороны, однако, когда данныя силы находятся въ равновѣсіи около этой точки, то она будетъ предпредставлять нѣкоторое опредѣленное сопротив леніе, взятое въ противоположную сторону, и называется *давленіемъ*, которое претерпѣваетъ точка отъ силъ приложенныхъ къ системѣ.

Для вычисленія этого давленію, нужно опредѣлить силу—r. Но, изъ вышеприведенныхъ уравненій мы можемъ вывести ея составляющія—X, — Y, — Z, направленныя по тремъ осямъ; а именно:

$$-x = X, \quad -y = Y, \quad -z = Z.$$

Итакъ *давленіе равно равнодѣйствующей всѣхъ силъ системы, перенесенныхъ параллельно самимъ себѣ въ неподвижную точку.*

Къ этому выводу мы могли бы притти вначалѣ, такъ какъ неподвижная точка можетъ претерпѣвать давленіе только отъ силъ перенесенныхъ въ нее параллельно самимъ себѣ, и отъ паръ образовавшихся отъ этихъ перемѣщеній, но такъ какъ пары должны быть сами по себѣ въ равновѣсіи, даже и тогда, когда тѣло совершенно свободно, а потому онѣ вовсе не обремѣняютъ неподвижную точку и, слѣдовательно, на эту точку производитъ давленіе одна только равнодѣйствующая первыхъ силъ,

Случай второй *равновѣсія тѣла вращающагося около линіи, концы которой представляютъ двѣ неподвижныхъ точки.*

Положимъ, мы имѣемъ двѣ неподвижныя точки A и B (Рис. 38). Возьмемъ AB за одну изъ трехъ осей, напримѣръ за ось абсциссъ, а неподвижную точку A за начало координатъ.

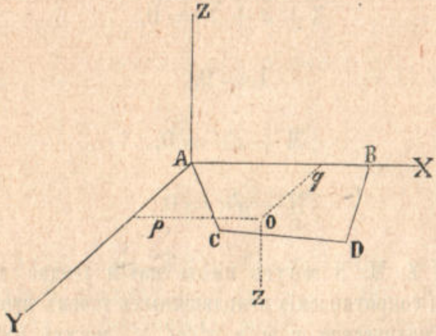


Рис. 38.

Каковы бы ни были силы, которыя каждая изъ неподвижныхъ точекъ можетъ замѣнить своимъ сопротивленіемъ, всегда можно представить себѣ, что онѣ приведены къ двумъ силамъ r и r', непосредственно приложемнымъ къ этимъ точкамъ; замѣняя-же настоящія сопротивленія точекъ A и B двумя силами r и r', мы можемъ разсматривать систему какъ совершенно свободную.

Стѣдовательно, шесть уравненій равновѣсія будутъ имѣть мѣсто и тогда, когда введемъ въ нихъ двѣ новыя силы r и r'.

Но сила r, непосредственно приложенная къ началу координатъ A, дастъ три составляющія x, y, z, направленныя по осямъ координатъ, и не произведетъ ни одной пары.

Сила r' приложенная къ B, дастъ три составляющія x', y', z'; изъ которыхъ первая будетъ направлена по оси абсциссъ, а двѣ другія въ плоскостяхъ XY, XZ. Сила x' направленная по оси абсциссъ, будучи перенесена въ начало координатъ, не дастъ ни одной пары; но двѣ силы y' и z', перенесенныя въ то же начало координатъ, дадутъ двѣ пары находящіяся въ плоскостяхъ XY, XZ, прилежащихъ къ оси вращенія, и моменты этихъ паръ будутъ (полагая $AB = a$) $y'a$, $z'a$.

Итакъ уравненія будутъ:

$$X + x + x' = 0,$$

$$Y + y + y' = 0,$$

$$Z + z + z' = 0,$$

$$L = 0.$$

$$M + z'a = 0,$$

$$N - y'a = 0.$$

Здѣсь X, Y, Z, M, N могутъ имѣть какія угодно величины, потому что, полагая сопротивленіе неподвижныхъ точекъ неопредѣленнымъ во всѣ стороны, количества x, y, z, x', y', z' могутъ имѣть величины и знаки какіе угодно; а потому три первыя уравненія и два послѣднія будутъ всегда удовлетворены.

Слѣдовательно, для силъ приложенныхъ къ системѣ, должно быть $L = 0$.

Итакъ, *условія равновѣсія тѣла, которое должно вращаться около неподвижной точки приводятся къ тому, чтобы сумма моментовъ силъ относительно этой оси была сама по себѣ равна нулю.*

Если точки A и B не могутъ быть удерживаемы со всѣхъ сторонъ, а только могутъ перемѣщаться по направленію AB точно такъ, какъ еслибы они были соединены между собою и заключены въ безконечно узкій каналъ AB, то ихъ сопротивленія x и x', направляющіяся по оси абсциссъ, уничтожились бы сами собою, и мы имѣли бы еще уравненіе $X = 0$, которое показываетъ, что когда тѣло можетъ двигаться свободно по направленію оси вращенія, то кромѣ перваго вышеприведеннаго условія, нужно еще, чтобы сумма силъ разложенныхъ параллельно этой оси была сама по себѣравна нулю.

Разсмотримъ теперь *давленія, производамыя силами на двѣ неподвижныя точки.*

Давленія эти ни что иное, какъ дѣйствительныя сопротивленія r и r' двухъ неподвижныхъ точекъ, взятыхъ въ противоположныя стороны, и чтобы опредѣлить ихъ составляющія $-x$, $-y$, $-z$, $-x'$, $-y'$, $-z'$ параллельныя тремъ осямъ, мы имѣемъ пять уравненій:

$$X + x + x' = o,$$

$$Y + y + y' = o,$$

$$Z + z + z' = o,$$

$$M + z'a = o,$$

$$N + y'a = o.$$

Но такъ какъ здѣсь шесть неизвѣстныхъ, то, слѣдовательно, нельзя опредѣлить давленій $-r$ и $-r'$, или, по крайней мѣрѣ, одною изъ шести составляющихъ можно располагать произвольно. Но такъ какъ двѣ неизвѣстныхъ $-x$, $-x'$ входятъ только въ первое уравненіе, то четыре другія опредѣлятся изъ остальныхъ уравненій. Въ самомъ дѣлѣ, изъ двухъ послѣднихъ уравненій находимъ:

$$-y' = -\frac{N}{a},$$

$$-z' = \frac{M}{a};$$

Затѣмъ подставивъ эти выраженія въ предъидущія два уравненія, получимъ:

$$-y' = \frac{\mathrm{Y}a + \mathrm{N}}{a},$$

$$-\mathrm{Z}' = \frac{\mathrm{Z}a - \mathrm{M}}{a},$$

Слѣдовательно, неопредѣленность относится къ двумъ составляющимъ $-x$, $-x'$, сумма которыхъ можетъ быть опредѣлена изъ перваго уравненія $\mathrm{X} + x + x' = o$.

Затѣмъ, двѣ силы $-y$, $-z$ перпендикулярныя къ оси вращенія въ точкѣ А, слагаются въ одну

$$\sqrt{y^2 + z^2}$$

которая перпендикулярна къ той-же оси и образуетъ съ осями y и z углы, косинусы которыхъ будутъ:

$$\frac{-y}{\sqrt{y^2 + z^2}},$$

$$\frac{-z}{\sqrt{y^2 + z^2}}.$$

Также точно двѣ силы $-y'$, $-z'$, перпендикулярныя къ оси вращенія въ точкѣ В, сложатся въ одну

$$\sqrt{y'^2 + z'^2},$$

которая перпендикулярна къ оси и образуетъ съ осями y и z углы, конусы которыхъ будутъ:

$$\frac{-y'}{\sqrt{y'^2 + z'^2}},\ \frac{-z'}{\sqrt{y'^2 + z'^2}}.$$

И такъ два давленія нормальныя къ подвижной оси въ точкахъ

А и Б, совершенно опредѣлены, а слѣдовательно, давленія $-r$ и $-r'$ будутъ заключать только частную неопредѣленность, т. е. они должны быть взяты такъ, чтобы по разложеніи каждаго изъ нихъ на два другія, одно направленное по оси, а другое перпендикулярное къ этой оси, двѣ нормальныя силы имѣли бы найденныя нами величины и направленія, а сумма двухъ силъ, находящихся на оси была-бы равна X.

Объяснить эту неопредѣленность, находящуюся въ зависимости отъ сопротивленій x и x', представляемыхъ неподвижными точками А и В, по направленію соединяющей ихъ прямой можно тѣмъ, что эти точки принадлежатъ неизмѣняемой системѣ, т. е. какъ бы соединены между собою негибкимъ и нерастяжимымъ прутомъ, такъ что онѣ помогаютъ одна другой выдерживать дѣйствіе приложенныхъ силъ, и каждая изъ нихъ сама собою или помощью другой точки, оказываетъ столько сопротивленія, сколько необходимо для равновѣсія. Слѣдовательно, нельзя требовать, чтобы вычисленіе опредѣлило, въ частности, оба сопротивленія, которыя переходятъ незамѣтно всѣ или по частямъ изъ одной неподвижной точки въ другую и соединяются въ одно и тоже сопротивленіе.

Случай третій. *Равновѣсіе тѣла, опирающагося на неподвижную плоскость.*

Возьмемъ за такую плоскость горизонтальную плоскость координатъ x, y, и положимъ сначала, что тѣло опирается на эту плоскость только въ одной точкѣ А, которая положимъ будетъ начало координатъ.

Но мы знаемъ, что когда сила производитъ давленіе на плоскость, то всегда ее можно разложить на двѣ силы, одну перпендикулярную къ плоскости, а другую направленную въ самой плоскости. Первая необходимо уничтожится сопротивленіемъ плоскости, потому что нѣтъ причины, по которой-бы она двигала точку приложенія въ одну сторону предпочтительнѣе передъ другою въ той же плоскости. Другая составляющая не измѣнитъ своего дѣйствія, потому что это дѣйствіе будетъ такое, какъ-бы вовсе не существовало неподвижной плоскости. Плоскость сопротивленія можетъ уничтожить только силы, имѣющія нормальное къ ней направленіе, которыя для системы замѣнятъ эту плоскость.

Если z будетъ сопротивленіе точки опоры по направленію оси z, то уравненія равновѣсія будутъ:

$$X = o, \; Y = o, \; Z + z = o,$$

$$L = o, \; M = o, \; N = o.$$

Изъ послѣднихъ трехъ уравненій видно, что силы, приложенныя къ тѣлу, сводятся въ одну, которая проходитъ чрезъ начало координатъ, т. е. чрезъ точку опоры. Изъ первыхъ же двухъ уравненій видно, что эта равнодѣйствующая должна быть вертикальна, т. е. перпендикулярна къ неподвижной плоскости.

Третье уравненіе, $Z + z = o$, показываетъ, что эта равнодѣйствующая Z, можетъ имѣть какую угодно величину, и кромѣ того она должпа имѣть противный знакъ съ сопротивленіемъ Z плоскости. слѣдовательно. Предположивъ, что тѣло находится въ горизонтальной плоскости x и y, необходимо, чтобы сила Z была отрицательная, иначе она стремилась-бы поднять и отдѣлить тѣло отъ плоскости и не встрѣтила бы никакого сопротивленія, такъ что для равновѣсія эта плоскость была-бы лишняя, такъ какъ потребовались-бы тѣ-же условія, какъ и для тѣла совершенно свободнаго.

Теперь положимъ, что тѣло опирается еще въ другой точкѣ B. Возьмемъ AB за ось x, а точку A за начало координатъ.

Точка A произведетъ сопротивленіе z, направленное по оси z Тогда B произведетъ сопротивленіе z', направленное въ плоскости xz и дастъ въ этой же плоскости пару, моментъ которой будетъ $z'a$ полагая $AB = a'$.

Слѣдовательно, уравненія равновѣсія будутъ:

$$X = o, \; Y = o, \; Z + z + z' = o,$$

$$L = o, \; M + z'a' = o, \; N = o.$$

Эти уравненія показываютъ, что условное уравненіе:

$$XZ + YM + ZN = o$$

и неравенство

$$\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} > o$$

удовлетворены потому, что сопротивленія z и z' не могутъ быть оба равны нулю; но такъ какъ оба они съ одинаковымъ знакомъ, то и сила Z не можетъ быть равна нулю. Слѣдовательно, силы приложенныя къ системѣ должны имѣть одну равнодѣйствующую.

Изъ двухъ первыхъ уравненій усматриваемъ, что эта равнодѣйствующая должна быть вертикальна, т. е. перпендикулярна къ подвижной плоскости; а третье уравненіе $Z + z + z' = o$, показываетъ, что она можетъ имѣть какую угодно величину, лишь бы только не была положительная.

Если нужно найти величины координатъ p и q точки o, гдѣ направленіе равнодѣйствующей должно встрѣтить горизонталяную плоскость, то для этого пользуемся уравненіями:

$$p = \frac{M}{z},\ q = -\frac{L}{z};$$

подставляя вмѣсто L, M, Z ихъ величины, получимъ:

$$p = a'\frac{z'}{z + z'},\ q = o.$$

Такимъ образомъ изъ уравненія $q = o$ должно заключить, что равнодѣйствующая встрѣчаетъ горизонтальную плоскость на оси абсциссъ, т. е. на линіи, которая соединяетъ двѣ точки опоры; а такъ какъ:

$$p = a'\frac{z'}{z + z'},\ \text{и}\ \frac{z'}{z + z'}\ \text{всегда} < 1,$$

$$\text{то и } p \text{ будетъ} < a,$$

Слѣдовательно, направленіе равнодѣйствующей должно проходить между двумя точками опоры A и B.

Положимъ, наконецъ, что тѣло опирается на плоскость въ какихъ-нибудь другихъ точкахъ C, D . . . . . лежащихъ по одну сторону прямой AB, которую примемъ за ось абсциссъ. Сохраняя для точекъ A и B тѣ же наименованія, назовемъ чрезъ a'' и b'' координаты точки C, чрезъ a''' и b''' такія же координаты точки D . . . Сопротивленіе z'' точки C, будучи перенесено въ начало координатъ, дастъ двѣ пары, находящіяся въ плоскостяхъ XZ, YZ и имѣющія моменты $z''a''$, $z''b''$. Сопротивленіе z''' точки D дастъ двѣ пары, которыя будутъ въ тѣхъ же плоскостяхъ и которыхъ моменты $z''' a'''$, $z''' b'''$. . . . . Тогда уравненія равновѣсія будутъ:

$$X = o,\ Y = o,\ Z + z + z' + z'' + z''' + \ldots\ldots = o,$$

$$L - z''b'' - z'''b''' - \ldots\ldots = o,$$

$$M + z'a' + z''a'' + z'''a''' + \ldots\ldots = o.$$

Эти уравненія показываютъ, во-первыхъ, что всѣ силы, приложенныя къ системѣ сводятся въ одну силу, перпендикулярную къ неподвижной плоскости и величина которой не можетъ быть положительная; во-вторыхъ, что направленіе этой равнодѣйствующей должно пересѣкаться съ неподвижною плоскостью внутри многоугольника, образуемаго точками опоры A, B, C, D . . . . .

Въ самомъ дѣлѣ, если назовемъ чрезъ q ординату точки o, въ которой равнодѣйствующая встрѣчаетъ горизонтальную плоскость, то получимъ:

$$q = -\frac{L}{Z}.$$

Затѣмъ, подставляя вмѣсто L и Z ихъ величины, выведенныя изъ предъидущихъ уравненій, получимъ:

$$q = \frac{z''b'' + z'''b''' + \ldots\ldots}{z + z' + z'' + z''' + \ldots.}$$

Но сопротивленіе z, z', z'', z''' . . . . . будутъ всѣ положительныя, а ординаты b'', b''', ... имѣютъ всѣ одинъ и тотъ-же знакъ, потому что точки C, D' . . . . . , по положенію, находятся всѣ по одну сторону оси абсциссъ; слѣдовательно, ордината q будетъ имѣть одинъ знакъ съ ординатами b'', b''', ... а потому точка O будетъ находиться по ту сторону линіи AB, соединяющей точки A и B, по которой находятся точки C, D . . . . . Но такъ какъ за ось абсциссъ мы могли-бы взять и всякую другую изъ прямыхъ AC, BD . . . . . который соединяютъ двѣ точки опоры, оставляя всѣ другія по одну сторону, то отсюда заключаемъ, что точка O должна находиться относительно каждой прямой по одну сторону съ другими точками опоры, а слѣдовательно, необходимо будутъ заключаться внутри многоугольника, образуемаго линіями, которыя соединяютъ точки опоры. Что касается давленій, производимыхъ равнодѣйствующею силъ, приложенныхъ къ системѣ, на различныя точки опоры, то эти давленія равны и прямо противоположны сопротивленіямъ z, z', z'', z''' . . . . ., которыя должны оказывать точки опоры для равновѣсія системы.

Для опредѣленія ихъ служатъ три уравненія:

$$Z + z' + z' + z'' + z''' + \ldots\ldots = o,$$

$$L - b'' z'' - b''' z''' - \ldots\ldots = o,$$

$$M + a' z' + a'' z'' + a''' z''' + \ldots\ldots = o.$$

Но эти три уравненія и условіе, что неизвѣстныя z, z', z'', z''' . . . . . должны быть всѣ положительныя, будутъ недостаточны для опредѣленія давленій, которыя претерпѣваетъ неподвижная плоскость. Когда бываетъ болѣе трехъ точекъ опоры, или когда ихъ будетъ три, находящихся на одной прямой, то въ обоихъ этихъ случаяхъ искомыя давленія будутъ неопредѣленны, ибо, если положимъ, что точка c лежитъ на оси абсциссъ, проведенной чрезъ A и B, то ордината b'' будетъ равна нулю, и неизвѣстная z'' вовсе не будетъ входить въ уравненіе $L - b''$, $z''' - o$; слѣдовательно, останется только два уравненія для вычисленія неизвѣстныхъ z, z', z'', которыя еще не опредѣлены.

Въ послѣднемъ случаѣ, можно взять произвольно одно изъ давленій. ~~Здѣсь также, какъ~~ И и въ общемъ случаѣ,¹ выборъ давленій во всѣхъ точкахъ, исключая трехъ находящихся на одной прямой, зависитъ отъ нашего произвола. Вычисливъ затѣмъ эти послѣднія давленія помощію предъидущихъ уравненій, мы найдемъ, что ни для одного давленія нѣтъ положительной величины, такъ что задача будетъ всегда вполнѣ рѣшена.

~~Но если,~~ какъ мы только что доказали, ~~что~~ давленія будутъ неопредѣленны, въ случаѣ когда будутъ болѣе трехъ точекъ опоры, ~~то,~~ но с другой стороны, разсматривая à priori, что тѣло опирающееся на неподвижную плоскость въ произвольномъ числѣ точекъ и удерживаемое въ равновѣсіи силою нормальною къ этой плоскости, будетъ очевидно, что въ каждой точкѣ опоры будетъ происходить давленіе

1) когда более 3-хъ точекъ опоры

и это давленіе должно быть совершенно опредѣлено; предположеніе противное будетъ нелѣпо. Слѣдовательно, выводъ будетъ противорѣчивый, который съ перваго взгляда не совсѣмъ легко объяснить.

Отсюда однако не слѣдуетъ заключать, что извѣстная до сихъ поръ теорія недостаточна для рѣшенія задачъ о давленіяхъ, потому что, какъ мы увидимъ далѣе, эта задача неопредѣленна, и неопредѣленность происходитъ отъ принятыхъ нами предположеній, и что теорія даетъ все, что мы можемъ отъ нея требовать не противорѣча этимъ предположеніямъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если по положенію тѣло имѣетъ фигуру совершенно неизмѣняемую, то мы можемъ подразумѣвать, что точки прикосновенія тѣла соединены между собою совершенно негибкою плоскостью, которая опирается на неподвижныя точки A, B. C, D,... Но если будетъ болѣе трехъ точекъ опоры, или только три находящіяся на одной прямой линіи, то можно себѣ представить, что извѣстныя части давленій производимыхъ плоскостью на эти точки, отдѣляясь отъ однихъ—передаются другимъ точкамъ и, такимъ образомъ, мы ни какъ не можемъ заключить, ни о величинѣ давленія въ частности въ каждой точкѣ опоры, ни о томъ, гдѣ оно оказывается болѣе, не уничтоживъ предположенія о совершенной негибкости плоскости соединяющей точки тѣла.

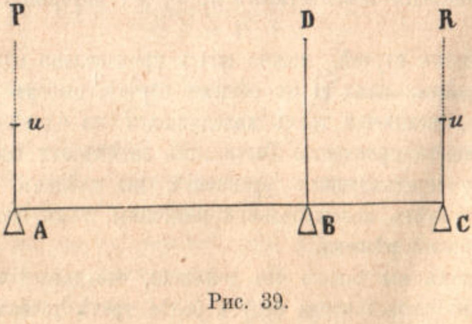


Рис. 39.

Объяснимъ это примѣромъ. Предположимъ (рис. 39), что тѣло опирается тремя точками лежащими на одной прямой линіи, и представимъ себѣ, что чрезъ эти точки проходитъ негибкій прутъ, лежащій на трехъ неподвижныхъ подставкахъ A, B, C. Если бы мы знали, что на три точки A, B, C прута дѣйствуютъ нормальныя силы P, Q, R, параллельныя между собою, то, и въ этомъ случаѣ, нельзя было-бы заключить, что давленія на точки опоры равны силамъ P, Q, R, ибо мы всегда могли бы вообразить въ двухъ крайнихъ силахъ P и R, двѣ ихъ части u и u', которыя вовсе не имѣютъ давленія на подставки A и C. Если возьмемъ эти двѣ части въ обратномъ содержаніи ихъ разстояній AB и CB отъ точки B, то, по причинѣ совершенной негибкости прута, можно представить, что эти двѣ силы дѣйствительно давятъ на подставку B въ соединеніи съ силою Q. Такимъ образомъ произойдетъ неопредѣленное давленіе $u + u'$, которое можно принять дѣйствующимъ безъ различія, или въ цѣлости на подставку B, или двумя частями на подставки A и C; и притомъ мы ничего не можемъ сказать ни о величинѣ этого давленія, ни о той точкѣ, на которую оно болѣе дѣйствуетъ, и, конечно, при этомъ должно уничтожить предположеніе о совершенной негибкости прута, который соединяетъ точки прикосновенія тѣла.

Давленія или дѣйствительныя сопротивленія, которыя необходимы точкамъ опоры для ихъ равновѣсія, не могутъ быть опредѣлены въ томъ случаѣ, когда число точекъ опоры болѣе трехъ или только три, но которыя находятся на одной прямой линіи, потому что тогда могутъ существовать промежуточныя точки опоры, способныя удѣлять прочимъ точкамъ опоры неизвѣстныя части своихъ сопротивленій. Такимъ образомъ, вслѣдствіе общей связи всѣхъ точекъ опоры, мы не можемъ отличить сопротивленій дѣйствительно существующихъ въ каждой изъ нихъ, отъ тѣхъ, которыя могутъ заимствовать однѣ отъ другихъ.

Теорія показываетъ намъ, что если сопротивленія, дѣйствительно существующія въ этихъ точкахъ, удовлетворяютъ тремъ уравненіямъ даннымъ выше, то не нарушая этихъ уравненій, какъ-бы мы ни распредѣлили силы давленія на различныя точки, каждая изъ нихъ будетъ оказывать, или собственнымъ своимъ или сопротивленіемъ соединеннымъ съ заимствованнымъ ею отъ другихъ точекъ опоры, противодѣйствіе, необходимое для уничтоженія давленія ими выдерживаемаго.

Точно также въ случаѣ двухъ точекъ опоры, или трехъ не находящихся на одной прямой линіи, истинныя сопротивленія должны быть опредѣлены, потому что каждая точка опоры, находясь одна возлѣ другой, или возлѣ линіи, которая соединяетъ двѣ другія точки, оказываетъ только свое собственное сопротивленіе, и, въ случаѣ, если оно недостаточно, ничего не можетъ заимствовать отъ сосѣднихъ точекъ опоры.

Парадоксъ, который мы разрѣшили, тѣмъ болѣе разителенъ, что въ природѣ давленія производимыя тѣлами въ различныхъ точкахъ прикосновенія, необходимо опредѣлены во всѣхъ случаяхъ; всѣ тѣла болѣе или менѣе гибки и упруги, и когда они давятъ одно на другое въ различныхъ точкахъ, находящихся въ одной плоскости, то все это давленіе распредѣляется между точками касанія извѣстнымъ образомъ. Это распредѣленіе давленія, находясь въ зависимости отъ гибкости и упругости тѣла, должно всегда удовлетворять уравненіямъ приведеннымъ выше. Но, чтобы получить столько уравненій сколько нужно для опредѣленій всѣхъ давленій, т. е. сколько имѣемъ точекъ касанія, то пришлось-бы ввести въ вычисленія физическія свойства тѣлъ, Такая задача представляетъ большія затрудненія, о которыхъ мы здѣсь говорить не будемъ.

Все что мы сказали о равновѣсіи тѣла опирающагося на одну плоскость, можно приложить и къ равновѣсію тѣла опирающагося одновременно на нѣсколько плоскостей. Каждая изъ нихъ должна производить на различныя точки прикосновенія сопротивленія нормальныя къ поверхности и, вводя эти новыя неопредѣленныя силы въ уравненія равновѣсія, мы легко дойдемъ до условій, которымъ должны удовлетворять силы непосредственно приложенныя къ тѣлу.

Въ томъ-же случаѣ, когда тѣло опирается различными точками на одну или нѣсколько кривыхъ поверхностей, можно предположить, что оно опирается на касательныя плоскости, проведенныя чрезъ эти точки къ поверхностямъ, Зная уравненія поверхностей, можно найти уравненія касательныхъ къ нимъ плоскостей или нормальныхъ, проведенныхъ чрезъ точки прикосновенія, затѣмъ ввести въ уравненія равновѣсія столько же неопредѣленныхъ силъ направленныхъ по этимъ нормальнымъ. Вопросъ, слѣдовательно, приведется къ рѣшенію предъидущей заадчѣ.

ГЛАВА III.

Центръ тяжести.

1. Общее опредѣленіе центра тяжести.

Занимаясь изслѣдованіемъ условій равновѣсія тѣлъ, мы, до сихъ поръ, не принимали во вниманіе тяжести тѣлъ. Въ настоящей главѣ мы увидимъ, какъ это общее свойство тѣлъ ввести въ вычисленіе, и тогда вышеизложенныя правила можно будетъ приложить къ опредѣленію равновѣсія физическихъ тѣлъ.

Мы называемъ *тяжестью* или *тяготѣніемъ* причину, заставляющую всѣ физическія тѣла ничѣмъ не поддерживаемыя падать на землю. Тяжесть можно разсматривать какъ силу, которая дѣйствуетъ на всѣ тѣла одинаково, т. е. сообщаетъ имъ, въ одно и то-же время, одинаковыя скорости движенія по направленію къ центру земли. Такъ, опыты показываютъ, что въ пустомъ пространствѣ тѣла неравныхъ массъ, напримѣръ, кусочекъ металла и пухъ падаютъ съ одной и той-же высоты съ одинаковою скоростью. Если, въ дѣйствительности, замѣчается противное, т. е. тяжелыя тѣла падаютъ съ большей скоростью, чѣмъ легкія, а газообразныя кажутся даже изъятыми отъ дѣйствія тяжести, то это происходитъ вслѣдствіе сопротивленія оказываемаго ихъ движенію воздухомъ. Это сопротивленіе, направленное вверхъ уменьшаетъ силу тяжести, такъ что въ дѣйствительности падающее тѣло подвержено дѣйствію силы равной разности этихъ двухъ противоположныхъ силъ.

Однако, тяжесть для одной и той-же матеріальной частицы, находящейся въ различныхъ мѣстахъ земнаго шара, въ строгомъ смыслѣ слова, не одинакова. Она измѣняется на поверхности земли отъ экватора, гдѣ она имѣетъ наименьшую величину, до полюсовъ, гдѣ она дѣлается наибольшею Кромѣ того, она уменьшается отъ экватора по мѣрѣ приближенія къ центру земли, и въ томъ же отношеніи, какъ квадратъ разстоянія частицы отъ центра земли увеличивается. Но для частицъ тѣлъ, которыя обыкновенно разсматриваются въ статикѣ, разность ихъ между разстояніями отъ экватора, а равно и отъ центра земли такъ мала, что измѣненія тяжести, переходя отъ одной частицы къ другой, совсѣмъ незамѣтны, а потому тяжесть можно разсматривать какъ силу постоянную.

Направленіе тяжести весьма точно представляетъ отвѣсъ, находящійся въ равновѣсіи, или перпендикуляръ къ поверхности спокойной воды.

Это направленіе называется *вертикальною линіею* разсматриваемаго мѣста, а всякая плоскость перпендикулярная къ вертикальной линіи называется *горизонтальною плоскостью*.

Такъ какъ поверхность земли, или вѣрнѣе поверхность океана почти сферическая, то направленія тяжести должны сходиться въ центрѣ земного шара,

Такимъ образомъ, съ перемѣною мѣста на землѣ, перемѣняется также и вертикальная линія, а вмѣстѣ съ нею и горизонтальная плоскость; но такъ какъ разстоянія, разсматриваемыя въ статикѣ очень малы, въ сравненіи съ радіусомъ земли (болѣе 6,000 вер.), то направленія двухъ вертикальныхъ линій, мало удаленныхъ одна отъ другой, безъ большой погрѣшности, можно принять за параллельныя.

Мы будемъ разсматривать всѣ равныя частицы тѣла, какъ побуждаемыя равными силами, параллельными и дѣйствующими въ одну сторону, а потому мы можемъ приложить къ силамъ, происходящимъ отъ тяжести все то, что было сказано о параллельныхъ силахъ, приложенныхъ къ системѣ точекъ, неизмѣнно между собою соединенныхъ.

Равнодѣйствующая всѣхъ силъ тяжести параллельна этимъ силамъ, т. е. вертикальна и равна ихъ суммѣ.

Величина этой равнодѣйствующей будетъ то, что мы называемъ *вѣсомъ тѣла*, который, слѣдовательно, пропорціоналенъ числу частицъ его составляющихъ, или количеству матеріи, которое оно въ себѣ заключаетъ; это количество называется *массою* тѣла.

Итакъ *тяжесть* или *тяготѣніе* и вѣсъ не одно и тоже. Тяжесть, какъ мы выше сказали, причина притягивающая тѣла къ землѣ, а вѣсъ означаетъ силу, происходящую въ каждомъ тѣлѣ отъ этой причины; силу, которая пропорціональна массамъ тѣлъ, и для каждаго изъ нихъ равна тому усилію, которое необходимо было-бы употребить для удержанія тѣла отъ паденія.

Параллельныя силы, приложенныя къ различнымъ точкамъ тѣла имѣютъ *центръ*, т. е. такую точку, чрезъ которую проходятъ послѣдовательно равнодѣйствующія, соотвѣтствующія разсматриваемымъ силамъ. Эти силы, не измѣняя ихъ параллельности, могутъ быть обращаемы около точекъ ихъ приложенія. Отсюда слѣдуетъ, что въ каждомъ тѣлѣ есть точка, чрезъ которую проходитъ направленіе отвѣса при всѣхъ его положеніяхъ относительно горизонтальной плоскости. Въ самомъ дѣлѣ, давая различныя положенія тѣлу, силы тяжести дѣйствующія на его частицы, не будутъ измѣнять ни своей величины, ни точекъ приложенія, ни своей параллельности, а слѣдовательно, послѣдовательныя ихъ равнодѣйствующія будутъ пересѣкаться въ одной точкѣ.

Точка, чрезъ которую проходитъ направленіе вѣса, при всякомъ положеніи тѣла относительно горизонтальной плоскости, называется *центромъ тяжести тѣла*.

Если центръ тяжести тѣла неподвиженъ, то, очевидно, тѣло будетъ находиться въ равновѣсіи при всякомъ его положеніи около этого центра, т. е., что если мы будемъ вращать его около этой точки, то оно въ этомъ положеніи и останется, потому что при всѣхъ этихъ положеніяхъ, равнодѣйствующая силъ тяжести всегда проходитъ чрезъ центръ этихъ силъ, а слѣдовательно, въ этомъ случаѣ, дѣйствіе ея уничтожится.

Такъ какъ центръ тяжести ни что иное какъ центръ параллельныхъ силъ тяжести, приложенныхъ ко всѣмъ частицамъ тѣла, то когда эти силы равны по положенію, тогда слѣдовательно, *разстояніе центра тяжести отъ какой нибудь плоскости, равно среднему разстоянію всѣхъ частицъ тѣла отъ той же плоскости.* Слѣдовательно, положеніе этого центра нисколько не зависитъ отъ тяжести, но только отъ взаимнаго расположенія частицъ въ тѣлѣ.

Всѣ силы тяжести, дѣйствующія на частицы какого нибудь тѣла могутъ быть замѣнены общею ихъ равнодѣйствующею, и слѣдовательно центръ тяжести тѣла можно разсматривать какъ точку, въ которой сосредоточена вся его масса. Итакъ, если въ рѣшеніи задачъ принимать въ разсужденіе силу тяжести, то мы вмѣсто самаго тѣла, можемъ принять въ разсчетъ только его центръ тяжести, въ которомъ должно вообразить силу равную и параллельную вѣсу тѣла; потомъ соединяя эти новыя силы съ тѣми, которыя непосредственно приложены къ системѣ, найдемъ, по правиламъ, изложеннымъ въ предъидущихъ главахъ, и условія ихъ равновѣсія.

Переходимъ къ опредѣленію центровъ тяжести различныхъ тѣлъ, или ихъ системъ.

Когда тѣло или систему тѣлъ можно разложить на такія части, центры тяжести которыхъ въ частности извѣстны, то не трудно будетъ опредѣлить центръ тяжести всего тѣла или системы, потому что этотъ центръ ни что иное какъ точка приложенія равнодѣйствующей силъ тяжести, приложенныхъ ко всѣмъ частицамъ; для опредѣленія его должно, во-первыхъ, найти всѣ тѣ точки, къ которымъ приложены частныя равнодѣйствующія силъ тяжести, дѣйствующихъ на каждую часть системы, а затѣмъ искать точку приложенія равнодѣйствующей общей всѣмъ частнымъ равнодѣйствующимъ.

Итакъ, если извѣстны центры тяжести различныхъ частей системы, то нужно только предположить, что къ этимъ центрамъ приложены силы параллельныя и равныя вѣсамъ соотвѣтственныхъ частей и тогда центръ тяжести системы найдется точно также, какъ центръ параллельныхъ силъ, которыя представляютъ вѣса частей системы. Для этого изысканія можно употребить или послѣдовательное сложеніе силъ, или теорію моментовъ.

Но, такъ какъ разстояніе центра параллельныхъ силъ отъ какой-нибудь плоскости, находится чрезъ раздѣленіе суммы моментовъ силъ, взятыхъ относительно этой плоскости, на сумму всѣхъ силъ, то, слѣдовательно, *разстояніе центра тяжести системы тѣлъ отъ какой-нибудь плоскости равно суммѣ моментовъ ихъ вѣсовъ относительно этой плоскости, раздѣленной на сумму всѣхъ вѣсовъ*; или (такъ какъ массы пропорціональны вѣсамъ) *равно суммѣ моментовъ массъ, раздѣленныхъ на сумму всѣхъ массъ*, подразумѣвая подъ моментомъ массы произведеніе этой массы на разстояніе ея центра тяжести отъ разсматриваемой плоскости.

Вычисливъ такимъ образомъ разстоянія центра тяжести отъ трехъ какихъ-нибудь плоскостей, которыя, для большей простоты, можно предположить взаимно перпендикулярными можно найти положеніе этого центра въ пространствѣ.

Въ случаѣ, когда всѣ массы системы равны, разстояніе центра тяжести до какой-нибудь плоскости найдется, взявъ среднее ариѳметическое между разстоніями центровъ тяжести всѣхъ тѣлъ до плоскости.

Если плоскость, относительно которой берутся моменты, проходитъ чрезъ центръ тяжести системы, то разстояніе этого центра до плоскости равно нулю; а слѣдовательно *сумма моментовъ массъ,* *взятыхъ относительно плоскости проходящей чрезъ центръ тяжести системы всегда равна нулю;* или, другими словами: *сумма моментовъ массъ, находящихся по одну сторону плоскости, равна суммѣ моментовъ массъ, находящихся по другую ея сторону.*

И наоборотъ, *когда сумма моментовъ массъ, относительно какой-нибудь плоскости, равна нулю, тогда центръ тяжести системы лежитъ въ этой плоскости,* потому что разстояніе этого центра до плоскости равно нулю.

Изъ этого можно заключить, что если центры тяжести всѣхъ разсматриваемыхъ тѣлъ находятся въ одной и той-же плоскости, то и центръ тяжести всей системы будетъ также находиться въ этой плоскости; если-же центры тяжести тѣлъ находятся на одной прямой, то и центръ тяжести системы будетъ находится на той-же прямой, потому что, въ первомъ случаѣ, всѣ тѣла имѣютъ свой центръ тяжести въ одной плоскости, а слѣдовательно и моменты ихъ массъ, относительно этой плоскости, всѣ равны нулю. Разстояніе центра тяжести системы до плоскости также равно нулю, а потому и этотъ центръ находится въ самой плоскости.

Во второмъ случаѣ, если всѣ центры тяжести тѣлъ находятся на прямой линіи, то проведя чрезъ эту линію двѣ какія-нибудь плоскости, увидимъ, что центры тяжести различныхъ тѣлъ, будутъ въ одно время, находиться и на обѣихъ плоскостяхъ. Слѣдовательно, центръ тяжести системы будетъ также находиться на этихъ двухъ плоскостяхъ, а потому не иначе какъ на пересѣченіи ихъ, которое и будетъ данная прямая линія.

Впрочемъ, два послѣднія слѣдствія очевидны сами собою, если только представимъ себѣ, что центръ тяжести системы отыскивается чрезъ послѣдовательное соединеніе силъ или вѣсовъ, приложенныхъ къ центрамъ тяжести различныхъ тѣлъ.

Если центры тяжести всѣхъ тѣлъ находятся въ одной плоскости, то и центръ тяжести системы также будетъ находиться въ этой плоскости и для опредѣленія его положенія достаточно найти его разстояніе отъ двухъ другихъ плоскостей. Принявъ, для большей простоты, обѣ плоскости перпендикулярными къ первой, то разстоянія различныхъ центровъ тяжести отъ этихъ двухъ плоскостей будутъ тѣ-же, что и разстоянія до ихъ слѣдовъ, приведенныхъ на первой плоскости.

Слѣдовательно, *если въ плоскости, содержащей центры тяжести различныхъ тѣлъ, проведемъ какія-нибудь двѣ прямыя или оси непараллельныя между собою, то разстоянія центра тяжести системы до этихъ двухъ прямыхъ найдется, взявъ сумму моментовъ всѣхъ массъ, относительно этихъ прямыхъ и раздѣливъ на сумму всѣхъ массъ.* При этомъ для каждой прямой должно принимать моменты массъ за положительныя, находящіяся по одну ея сторону и за отрицательныя — по другую.

Такимъ образомъ, мы найдемъ, въ какомъ разстояніи и по какую сторону находится центръ тяжести системы относительно этихъ двухъ осей, и тогда проведя въ найденныхъ разстояніяхъ двѣ линіи параллельныя осямъ, то центръ тяжести будетъ лежать на общемъ ихъ пересѣченіи.

Когда центры тяжести всѣхъ тѣлъ находятся на данной прямой линіи, то центръ тяжести системы, находясь на той-же самой линіи, будетъ извѣстенъ, и для его опредѣленія достаточно найти разстояніе его до какой-нибудь плоскости непараллельной данной прямой. Если мы, для большей простоты, возьмемъ эту плоскость за перпендикулярную къ линіи центровъ тяжести, то разстоянія всѣхъ этихъ центровъ отъ плоскости будутъ тѣ-же, какъ и ихъ разстоянія до точки пересѣченіи прямой съ плоскостью.

Итакъ, *когда нѣсколько тѣлъ имѣютъ центры тяжести находящіеся на одной прямой линіи, то разстояніе центра тяжести системы отъ точки, взятой на прямой линіи, будетъ равно суммѣ моментовъ массъ относительно этой точки, раздѣленной на сумму всѣхъ массъ.* Здѣсь необходимо взять съ однимъ и тѣмъ-же знакомъ моменты массъ, находящихся по одну сторону точки, и съ знакомъ противоположнымъ, моменты массъ, находящихся по другую ея сторону.

При этомъ мы можемъ узнать, въ какомъ разстояніи и по какую сторону центръ тяжести системы находится относительно произвольно взятой на данной линіи точки; если затѣмъ отложить отъ этой точки въ найденную сторону длину равную искомому разстоянію, то конецъ этой длины покажетъ на линіи мѣсто центра тяжести системы.

Изъ этого видно, какъ легко найти центръ тяжести тѣла или системы тѣлъ, если намъ извѣстны центры тяжести всѣхъ частей, которыя ихъ составляютъ. Намъ остается только разсмотрѣть, какъ опредѣляются центры тяжести тѣлъ, которые не разлагаются на части, имѣющія извѣстные центры тяжести.

Всякое тѣло можно разсматривать какъ совокупность матеріальныхъ точекъ, которыя сами по себѣ будутъ центры тяжести; поэтому для опредѣленія центра тяжести всего тѣла можно приложить предъидущій способъ и тогда разстояніе центра тяжести отъ какой-нибудь плоскости опредѣлится раздѣливъ сумму моментовъ всѣхъ частицъ этого тѣла, относительно плоскости, на сумму всѣхъ частицъ, или, что то-же самое, на массу тѣла. Но для такого рѣшенія вопроса необходимо прибѣгнуть къ помощи высшаго математическаго анализа, что не входитъ въ предметъ нашего курса статики. Мы ограничимся изложеніемъ самыхъ простыхъ способовъ опредѣленія центровъ тяжести, которые необходимы для нашего предмета, и которые не выходятъ изъ области элементарной математики.

Мы знаемъ, что положеніе центра тяжести въ тѣлѣ зависитъ только отъ взаимнаго расположенія частицъ въ немъ, и слѣдовательно, во-первыхъ, отъ фигуры тѣла или пространства, которое оно занимаетъ; во-вторыхъ, отъ относительной плотности различныхъ частей тѣла. Такъ что, если фигура и объемъ тѣла остаются одни и тѣ-же, то при удаленіи частицъ въ одной изъ частей его, въ другой—онѣ сблизятся болѣе прежняго, и силы на нихъ дѣйствующія, измѣняя точки своихъ приложеній, измѣнятъ положеніе общей ихъ равнодѣйствующей, а слѣдовательно и положеніе центра тяжести тѣла. Итакъ, при опредѣленіи этой точки, слѣдуетъ принять во вниманіе не только фигуру тѣла, но также и законъ, по которому плотность тѣла измѣняется, переходя отъ одной частицы къ другой.

Если для простѣйшаго рѣшенія вопроса, положимъ, что тѣла совершенно однородны, или имѣютъ одинаковую плотность во всѣхъ своихъ частяхъ, то тогда положеніе центра тяжести будетъ зависѣть только отъ фигуры тѣлъ, и тогда опредѣленіе этого центра будетъ составлять простую геометрическую задачу.

На этомъ предположеніи совершенно однородныхъ тѣлъ, опредѣляются обыкновенно центры тяжести линій, поверхностей и тѣлъ имѣющихъ вполнѣ опредѣленную геометрическую фигуру, и на частицы которыхъ дѣйствіе тяжести принимается одинакимъ. Хотя задача эта, съ перваго взгляда можетъ показаться чисто умозрительною, но въ статикѣ она также необходима, какъ опредѣленіе площадей и объемовъ въ геометріи.

2. Центры тяжести фигуръ.

Всѣ фигуры имѣющія такую точку, чрезъ которую если провести плоскость, то она раздѣлитъ фигуру на двѣ симметричныя части, имѣютъ центръ тяжести, обыкновенно находящійся въ этой точкѣ и которая будетъ, въ то-же время, и центромъ фигуры.

Въ самомъ дѣлѣ, если проведемъ плоскость чрезъ центръ фигуры, то эта плоскость раздѣлитъ фигуру на двѣ части совершенно симметричныя, такъ какъ нѣтъ причины, чтобы центръ тяжести, который есть единственная точка, и положеніе котораго зависитъ только отъ данной фигуры, находился бы по одну сторону плоскости, предпочтительно передъ другою; слѣдовательно, онъ будетъ въ самой плоскости.

Слѣдовательно, центръ тяжести, будучи въ одно время на всѣхъ плоскостяхъ, проведенныхъ чрезъ центръ фигуры, будетъ въ этомъ центрѣ, который будетъ, въ то же время, и общее пересѣченіе всѣхъ плоскостей.

Изъ этого непосредственно слѣдуетъ, что:

1) Центръ тяжести прямой линіи всегда находится на срединѣ ея длины.

2) Центръ тяжести площади параллелограмма находится въ пересѣченіи обѣихъ его діагоналей, или въ срединѣ одной изъ нихъ.

3) Центръ тяжести объема параллелепипеда находится на пересѣченіи четырехъ его діагоналей, или въ срединѣ одной изъ нихъ.

Отсюда также можно заключить, что центръ тяжести окружности или площади круга будетъ центръ этого круга; также центръ тяжести поверхности или объема шара будетъ центръ этого шара; что центръ тяжести поверхности или объема цилиндра, имѣющаго параллельныя основанія, находится на срединѣ его оси и т. п.

Но, въ особенности, должно замѣтить первыя три слѣдствія: о центрахъ тяжести прямой линіи, параллелограмма и параллелопипеда; такъ какъ эти фигуры можно разсматривать какъ элементы, изъ которыхъ состоятъ всѣ другія.

Задача 1. *Найти центръ тяжести многоугольника и вообще системы прямыхъ линій, расположенныхъ въ пространствѣ.*

Предположивъ, что масса каждой прямой сосредоточена въ ея центрѣ тяжести, который находится на срединѣ ея длины, намъ останется разсмотрѣть совокупность точекъ, которыя будутъ центры тяжести линій, представляющихъ вѣсъ этихъ точекъ.

Итакъ, центръ тяжести системы найдется или чрезъ послѣдовательное соединеніе вѣса, или же по теоріи моментовъ, какъ объяснено выше.

Укажемъ здѣсь на простой способъ опредѣленія центра тяжести болѣе удобный, чѣмъ общій способъ.

Положимъ требуется найти центръ тяжести контура треугольника, то для этого достаточно соединить средины трехъ его сторонъ тремя прямыми линіями; отчего получится треугольникъ подобный данному, и раздѣлить углы его на двѣ равныя части прямыми линіями, которыя пересѣкутся въ искомомъ центрѣ тяжести. Слѣдовательно центръ тяжести контура треугольника будетъ ни что иное, какъ центръ тяжести круга вписаннаго въ треугольникъ, образуемой линіями соединяющими средины трехъ его сторонъ.

Задача II. *Найти центръ тяжести площади многоугольника, и вообще совокупности плоскихъ и прямолинейныхъ фигуръ, расположенныхъ въ пространствѣ.*

Такъ какъ всякій многоугольникъ можно разложить на треугольники, то слѣдовательно нужно найти сначала центръ тяжести какого-нибудь изъ треугольниковъ, а затѣмъ, взявъ центры тяжести всѣхъ треугольниковъ, составляющихъ данную систему, останется только разсмотрѣть совокупность

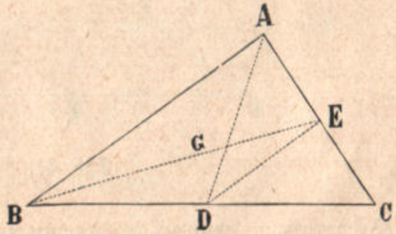


Рис. 40.

точекъ, имѣющихъ опредѣленное положеніе, вѣсъ которыхъ будетъ соотвѣтственно выражаться площадями треугольниковъ, имѣющихъ центры тяжести въ этихъ точкахъ и тогда задача рѣшится подобно предъидущей.

Опредѣленіе центра тяжести треугольника. Данъ треугольникъ ABC (рис. 40); представимъ себѣ, что онъ состоитъ изъ безчисленнаго множества прямыхъ линій, параллельныхъ основанію BC. Очевидно, что прямая линія AD, проведенная изъ вершины A до средины D основанія, раздѣлитъ всѣ эти прямыя на двѣ равныя части. Слѣдовательно, ихъ центры тяжести всегда будутъ находиться на прямой AD, а потому центръ тяжести всей системы, т. е. всего треугольника, будетъ лежать также на этой прямой.

Разсуждая такъ, мы видимъ, что центръ тяжести треугольника долженъ также находиться и на прямой BE, проведенной изъ вершины угла B до средины C, противолежащей стороны AC, т.-е. на двухъ пересѣкающихся прямыхъ, слѣдовательно будетъ необходимо въ ихъ общемъ пересѣченіи G.

Если соединимъ точки D и E прямою DE, то увидимъ, что она будетъ параллельна AB и равна ея половинѣ, потому что точки D и E находятся посрединѣ боковъ CB и CA. Но такъ какъ DE равна половинѣ AB, то по причинѣ подобія треугольниковъ DGE и AGB, сторона DG будетъ также половина стороны AG.

Итакъ, DG будетъ треть AD, а AG будетъ двѣ трети этой линіи.

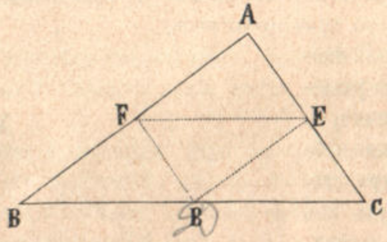


Рис. 41.

Слѣдовательно, *центръ тяжести площади какого-нибудь треугольника лежитъ на прямой, проведенной изъ вершины одного изъ его угловъ въ срединѣ, противолежащей ему стороны и находится на одной трети этой линіи, отъ основанія, или на двѣ трети той-же прямой, отъ вершины угла.*

Предъидущее доказательство такъ просто и естественно, что мы не могли здѣсь о немъ умолчать.

Имѣется еще другое доказательство, которое не оставляетъ никакого сомнѣнія относительно его точности.

Чрезъ средину D основанія BC треугольника ABC (рис. 41) проведемъ двѣ прямыя DE и DF параллельныя другимъ его сторонамъ, которыя ихъ пересѣкаютъ въ точкахъ E и F чрезъ что данный треугольникъ раздѣлится на параллелограммъ AEDF и два треугольника DEG и DFB, совершенно равные между собою и подобные первому. Моментъ треугольника ABC, относительно какой-нибудь линіи, проведенной въ его плоскости, будетъ равенъ суммѣ моментовъ параллелограмма и двухъ треугольниковъ.

Если a будетъ площадь одного изъ этихъ треугольниковъ, то $4a$ будетъ площадь даннаго треугольника. Назовемъ чрезъ x разстояніе центра тяжести этого треугольника до основанія BC, то $4ax$ будетъ его моментъ относительно этой линіи.

Означимъ чрезъ h высоту треугольника; то $\frac{h}{2}$ будетъ разстояніе центра тяжести параллелограмма отъ основанія; и такъ какъ площадь параллелограмма $= 2a$, то моментъ его будетъ:

$$2a \times \frac{h}{2}, \text{ т. е. } ah.$$

Далѣе, центры тяжести двухъ треугольниковъ находятся на одинаковомъ разстояніи отъ основанія BC; слѣдовательно, если назовемъ чрезъ x' это разстояніе, то сумма ихъ моментовъ будетъ $2ax'$.

Но такъ какъ:

$$4ax = ah + 2ax',$$

то раздѣливъ это уравненіе на $4a$ получимъ:

$$x = \frac{1}{4}\, h + \frac{x'}{2}.$$

Если-бы мы предположили, что въ подобныхъ треугольникахъ центры тяжести будутъ точки подобнымъ образомъ расположенныя, тогда какъ измѣренія треугольника BFD, или DEC половины измѣреній треугольника ABC, мы получили-бы:

$$x' = \frac{x}{2};$$

подставля эту величину въ предъидущее уравненіе, получимъ:

$$x = \frac{h}{3}$$

т. е., что центръ тяжести треугольника находится, отъ каждой изъ его сторонъ, на одну треть высоты угла противолежащаго каждой сторонѣ, и что слѣдовательно онъ находится въ той точкѣ, которую мы опредѣлили выше.

Но можно достигнуть того-же вывода безъ всякаго предположенія. Для треугольника ABC мы нашли, что:

$$x = \frac{1}{4}\,h + \frac{x'}{2}$$

гдѣ x есть разстояніе его центра тяжести отъ основанія BC, и x' разстояніе центра тяжести треугольника BFD отъ основанія BD; то если въ треугольникѣ BFD мы сдѣлаемъ такое построеніе, какъ и въ треугольникѣ ABC, и назовемъ чрезъ x'' разстояніе подобное означенному чрезъ x', полагая что высота новаго треугольника вдвое менѣе высоты перваго, то получимъ уравненіе:

$$x' = \frac{1}{4}\,\frac{h}{2} + \frac{x''}{2}$$

Продолжая такое-же построеніе найдемъ:

$$x'' = \frac{1}{4}\,\frac{h}{4} + \frac{x'''}{2},$$

$$x''' = \frac{1}{4}\,\frac{h}{8} + \frac{x''''}{2},$$

. . . .

гдѣ x''', x'''', ... означаютъ разстояніе центровъ тяжести послѣдовательныхъ треугольниковъ отъ ихъ основанія; разстоянія эти уменьшаются сами собою, и послѣднее изъ нихъ можетъ быть сдѣлано менѣе всякой данной величины, потому что оно всегда менѣе высоты треугольника, въ которомъ его разсматриваемъ.

Итакъ, подставляя послѣдовательно въ первое уравненіе вмѣсто x', x'', x''' . . . ., ихъ величины получимъ:

$$x = \frac{h}{4} + \frac{h}{4.4} + \frac{h}{4.4.4} + \dots \text{ до безконечности.}$$

Откуда.

$$x = \frac{h}{3}.$$

Положимъ, что мы имѣемъ три равныя массы, имѣющія свои центры тяжести въ углахъ треугольника ABC (рис. 40). Центръ тяжести этихъ трехъ тѣлъ будетъ тотъ-же, что и треугольника, надо взять сначала центръ тяжести двухъ какихъ-нибудь изъ этихъ тѣлъ; напримѣръ B и C, центръ этотъ будетъ находиться въ точкѣ D на срединѣ линіи BC, потомъ проведя линію DA, должно раздѣлить ее въ точкѣ G въ обратномъ отношеніи 2 къ 1.

Построеніе это дастъ также и центръ тяжести треугольника ABC.

Откуда слѣдуетъ, что разстояніе центра тяжести треугольника отъ плоскости, лежащей какъ угодно въ пространствѣ, равно среднему разстоянію трехъ его угловъ до той-же плоскости.

Опредѣленіе центра тяжести трапеціи. Продолживъ двѣ стороны трапеціи до ихъ пересѣченія, мы получимъ два подобные треугольника съ общею вершиною, и которые имѣютъ основаніями два основанія трапеціи. Такъ какъ линія, соединяющая общую вершину со срединою нижняго основанія проходитъ чрезъ средину верхняго, то слѣдуетъ, что эта линія проходитъ въ одно время и чрезъ центры тяжести обоихъ треугольниковъ, а слѣдовательно и чрезъ центръ трапеціи равной разности треугольникъ. Итакъ, *центръ тяжести трапеціи находится на линіи соединяющей средины двухъ параллельныхъ основаній;* остается опредѣлить разстояніе этого центра отъ одного изъ этихъ основаній, или, все равно, отношеніе этихъ разстояній къ двумъ основаніямъ.

Назовемъ чрезъ x неизвѣстное разстояніе искомой точки отъ нижняго основанія: чрезъ H и h высоты двухъ подобныхъ треугольниковъ. Далѣе означивъ чрезъ H^2 площадь или вѣсъ большаго треугольника, то h^2 будетъ вѣсъ меньшаго треугольника, а $H^2—h^2$ вѣсъ трапеціи. Итакъ, моментъ перваго изъ этихъ вѣсовъ, относительно нижняго основанія будетъ:

$$H^2 = \frac{H}{2},$$

моментъ втораго будетъ:

$$h^2\left(\frac{h}{3} + H - h\right)$$

и моментъ третьяго:

$$(H^2 - h^2)x.$$

Приравнивая первый моментъ къ суммѣ остальныхъ двухъ, получимъ, для опредѣленія x, уравненіе:

$$3(H^2 - h^2)x = H^2 - 3h^2H + 2h^3$$

Отыскивая также разстояніе y центра тяжести отъ верхняго основанія, или, если это разстояніе y равно $(H — h)$ уменьшенному на x, то найдемъ:

$$3(H^2 - h^2)\ y = h^2 - 3H^2h + 2H.$$

Сравнивъ эти два уравненія почленно и отбросивъ въ одной части общаго множителя $3(H^2 — h^2)$, а въ другой множителя $(H—h)^2$ получимъ отношеніе:

$$x : y = H + 2h^2 : h + 2H;$$

подставляя вмѣсто высотъ пропорціональныя имъ основанія B и l, получимъ пропорцію:

$$x : y = B + 2b^2 : b + 2B,$$

Итакъ: *центръ тяжести трапеціи находится на линіи соединяющей средины двухъ ея основаній и раздѣляетъ эту* *линію, въ отношеніи двухъ суммъ, изъ которыхъ первая найдется, складывая первое основаніе съ удвоеннымъ вторымъ, а вторая, складывая второе основаніе съ удвоеннымъ первымъ.*

На основаніи только что сказаннаго можно сдѣлать весьма простое построеніе: продолжимъ вправо одно изъ двухъ основаній на длину равную другому; это послѣднее продолжимъ влѣво на длину равную первому основанію; и если соединимъ прямою линіею концы двухъ, такимъ образомъ, продолженныхъ основаній, то эта прямая пересѣчетъ линію соединяющую средины двухъ основаній въ центрѣ тяжести трапеціи.

Замѣтимъ, что предъидущая пропорція не зависитъ отъ высоты трапеціи, но только отъ отношенія двухъ ея основаній, и потому она останется безъ перемѣны для всѣхъ трапецій, имѣющихъ пропорціональныя основанія.

Когда основанія равны, то $x = y$; т. е. трапеція превратится въ параллелограммъ и центръ тяжести его будетъ равно удаленъ отъ обоихъ основаній.

Когда одно основаніе равно нулю, то $y = 2x$; т. е. вмѣсто трапеціи получимъ треугольникъ съ основаніемъ B, а потому центръ ея вдвое ближе къ основанію, чѣмъ къ вершинѣ.

Задача III. *Найти центръ тяжести толстоты какого нибудь многогранника, и вообще системы многогранниковъ, какъ угодно расположенныхъ въ пространствѣ.*

Всякій многогранникъ можно разложить на треугольныя пирамиды, и потому мы сначала найдемъ центръ тяжести треугольной пирамиды. Потомъ возьмемъ центры тяжести всѣхъ пирамидъ, составляющихъ данную систему, и затѣмъ останется только найти центръ тяжести точекъ, вѣсъ которыхъ представляютъ объемы пирамидъ, имѣющихъ эти-же точки своими центрами тяжести, и задача будетъ рѣшена.

Опредѣленіе центра тяжести пирамиды. Дана треугольная пирамида ABCD (рис. 42). Представимъ себѣ, что эта пирамида состоитъ изъ безчисленнаго множества отрѣзковъ параллельныхъ основанію BCD. Очевидно, что прямая, проведенная отъ вершины угла къ какой нибудь точкѣ, взятой на основаніи, пересѣчетъ всѣ эти отрѣзки и самое основаніе въ точкахъ подобно расположенныхъ; если эту прямую проведемъ къ центру тяжести I основанія, то она пройдетъ и чрезъ центры тяжести всѣхъ параллельныхъ отрѣзковъ. Слѣдовательно, центръ тяжести системы отрѣзковъ, а потому и всей пирамиды, долженъ находиться на прямой AI.

Разсуждая совершенно аналогично этому, мы увидимъ, что центръ тяжести пирамиды долженъ находиться также на линіи CH, которая соединяетъ вершину угла C съ центромъ тяжести H противолежащей ему плоскости, то, слѣдовательно, искомый центръ необходимо будетъ находиться на пересѣченіи G этихъ двухъ прямыхъ.

Итакъ двѣ линіи AI и CH должны необходимо пересѣкаться; что, впрочемъ, видно также и непосредственно изъ разсматриванія центра тяжести, потому что, если проведемъ линію CI, то эта прямая пересѣчетъ сторону BD въ ея срединѣ E, ибо точка I есть центръ тяжести треугольника BCD; по той же самой причинѣ, если проведемъ AH, то эта прямая пересѣчетъ BD въ той же точкѣ E, а слѣдовательно, двѣ прямыя AI′ и CH будутъ находиться въ одной плоскости съ треугольникомъ AEC, и необходимо пересѣкаются.

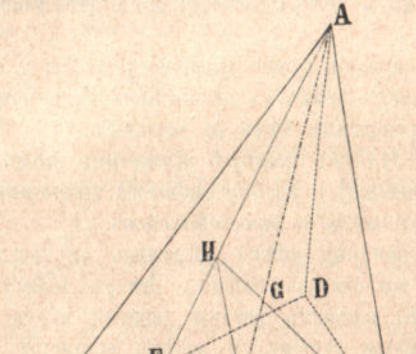


Рис. 42.

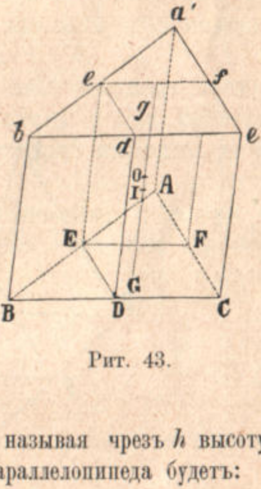
Но такъ какъ точка I находится на одной трети EC, а точка H на одной трети EA, то, слѣдовательно, прямая IH будетъ параллельна AC, и равна одной трети ея длины. Но если прямая $IH = {}^1/_3\ AC$, то вслѣдствіе подобія треугольниковъ IGH и AGC, сторона IG будетъ треть AG, или четверть IA, а AG будетъ три четверти IA.

Итакъ, *центръ тяжести треугольной пирамиды лежитъ на линіи, проведенной отъ вершины одного изъ четырехъ ея угловъ къ центру тяжести противолежащаго ему основанія и удаленъ отъ основанія на одну четверть этой линіи, или на три четверти той-же прямой отъ вершины угла.*

Такое-же доказательство, которое мы привели для треугольника, можно также приложить и къ треугольной перамидѣ.

Для этого разсмотримъ треугольную призму ABCabc (рис. 43). Чрезъ средину E, стороны AB основанія ABC, проведемъ двѣ плоскости EFf и EDd, параллельныя плоскостямъ BCbc, ACca. Разложимъ данную призму на двѣ другія, и одинъ параллелопипедъ.

Означимъ чрезъ a объемъ одной изъ этихъ двухъ призмъ совершенно равныхъ, то $4a$ будетъ объемъ данной призмы, а $2a$ объемъ параллелопипида.



Рит. 43.

Далѣе, означимъ чрезъ x разстояніе центра тяжести цѣлой призмы отъ грани BAab, моментъ ея относительно этой грани будетъ $4ax$. Пусть также, для двухъ частныхъ призмъ, x' будетъ разстоянія ихъ центровъ тяжести отъ той-же грани, разстоянія, которыя совершенно равны между собою, то $2ax'$ будетъ сумма ихъ моментовъ. Наконецъ, называя чрезъ h высоту ребра Cc надъ плоскостью BAab, моментъ параллелопипеда будетъ:

$$2a \cdot \frac{h}{2}, \text{ или проще } ah.$$

Итакъ мы получимъ:

$$4ax = ah + 2ax',$$

слѣдовательно:

$$x = \frac{h}{4} + \frac{x'}{2};$$

или

$$x = \frac{h}{3}.$$

Отсюда видно, что центръ тяжести треугольной призмы находится отъ каждой изъ ея граней на одну треть высоты ребра параллельнаго грани, слѣдовательно, онъ лежитъ на линіи Gg, соединяющей центры тяжести обоихъ основаній, именно въ точкѣ I находящейся въ срединѣ линіи Gg, которую назовемъ для краткости осью призмы.

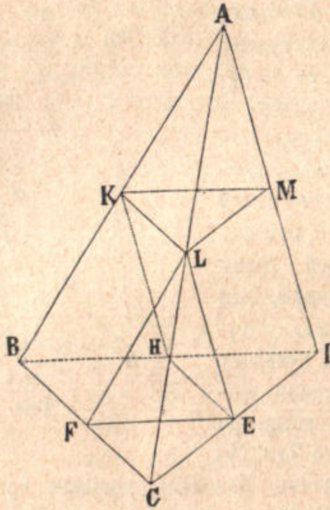


Рис. 44.

Въ самомъ дѣлѣ, вообразимъ себѣ призму раздѣленную на произвольное число равныхъ призмъ, плоскостями параллельными ея основанію, и пусть δ будетъ разстояніе центра тяжести одной изъ этихъ малыхъ призмъ отъ средины ея оси. Тогда центръ тяжести O всѣхъ частныхъ призмъ, а слѣдовательно, и цѣлой призмы, будетъ также находиться отъ средины I ея оси и Gg, на тоже разстояніе δ. Но какъ бы мала ни была длина призмы, центръ тяжести будетъ всегда находиться во внутренности тѣла; и такъ какъ длина частной призмы можетъ быть сдѣлана менѣе всякой данной величины, то рязстояніе $OI = \delta$ будетъ такъ мало, что можно принять его равнымъ нулю.

Теперь разсмотримъ треугольную пирамиду ABCG (рис. 44).

Чрезъ точку L, средины AC сдѣлаемъ сѣченіе плоскостью LMK паралельно основанію BCD, и сѣченіе LEF паралельное плоскости ABD. Проведемъ KH паралельно LE, и точки E и H соединимъ прямою EH.

Такимъ образомъ, данная пирамида будетъ раздѣлена на двѣ призмы, изъ которыхъ одна имѣетъ основаніе EDH, а другая основаніе LEF, и на двѣ треугольныя пирамиды ALMK и LCEF совершенно равныя между собою и подобныя данной пирамидѣ.

Понятно, что моментъ цѣлой пирамиды, относительно основанія BCD, равенъ суммѣ моментовъ двухъ призмъ и двухъ пирамидъ частныхъ, относительно той-же плоскости.

Положимъ, что a будетъ объемъ одной изъ двухъ частныхъ пирамидъ, $8a$ будетъ объемъ цѣлой пирамиды; и если назовемъ чрезъ x разстояніе центра тяжести этой послѣдней пирамиды, до ея основанія, то $8ax$ будетъ ея моментъ.

Означивъ чрезъ h высоту цѣлой пирамиды, то центръ тяжести призмы, имѣющей основаніе EDH, будетъ находиться отъ этого основанія на:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2};$$

такъ какъ объемъ призмы будетъ $3a$, то моментъ ея равенъ:

$$3a \cdot \frac{h}{4}.$$

Центръ тяжести другой призмы, имѣющей основаніе LEF, будетъ находиться отъ плоскости BCD на

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2}$$

Такъ какъ объемъ этой призмы $3a$, то моментъ ея будетъ:

$$3a \cdot \frac{h}{6}.$$

Наконецъ, называя чрезъ x' вышину центра тяжести пирамиды LCEF надъ ея основаніемъ BCD, высота центра тяжести другой пирамиды ALMK будетъ:

$$x' + \frac{h}{2};$$

Такимъ образомъ, получимъ для суммы моментовъ этихъ пирамидъ:

$$ax' + a\left(x' + \frac{h}{2}\right)$$

или

$$\frac{ah}{2} + 2ax'.$$

Соединивъ моменты частныхъ призмъ и пирамидъ, получимъ:

$$8ax = \frac{3ah}{4} + \frac{3ah}{6} + \frac{ah}{2} + 2ax'.$$

Приведя къ одному знаменателю и раздѣляя на $8a$ будетъ:

$$x = \frac{7}{32}h + \frac{x'}{4}.$$

Если-бы мы предположили, что въ подобныхъ пирамидахъ центры тяжести суть точки подобнымъ образомъ расположенныя, то, какъ измѣренія пирамиды LCEK вдвое менѣе измѣреній данной пирамиды ABCD мы получили бы:

$$x' = \frac{x}{2};$$

Подставивъ эту величину въ предъидущее уравненіе, получимъ:

$$x = \frac{1}{4}\ h.$$

Итакъ во всякой треугольной пирамидѣ центръ тяжести находится отъ каждой ея грани на одну четверть высосы угла противолежащаго этой грани; а слѣдовательно, искомый центръ тяжести находится въ вышеопредѣленной точкѣ.

Можно вывести предъидущее уравненіе инымъ способомъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если представимъ себѣ, что въ малой пирамидѣ LCEF сдѣлано такое-же построеніе, какое и въ пирамидѣ ABCD, то называя чрезъ x'' разстояніе подобное означенному чрезъ x', и замѣчая, что высота новой пирамиды равняется половинѣ высоты h первой, мы получимъ уравненіе:

$$x' = \frac{7}{32} \cdot \frac{h}{2} + \frac{x''}{4}.$$

Продолжая тоже самое построеніе и въ другихъ послѣдовательныхъ пирамидахъ, мы найдемъ:

$$x'' = \frac{7}{32} \cdot \frac{h}{2^2} + \frac{x'''}{4},$$

$$x'' = \frac{7}{32} \cdot \frac{b}{2^3} + \frac{x''''}{4},$$

. . . .

гдѣ x''', x'''' .... означаютъ послѣдовательныя разстоянія центровъ тяжести пирамидъ отъ ихъ основаній. Но эти разстоянія безпрерывно уменьшаются и могутъ сдѣлаться менѣе всякой данной величины, потому что онѣ всегда менѣе высотъ пирамидъ, въ которыхъ разсматриваются.

Итакъ, подставляя послѣдовательно въ первое уравненіе вмѣсто x', x'', x''',.... ихъ величины, получимъ:

$$x = \frac{7}{32}h\left(1 + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{2^2.4^2} + \frac{1}{2^3.4^3} + \ldots\right).$$

Откуда

$$x = \tfrac{1}{4}h.$$

Положимъ, что мы имѣемъ четыре разныя массы, центры тяжести которыхъ находятся въ четырехъ углахъ треугольной пирамиды, то центръ тяжести этихъ четырехъ тѣлъ будетъ тотъ-же, что и пирамиды, такъ какъ для нахожденія его надо взять центръ тяжести трехъ какихъ-нибудь изъ нихъ; центръ этотъ будетъ находиться въ центрѣ тяжести той грани, въ углахъ которой они помѣщены; потомъ, соединивъ эту точку съ центромъ тяжести четвертаго тѣла прямою, надо раздѣлить эту прямую въ обратномъ отношеніи 3 къ 1.

Это построеніе даетъ также центръ тяжести пирамиды.

Изъ этого слѣдуетъ, что разстояніе центра тяжести треугольной пирамиды до плоскости, лежащей произвольно въ пространствѣ, равно среднему изъ разстояній четырехъ ея угловъ до той-же плоскости.

То-же самое свойство принадлежитъ и треугольной призмѣ.

Для опредѣленія центра тяжести многогранника можно не разлагать его на треугольныя пирамиды, потому что часто представляются упрощенія, которыми можно воспользоваться.

Напримѣръ, чтобы найти центръ тяжести какой нибудь призмы, имѣющей параллельныя основанія, нужно взять центръ тяжести сѣченія параллельнаго основаніями и удаленнаго отъ нихъ на равныя разстоянія, или взять средину линіи, соединяющей центры тяжести обоихъ его основаній.

Это предложеніе весьма легко доказать прямо, или вывести изъ того, что мы сказали выше о треугольной призмѣ, но на этомъ мы останавливаться не будемъ,

Если будемъ разсматривать цилиндръ съ параллельными основаніями, какъ призму, основаніе которой многоугольникъ съ безчисленнымъ множествомъ сторонъ, то изъ того, что мы сейчасъ сказали, слѣдуетъ, что центръ тяжести цилиндра находится на срединѣ прямой соединяющей центры тяжести обоихъ его основаній.

Изъ предъидущаго видно, что центръ тяжести треугольной пирамиды совпадаетъ съ центромъ сѣченія параллельнаго ея основанію и удаленнаго на четверть высоты противолежащей вершины.

Это свойство принадлежитъ всякой пирамидѣ, потому что раздѣляя основаніе діагоналями на треугольники, и проведя чрезъ эти линіи и вершину пирамиды плоскости, мы разложимъ данную пирамиду на столько треугольныхъ пирамидъ, сколько треугольниковъ въ основаніи. Всѣ эти пирамиды будутъ имѣть одну и туже высоту съ данною пирамидою; а слѣдовательно ихъ объемы будутъ пропорціональны основаніямъ или сѣченіямъ параллельнымъ основаніямъ и удаленнымъ отъ нихъ на равныя высоты. Итакъ, если всѣ пирамиды пересѣчемъ плоскостью параллельною основаніямъ, проведенною на разстояніи отъ основаній одной четверти высоты вершины общей всѣмъ пирамидамъ, то ихъ центры тяжести будутъ тѣ-же, что центры тяжести соотвѣтствующихъ имъ треугольныхъ сѣченій, а ихъ объемы (или ихъ вѣсъ) будутъ пропорціональны этимъ сѣченіямъ, а слѣдовательно центръ тяжести системы пирамидъ будетъ тотъ-же, что и центръ тяжести всѣхъ треугольниковъ или многоугольника, изъ нихъ составленнаго.

Но если проведемъ прямую линію отъ вершины пирамиды къ центру тяжести этого многоугольника, то она должна пройти чрезъ центръ тяжести основанія, и будетъ пересѣчена плоскостью многоугольника въ точкѣ, отстоящей отъ вершины на три четверти своей длины, а отъ основанія на одну четверть.

Итакъ, *центръ тяжести пирамиды съ какимъ-бы то ни было основаніемъ находится на линіи, соединяющей ея вершину съ центромъ тяжести основанія, и удаленъ отъ него на одну четверть этой прямой, или на три четверти отъ вершины.*

Разсматривая конусъ какъ пирамиду, имѣющую основаніемъ многоугольникъ съ безконечно-малыми сторонами, увидимъ, что центръ тяжести конуса находится на линіи соединяющей его вершину съ центромъ тяжести его основанія, и лежитъ на одну четверть длины этой линіи отъ основанія, или на три четверти ея длины отъ вершины.

Опредѣленіе центра тяжести отрѣзка пирамиды. Центръ тяжести отрѣзка пирамиды находится на линіи соединяющей центры тяжести двухъ его основаній; такъ какъ, полагая, что отрѣзокъ дополненъ до цѣлой пирамиды, отъ которой онъ произошелъ, чрезъ пересѣченіе плоскостью параллельною ея основанію, мы можемъ мыслепно прибавить къ отрѣзку часть, которая очевидно будетъ пирамида подобная цѣлой пирамидѣ.

Такъ какъ линія, соединяющая вершину пирамиды съ центромъ тяжести одного изъ основаній отрѣзка, проходитъ чрезъ центръ тяжести другаго основанія, то слѣдуетъ, что эта линія проходитъ, въ одно время, чрезъ центры тяжести всей пирамиды и пирамиды дополняющей отрѣзокъ; слѣдовательно, и чрезъ центръ отрѣзка равнаго разности этихъ пирамидъ. Намъ остается только найти разстояніе этой точки отъ одного изъ основаній, или взаимное отношеніе разстояній до обоихъ основаній отрѣзка.

Если x будетъ разстояніе искомаго центра тяжести отъ нижняго основанія, Н и h высоты двухъ подобныхъ пирамидъ, H^3 объемъ или вѣсъ большой пирамиды, h^3 вѣсъ меньшей, и $\mathrm{H}^3 - h^3$ вѣсъ отрѣзка то моменты этихъ вѣсовъ, относительно нижняго основанія будутъ:

$$\mathrm{H}^3 . \frac{\mathrm{H}}{4}, \qquad h^3 \left(\frac{h}{4} + \mathrm{H} - h\right) \qquad \text{и } (\mathrm{H}^3 - h^3)x.$$

Итакъ, приравнявъ первый изъ этихъ моментовъ къ суммѣ двухъ другихъ, мы получимъ для опредѣленія x, уравненіе:

$$4(\mathrm{H}^3 - h^3)\ x = \mathrm{H}^4 - 4h^3\mathrm{H} + h^4,$$

котораго первый членъ дѣлится одинъ разъ, а второй два раза на $(\mathrm{H} - h)$, т. е. на высоту отрѣзка.

Если будемъ искать также разстояніе y центра тяжести отъ верхняго основанія, или, если замѣтимъ, что $y = (\mathrm{H} - h) - x$, то найдемъ уравненіе:

$$4(\mathrm{H}^3 - h^3)\ y = h^4 - 4\mathrm{H}^3h + 3\mathrm{H}^4,$$

котораго первый членъ дѣлится также на $(\mathrm{H} - h)$, а второй на $(\mathrm{H} - h)^2$.

Сравнивъ эти два уравненія и сократив ихъ на общихъ множителей, мы получимъ искомое отношеніе:

$$x : y = \mathrm{H}^2 + 2\mathrm{H}h + 3h^2 : h^2 + 2h\mathrm{H} + 3\mathrm{H}^2.$$

Но такъ какъ въ подобныхъ пирамидахъ или конусахъ основанія пропорціональны квадратамъ высотъ, то подставляя вмѣсто H^2 и h. основанія B и b отрѣзка, а слѣдовательно, вмѣсто Hh основаніе $\sqrt{Bb}$ среднее геометрическое между двумя первыми, мы получимъ пропорцію:

$$x : y = \left(B + 2\sqrt{Bb} + 3b\right) : \left(b + 2\sqrt{Bb} + 3B.\right)$$

откуда выходитъ слѣдующая теорема:

Центръ тяжести отрѣзка конуса или пирамиды, находится на линіи соединяющей центры тяжести двухъ его основаній и пересѣкаетъ эту линію въ отношеніи двухъ суммъ, которыя найдутся, взявъ для первой, одинъ разъ первое основаніе, сложивъ его съ удвоенною среднею ариѳметическою величиною между обѣими основаніями и съ утроеннымъ вторымъ основаніемъ: для второй: сложивъ второе основаніе съ удвоенною среднею геометрическою величиною и съ утроеннымъ первымъ основаніемъ.

Впрочемъ здѣсь нѣтъ необходимости знать истинную мѣру основаній, но достаточно имѣть три количества имъ пропорціональныя, а слѣдовательно, стоитъ только найти въ двухъ подобныхъ основаніяхъ даннаго отрѣзка, двѣ подобныя линіи A и a, взять ихъ квадраты A^2 и a^2, и составить изъ нихъ прямоугольникъ Aa, средній геометрическій между этими квадратами.

Замѣтимъ, что въ предъидущей пропорціи, отношеніе x къ y не зависитъ отъ высоты отрѣзка, но единственно отъ отношенія его основаній, и что, слѣдователино, отношеніе это одинаково для всѣхъ возможныхъ отрѣзковъ имѣющихъ пропорціональныя основанія.

Если оба основанія отрѣзка равны между собою, то предъидущая пропорція дастъ $x = y$, и дѣйствительно, тѣло тогда превращается въ призму или цилиндръ, центръ которыхъ равно удаленъ отъ обоихъ основаній.

Если одно изъ основаній b равно нулю, то разстояніе x центра тяжести отъ другаго основанія B, будетъ $3x = y$; такъ какъ тогда отрѣзокъ превращается въ пирамиду или конусъ съ центромъ сѣченія параллельнаго ея основанію и удаленнаго на четверть высоты противолежащей вершины.

3. Общія свойства центра тяжести.

Если силы P, Q, R, S.... (рис, 45), приложенныя къ одной точкѣ A и произвольно направленныя въ пространствѣ, находятся въ равновѣсіи, то мы знаемъ, что проэкціи этихъ силъ на какой нибудь прямой AX, проходящей чрезъ точку приложенія силъ, должны быть также въ равновѣсіи.

Итакъ, если эти силы представимъ линіями AP, AQ, AR, AS,.... взятыми по ихъ направленіямъ, то сумма ихъ проэкцій Ap, Aq, Ar, As...., на оси AX, должна быть равна нулю, принимая за положительныя тѣ проэкціи, которыя находятся по одну сторону точки A, и за отрицательныя тѣ, которыя находятся по другую ея сторону. Но, если проведемъ чрезъ точку A плоскость MN перпендикулярную къ AX, то проэкціи Ap, Aq, Ar...., выразятъ разстоянія оконечностей силъ отъ плоскости MN; но такъ какъ сумма ихъ равна нулю, то и среднее разстояніе между этими точками отъ плоскости MN, будетъ также равно нулю.

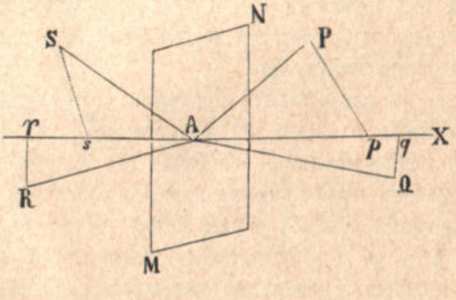


Рис. 45.

Итакъ, *когда нѣсколько силъ находятся въ равновѣсіи около одной точки, тогда эта точка будетъ центръ тяжести равныхъ тѣлъ или массивныхъ точекъ, помѣщенныхъ на концахъ линій, выражающихъ величины и направленія силъ.* И наоборотъ, *если вообразимъ совокупность нѣсколькихъ равныхъ массъ и соединимъ прямыми линіями центръ тяжести каждой изъ* *этихъ массъ съ центромъ тяжести системы, то силы, которыхъ величины и направленія выражаются этими линіями, будутъ въ равновѣсіи между собою, потому что среднее разстояніе оконечностей этихъ силъ отъ какой-нибудь плоскости, проходящей чрезъ центръ тяжести, будетъ равно нулю; сумма проэкцій силъ на какой-нибудь оси, проходящей чрезъ этотъ центръ, будетъ также равна нулю, а потому равновѣсіе имѣетъ мѣсто.*

Отсюда видно, что если три силы находятся въ равновѣсіи около одной точки, то эта точка будетъ центръ тяжести треугольника, образуемаго прямыми соединяющими концы линій, выражающихъ величины и направленія силъ, потому что центръ тяжести треугольника будетъ тотъ-же, что и центръ тяжести трехъ равныхъ тѣлъ, имѣющихъ свои центры въ трехъ углахъ треугольника.

Точно такъ же, если четыре силы находятся въ равновѣсіи около одной точки, то эта точка будетъ центръ тяжести треугольной пирамиды, образуемой шестью прямыми, соединяющими концы линій, которыя представляютъ величины и направленія четырехъ данныхъ силъ.

И наоборотъ, три силы, выраженныя разстояніями трехъ угловъ треугольника до его центра тяжести будутъ въ равновѣсіи; точно такъ же равновѣсіе будетъ и между четырьмя силами, представляющими разстоянія четырехъ угловъ треугольной пирамиды до ея центра тяжести.

Можно вывести и другое болѣе общее слѣдствіе изъ предъидущаго.

Предположимъ, что всѣ равныя частицы тѣла, имѣющаго какую нибудь фигуру, притягиваются къ одной и той-же точкѣ силами пропорціональными ихъ разстояніямъ отъ этой точки, и что эти силы находятся въ равновѣсіи, то эта точка необходимо будетъ центръ тяжести тѣла.

И наоборотъ, если точка, къ которой притягиваются всѣ частицы пропорціонально ихъ разстояніямъ, будетъ центръ тяжести тѣла, то всѣ силы притяженія будутъ въ равновѣсіи и тѣло не получитъ никакого движенія.

Такой случай представляетъ намъ земля, предполагаемая шарообразною и однородною; потому что по закону Ньютона, если частица, лежащая внѣ земного шара, притягивается обратно пропорціонально квадрату ея разстоянія отъ центра, то частица, находящаяся внутри шара, притягивается къ центру прямо пропорціонально разстоянію. Итакъ, всѣ силы тяжести находятся въ равновѣсіи около центра земли.

Замѣтимъ, что мы выводимъ это слѣдствіе, какъ математическій результатъ изъ простого предположенія, а не какъ доказательство равновѣсія земли, при дѣйствіи вѣса всѣхъ частей, ее составляющихъ, потому что это равновѣсіе существуетъ въ природѣ отъ другой, болѣе общей причины, не зависящей ни отъ отношеній между силами тяжести, ни отъ ихъ направленій.

Дѣйствительно если, вѣсъ каждой частицы земли происходитъ отъ притяженія производимаго на нее прочими частицами, и какъ двѣ равныя частицы производятъ одна на другую равное и противоположное дѣйствіе, то слѣдотельно вѣсъ каждой частицы есть равнодѣйствующая безчисленнаго множества силъ, изъ которыхъ каждой соотвѣтствуетъ въ системѣ, другая равная и противоположная сила и что, слѣдовательно, всѣ эти равнодѣйствующія, или всѣ эти вѣсы должны находиться въ равновѣсіи между собою, каковъ-бы ни былъ видъ и составъ нашей планеты и самый законъ притяженія между частицами матеріи.

Теорема Лейбница. Означимъ чрезъ $M+1$ число силъ $P, Q, R, S \ldots$ которыя находятся въ равновѣсіи около точки A и положимъ $M+1$ тѣлъ или точекъ, имѣющихъ равныя массы и помѣщенныхъ на концахъ линій, представляющихъ эти силы.

Такъ какъ точка A есть центръ тяжести всѣхъ этихъ тѣлъ, то, продолживъ линію PA, соединяющую одно изъ тѣлъ съ точкою A, на количество AG равное M — ой части всей ея длины, тогда точка G будетъ центръ тяжести остальныхъ M тѣлъ. Но, такъ какъ силы $P, Q, R, S \ldots$ находятся въ равновѣсіи, то одна изъ нихъ P, равна и противоположна равнодѣйствующей другихъ M силъ $Q, R, S \ldots$

Откуда выводимъ слѣдующія теоремы:

1) *Равнодѣйствующая M силъ, выражающихся линіями, исходящими изъ одной точки A, направляется по линіи, соединяющей эту точку съ G, центромъ тяжести M, равныхъ тѣлъ, находящихся на концахъ линій, выражающихъ силы и величина ея равна M разъ, взятому разстоянію AG, между точкою приложенія силъ и центромъ тяжести G.*

Изъ этого можно заключить, что если взаимныя притяженія между равными частицами тѣла или системы тѣлъ, имѣющей какую-нибудь фигуру, пропорціональны взаимнымъ ихъ разстояніямъ, то каждая частица тѣла будетъ притягиваться къ центру тяжести пропорціонально ея разстоянію отъ этого центра, потому что, если представимъ силы притяженія взаимными разстояніями между числомъ M равныхъ точекъ системы, то полное притяженіе на каждую изъ этихъ точекъ выразится чрезъ M — 1 разъ ея разстояніе отъ центра тяжести M — 1 остальныхъ точекъ, или, что то-же самое, чрезъ M разъ ея разстояніе отъ центра тяжести M точекъ, составляющихъ цѣлую систему.

Поэтому-же закону притяженія, тѣла произвольной фигуры дѣйствовали-бы одно на другія такъ, какъ если-бы ихъ массы были сведены въ точки и, такъ сказать, были сосредоточены въ ихъ центрахъ тяжести и что по закону Ньютона, это свойство принадлежитъ только однороднымъ шарамъ, или тѣламъ, составленнымъ изъ различныхъ концентрическихъ сферическихъ слоевъ, изъ которыхъ каждый долженъ быть одинаковой плотности съ другими.

2) *Если разсматривать M равныхъ тѣлъ, произвольно расположенныхъ между собою, то ихъ центръ тяжести G опредѣлится такимъ образомъ: проведя отъ этихъ тѣлъ къ точкѣ A, произвольно взятой въ пространствѣ столько-же линій, сколько тѣлъ; затѣмъ соединивъ всѣ эти линіи подобно силамъ и, наконецъ, отложивъ отъ точки A по направленію равнодѣйствующей M — ою часть ея длины.*

Положимъ, что точка A перемѣнитъ свое положеніе въ пространствѣ, тогда величины и направленія силъ, представленныхъ линіями, соединяющими тѣло съ этою точкою, также перемѣнятся; но равнодѣйствующія этихъ различныхъ группъ сходящихся силъ будутъ постоянно проходить чрезъ ту-же точку G, и очевидно, что то-же самое имѣло-бы мѣсто, если-бы точка A оставалась неподвижною, при какомъ угодно положеніи системы.

Итакъ, точка G, которая въ тяжелыхъ тѣлахъ будетъ центръ *равныхъ* и *параллельныхъ* силъ, происходящихъ отъ тяжести будетъ также центромъ силъ, *сходящихся* въ нѣкоторой точкѣ A пространства и пропорціональныхъ разстояніямъ частицъ отъ этой точки.

Отсюда понятно, что если центръ тяжести тѣла неподвиженъ, то и тѣло, при дѣйствіи на него таковыхъ сходящихся силъ, будетъ въ равновѣсіи во всѣхъ положеніяхъ, какія можно ему дать около этой неподвижной точки. Такъ какъ во внутренности земли, которую предполагаемъ шарообразною и однородною, частицы притягиваются къ ея центру пропорціонально разстояніямъ, то слѣдуетъ, что внутри земли тѣло, поддерживаемое въ своемъ центрѣ тяжести, будетъ въ равновѣсіи во всѣхъ положеніяхъ около центра земли. Но для тѣлъ, находящихся внѣ земного шара, и гдѣ притяженіе на частицу обратно пропорціонально квадрату ея разстоянія отъ центра земли, того-же самаго быть не можетъ, потому что если, напримѣръ, тѣло будетъ прямой цилиндръ, поддерживаемый въ срединѣ его оси, то оно будетъ въ равновѣсіи только въ томъ положеніи, когда ось горизонтальна или перпендикулярна къ горизонту.

Въ природѣ силы тяжести не бываютъ ни совершенно параллельны, ни совершенно сходящіяся и ни совершенно пропорціональны разстояніямъ до центра земли; такъ какъ, въ строгомъ смыслѣ, въ тяжеломъ тѣлѣ нѣтъ истиннаго центра *тяжести*, т. е. такой точки, около которой силы тяжести находились-бы въ равновѣсіи при всѣхъ возможныхъ ея положеніяхъ. Но въ небольшихъ тѣлахъ, которыя мы разсматриваемъ на землѣ, опредѣленный нами центръ почти имѣетъ это свойство и погрѣшность будетъ нечувствительна.

Все то, что мы сказали о нѣсколькихъ массивныхъ точкахъ и о силахъ, представленныхъ разстояніями этихъ точекъ отъ одной и той-же точки пространства, можно приложить и къ системѣ неравныхъ точекъ или тѣлъ, которыхъ массы будутъ m, m', m'' ....., потому что для этого достаточно разсматривать каждое изъ этихъ тѣлъ, напримѣръ, m, какъ группу m равныхъ точекъ и принимать за силу къ нему приложенную m разъ разстояніе его центра тяжестей отъ данной точки.

Итакъ; называя чрезъ r, r', r'' .... разстоянія центровъ тѣлъ, m, m', m'' ...., отъ точки или общаго сосредоточенія A и полагая $m + m' + m'' \ldots = M$, можно сказать, что центръ тяжести G всѣхъ этихъ тѣлъ находится на направленіи равнодѣйствующей силъ mr, $m'r'$, $m''r''$ ...., и отъ A удаленъ на M-ю часть длины линіи представляющей эту равнодѣйствующую.

Назовемъ чрезъ R разстоянія центра G отъ точки A; чрезъ x, y, z, прямоугольные координаты центра G, относительно той-же точки и положимъ x, y, z, x', y' z'....., координаты массъ m, m', m'' ..... Силы mx, my, mz, $m'x'$ $m'y'$, $m'z'$ .... будутъ составляющія силъ mr, $m'r'$ ...., а Mx, My, Mz, составляющія равнодѣйствующей MR. Отсюда получимъ:

$$Mx = mx + m'x' + m''x'' + \ldots.$$

$$My = my + m'y' + m''y'' + \ldots$$

$$Mz = mz + m'z' + m''z'' + \ldots.$$

Возвысивъ въ квадратъ эти уравненія и сложивъ получимъ:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = r^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

Далѣе, мы найдемъ:

$$M^2R^2 = m^2r^2 + m'^2r'^2 + m''r''^2 + \ldots$$

$$+ 2mm'(xx' + yy' + zz') + \ldots$$

$$+ 2mm''(xx'' + yy'' + zz'') + \ldots$$

$$+ , \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Вмѣсто члена $2mm'(xx' + yy' + zz')$ можно подставить членъ $2mr.\,m'r'.\ \mathrm{Cos}\ \varphi$; гдѣ φ есть уголъ наклоненія двухъ линій r и r'; замѣняя точно такъ-же другіе члены подобными, мы получимъ слѣдующую теорему:

Квадратъ равнодѣйствующей какого угодно числа силъ, приложенныхъ къ одной точкѣ, равенъ суммѣ квадратовъ, составляющихъ, сложенной съ удвоенными произведеніями, которыя можно получить, взявъ силы по двѣ и перемножая ихъ одну на другую и на косинусъ угла ихъ взаимнаго наклоненія.

Можно также преобразовать каждый членъ:

$$2mm'\ (xx' + yy' + zz')$$

другимъ образомъ, потому что если означимъ чрезъ α разстояніе отъ m до m', то получимъ:

$$\alpha^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$

слѣдовательно:

$$2(xx' + yy' + zz') = r^2 + r'^2 - \alpha^2.$$

Далѣе, называя чрезъ β разстояніе отъ m до m'', получимъ:

$$2(xx'' + yy'' + zz'') = r^2 + r''^2 - \beta^2,$$

и также для другихъ подобныхъ членовъ.

Подставивъ эти величины въ предъидущее уравненіе, получимъ новое выраженіе квадрата равнодѣйствующей MR:

$$\begin{aligned} MR^2 = m^2r^2 + m'^2r'^2 + m''^2r''^2 + \ldots \\ + mm'(r^2 + r'^2 - \alpha^2) + \ldots \\ + mm''(r^2 + r''^2 - \beta^2) + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Во второй части этого уравненія r^2 умножимъ на:

$$m^2 + mm' + mm'' + \ldots = m(m + m' + m'' + \ldots) = mM;$$

r'^2 умножимъ на $m'M \ldots$; наконецъ, подставивъ эти величины, мы получимъ слѣдующее уравненіе:

$$M^2R^2 = M\Sigma(mr^2) - \Sigma(mm\alpha^2),$$

гдѣ $\Sigma\,(mr^2)$ означаетъ сумму произведеній массъ на квадратъ разстояній ихъ центра отъ точки A; а $\Sigma\,(mm'\alpha^2)$ означаетъ сумму произведеній массъ, взятыхъ по двѣ на квадраты взаимныхъ разстояній центровъ этихъ массъ.

Эта формула содержитъ въ себѣ только взаимныя разстоянія тѣлъ и ихъ разстоянія до какой-нибудь точки A пространства; по ней можно найти, въ какомъ разстояніи R центръ тяжести G системы находится отъ точки A; отыскавъ подобныя-же разстоянія отъ трехъ данныхъ точекъ, мы получимъ положеніе точки G въ пространствѣ.

Если точка A перемѣнитъ свое положеніе, то разстоянія R и $r, r', r'' \ldots$, измѣнятся; но взаимныя разстоянія $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, различныхъ тѣлъ, по положенію, не измѣнятся: слѣдовательно членъ $\Sigma(mm'\alpha^2)$ будетъ постоянный; а такъ какъ предъидущее уравненіе:

$$M\Sigma(mr^2) = \Sigma(mm'\alpha^2) + M^2R^2,$$

то слѣдуетъ, что точка A пространства, для которой $\Sigma(mr^2)$ имѣетъ наименьшую величину, есть та, для которой $R = 0$ и, слѣдовательно, эта точка есть центръ тяжести системы.

Итакъ, *центръ тяжести системы тѣлъ имѣетъ то свойство, что сумма произведеній массъ на квадраты разстояній ихъ центровъ тяжести до общаго центра, есть наименьшая, т. е. она менѣе подобныхъ суммъ, взятыхъ относительно прочихъ точекъ пространства.*

Величина $\Sigma(mr^2)$ есть *minimum*, что видно изъ того, если мы въ предъидущемъ уравненіи сдѣлаемъ $R = 0$, то она будетъ равна суммѣ всѣхъ произведеній, получаемыхъ изъ массъ, перемноженныхъ по двѣ, одна на другую и на квадратъ взаимнаго ихъ разстоянія и раздѣленныхъ на всю массу системы; это даетъ другую теорему, которая можетъ быть полезна во многихъ случаяхъ.

Если точка A, измѣняя свое положеніе, остается всегда на шарѣ, описанномъ около центра тяжести системы, тогда R будетъ постоянное, а слѣдовательно $\Sigma(mr^2)$ не перемѣнится, хотя разстоянія $r, r', r'' \ldots$ отъ перемѣщенія точки A измѣнится; тоже самое будетъ, если точка A остается неподвижною, а система вращается около своего центра тяжести G.

Слѣдовательно, *центръ тяжести системы имѣетъ также то свойство, что если мы будемъ обращать около его какую-нибудь систему, то сумма произведеній массъ на квадраты ихъ разстояній до какой-нибудь неподвижной точки всегда будетъ одна и та-же.*

Если предположимъ, что всѣ массы $m, m', m'', \ldots$ равны между собою и единицѣ массъ, то M будетъ означать ихъ число и предъидущее уравненіе обратится въ

$$M\Sigma(r^2) = \Sigma(\alpha^2) + M^2R^2,$$

формулу весьма простую, которую можно приложить ко всѣмъ возможнымъ системамъ, въ томъ только случаѣ, когда тѣла этихъ системъ раздѣлены на равныя части.

Если $R = 0$, то:

$$M\Sigma(r^2) = \Sigma(\alpha^2)$$

Изъ этого можно вывести слѣдующую теорему:

Сумма квадратовъ взаимныхъ разстояній между M равныхъ точекъ, равна M разъ взятой суммѣ квадратовъ, разстояній этихъ точекъ отъ общаго ихъ центра тяжести.

Изъ этого видно, что сумма квадратовъ шести реберъ треугольной пирамиды, равна четыре раза взятой суммѣ квадратовъ разстояній ея вершинъ отъ центра тяжести, потому что этотъ центръ тотъ-же, что и центръ тяжести четырехъ равныхъ тѣлъ, помѣщенныхъ въ вершинахъ пирамиды.

До сихъ поръ мы разсматривали систему неизмѣняемой фигуры, т.-е. такую, точки которой не измѣняютъ своихъ взаимныхъ разстояній. Но здѣсь еще видно, что *если фигура системы будетъ измѣняться подъ условіемъ, что сумма квадратовъ взаимныхъ разстояній различныхъ точекъ будетъ постоянною, то сумма квадратовъ ихъ разстояній до центра тяжести будетъ также постоянна, и наоборотъ.*

Перейдемъ теперь къ другимъ свойствамъ центровъ тяжести.

Теорема Гюльдена. Пусть будетъ у насъ какая-нибудь плоская кривая ABC (рис. 46) и положимъ, что она вращается около оси PZ, лежащей въ ея плоскости такимъ образомъ, что всѣ точки кривой не измѣняютъ своихъ разстояній до этой оси; тогда кривая произведетъ поверхность, называемую *поверхностью вращенія.*

Для опредѣленія величины этой поверхности, замѣтимъ, что каждый элементъ ds, производящей кривой, описываетъ около оси поверхность усѣченнаго конуса, которая равна боку ds, умноженному на окружность круга, описываемаго его срединою или его центромъ тяжести i, около оси PZ.

Итакъ, если положимъ, что всѣ эти элементы равны между собою, то величина цѣлой поверхности вращенія будетъ равна ихъ суммѣ, умноженной на среднюю окружность между окружностями, описанными всѣми центрами тяжести элементовъ ds.

Но такъ какъ радіусъ средней окружности равенъ среднему разстоянію всѣхъ центровъ тяжести отъ оси вращенія, или разстоянію центра тяжести кривой до той же оси, то слѣдовательно: *величина поверхности вращенія равна длинѣ производящей линіи, умноженной на окружность круга, описанную ея центромъ тяжести около оси вращенія.*

Понятно также, что если нѣсколько кривыхъ, лежащихъ въ одной плоскости, вращаются около оси лежащей въ той-же плоскости, то сумма поверхностей ими производимыхъ равна суммѣ производящихъ, умноженной на окружность круга, описанную центромъ тяжести ихъ системы.

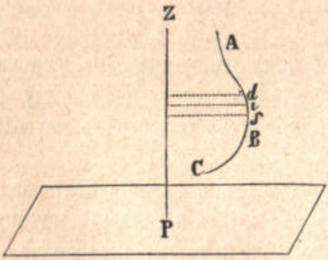


Рис. 46.

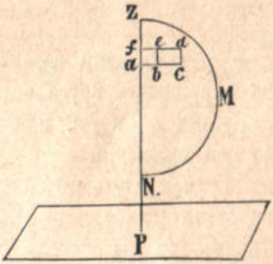


Рис. 47.

Нужно замѣтить, что если производящая или производящія не лежатъ по одну сторону оси, то предъидущее выраженіе даетъ только разность между суммою поверхностей произведенныхъ частями производящихъ, находящихся по одну сторону этой оси и суммою поверхностей *произведенныхъ* частями тѣхъ-же линій, находящихся по другую сторону.

Теорію центровъ тяжести можно приложить также и къ опредѣленію объемовъ тѣлъ вращенія.

Объемъ тѣла вращенія равенъ площади производящаго сѣченія, умноженной на окружность круга, описываемую его центромъ тяжести около неподвижной оси.

Положимъ данъ прямоугольникъ $abcd$ (рис. 47) обращающійся около оси PZ паралельной одному изъ его боковъ be, то ясно, что тѣло, произведенное этимъ прямоугольникомъ равно разности двухъ цилиндровъ такой-же высоты cd, радіусъ одного изъ нихъ будетъ разстояніе ca стороны cd отъ неподвижной оси, а радіусъ другого будетъ разстояніе ba стороны be отъ той-же оси.

Итакъ, объемъ тѣла произведеннаго обращеніемъ прямоугольника, выразится чрезъ

$$(\omega ac^2 - \omega ab^2)\ cd$$

гдѣ ω будетъ отношеніе окружности къ діаметру. Если подставимъ $ca - cb$ вмѣсто ab, то предыдущее выраженіе обратится въ

$$\omega\,(2ac \times bc - bc^2)\ cd$$

или

$$bc \times cd \times 2\omega\left(ac - \frac{bc}{2}\right),$$

т. е. объемъ тѣла равенъ площади прямоугольника $bcde$, умноженной на окружность круга описаннаго среднимъ радіусомъ, между двумя радіусами ca и ba, или разстояніемъ центра тяжести прямоугольника до оси вращенія.

Если представимъ себѣ, что производящее сѣченіе ZMN раздѣлено на безчисленное множество безконечно-малыхъ и равныхъ прямоугольниковъ, то мы можемъ сказать, что тѣло имъ произведенное равно суммѣ этихъ прямоугольниковъ, или площади сѣченія ZMN, умноженной на среднюю окружность между всѣми окружностями, описанными центрами тяжести всѣхъ прямоугольниковъ около оси вращенія. Но радіусъ средней окружности равенъ среднему разстоянію между разстояніями всѣхъ центровъ тяжести прямоугольниковъ до той-же оси, или разстоянію центра тяжести площади сѣченія до оси.

Итакъ, если часть плоскости, ограниченная какою-нибудь кривою, движется въ пространствѣ такимъ образомъ, что остается всегда перпендикулярною къ какой-нибудь линіи двоякой кривизны, то объемъ происшедшаго отъ этого тѣла равенъ производящей площади, умноженной на длину кривой пройденной ея центромъ тяжести.

Простыя машины.

Твердыя тѣла, служащія для передачи дѣйствія силъ называются *машинами.* Съ этой общей точки зрѣнія всѣ тѣла въ природѣ будутъ машины, такъ какъ онѣ передаютъ дѣйствіе силъ къ нимъ приложенныхъ, но, если силы дѣйствуютъ однѣ на другія посредствомъ тѣла или свободной системы тѣлъ, то для равновѣсія необходимо, чтобы онѣ удовлетворяли условіямъ приведеннымъ въ предъидущей главѣ.

Посредствомъ машинъ можно привести въ равновѣсіе силы и неудовлетворяющія этимъ условіямъ, такъ какъ машины могутъ привести въ равновѣсіе силы произвольныхъ величинъ и направленій.

Изъ этого понятія о машинахъ слѣдуетъ, что если силы, приложенныя къ свободному тѣлу не находятся въ равновѣсіи, но уравновѣшиваются при помощи машины, то значитъ, что тѣла составляющія машины, несвободны, но имѣютъ препятствія сопротивляющіяся движенію сообщаемому силами и которое дѣйствительно сообщили бы имъ, если бы тѣла были совершенно свободны.

Отсюда, можно вывести слѣдующее общее опредѣленіе машинъ: *машиною называется тѣло или система тѣлъ заключающія въ себѣ нѣкоторыя препятствія, представляющія сопротивленія движенія.*

Такимъ образомъ, силы могутъ быть приведены въ равновѣсіе посредствомъ машинъ, при чемъ нѣтъ необходимости, чтобы равнодѣйствующія силъ уничтожились сами собою, а только направились къ препятствіямъ, которыя ихъ уничтожатъ своими сопротивленіями. Мы знаемъ изъ опыта, что при помощи тѣла, опирающагося на неподвижную точку, меньшая сила можетъ находиться въ равновѣсіи съ большею силою, если только она приложена въ отношеніи къ послѣдней такъ, что ихъ общая равнодѣйствующая направляется къ неподвижной точкѣ. Сама собою меньшая сила не можетъ находиться въ равновѣсіи съ большею силою, но она, въ этомъ случаѣ, служитъ для отклоненія дѣйствія большей силы и для направленія ея усилія, вмѣстѣ со своимъ собственнымъ, къ непреодолимому препятствію.

Если какую-нибудь силу привести въ равновѣсіе помощью машины, при чемъ сопротивленіе неподвижнаго препятствія примемъ за силу, то, въ этомъ случаѣ, необходимо употребить больше силы, чѣмъ если-бы приложить силу равную и противоположную той, которую мы хотимъ уничтожить. Но такъ какъ сопротивленія отъ препятствій не только не могутъ произвести движенія, а скорѣе служатъ къ его уничтоженію, то мы и не будемъ принимать его во вниманіе, такъ какъ теряемъ только приложенную силу.

Вообще, въ теоріи равновѣсія машинъ, препятствія можно разсматриватъ какъ силы равныя и противоположныя тѣмъ, которыя онѣ уничтожаютъ, такъ, что, если эти препятствія замѣнить силами, выражающими ихъ сопротивленія, то равновѣсіе будетъ нетолько между силами, приложенными къ машинѣ, но также и между сопротивленіями. Словомъ, законы равновѣсія машинъ будутъ тѣ-же, какъ и законы равновѣсія тѣлъ совершенно свободныхъ.

Всѣ простыя машины, смотря по свойству сопротивленія оказываемаго движенію тѣла, можно отнести къ тремъ основнымъ типамъ: *рычагу*, *вороту* и *наклонной плоскости*.

Въ рычагѣ препятствіемъ служитъ неподвижная точка, около которой тѣло можетъ свободно вращаться во всѣ стороны. Въ воротѣ такимъ препятствіемъ является прямая линія, около которой всѣ точки тѣла могутъ свободно вращаться, въ плоскостяхъ параллельныхъ между собою. Наконецъ, для наклонной плоскости препятствіемъ служитъ неподвижная плоскость, на которую тѣло опирается и по которой оно можетъ скользить.

Говоря послѣдовательно объ этихъ трехъ машинахъ и другихъ къ нимъ относящимся, мы, для простоты изслѣдованія, не будемъ принимать во вниманіе нѣкоторыя физическія обстоятельства имѣющія вліяніе на равновѣсіе, какъ напримѣръ, треніе тѣлъ, жесткость веревокъ, посредствомъ которыхъ силы передаютъ свое дѣйствіе въ различныя точки машины.

Итакъ, мы можемъ предположить, что дѣйствіе каждой силы производится по направленію оси веревки, къ которой она приложена; самыя-же веревки можно разсматривать какъ совершенно гибкія и нерастяжимыя нити. Мы увидимъ далѣе, въ какихъ случахъ, и какъ должно разсматривать діаметры веревокъ; наконецъ мы коснемся тѣхъ сочетаній веревокъ, которыя могутъ употребляться какъ машины.

1. Рычаги.

Рычагомъ называется твердое, несгибаемое тѣло, вращающееся около неподвижной точки, называемой *точкою вращенія* или *точкою опоры*. Силы дѣйствующія на рычагъ стремятся вращать его въ противныя стороны вокругъ этой точки. Съ математической точки зрѣнія рычагъ можно разсматривать, какъ двѣ прямыя линіи, лежащія въ одной плоскости — *плечи рычага* — соединяющія точки приложенія силъ съ точкою опоры и связанныя между собою такъ, что уголъ, составляемый ими всегда остается неизмѣннымъ.

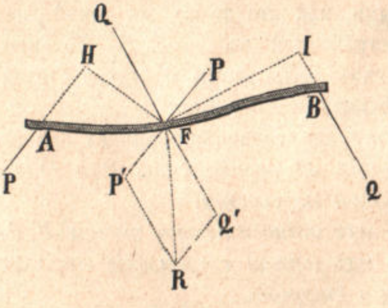


Рис. 48.

Положимъ двѣ силы P и Q (рис. 48) приложены непосредственно, или помощью веревокъ къ двумъ точкамъ A и B рычага AFB съ точкою опоры F; требуется опредѣлить условія равновѣсія рычага не принимая во вниманіе его тяжести?

Для этого изъ точки F опустимъ перпендикуляры FH и FI на направленіе двухъ силъ P и Q или на ихъ продолженія, которыя необходимо пересѣкутся въ точкахъ и H и I. Если мы будемъ разсматривать эти точки какъ-бы соединенными съ A и B, то можно предположить, что двѣ силы P и Q дѣйствуютъ непосредственно въ этихъ точкахъ. Къ точкѣ F приложимъ двѣ противоположныя силы P' и $-P$, равныя и параллельныя силѣ P; затѣмъ, къ той-же точкѣ принадлежатъ силы Q' и $-Q$ также равныя и параллельныя силы Q. Понятно, что отъ приложенія этихъ четырехъ силъ положеніе рычага неизмѣнится, но только вмѣсто двухъ силъ P и Q мы получимъ, во первыхъ: двѣ силы P' и Q', равныя и параллельныя этимъ силамъ и дѣйствующія съ ними въ одну и ту-же сторону, но приложенныя къ точкѣ F; во вторыхъ: двѣ пары $(P' - P)$ и $(Q' - Q)$, плечи которыхъ перпендикулярны FH и FI.

Если предположить, что рычагъ неизмѣнно связанъ съ точкою опоры и, что онъ можетъ имѣть около нее только вращательное движеніе, то равнодѣйствующая двухъ силъ P' и Q' уничтожится сопротивленіемъ точки опоры; между тѣмъ равнодѣйствующая пара двухъ паръ $(P' - P)$ и $(Q' - Q)$ не уничтожится, а слѣдовательно, для равновѣсія необходимо, чтобы эта пара сама по себѣ было равна нулю и, чтобы двѣ составляющія $(P' - P)$ и $(Q' - Q)$ были равны и противоположны. Итакъ эти двѣ пары будутъ находиться въ плоскостяхъ параллельныхъ, или что то-же, въ одной плоскости, потому что ихъ плоскости встрѣчаются въ точкѣ F. Моменты ихъ $P \times FH$ и $Q \times FI$ также должны быть равны и будутъ стремиться вращать рычагъ въ противоположныя стороны.

Такимъ образомъ для равновѣсія рычага необходимо чтобы:

1) *дѣйствующія на рычагъ силы P и Q и точка опыры F находились въ одной плоскости.*

2) *моменты ихъ относительно точки F были равны.*

3) *моменты ихъ имѣли стремленіе произвести вращеніе въ противоположныя стороны..*

Равенство моментовъ

$$P \times H = Q \times FI$$

можно замѣнить пропорціею

$$P : Q = FI : FH$$

Это отношеніе показываетъ, что силы P и Q должны быть обратно пропорціональны разстояніямъ ихъ отъ точки опоры.

Переходимъ къ опредѣленію давленія претерпѣваемаго точкою опоры.

Въ случаѣ равновѣсія, точки опоры претерпѣваетъ давленіе только отъ двухъ силъ P' и Q' непосредственно къ ней приложенныхъ, такъ какъ двѣ пары $(P'-P)$ и $(Q'-Q)$ находясь въ равновѣсіи между собою, даже въ томъ случаѣ, когда рычагъ ничѣмъ не удерживается, они не давятъ на неподвижную точку.

Такимъ образомъ, *давленіе на точку опоры равно тому, которое она претерпѣла-бы, если силы P и Q, не измѣняя величины и направленія, были перенесены въ эту точку параллельно самимъ себѣ.*

Построимъ на линіяхъ EP' и FQ', представляющихъ силы P' и Q параллелограмъ $FQ'RP'$, то его діагональ FR представитъ давленіе R на точку опоры; если сопротивленіе этой точки не безконечно велико, то мы можемъ судить выдержитъ-ли оно дѣйствіе силъ P и Q, приложенныхъ къ рычагу, или будетъ ими увлечена.

Такъ какъ силы P' и Q' равны и параллельны силамъ P и Q и дѣйствуютъ съ ними въ одну и ту-же сторону, то три стороны и три угла треугольника FRQ' или треугольника FRP' даютъ шесть данныхъ, необходимыхъ при разсматриваніи рычага; именно: двѣ силы P и Q, давленіе R на точку опоры и углы взаимныхъ наклоненій этихъ трехъ силъ. Слѣдовательно, если даны три величины, изъ которыхъ одна представляетъ силу какую-нибудь изъ силъ P, Q, R, то можно найти и остальныя три по правиламъ рѣшенія треугольника FRQ'.

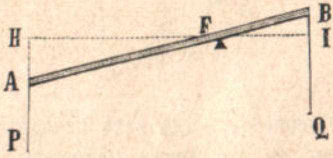


Рис. 49.

Не мѣшаетъ замѣтить, что все сказанное нами имѣетъ мѣсто независимо отъ фигуры рычага, взаимныхъ расположеній силъ P, Q и точки опоры. Такъ, если силы P и Q параллельны (рис. 49), то опустивъ изъ точки опоры на ихъ направленія общій перпендикуляръ HI, мы увидимъ, что эти силы будутъ обратно пропорціональны частямъ FH и FI, заключенными между ихъ направленіями и точкою опоры.

Давленіе на точку опоры будетъ равно суммѣ силъ $P + Q$, или ихъ разности, въ зависимости отъ того будутъ-ли силы дѣйствовать въ одну сторону, какъ на рисункѣ 49, или-же въ стероны противоположныя, какъ показано на рисункѣ 50.

Если разсматривать одну изъ силъ P и Q, напримѣръ, силу P, какъ имѣющую стремленіе произвести движеніе въ машинѣ и которую назовемъ собственно силою, а другую силу Q, какъ препятствіе или сопротивленіе, которое сила P должна преодолѣть, то смотря по тому какое мѣсто будетъ занимать точка опоры F мы получимъ три рода рычаговъ.

Если точка опоры F находится между силою и сопротивленіемъ, то рычагъ будетъ *перваго рода.* Здѣсь сила дѣйствуетъ тѣмъ сильнѣе чѣмъ длиннѣе плечо AF, какъ на рис. 49. Къ рычагамъ этого рода относятся: вѣсы, ломъ употребляемый для выворачиванія камней и т. п.

Когда сопротивленіе Q находится между силою P и точкою опоры, то рычагъ будетъ *второго рода*, какъ видно на рис. 50; здѣсь сила имѣетъ преимущество. Примѣромъ рычага второго рода—весла гребцовъ, рукоятки насосовъ и т. п.

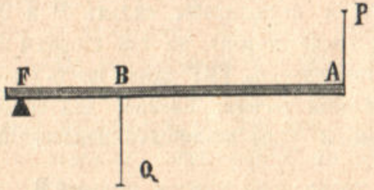


Рис. 50.

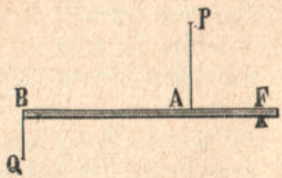


Рис. 51.

Наконецъ, когда сила находится между точкою опоры и сопротивленіемъ, то рычагъ получаетъ названіе *третьяго рода* (рис. 51). Въ такомъ рычагѣ сопротивленіе всегда больше силы. Всякаго рода педали (швейной машины, токарныхъ станковъ и проч.) принадлежатъ къ рычагамъ третьяго рода.

Всѣ эти три рода рычаговъ должны удовлетворять однимъ и тѣмъже условіямъ равновѣсія. Какъ-бы силы и сопротивленія не были расположены относительно точки опоры, необходимо, чтобы пары, происшедшія отъ перенесенія въ точку опоры были равны и противоположны.

Положимъ, что на рычагъ (рис. 52) дѣйствуютъ нѣсколько силъ P, Q, R...., которыя вмѣстѣ съ точкою опоры F лежатъ въ одной плоскости. Тогда опустивъ изъ точки F на направленіе силъ перпендикуляры FH, FI и FK и замѣняя каждую силу напр. P, равной и параллельной, дѣйствующей съ нею въ одну сторону и приложенной къ точкѣ F силою и парою (P, — P), плечо которой будетъ разстояніе FH силы P до точки опоры, мы увидимъ, что равнодѣйствующая всѣхъ силъ, перенесенныхъ въ неподвижную точку, уничтожится ея сопротивленіемъ. Но такъ какъ равнодѣйствующая пара, для равновѣсія, должна быть сама по себѣ равна нулю, то слѣдовательно сумма моментовъ:

$$P \times FH,\ Q \times FI,\ R \times FQ \ldots\ldots = 0.$$

при чемъ, мы принимаемъ за положительные моменты тѣ, силы которыхъ стремятся вращать рычагъ въ одну сторону, а за отрицательныя тѣ, которыя стремятся повернуть его въ другую противоположную сторону.

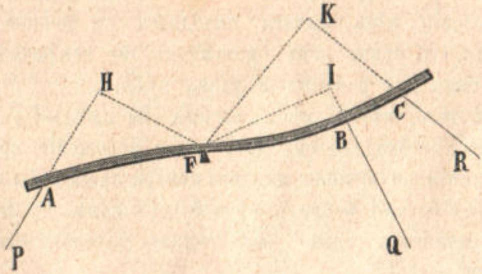


Рис. 52.

Что касается давленія на точку опоры, то оно будетъ совершенно равно тому, какъ, если-бы силы были перенесены въ эту точку безъ измѣненія ихъ величинъ и направленій.

Если силы P, Q, R.... будутъ дѣйствовать въ различныхъ плоскостяхъ, то всѣ пары, происшедшія отъ перенесенія этихъ силъ параллельно самимъ себѣ въ неподвижную точку, дадутъ равнодѣйствующую пару равную нулю; слѣдовательно должны находится между собою въ равновѣсіи.

Для выраженія этого условія необходимо имѣть три уравненія, которыя показали-бы, что суммы моментовъ силъ относительно трехъ осей, пересѣкающихся въ неподвижной точкѣ, должны быть сами по себѣ равны нулю, относительно каждой оси. Эти три оси можно провести чрезъ неподвижную точку какъ угодно, лишь-бы онѣ не находились въ одной плоскости, иначе этихъ уравненій будетъ недостаточно для равновѣсія.

Такъ какъ пары, происшедшія отъ перенесенія силъ въ неподвижную точку, должны быть между собою въ равновѣсіи, то слѣдовательно силы, приложенныя къ различнымъ точкамъ рычага могутъ быть замѣнены равными и параллельными силами, приложенными къ точкѣ опоры. Слѣдовательно, общій законъ равновѣсія рычага формулируется тѣмъ, что приложенныя силы имѣли-бы одну равнодѣйствующую, проходящую чрезъ неподвижную точку.

Изслѣдуя законы равновѣсія рычага, мы до сихъ поръ не принимали во вниманіе дѣйствіе тяжести рычага. Вѣсъ рычага, необходимо разсматривать, какъ новую силу, приложенную въ его центрѣ тяжести и дѣйствующую по вертикальному направленію и затѣмъ, соединить эту силу съ прочими силами. Отсюда понятно, что когда силы и направленія вѣса рычага находятся съ точкою опоры въ одной плоскости, то сумма всѣхъ моментовъ, не исключая и момента вѣса, должна быть для равновѣсія равна нулю.

Итакъ, для того, чтобы вѣсъ рычага не имѣлъ-бы вліянія на равновѣсіе силъ, необходимо ему дать такое положеніе, при которомъ вертикальная линія опущенная изъ его центра прошла-бы чрезъ точку опоры; въ этомъ случаѣ моментъ вѣса будетъ самъ по себѣ равенъ нулю и намъ останется только разсматривать моменты приложенныхъ къ рычагу силъ.

Мы предположили, что точка опоры F рычага удерживается со всѣхъ сторонъ такъ, что рычагъ можетъ около нее только вращаться; но чтобы получить такую точку въ тѣлѣ, пропускаютъ чрезъ это тѣло валъ или негибкій цилиндръ произвольнаго діаметра, тогда тѣло, вращаясь около этого цилиндра, будетъ находится въ положеніи, какъ-бы оно вращалось около своей оси, принимаемой за неподвижную линію, а всѣ точки сѣченія плоскостью, проходящею перпендикулярно къ оси и пересѣкающей цилиндръ по кругу будутъ находится въ положеніи какъ-бы вращательномъ около центра круга.

Въ нашемъ расположеніи рычагъ не можетъ обращаться во всѣ стороны около неподвижной точки, но, если всѣ силы приложенныя къ нему находятся въ плоскости перпендикулярной къ оси, около которой рычагъ вращается, то законы равновѣсія будутъ, въ этомъ случаѣ, тѣ-же, какъ и при неподвижной точки. Можно сквозь прутъ пропустить неподвижный шаръ, соприкасающійся съ рычагомъ не менѣе, какъ въ четырехъ точкахъ такъ, чтобы эти точки прикосновенія были точками прикосновенія пирамиды, описанной около поверхности шара; въ этомъ случаѣ, рычагъ, вращаясь около шара можно разсматривать какъ вращающійся около его центра.

Въ большей части случаевъ, рычагъ лежитъ только на точкѣ опоры и тогда условія приведенныя нами выше, не принимая во вниманіе треніе, будутъ недостаточны для равновѣсія. Независимо отъ того, что силы, приложенныя къ рычагу, должны имѣть одну равнодѣйствующую, проходящую чрезъ неподвижную точку необходимо, чтобы направленіе равнодѣйствующей было нормально къ поверхности касанія рычага съ его опорою, такъ какъ, если эта равнодѣйствующая будетъ наклонна къ плоскости касательной къ этой поверхности, то ее можно разложить на двѣ силы: одну перпендикулярную, а другую параллельную къ этой плоскости. Первая сила уничтожится, а вторая заставитъ рычагъ скользить по этой точкѣ опоры.

Рычаги имѣютъ весьма значительное примѣненіе въ практикѣ. Такъ, на свойствахъ дѣйствія рычага, какъ мы уже упомянули выше, основано дѣйствіе и примѣненіе *ножа, щипцовъ, ножницъ, руля, тачки* и, въ особенности, устройство вѣсовъ и блоковъ, къ разсмотрѣнію которыхъ мы и переходимъ.

Вѣсы. Подъ именемъ вѣсовъ въ практикѣ называютъ такое приспособленіе, при помощи котораго можно опредѣлить вѣсъ тѣлъ. Но вѣсы могутъ быть употребляемы для измѣренія другихъ силъ, а потому вѣсы, вообще можно считать особаго рода *силомѣрами.*

Вѣсы бываютъ: 1) *равноплечные* или *обыкновенные;* 2) *неравноплечные—безмѣны, римскіе вѣсы;* 3) *угловые вѣсы;* 4) *сложные вѣсы* и 5) *пружинные.*

Обыкновенные вѣсы, безмѣны, римскіе и угловые вѣсы представляютъ собою рычаги приспособленныя, различнымъ образомъ, для измѣренія вѣса; сложные вѣсы представляютъ примѣръ соединенія нѣсколькихъ рычаговъ и только пружинные вѣсы, какъ основанные на упругости пружинъ, не относятся къ рычагамъ. Для полноты нашего изслѣдованія о вѣсахъ мы, тѣмъ не менѣе, не обойдемъ молчаніемъ и вѣсы пружинные.

Обыкновенные вѣсы представляютъ ни что иное какъ рычагъ перваго рода, къ концамъ котораго, посредствомъ цѣпочекъ или шнурковъ привѣшиваются двѣ металлическія чашки для помѣщенія груза вѣсъ котораго желаютъ опредѣлить. Вѣсы, обыкновенно, располагаютъ такъ, чтобы ихъ центръ тяжести проходилъ чрезъ перпендикуляръ, проведенный чрезъ неподвижную точку F (рис. 53), и чтобы плечи рычага FA и FB были совершенно равны. Только въ этомъ случаѣ, мы можемъ быть увѣрены, что помѣщенныя на чашкахъ вѣсовъ два тяжелыя тѣла, находящіяся между собою въ равновѣсіи, будутъ имѣть равный вѣсъ, а слѣдовательно и равныя массы. Такимъ образомъ, если мы примемъ вѣсъ одного тѣла за единицу, то можемъ опредѣлить массы различныхъ тѣлъ, опредѣляя число единицъ вѣса необходимыхъ для уравновѣшиванія.

Для вѣрности вѣсовъ необходимо, чтобы они удовлетворяли слѣдующимъ условіямъ:

1) Чтобы центръ тяжести находился на вертикальной линіи, проведенной чрезъ неподвижную точку.

2) Чтобы точка опоры раздѣляла рычагъ или коромысло на двѣ совершенно равныя части.

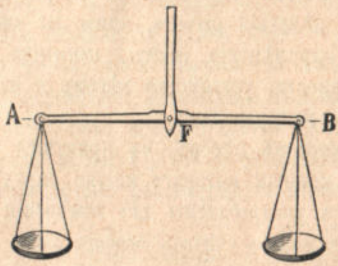


Рис. 53.

Первое условіе весьма не трудно провѣрить. Надо испытать, находятся-ли порожніе вѣсы, т. е. безъ наложеннаго на чашки ихъ груза, въ равновѣсіи. Если этого нѣтъ, то можно исправить эту погрѣшность, прикрѣпивъ къ одной изъ чашекъ вѣсовъ, или къ плечу рычага грузъ способный привести рычагъ въ равновѣсіе.

Что касается равенства плечъ рычага, то убѣдится въ томъ, что выполнено-ли это условіе надо уравновѣсить два груза положенные на чашки вѣсовъ, а затѣмъ перемѣнить ихъ мѣсто, т. е. переложить грузъ съ одной чашки на другую. Если плечи рычаговъ равны, то равновѣсіе должно существовать и послѣ перемѣщенія грузовъ, такъ какъ въ случаѣ, если грузы, находящіеся въ равновѣсіи равны между собою, то отъ перемѣщенія ихъ равновѣсія не должно нарушиться. Если же плечи рычага не равны, то по перемѣщеніи грузовъ равновѣсіе неминуемо будетъ нарушено, потому что грузы, которые сперва находились въ равновѣсіи, были обратно пропорціональны плечамъ рычага; перемѣнивъ-же ихъ мѣста большій грузъ, дѣйствуя на конецъ длиннѣйшаго изъ плечъ, непремѣнно перевѣситъ меньшій.

Невѣрные вѣсы можно исправить перемѣщеніемъ или неподвижной точки, или-же точки привѣса одной изъ чашекъ вѣсовъ.

Можно пользоваться и невѣрными вѣсами и помощью двойного взвѣшиванія найти истинный вѣсъ тѣла.

Положимъ P неизвѣстный вѣсъ тѣла, x и y плечи вѣсовъ, тогда, если вѣсъ P, положенный на чашку, соотвѣтствующею первому плечу рычага x уравновѣситъ грузъ A, помѣщенный въ другой чашкѣ, то

$$Py = Bx.$$

Затѣмъ, переложимъ вѣсъ P на чашку, соотвѣтствующую плечу рычага и положимъ, что тогда грузъ B, помѣщенный въ другой чашкѣ уравновѣситься, то получимъ:

$$Py = Bx.$$

Перемноживъ почленно оба эти уравненія, найдемъ:

$$P^2 = AB.$$

Откуда:

$$P = \sqrt{AB}$$

Итакъ, *истинный вѣсъ тѣла будетъ среднее геометрическое, пропорціональное изъ двухъ найденыхъ вѣсовъ,* которые его непремѣнно уравновѣсятъ.

Другой способъ нахожденія помощью невѣрныхъ вѣсовъ истиннаго вѣса тѣла состоитъ въ томъ, что тѣло кладутъ на одну изъ чашекъ, а на другую насыпаютъ песокъ, мелкую дробь и вообще сыпучія тѣла до тѣхъ поръ, пока не установится равновѣсіе. Послѣ этого тѣло снимаютъ и кладутъ вмѣсто него на чашку гири, пока вновь не установится равновѣсіе. Гири эти покажутъ истинный (дѣйствительный) вѣсъ тѣла.

На рисункѣ 54 показанъ наиболѣе простой способъ устройства вѣсовъ. Главныя части такихъ вѣсовъ: AB коромысло; CD указатель или стрѣлка; CF вилка, C ось, образуемая трехгранною призмою; двѣ чашки вѣсовъ.

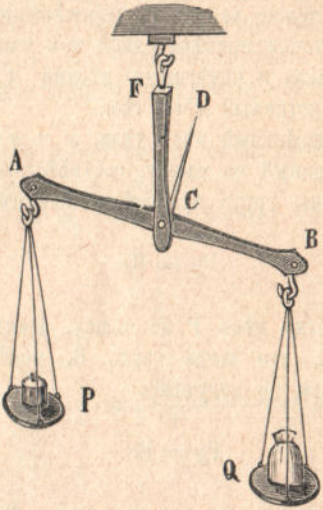


Рис. 54.

Отъ хорошихъ вѣсовъ требуются: *вѣрность, чувствительность и устойчивость.*

Вѣсы вѣрны тогда, когда при одинаковыхъ грузахъ, положенныхъ на чашки, или когда чашки вовсе не нагружены,—коромысло имѣетъ горизонтальное положеніе, а указатель вертикальное, т. е. ось его совпадаетъ съ осью вилки.

Этимъ свойствомъ вѣсы, очевидно, могутъ обладать въ томъ случаѣ, когда плечи ихъ математически точно равны между собою и имѣютъ совершенно одинаковый вѣсъ.

Вѣсы чувствительны,—если, при малѣйшемъ избыткѣ груза въ одной изъ чашекъ, коромысло отклоняется отъ горизонтальнаго положенія и самыя ничтожныя отклоненія его обнаруживаются указателемъ. Вѣсы устойчивы, — если, послѣ всѣхъ возможныхъ отклоненій, коромысло само собою приходитъ въ положеніе равновѣсія, какъ скоро грузы на чашкахъ уравновѣшены.

Чувствительность и устойчивость вѣсовъ зависятъ также отъ формы и величины коромысла. Чтобы вѣсы обладали этими качествами, коромысло должно имѣть форму, показанную на рис. 55, при чемъ центръ S нагруженныхъ вѣсовъ долженъ лежать ниже оси вращенія C коромысла и на вертикальной линіи проходящей чрезъ ея центръ; точно также нужно, чтобы линія AB, соединяющая точки привѣса чашекъ, не лежала выше точки вращенія, такъ какъ, въ противномъ случаѣ, при извѣстной нагрузкѣ, центръ тяжести коромысла могъ-бы совпасть съ центромъ вращенія. Не мѣшаетъ замѣтить, что если бы центръ тяжести коромысла совпалъ съ его точкою опоры, то вѣсы при равныхъ грузахъ на обѣихъ чашкахъ сохранили бы равновѣсіе во всякомъ положеніи коромысла, а при малѣйшемъ избыткѣ груза въ одной изъ чашекъ коромысло должно было-бы опрокинуться, принявъ вертикальное положеніе, вслѣдствіе чего вѣсы были бы совершенно негодны къ употребленію.

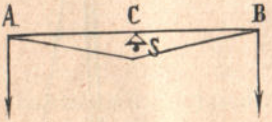


Рис. 55.

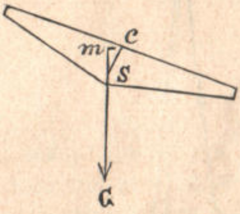


Рис. 56.

Итакъ, центръ тяжести коромысла долженъ быть не въ точкѣ опоры и отнюдь не выше ея, а всегда ниже; но разстояніе между этими точками должно быть возможно меньше. И въ самомъ дѣлѣ, если, какъ на рис. 56, центръ вращенія коромысла будетъ c, а центръ тяжести s, то, чѣмъ больше cs, тѣмъ больше mc плечо вѣса коромысла G, противодѣйствующаго отклоненію коромысла отъ горизонтальнаго положенія; а слѣдовательно, чѣмъ больше разстояніе cs, тѣмъ менѣе чувствительны вѣсы. Чтобы нагруженное коромысло имѣло центръ тяжести не выше точки опоры и не ниже центра тяжести ненагруженнаго коромысла, т. е. чтобы чувствительность и устойчивость вѣсовъ оставалась въ желаемыхъ предѣлахъ при разнообразныхъ нагрузкахъ, точки привѣса чашекъ А и В (рис. 55 — 56) помѣщаются на линіи, проходящей или чрезъ центръ вращенія или между центромъ вращенія и центромъ тяжести ненагруженнаго коромысла.

Изъ поясненнаго на рисункѣ 56 ясно, что чѣмъ меньше вѣсъ G самого коромысла, тѣмъ вѣсы чувствительнѣе. Кромѣ того, чувствительность вѣсовъ будетъ тѣмъ больше, чѣмъ длиннѣе плечи коромысла, такъ какъ съ увеличеніемъ плечъ увеличиваются моменты грузовъ, а слѣдовательно при томъ-же грузѣ или избыткѣ груза на одной изъ чашекъ, коромысло получаетъ при большихъ плечахъ большія отклоненія.

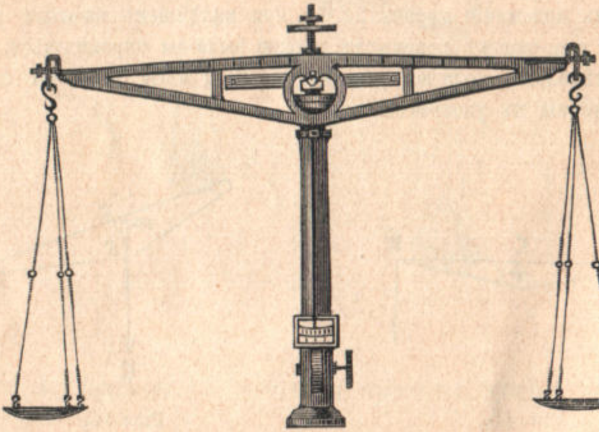


Рис. 57.

Для уменьшенія тренія въ точкѣ опоры, которое ослабляетъ чувствительность вѣсовъ, коромысло опирается остріемъ трехгранной стальной призмы на твердую и полированную металлическую или каменную подкладку (рис. 57). Такъ устраиваются химическіе вѣсы, предназначаемые для физическихъ и химическихъ изслѣдованій, отличающіеся отъ обыкновенныхъ тѣмъ, что имѣютъ весьма точную конструк цію. Они устроены такъ, (рис. 57) что при помощи привинченныхъ къ концамъ коромысла грузовъ, или-же посредствомъ перемѣщенія точекъ привѣса чашекъ можно исправить малѣйшую разницу въ длинѣ плечъ или въ вѣсѣ чашекъ; кромѣ того они имѣютъ весьма длинный указатель, обнаруживающій малѣйшія отклоненія коромысла, а потому отличаются строгою вѣрностью и значительною чувствительностью, благодаря которой на нихъ можно взвѣшивать самые малые грузы.

Неравноплечные вѣсы состоятъ изъ неравноплечнаго рычага, при помощи котораго незначительною гирею или противовѣсомъ можно взвѣсить или удержать въ равновѣсіи значительные грузы.

Такіе вѣсы могутъ быть трехъ родовъ: 1) съ подвижнымъ противовѣсомъ или *рижскіе вѣсы*; 2) съ неподвижной чашкой для гирь и 3) съ неподвижнымъ противовѣсомъ—*безмѣнъ*.

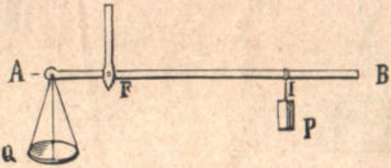


Рис. 58.

Рижскіе вѣсы устраиваются такъ: къ концу A короткаго плеча рычага (рис. 58) привѣшивается тѣло, котораго вѣсъ Q желаютъ опредѣлить. Тѣло удерживается при помощи крючка, или кладется на чашку, свободно висящую въ точкѣ A, какъ и въ обыкновенныхъ вѣсахъ. На другомъ концѣ рычага FB находится опредѣленный грузъ p, прикрѣпленный къ кольцу, которое можетъ скользить по всей длинѣ плеча FB; когда этотъ грузъ отодвинется на опредѣленное разстояніе FI отъ точки опоры F, то онъ уравновѣситъ тѣло, привѣшенное къ короткому плечу.

Итакъ, если въ каждой точкѣ I плеча FB назначить числами отношеніе двухъ силъ Q и p, находящихся въ равновѣсіи, то мы могли бы этотъ рычагъ сдѣлать удобнымъ для взвѣшиванія различныхъ тѣлъ, при помощи одного груза P, принимаемаго за единицу. Для этого достаточно передвинуть грузъ P въ такую точку, чтобы онъ уравновѣсилъ тѣло Q; число находящееся въ этой точкѣ покажетъ отношеніе Q къ *p*, т. е, искомый вѣсъ тѣла.

На рисункѣ 59 представлены римскіе вѣсы съ такимъ дѣленіемъ или скалой. Взвѣшиваніе посредствомъ этихъ вѣсовъ представляетъ большое удобство, такъ какъ двигая кольцо съ грузомъ или гирею до уравновѣшиванія съ тѣломъ, положеннымъ на чашку вѣсовъ, мы сразу опредѣляемъ вѣсъ цифрою обозначенною на скалѣ, которая, когда рычагъ находится въ равновѣсіи, должна соотвѣтствовать вѣсу тѣла.

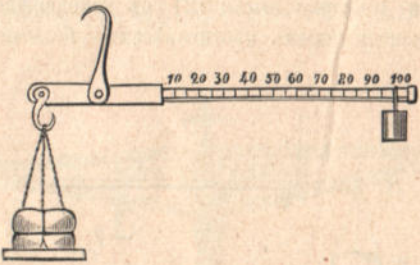


Рис. 59.

Если римскіе вѣсы устроены такъ, что ихъ центры тяжести, т. е. коромысло съ чашкою совпадаетъ съ точкою опоры F, то законъ равновѣсія рычага будетъ тотъ-же, какъ если-бы рычагъ AB былъ безъ тяжести. Такъ какъ отношеніе Q и *p* равно отношенію между плечами FI и FA, то въ такомъ случаѣ, легко построить римскіе вѣсы и назначить на нихъ дѣленія. Но если центръ тяжести находится по правую или по лѣвую сторону точки опоры, то отношеніе Q къ *p* не будетъ равно отношенію плечъ рычага IF и AF; оно должно быть уменьшено на извѣстную величину, зависящую отъ вѣса машины и отъ разстоянія его отъ точки опоры, а слѣдовательно и дѣленія на рычагѣ должны быть измѣнены.

Изъ всего сказаннаго нами легко понять, что эти дѣленія, въ обоихъ случаяхъ, будутъ распредѣлены одинаково, но только въ послѣднемъ случаѣ точка, отъ которой начинаются дѣленія, т.-е. точка, въ которой ноль соотвѣтствуетъ вѣсу Q уже не будетъ въ точкѣ опоры F, но будетъ находиться вначалѣ или позади ея въ O (рис. 60) на извѣстную величину FO, которую легко опредѣлить.

Можно не зная ни вѣса, ни центра тяжести римскихъ вѣсовъ опредѣлить на ихъ рычагѣ дѣленія слѣдующимъ способомъ, который, самымъ естественнымъ образомъ, вытекаетъ изъ теоріи паръ и который легко удерживается въ памяти.

Положимъ, что чашка пуста, или что вѣсъ Q равенъ нулю; передвинемъ вѣсъ p въ точку O, которая можетъ находиться вправо или влѣво отъ точки опоры, но такъ, чтобы коромысло AB приняло горизонтальное положеніе. При этомъ центръ тяжести всей системы, не исключая подвижнаго вѣса p будетъ находиться въ точки F и вѣсъ всей машины уничтожится. Слѣдовательно, въ точкѣ O надо поставить ноль, потому что тогда вѣсъ Q равенъ нулю.

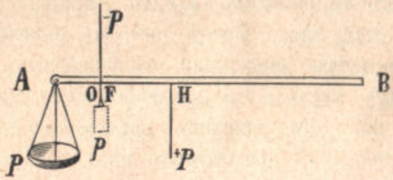


Рис. 60.

Послѣ этого на пустую чашку вѣсовъ положимъ вѣсъ $p' = p$, то равновѣсіе не нарушится. Слѣдовательно, если съ одной стороны увеличимъ вѣсъ груза положеннаго на чашку вѣсовъ, то съ другой надо искать нѣсколько нужно увеличить плечо рычага, чтобы равновѣсіе сохранилось.

Положимъ, что сила p' перенесена параллельно самой себѣ изъ изъ A въ точку опоры F, то увидимъ, что эта сила уничтожится и останется пара $(p' - p')$, приложенная къ $FA = r$, которой моментъ будетъ $p'r$. Итакъ, вѣсъ p, положенный въ пустую чашку даетъ пару или моментъ pr, а потому необходимо, съ другой стороны, приложить равную и противоположную пару $(-p' + p)$, которая будетъ имѣть тоже плечо r. Тогда приложивъ эту пару къ линіи $OH = r$, мы увидимъ, что сила $-p$ уничтожитъ ей равную и противоположную силу p и останется только сила $+p$, которая будетъ ничто иное какъ подвижной вѣсъ p, удаленный на разстояніе $OH = r$. Слѣдовательно для каждаго вѣса p прибавленнаго къ чашкѣ, необходимо удалить подвижной вѣсъ на постоянную длину r короткаго плеча римскихъ вѣсовъ; если-же прибавить какую-нибудь часть вѣса p, то на такую-же часть длины и надо отодвинуть подвижную часть.

Итакъ отъ точки 0 надо отложить части равныя r и означить точки дѣленія чрезъ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 и т. д.; можно означить и промежутоцные части напримѣръ, десятыя, сотыя доли, тогда мы получимъ инструментъ, посредствомъ котораго не трудно опредѣлять вѣсъ тѣла съ точностью до десятыхъ и сотыхъ долей извѣстнаго вѣса p.

Изъ этого видно, что римскіе вѣсы могутъ быть полезны для взвѣшиванія тѣлъ въ тѣхъ случаяхъ, когда обыкновенные вѣсы нельзя употребить, потому что для послѣднихъ требуется цѣлая коллекція гирь, между тѣмъ, какъ въ римскихъ вѣсахъ имѣется только одинъ постоянный вѣсъ или гиря. Кромѣ того, въ римскихъ вѣсахъ точка опоры менѣе обременена давленіями взвѣшиваемыхъ тѣлъ, потому что въ обыкновенныхъ вѣсахъ это давленіе равно двойному вѣсу тѣла или 2Q, тогда какъ въ римскихъ вѣсахъ оно равно $Q + p$ или только Q, т.-е. половинѣ предыдущаго вѣса, если будемъ разсматривать грузъ p какъ принадлежащій самимъ римскимъ вѣсамъ и составляющій ихъ часть.

Неравноплечные вѣсы съ постоянною чашкою для гирь (рис. 61) отличаются отъ обыкновенныхъ только тѣмъ, что гири привѣшиваются къ плечу, которое длиннѣе плеча груза, а потому вѣсъ ихъ всегда меньше вѣса груза. Вѣсъ чашекъ и плечъ, не смотря на различную длину этихъ послѣднихъ, таковъ, что въ ненагруженныхъ вѣсахъ коромысло горизонтально.

Плечи AC и BC находятся между собою въ опредѣленномъ отношеніи, такъ что CB *въ пять, десять разъ* больше AC.

Въ послѣднемъ случаѣ вѣсы называются *десятичными*, такъ какъ гиря P можетъ уравновѣсить грузъ Q въ 10 разъ большій.

Поэтому вѣсъ какого-нибудь тѣла Q всегда равенъ удесятеренному вѣсу гири P, положенной для равновѣсія на чашку вѣсовъ.

Неравноплечные вѣсы съ *постояннымъ противувѣсомъ*, такъ-назыв. *датскіе вѣсы* или безмѣны, состоятъ изъ коромысла (рис. 62), къ концу котораго A прикрѣпляется крючокъ для подвѣса груза или чашки вѣсовъ. Въ другомъ концѣ дѣйствуетъ постоянный противувѣсъ въ видѣ достаточно тяжелой металлической головки P.

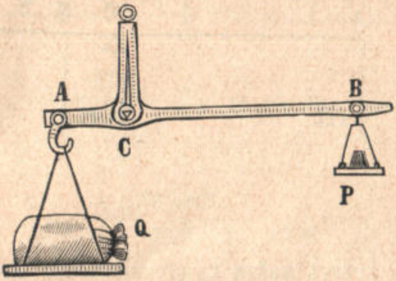
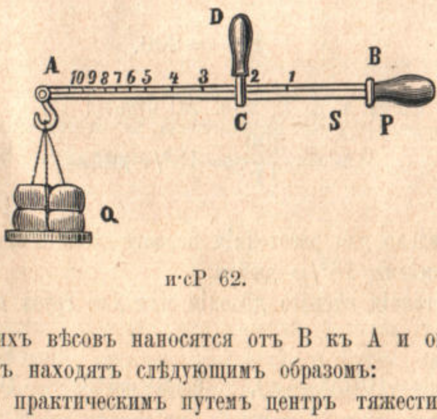


Рис. 61.

Для уравновѣшиванія различныхъ грузовъ въ этихъ вѣсахъ должна перемѣщаться точка опоры. Съ этою цѣлью на коромысло надѣвается широкое кольцо C съ ручкою D, держа за которую, двигаютъ коромысло до тѣхъ поръ взадъ или впередъ, пока грузъ Q не уравновѣсится съ неподвижною головкою P.



и·сР 62.

Дѣленія такихъ вѣсовъ наносятся отъ B къ A и онѣ не равны между собою; ихъ находятъ слѣдующимъ образомъ:

Опредѣляютъ практическимъ путемъ центръ тяжести S ненагруженныхъ вѣсовъ и измѣряютъ AS—разстояніе точки привѣса A груза отъ центра тяжести S.

Положимъ, что мы для AS нашли 20 дюйм. и что вѣсъ ненагруженныхъ вѣсовъ = 10 фунт.; вѣсъ этотъ слѣдуетъ вообразить сосредоточеннымъ въ центрѣ тяжести S.

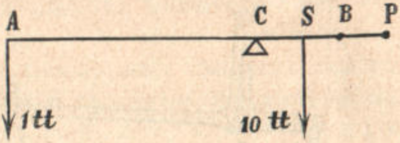


Рис. 63.

Если теперь хотятъ найти разстояніе точки опоры C (рис. 63), считая отъ A, для груза въ 1 ф., находящагося въ чашкѣ A, то, обозначивъ AC чрезъ x, причемъ $CS = 20 - x$, составляютъ для равновѣсія слѣдующее равенство:

$$1 . x = 10 \ (20 - x).$$

откуда:

$$x = 200 - 10 . x;$$

слѣдовательно:

$$11x = 200.$$

и разстояніе плеча A до C, т.-е. AC будетъ:

$$AC = \frac{200}{11} = 18^3/_4 \text{ дюйма.}$$

Слѣдовательно для разстоянія перваго дѣленія или для груза въ 1 фунтъ, мы имѣемъ $18^2/_{11}$ дюйма.

Для разстоянія втораго дѣленія или для груза въ 2 фунта, получимъ

$$2x = 10(20 - x), \text{ т. е. } 2x = 200 - 10x$$

или

$$12x = 200.$$

откуда:

$$AC = x = \frac{200}{12} = 16^2/_3 \text{ дюйма.}$$

Точно также для груза въ 3 фунта или для третьяго дѣленія, получимъ:

$$AC = \frac{200}{12} = 15^5/_{13} \text{ дюйма,}$$

и для четвертаго:

$$AC = \frac{200}{14} = 14^2/_7 \text{ дюйма.}$$

Для сотаго дѣленія или для груза въ 100 фунт.

$$AC = \frac{200}{110} = 1^9/_{11} \text{ дюйма;}$$

а для груза въ $^1/_2$ фунта:

$$AC = \frac{200}{10^1/_2} = 19^1/_{21} \text{ дюйма.}$$

Изъ этого видимъ, что для того, чтобы получить разстояніе точки опоры C отъ точки A,—для какого-бы то ни было груза Q—, *нужно вѣсъ* N *вѣсовъ умножить на разстояніе* AS *центра тяжести, и произведеніе это раздѣлить на сумму* N + Q.

Слѣдовательно:

$$AC = \frac{N \,.\, AS}{N + Q}$$

Изъ предъидущаго слѣдуетъ, что дѣленія должны уменьшаться, т. е. что точки дѣленій должны все болѣе и болѣе приближаться другъ къ другу, по мѣрѣ увеличенія взвѣшиваемыхъ грузовъ. Поэтому при малѣйшей неточности въ дѣленіяхъ для большихъ грузовъ, получается большая ошибка.

Для опредѣленія вѣса тѣлъ можно еще употреблять колѣнчатый рычагъ АСВ (рис. 64), движущійся около неподвижной точки С, и плеча котораго, СА и СВ составляютъ между собою прямой уголъ АСВ.

Положимъ, что плечо СВ, къ концу котораго привѣшивается тѣло, продолжено на другую сторону точки опоры на длину СВ', такъ чтобы центръ тяжести всего прута ВВ', находился на его срединѣ С. Тогда вѣсъ плеча СВ уничтожается при всѣхъ положеніяхъ колѣнчатаго рычага около неподвижной точки; а потому можно его и не принимать во вниманіе; вѣсъ-же другаго плеча СА, вмѣстѣ съ вѣсомъ который можно прикрѣпить къ этому плечу, будетъ способствовать къ удерживанію въ равновѣсіи тяжести взвѣшиваемаго тѣла. Большею частію это плечо или стрѣлка дѣлается изъ тяжелаго вещества, для того чтобы сила p, происходящая отъ ея вѣса и приложенная въ центрѣ тяжести G стрѣлки, могла уравновѣсить взвѣшиваемое тѣло. Можно принять, что p представляетъ полный вѣсъ стрѣлки и тѣлъ, которыя могутъ быть къ ней привѣшены, и что общій ихъ центръ тяжести находится въ G на разстояніи CG отъ неподвижной точки.

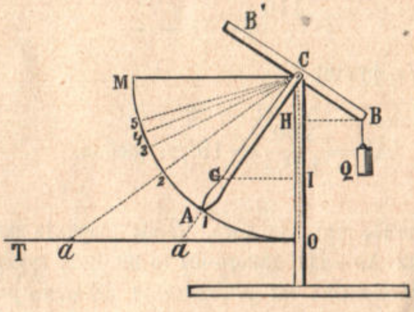


Рис. 64.

Прежде чѣмъ рычагъ будетъ въ равновѣсіи, стрѣлка СА направится по вертикальной линіи СО, а плечо будетъ горизонтально; когда-же привѣсимъ къ концу В тѣло, котораго вѣсъ Q, то плечо СВ приближаясь къ вертикальной линіи будетъ опускаться, а другое плечо СА подниматься. Итакъ разстояніе ВН силы Q отъ точки опоры будетъ уменьшаться; а разстояніе GI другой силы p отъ той-же точки, увеличиваться, но чтобы колѣнчатый рычагъ находился въ равновѣсіи надо, чтобы онъ находился въ такомъ положеніи, при которомъ моменты $Q \times BH$ и $p \times GI$ были бы съ обоихъ сторонъ равны.

Положимъ ψ будетъ уголъ ACO, составляемый стрѣлкою съ вертикальною линiею, R разстоянiе CG ея центра тяжести отъ точки опоры, и r длина плеча CB, къ которому тѣло привѣшено.

Такъ какъ

$$GI = R \operatorname{Sin} \psi, \text{ и } BH = r \operatorname{Cos} \psi,$$

то уравненiе равновѣсiя будетъ:

$$p \,.\, R \operatorname{Sin} \psi = Q \,.\, r \operatorname{Cos} \psi,$$

которое дастъ:

$$tang\, \psi = \frac{r}{R \,.\, p} \,.\, Q$$

Откуда слѣдуетъ (потому что три величины p, R r, всегда постоянны), что тангенсъ наклоненiя ψ стрѣлки увеличивается пропорцiонально вѣсу Q тѣла.

Итакъ если къ рычагу придѣлаемъ четверть круга COAM, представляющую секторъ пробѣгаемый стрѣлкою отъ вертикальной линiи CO до горизонтальной CM, то не трудно будетъ означить на этой дугѣ числа, соотвѣтствующiя различнымъ вѣсамъ.

Въ самомъ дѣлѣ проведемъ касательную OT и прикрѣпимъ сначала въ B вѣсъ, который желаемъ принять за единицу; этотъ вѣсъ заставитъ стрѣлку подняться на извѣстную дугу AO, а направленiе стрѣлки, продолженное до встрѣчи a съ линiею OT, отрѣжетъ на этой линiи часть Oa, которая представитъ тангенсъ дуги соотвѣтствующiй единицѣ вѣса. Итакъ, откладывая на линiи OT, отъ точки O, части равныя Oa и соединяя точки дѣленiя съ центромъ C прямыми линiями, мы получимъ на четверти круга соотвѣтствующiя точки, которыя должны означить числами 0, 1, 2, 3, 4, и т. д. Если желаемъ раздѣлить каждую часть линiи OT на дроби, то, употребляя прежнее построенiе, мы получимъ на дугѣ точки, которыя должно будетъ означить такими же долями вѣса принятаго за единицу.

Какъ бы ни былъ малъ вѣсъ p стрѣлки, изъ пропорцiи:

$$Q : p = R \; tang\; \psi : r$$

видно, что этотъ вѣсъ p всегда будетъ достаточенъ для уравновшиванія вѣса Q произвольной величины, потому что тангенсъ угла φ можетъ принимать величину бо̀льшую всякой данной величины.

Но если тангенсъ дуги φ увеличивается на величины равныя приращеніямъ вѣса Q тѣла, то самая дуга увеличивается неравномѣрно; ея приращенія будутъ непрерывно уменьшаться и верхнія дѣленія колѣнчатаго рычага будутъ становиться все менѣе и менѣе чувствительными при однихъ и тѣхъ-же приращеніяхъ вѣса, слѣдовательно, если желаемъ чтобы машина показывала вѣрно, нужно чтобы стрѣлка подымалась не очень высоко. Для этого при взвѣшиваніи большихъ тяжестей, къ стрѣлкѣ привѣшиваютъ нѣкоторый грузъ, котерый ее заставитъ остаться около средней части четверти круга, гдѣ дѣленія означены явственнѣе.

Только что описанное устройство колѣнчатаго рычага въ практикѣ служитъ для устройства угловыхъ вѣсовъ. Такіе вѣсы, въ большинствѣ случаевъ, состоятъ изъ ломанаго или же криволинейнаго неравноплечнаго рычага ACB (рис. 65). Ось C рычага поддерживается подставкою CD; въ B привѣшена чашка, на которую кладутъ взвѣшиваемый грузъ Q, а указатель AC на шкалѣ EF показываетъ искомый грузъ. Къ указателю AC прикрѣпленъ противувѣсъ, который уравновѣшиваетъ грузъ Q.

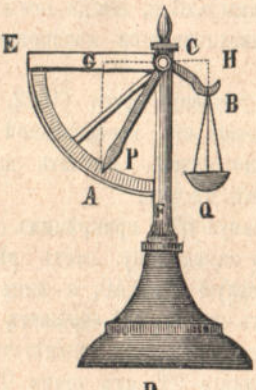


Рис. 65.

Въ ненагруженномъ состояніи указатель AC принимаетъ вертикальное положеніе и совпадаетъ съ линіею CF. Въ большинствѣ случаевъ, рычагъ согнутъ такимъ образомъ, что, при сказанномъ положеніи, точка привѣса B лежитъ на горизонтальной линіи GCH.

Если мы теперь на чашку положимъ нѣкоторый грузъ, то B должно опуститься, а A—приподняться; слѣдовательно пропорціонально увеличенію груза Q, плечо его CH будетъ уменьшаться, между тѣмъ какъ плечо GC противувѣса P—увеличиваться.

При этомъ указатель AC будетъ колебаться по шкалѣ EF, и лишь тогда приметъ постоянное положенiе, когда

$$P \,.\, CG = Q \,.\, CH.$$

Углы отклоненiя указателя или дѣленiя шкалы, соотвѣтствующiя различнымъ грузамъ, опредѣляются изъ опыта.

Сложные вѣсы. Подъ именемъ сложныхъ вѣсовъ подразумѣваются вѣсы съ помостами и платформами. Вѣсы эти обыкновенно устраиваются такимъ образомъ, чтобы при помощи гирь незначительнаго вѣса можно было взвѣшивать грузы въ 10, 100 и болѣе разъ большiе.

Десятичные вѣсы. Вѣсы эти состоятъ изъ платформы AB (рис. 66 и 67), на которую кладется грузъ, и двухъ рычаговъ.

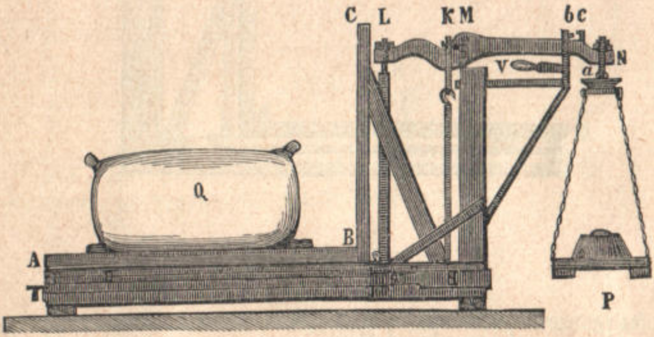


Рис. 66.

Платформа AB, имѣющая обыкновенно видъ усѣченнаго равнобедреннаго трехугольника, и соединенная со стѣнкою BC, упирается помощью подкоса въ полосу D, привѣшенную посредствомъ стержня HK, въ точкѣ K, къ рычагу LN, вращающемуся около точки M.

Съ другой стороны платформа опирается въ E, посредствомъ трехгранныхъ призмъ, на двойной рычагъ FG, подвѣшенный къ рычагу LN въ точкѣ L. Точка опоры этого рычага лежитъ на призмѣ F.

Прикрѣпленная къ рычагу LN въ точкѣ N, чашка предназначена для гирь P, а въ меньшую чашку кладутъ недовѣски или тару для вывѣрки вѣсовъ.

Горизонтальное положеніе рычага LN указывается двумя призмами *b* и *c*, изъ которыхъ одна неподвижна, а другая связана съ рычагомъ. Кромѣ того рукояткою V можно приподнять рычагъ LN въ тотъ моментъ, когда не требуется больше производить взвѣшиванія; это дѣлается для того, чтобы остріе призмы M, по возможности, меньше притуплялось.

Отъ этихъ вѣсовъ требуется, чтобы они не показывали различія въ вѣсѣ тѣла, въ какомъ бы мѣстѣ платформы оно не помѣщалось, и чтобы грузъ Q всегда былъ въ 10 разъ больше гири P.

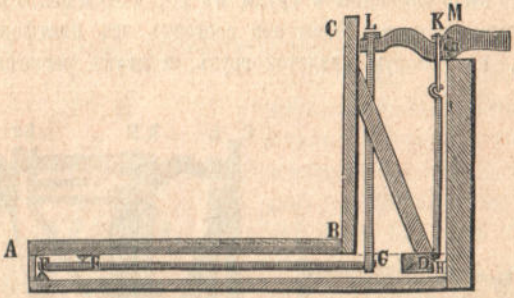


Рис. 67.

Чтобы удовлетворить первому требованію, вѣсы должны быть устроены такъ, какъ показано на рисункѣ 66 и 67; причемъ

$$FE : FG = RM : LM.$$

Въ такомъ случаѣ, подъ давленіемъ груза, платформа будетъ опускаться параллельно самой себѣ, т. е, въ точкѣ E на столько-же, на сколько и въ точкѣ B, и величина опусканія будетъ зависѣть единственно только отъ величины груза; а потому, гдѣ бы на платформѣ грузъ Q не находился, отношеніе его къ гирѣ P будетъ постоянно одно и тоже и равно отношенію KM къ MN.

Чтобы доказать сказанное, предположимъ, что гдѣ-либо лежащій на платформѣ грузъ Q оказываетъ давленіе Q' на точку E и давленіе Q'' на точку H.

Слѣдовательно, $Q' + Q'' = Q$; далѣе, предположимъ, что X есть та сила, съ которою соединительный стержень LG тянется книзу, а, слѣдовательно, X есть сила, которая должна уравновѣситься съ Q' на рычагѣ FG, а потому

$$X \, . \, FG = Q' \, . \, FE,$$

откуда:

$$X = \frac{Q' \, . \, FE}{FG};$$

но

$$\frac{FE}{FG} = \frac{KM}{LM},$$

слѣдовательно:

$$X = Q' \frac{KM}{LM}.$$

Такъ какъ сила P противудѣйствуетъ давленіямъ Q'' и X, дѣйствующимъ на рычагъ LN въ K и L, то

$$P \, . \, MN = Q'' \, . \, KM + X \, . \, LM,$$

или, подставляя вмѣсто X найденную для него величину,

$$P \, . \, MN = Q'' \, . \, KM + Q' = \frac{KM \, . \, LM}{KM},$$

т. е.

$$P \, . \, MN = Q'' \, . \, KM + Q' \, . \, KM',$$

или

$$P \, . \, MN = (Q' + Q'') \; KM = Q \, . \, KM.$$

Если существуетъ упомянутое отношеніе между плечами FE, FG, KM и LM (обыкновенно $FE = {}^1/_6 \, FG$; слѣдовательно, и $KM = {}^1/_6 \, LM$)

и если притомъ MN будетъ въ 10 разъ больше KM, то мы получимъ десятичные вѣсы, т. е. единица вѣса на чашкѣ будетъ уравновѣшивать десять такихъ-же единицъ на платформѣ.

Пружинные вѣсы. Пружинные вѣсы состоятъ изъ упругихъ стальныхъ пружинъ, на которыя дѣйствуютъ измѣряемые грузы, вслѣдствіе чего пружина претерпѣваетъ измѣненіе въ формѣ (растяженіе или сжатіе) и помощью указателя показываетъ на шкалѣ величину груза.

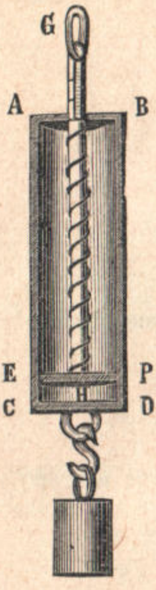


Рис. 68.

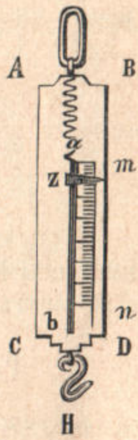


Рис. 69.

Такъ какъ, послѣ удаленіи груза, пружина должна принять свой первоначальный видъ, то очевидно, что на пружинныхъ вѣсахъ можно взвѣшивать грузы не свыше того вѣса, подъ вліяніемъ котораго пружина можетъ перейти за предѣлы упругости.

Пружинные вѣсы бываютъ различныхъ родовъ,

Самые обыкновенные изображены на рис. 68.

Вѣсы эти состоятъ изъ металлической трубки, закрытой снизу; въ верхней крышкѣ AB продѣлано отверстіе. Къ кругу EF, свободно движущемуся по трубкѣ, прикрѣпленъ стержень GH, проходящій чрезъ отверстіе крышки AB.

Въ кругъ EF упирается пружнна, идущая вокругъ стержня GH, но не соприкасающаяся ни съ нимъ, ни съ трубкою. Ко дну трубки прикрѣпленъ крючокъ длм подвѣшиванія груза; вверху къ стержню GH придѣлано кольцо, за которое можно держать или повѣсить вѣсы.

На поверхности стержня GH нанесены дѣленія, показывающія, на сколько стержень выходитъ изъ цилиндра при дѣйствіи гирь въ 1, 2, 3 и т. д. фунтовъ.

Если мы теперь къ крючку привѣсимъ нѣкоторый грузъ, то пружина сожмется и число дѣленій выходящихъ надъ крышкою трубки, укажетъ количество фунтовъ, которые вѣситъ грузъ.

Помощью такихъ вѣсовъ, трубки которыхъ обыкновенно бываютъ въ 4 дюйма длиною и $^3/_4$ — 1 дюйма въ діаметрѣ, можно взвѣшивать грузы отъ 1 — 50 фунтовъ.

На рис. 69 изображены вѣсы, сходные съ предъидущими.

Отличіе ихъ состоитъ въ томъ, что пружина находится только въ верхней части трубки ABCD и къ ней снизу, прикрѣпленъ стержень, который проходитъ снизу же чрезъ дно трубки и оканчивается крючкомъ для подвѣшиванія груза.

Въ этихъ вѣсахъ пружина не сжимается, а *растягивается*.

На передней части инструмента нанесена шкала *mn*, по которой указатель Z, прикрѣпленный къ стержню и движущійся въ прорѣзѣ *ab*, уксзываетъ вѣсъ тѣла, подвѣшеннаго въ H.

1. Блокъ.

Блокъ представляетъ собою кругъ, вращающійся на оси (сердечникъ) проходящій чрезъ его центръ; блокъ имѣетъ на окружности желобъ, по которому ходитъ веревка или цѣпь и къ которымъ прилагается сила и грузъ. Концы оси блока или плотно закрѣпляются въ коробкѣ, называемой обоймою, или-же только вкладываются въ ея стѣнки, Блокъ можетъ быть употребленъ двояко: или онъ остается неподвижнымъ на мѣстѣ врикрѣпленія, или-же имѣетъ крюкъ для привѣса груза, вмѣстѣ съ которымъ приходитъ въ движеніе. Въ первомъ случаѣ блокъ называется *постояннымъ* или *неподвижнымъ*, во второмъ—*подвижнымъ*.

Неподвижный блокъ въ практикѣ употребляется для перемѣщенія грузовъ или для воспроизведенія движенія, такъ какъ при его помощи можно дать силѣ болѣе выгодное направленіе, отчего такой блокъ также наз. *направляющимъ блокомъ*.

Равновѣсіе блока естестественно относится къ равновѣсію рычага.

Положимъ, что колесо АВК (рис. 70) движется въ вилкообразной распоркѣ CN около оси C; Часть AB его окружности обхватывается веревкою, къ двумъ концамъ которой приложены силы P и Q; Если къ двумъ крайнимъ точкамъ соприкасающейся веревки провести радіусы CA и CB, то силы P и Q можно разсматривать какъ приложенныя къ концамъ колѣнчатаго рычага, котораго оба плеча совершенно равны; слѣдовательно для равновѣсія блока необходимо, чтобы силы P и Q были также равны.

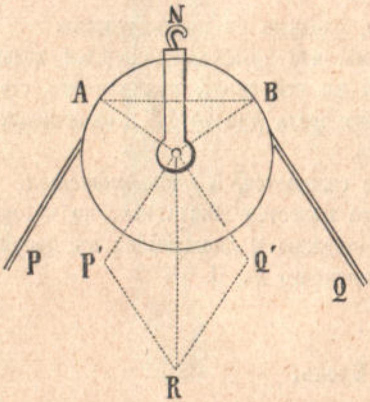


Рис. 70.

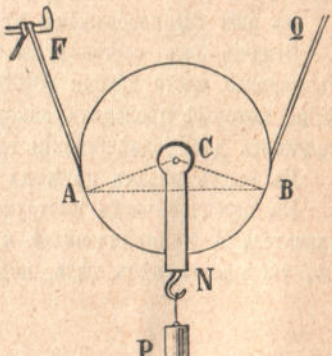


Рис. 71.

Что касается давлинія на центрѣ C блока, то оно будетъ равно тому, какъ-бы здѣсь дѣйствовали двѣ силы P и Q, перенесенныя параллельно ихъ направленіямъ въ P′ и Q′; тогда построивъ на линіяхъ CP′ и CQ′, представляющихъ величины силъ, ромбъ P′CQ′R, діагональ котораго CR представитъ давленіе R на точку C.

Если провести линію AB, то получится равнобедренный треугольникъ ACB, подобный треугольнику P′CR, а слѣдовательно получимъ:

$$P' \text{ или } P : R = AC : AB$$

Изъ этого слѣдуетъ, что *одна изъ двухъ силъ P и Q, приложенныхъ къ веревкѣ, относятся къ давленію претерпѣваемому осью блока, какъ радіусъ блока къ хордѣ дуги обнимаемой веревкою.*

Предположимъ, что ось не неподвижна, но удерживается силою равною и противоположною давленію, которой она претерпѣваетъ и что конецъ веревки AF (рис. 71) прикрѣпленъ къ неподвижной точкѣ F; въ этомъ случаѣ равновѣсіе блока ненарушится и веревка будетъ натягиваема по прежнему, а слѣдовательно отношеніе силы Q, къ силѣ удерживающей центръ блока неизмѣнится, мы увидимъ, что сила Q стремящаяся поднять тяжесть относится къ этой тяжести какъ радіусъ блока къ хордѣ дуги, охватываемой веревкою.

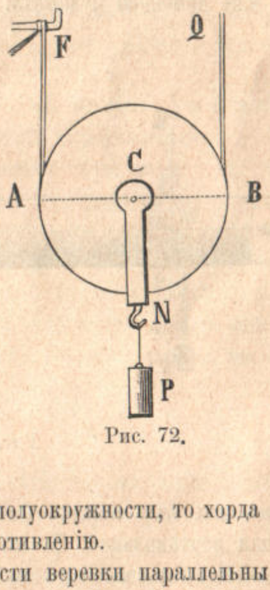


Рис. 72.

Когда дуга будетъ равна $^1/_3$ полуокружности, то хорда AB будетъ равна радіусу, а сила равна сопротивленію.

Въ томъ случаѣ, когда обѣ части веревки параллельны между собою, хорда AB (рис. 72) будетъ вдвое болѣе радіуса, а сила равна половинѣ сопротивленія. Замѣтимъ, что этотъ случай наиболѣе благопріятный для силы, потому что діаметръ есть наибольшій изъ хордъ круга.

2. Воротъ.

Воротомъ или *валомъ*, въ практикѣ, называется цилиндръ, къ концамъ котораго придѣлываются два другіе цилиндра, имѣющіе одну и ту-же ось, но меньшій діаметръ, и которые обыкновенно называются *вертлюгами* или *шипами*. Эти шипы лежатъ на двухъ неподвижныхъ подставкахъ F и H (рис. 73), такъ что валъ вращаясь будетъ находиться въ такомъ положеніи, какъ если-бы онъ вращался около своей оси, принимаемой за неподвижную линію.

Сопротивленіе, преодолѣваемое грузомъ Q, который желаемъ поднять привязывается къ веревкѣ, обвивающейся около цилиндра, тогда какъ сила P дѣйствуетъ при помощи другой веревки CP, касательной къ колесу, прочно придѣланному къ оси цилиндра; или-же посредствомъ спицъ, пропущенныхъ подъ прямымъ угломъ къ оси, сквозь цилиндръ; или помощью рукоятки.

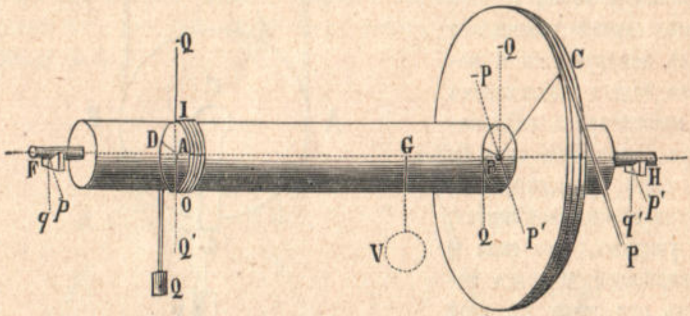


Рис. 73.

Воротъ или *валъ* можетъ быть горизонтальный, какъ на нашемъ рисункѣ, или вертикальной. Но каково-бы не было положеніе этой машины, и какимъ-бы способомъ мы не привели-бы воротъ въ движеніе, условія равновѣсія машины будутъ однѣ и тѣ-же.

Для большей простоты мы разсмотримъ только горизонтальный воротъ, предоставляя читателю выведенныя нами законы примѣнять къ вертикальному валу или вороту.

Итакъ, положимъ, что ось AB цилиндра горизонтальна. Слѣдовательно плоскость колеса будетъ вертикальною; при чемъ сила P будетъ дѣйствовать по направленію касательной къ колесу въ данной точкѣ C, а сопротивленіе Q дѣйствуетъ въ плоскости параллельной колесу и по вертикальному направленію, касательному къ поверхности цилиндра или окружности кругового сѣченія DI, проходящаго чрезъ точку прикосновенія D.

Опредѣлимъ сначала отношеніе силы къ сопротивленію, въ случаѣ равновѣсія, а затѣмъ давленія шиповъ F и H на подставки

Положимъ, что B будетъ центръ колеса и A центръ сѣченія DIO. Проведемъ радіусы CB и DA, перпендикулярные къ силамъ P и Q. Силу Q перенесемъ параллельно самой себѣ изъ D въ A, тогда мы получимъ силу Q' равную и параллельную силѣ Q, дѣйствующую съ нею въ одну сторону и приложенную въ A и пару $(Q, -Q)$, плечо которой будетъ радіусъ DA цилиндра. Силу P перенесемъ изъ C въ B, тогда получимъ силу P', дѣйствующую съ нею въ одну сторону и приложенную въ B и пару $(P,-P)$, плечо которой будетъ радіусъ CB колеса.

Двѣ силы P' и Q', приложеоныя къ точкамъ A и B неподвижной оси цилиндра, очевидно, уничтожаются спротивленіемъ.

Пары $(P, -P)$ и $(Q,-Q)$ должны находиться въ равновѣсіи между собою, такъ можно пару $(Q,-Q)$ перенести въ плоскость пары $(P,-P)$ и тогда эти двѣ пары сложатся въ одну, которая не будетъ находиться въ равновѣсіи около центра B колеса. Равнодѣйствующая пара сама по себѣ должна быть равна нулю, а слѣдовѣтельно и двѣ противоположныя пары $(P,-P)$ и $(Q,-Q)$ должны быть однозначущи, слѣдовательно ихъ моменты $P \times CB$ и $Q \times DA$ также равны; мы получимъ:

$$P : Q = DA : CB.$$

Отсюда понятно, что для равновѣсія ворота необходимо, *чтобы сила относилась къ сопротивленію, какъ радіусъ цилиндра къ радіусу колеса.*

Пероходимъ къ опредѣленію давленій производимыхъ на подставки.

Когда двѣ пары $(P,-P)$ и $(Q-Q)$ находятся въ равновѣсіи, то на неподвижную ось, а слѣдовательно и на подставки будутъ происходить давленія только силъ P' и Q'. Отсюда понятно, что давленіе производимое силами P и Q, приложенными къ валу или вороту, равно тому, которое могли-бы произвести тѣ-же силы, еслибы были перенесены параллельно самимъ себѣ на ось, въ ихъ плоскости перпендикулярной къ этой оси.

Если требуется опредѣлить давленіе, отдѣльно, на каждую подставку F и H, то для этого необходимо разложить силу Q' на двѣ параллельныя ей силы q и q', приложенныя къ точкамъ F и H. Также точно и силу P разложить на силы p и p' приложенныя къ тѣмъ-же точкамъ. Очевидно, что равнодѣйствующая силъ p и q выразитъ величину и направленіе давленія на подстилку F, а равносилъ p' и q' величину и направленіе давленія на подставку H.

До сихъ поръ мы не принимали во вниманіе тяжести ворота. Замѣтивъ, что составныя части этой машины симетрично располагаются относительно неподвижной оси, слѣдовательно ея центръ тяжести находится въ одной изъ точекъ оси. Итакъ, вѣсъ ворота найденныя нами отношенія между силою и сопротивленіемъ не нарушаетъ, но только измѣняетъ величину давленій производимыхъ на подставки. Для опредѣленія истинныхъ величинъ этихъ давленій разсмотримъ вѣсъ ворота какъ вертикальную силу V, приложенную къ его центру тяжести G. Если, затѣмъ разложить эту силу на двѣ другія параллельныя, приложенныя въ точкахъ F и H, то равнодѣйствующая трехъ силъ p, q и g выразитъ истинное давленіе на подставку F, а равнодѣйствующая силъ p', q' и g' давленіе на подставку H. Такимъ образомъ, мы найдемъ сопротивленія, какія должны оказать двѣ точки подставки, чтобы выдержать совокупныя усилія силъ P и Q и вѣсъ V машины.

Въ нашемъ вычисленіи мы предполагали, что веревки DQ и CP безконечно тонки, между тѣмъ они имѣютъ чувствительный діаметръ, что должно измѣнить найденное отношеніе между силою и сопротивленіемъ.

Въ самомъ дѣлѣ, силы P и Q можно разсматривать какъ дѣйствующія по направленіямъ осей веревокъ, такъ что плечи рычаговъ силъ увеличатся на половину діаметра соотвѣтствующихъ имъ веревокъ. Слѣдовательно, мы уже не можемъ сказать, что сила относится къ сопротивленію какъ радіусъ цилиндра къ радіусу колеса, но должны отношеніе это формулировать такъ: сила P относится къ сопротивленію Q, какъ *радіусъ цилиндра, увеличенный радіусомъ веревки* DQ, *къ радіусу колеса, увеличенному радіусомъ веревки* CP.

Если радіусы веревокъ DQ и CP пропорціональны радіусомъ цилиндра и колеса, то пропорція эта приводится къ первой, т. е. къ той, которая имѣла-бы мѣсто, если-бы веревки были безконечно тонкія нити, приложенныя касательно къ колесу или цилиндру,

Намъ остается разсмотрѣть тотъ случай, когда на воротъ дѣйствуетъ произвольное число силъ, находящихся въ плоскостяхъ перпендикулярныхъ къ оси. Въ этомъ случаѣ, необходимо замѣнить каждую силу ей равною, паралельною, дѣйствующею съ нею въ одну и ту-же сторону и приложенною къ оси силою и парою, плечо которой будетъ разстояніе силы до оси, тогда всѣ силы, перенесенныя на ось уничтожатся ея сопротивленіемъ, а всѣ пары, для равновѣсія должны быть приведены къ одной парѣ равной нулю. Но такъ какъ всѣ эти пары находясь въ плоскостяхъ параллельныхъ даютъ равнодѣйствующую пару равную ихъ суммѣ, то для равновѣсія нужно, чтобы сумма моментовъ силъ, относительно оси была равна нулю, принимая съ противоположными знаками тѣ моменты, силы которыхъ стремятся вращать воротъ въ противныя стороны.

Давленія на неподвижную ось будутъ тѣ-же, какъ-бы дѣйствовали тѣ-же силы, перенесенныя параллельно самимъ себѣ на ту-же ось, не выходя изъ плоскостей перпендикулярныхъ къ оси.

Если силы дѣйствующія на воротъ направлены въ произвольныхъ плоскостяхъ, то каждую изъ нихъ можно разложить на двѣ другія, одну перпендикулярную, а другую параллельную направленію неподвижной оси. Но такъ какъ равнодѣйствующая параллельныхъ силъ перенесенная на ось уничтожится продольнымъ сопротивленіемъ оси, а равнодѣйствующая пара, проходящая чреаъ ту-же ось, уничтожится поперечнымъ сопротивленіемъ, то для равновѣсія блока останется разсмотрѣть группу силъ находящихся въ плоскостяхъ перпендикулярныхъ къ неподвижной оси, т. е. приводится къ предъидущему случаю.

Называя чрезъ P, P′, P″.... приложенныя силы; ω, ω' ω''.... ихъ наклоненія къ оси; p, p', p''.... кратчайшія разстоянія силъ до оси, мы получимъ уравненіе равновѣсія:

$$Pp \,.\, \operatorname{Sin} \omega + P'p' \,.\, \operatorname{Sin} \omega' + P''p'' \,.\, \operatorname{Sin} \omega'' + \ldots = 0$$

Слѣдовательно ось ворота должна выдержать:

1) давленія составляющихъ $P \,.\, \operatorname{Sin} \omega$, $P' \,.\, \operatorname{Sin} \omega'$, $P'' \operatorname{Sin} \omega''$.... перенесенныхъ на эту ось.

2) давленія равнодѣйствующихъ параллельныхъ силъ $P \,.\, \operatorname{Cos} \omega$ $P' \,.\, \operatorname{Cos} \omega'$, $P'' \,.\, \operatorname{Cos} \omega''$...., которыя стремятся увлечь воротъ по направленію его длины.

3) давленіе равнодѣйствующей пары этихъ послѣднихъ составляющихъ силъ, дѣйствіе которой равно дѣйствію двухъ равныхъ силъ перпендикулярныхъ къ оси и дѣйствующихъ на нее въ противоположныя стороны.

Воротъ или валъ имѣетъ весьма обширное примѣненіе въ практикѣ, не только въ видѣ самостоятельнаго механизма, но также какъ составная часть тѣхъ машинъ, въ которыхъ употребляются *колесные приводы*, о которыхъ мы будемъ говорить ниже.

3. Наклонная плоскость.

Наклонною плоскостью называется такая плоскость, которая образуетъ съ горизонтальною острый уголъ. Машина эта имѣютъ значеніе въ практикѣ благодаря простотѣ и удобству, хотя тѣхъ-же результатовъ можно достигнуть при помощи другихъ машинъ. Теорія наклонной плоскости служитъ основаніемъ теоріи винта и клина.

Когда точка находится на неподвижной и негибкой плоскости, то она претерпѣваетъ давленіе отъ силы нормальной къ плоскости. Само собою понятно, что такая точка должна сохранить равновѣсіе, такъ какъ нѣтъ причины, чтобы она двигалась въ одну стороны предпочтительнѣе предъ другой; всѣ движенія, которыя могла-бы принять точка составляютъ съ направленіемъ силы тотъ-же нрямой уголъ,

Также и наоборотъ: та-же точка будетъ находится въ равновѣсіи, когда сила, производящая на нее давленіе нормальна къ плоскости опоры, потому что если-бы она была наклонна къ этой плоскости, то силу можно было-бы разложить на двѣ другія, одну перпендикулярную къ плоскости, а другую находящуюся въ самой плоскости. Изъ нихъ первая уничтожилась-бы, а вторая произвела-бы свое дѣйствіе; такъ какъ она не измѣнится плоскостью, по длинѣ которой направлено ея дѣйствіе. Слѣдовательно равновѣсія не было-бы.

То-же можно сказать о точкѣ, опирающейся на кривую поверхность, разсматривая первую какъ лежащую въ плоскости касательной къ поверхности, въ той же точкѣ. Слѣдовательно, для равновѣсія необходимо, чтобы направленіе силы производящей давленіе было нормально къ этой плоскости въ точкѣ прикосновенія, и вотъ почему при равновѣсіи рычага, не укрѣпленнаго, а лежащаго на точкѣ опоры, надобно не только чтобы равнодѣйствующая силъ проходила чрезъ эту точку, но была-бы перпендикулярна къ элементу касанія рычага въ этой точкѣ опоры.

Отсюда видно, что когда тѣло удерживается въ равновѣсіи неподвижною плоскостію, то эта плоскость можетъ только уничтожить силы, имѣющія къ ней нормальныя въ различныхъ точкахъ прикосновенія; а слѣдовательно ея сопротивленіе можетъ производить только нормальныя-же силы, противоположныя первымъ.

Итакъ, если тѣло произвольной фигуры, побуждаемое какими-нибудь силами P, Q, R.... (рис. 74), опирается на плоскость одною только точкою O, то оно только въ томъ случаѣ можетъ находится въ равновѣсіи, когда силы P, Q, R.... къ нему приложенные, будутъ находится въ равновѣсіи съ одною силою N, нормальною къ плоскости въ точкѣ O и представляющею истинное ея сопротивленіе.

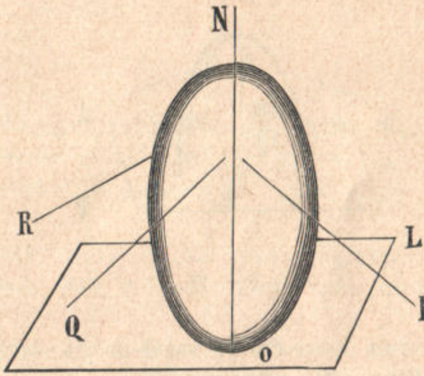


Рис. 74.

Слѣдовательно, для равновѣсія тѣла, опирающагося на плоскость одною точкою, необходимо: 1) чтобы всѣ силы, приложенныя къ тѣлу, имѣли одну равнодѣйствующую; 2) чтобы направленіе этой равнодѣйствующей было нормально къ плоскости, и 3) чтобы она проходила черезъ точку касанія.

Мы видимъ, что эти три условія приводятся къ выведеннымъ нами выше условіямъ для равновѣсія рычага, лежащаго на опорѣ. Они могли-бы быть найдены тѣмъ-же разсужденіемъ, и выражены такимъ-же образомъ, говоря, что всѣ силы приложенныя къ тѣлу, будучи перенесены параллельно самимъ себѣ въ точку прикосновенія, должны дать одну равнодѣйствующую, нормальную къ плоскости, а всѣ пары произведенныя перенесеніемъ силъ, должны дать одну равнодѣйствующую равную нулю.

Если же тѣло опирается на плоскость нѣсколькими точками A, B, C, D.... (рис. 75), то каждая изъ точекъ прикосновенія произведетъ сопротивленіе, нормальное къ плоскости въ этой точкѣ; но такъ какъ всѣ эти сопротивленія параллельны и дѣйствуютъ въ одну сторону, то они сложатся въ одну силу, направленіе которой необходимо должно пройти внутри многоугольника, составленнаго точками прикосновеній A, B, C, D . , . . Итакъ силы, приложенныя къ тѣлу, должны находиться въ равновѣсіи съ одною силою, и слѣдовательно, когда тѣло опирается на плоскость нѣсколькими точками, то для равновѣсія надо, чтобы приложенныя силы приводились къ одной нормальной плоскости, направленіе которой проходило бы внутри многоугольника, образуемаго всѣми точками прикосновенія.

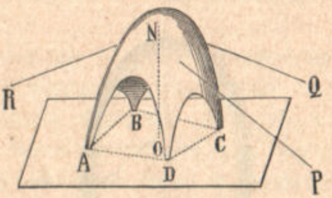


Рис. 75.

Отсюда видно, что если тѣло упирается на плоскость конечною поверхностью, то равнодѣйствующая силъ приложенныхъ къ тѣлу, должна встрѣтить плоскость въ какой-нибудь точкѣ этой поверхности.

Когда тѣло опирается на плоскость одною только точкою, то давленіе производимое силами равно ихъ равнодѣйствующей.

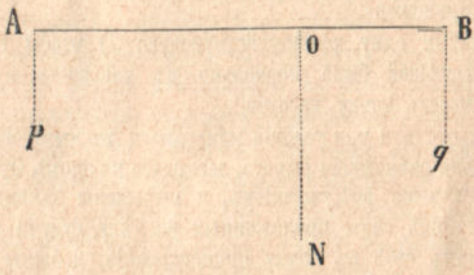


Рис. 76.

Если тѣло опирается двумя точками A и B (рис. 76), то направленіе равнодѣйствующей N необходимо пройдетъ между точками A и B, чрезъ прямую соединяющую эти точки опоры и разложится на двѣ параллельныя силы p и q, которыя выражаютъ ихъ давленія.

Положимъ, равнодѣйствующая N встрѣтится съ линіею AB въ точкѣ O; для опредѣленія давленія p на точку A, мы имѣемъ пропорцію:

$$N : p = AB : BO;$$

для давленія q на точку B, получимъ:

$$N : q = AB : AO$$

Откуда видно, что если равнодѣйствующая или цѣлое давленіе N представлено разстояніемъ AB между двумя точками опоры, то частныя давленія на эти точки выразятся обратными ихъ разстояніями до цѣлаго давленія.

Если тѣло опирается тремя точками A, B, C (рис. 77), то равнодѣйствующая N приложенныхъ силъ должна пройти чрезъ какую-нибудь точку O, взятую внутри трехугольника ABC. Если отъ одного изъ угловъ, напримѣръ отъ угла A, проведемъ линію AO, и продолжимъ ее до встрѣчи I съ противолежащею стороною BC, то сила N разложится на двѣ другія, ей параллельныя, p и n, приложенныя въ точкахъ A и I. Затѣмъ сила n разложится на двѣ другія, также ей параллельныя, q и r, приложенныя къ B и C, и тогда три силы p, q и r, выразятъ давленія на три точки опоры A, B, C.

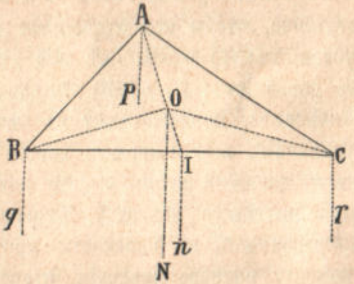


Рис. 77.

Построимъ около точки O, какъ вершины, и на трехъ сторонахъ BC, AC, AB, какъ основаніяхъ, трехугольники BOC, AOC, AOB. Если теперь представимъ цѣлое давленіе, производимое въ O, площадью трехугольника ABC, то давленія, производимыя въ трехъ углахъ A, B, C, выразятся площадями трехугольниковъ BOC, AOC, AOB, построенныхъ на сторонахъ противолежащихъ этимъ угламъ, Сила N, приложенная въ O, относится къ силѣ p, приложенной въ A, какъ AI къ

OI; но треугольники ABC, BOC имѣютъ одно и то-же основаніе и относятся между собою какъ ихъ высоты, или какъ линіи AI и OI, составляющія съ основаніемъ равные углы, слѣдовательно, мы получимъ:

$$N : p = ABC : BOC.$$

Такимъ же образомъ найдемъ, что:

$$N : q = ABC : ABC \quad \text{и} \quad N : r = ABC : AOB.$$

И такъ далѣе.

Когда тѣло опирается на плоскость болѣе нежели тремя точками или только тремя, но находящимися на прямой линіи, то отдѣльныя давленія на точки опоры не могутъ быть опредѣлены, потому что силу N можно разлагать безконечными способами на другія параллельныя ей силы, приложенныя въ этихъ точкахъ.

Достаточно, чтобы эти отдѣльныя давленія удовлетворяли слѣдующимъ условіямъ: 1) чтобы онѣ всѣ дѣйствовали въ одну сторону съ полнымъ давленіемъ; 2) чтобы эти давленія слагались въ одно, равное цѣлому давленію, приложенному въ точкѣ O. Это послѣднее требуетъ трехъ уравненій, изъ которыхъ первое будетъ выражать, что сумма отдѣльныхъ давленій равна цѣлому давленію; а два другія, что сумма моментовъ частныхъ давленій, относительно двухъ какихъ-нибудь осей, приведенныхъ въ плоскости проходящей чрезъ точки опоры, равна моменту полнаго давленія, относительно тѣхъ же осей.

Если мы будемъ разсматривать равновѣсіе тѣла, опирающагося въ одно время на нѣсколько плоскостей, то увидимъ, что каждая изъ этихъ плоскостей производитъ, въ различныхъ точкахъ прикосновенія съ тѣломъ, сопротивленія, направленныя въ одну сторону, перпендикулярныя къ плоскости, и которыя, слѣдовательно, слагаются въ одно сопротивленіе, перпендикулярное къ той-же плоскости. Итакъ, необходимо, чтобы всѣ силы, приложенныя къ тѣлу, были въ равновѣсіи съ этими различными сопротивленіями, число которыхъ равно числу плоскостей, а слѣдовательно, силы, удерживающія въ равновѣсіи тѣло, опирающееся на нѣсколько плоскостей, должны сводиться на столько-же силъ, направленныхъ перпендикулярно къ этимъ плоскостямъ и чтобы направленіе каждой изъ нихъ проходило внутри многоугольника, образуемаго точками прикосновенія тѣла на соотвѣтствующей плоскости.

Отсюда видно, что если тѣло опирается, напримѣръ, двумя точками на двѣ плоскости, и побуждается одною только силою, или силами имѣющими одну равнодѣйствующую, то эта сила, или эта равнодѣйствующая, должна разлагаться на двѣ силы, направленныя по нормалямъ, проведеннымъ къ двумъ плоскостямъ чрезъ точки прикосновенія. Итакъ, необходимо, чтобы двѣ нормали встрѣчались въ одной точкѣ, лежащей на направленіи силы, производящей давленіе на тѣло, и находилась-бы съ этою силою въ одной плоскости. Кромѣ того эта сила и ея дѣйствіе должны быть направлены въ углѣ, составляемомъ двумя нормалями, который будетъ противоположенъ углу между двумя плоскостями, потому что только ея составляющія, направленныя по двумъ нормалямъ, будутъ стремиться приближать тѣло къ плоскостямъ, слѣдовательно двигать его по направленіямъ, противоположнымъ сопротивленіямъ, производимымъ плоскостями.

Если-же тѣло опирается тремя точками на три различныя плоскости, то сила, производящая давленіе на это тѣло, должна разлагаться на три другія, направленныя по тремъ нормалямъ, проведеннымъ къ плоскостямъ чрезъ точки касанія.

Однако отсюда не слѣдуетъ заключать, что три нормальныя къ плоскостямъ должны встрѣтиться въ одной точкѣ, находящейся на направленіи силы, и даже, что одна изъ нихъ встрѣчаетъ другую, или направленіе силы, потому что три невстрѣчающіяся силы могутъ слагаться въ одну, и одна сила можетъ быть разложена по тремъ направленіямъ, невстрѣчающимся ни съ ея направленіемъ, ни между собою.

Сказаннаго нами вполнѣ достаточно для объясненія всей теоріи равновѣсія тѣлъ, опирающихся на плоскости.

Укажемъ на нѣкоторыя простыя приложенія этой теоріи.

Положимъ, что тѣло произвольной фигуры, опирается какимъ угодно числомъ точекъ, или опредѣленнымъ основаніемъ на неподвижную плоскость LDK (рис. 78), и положимъ, что на него дѣйствуютъ двѣ силы, P и Q, удерживающія его въ равновѣсіи на этой плоскости.

Тогда двѣ силы P и Q должны дать одну равнодѣйствующую N, нормальную къ плоскости, слѣдовательно, ихъ направленія должны встрѣтиться въ какой-нибудь точкѣ F и находиться въ плоскости, перпендикулярной къ плоскости LDK. Кромѣ того, направленіе этой равнодѣйствующей должно встрѣтить плоскость LDK въ одной изъ точекъ прикосновенія тѣла или внутри многоугольника, образуемаго точками касанія.

Положимъ, что всѣ эти условія выполнены, и посмотримъ, какія будутъ отношенія между силами P, Q и давленіемъ N, производимымъ на плоскость.

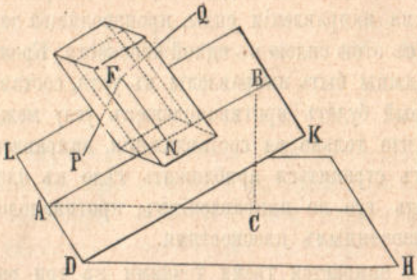


Рис. 78.

Такъ какъ силы P и Q имѣютъ одну равнодѣйствующую, нормальную къ плоскости, то необходимо, чтобы онѣ были обратно пропорціональны синусамъ угловъ PFN, QFN, составляемыхъ ихъ направленіями съ нормалью, опущенною изъ точки F на плоскость, потому что мы видѣли, что двѣ составляющія всегда находятся въ обратномъ отношеніи синусовъ угловъ, составляемыхъ ихъ направленіями съ направленіемъ равнодѣйствующей.

Слѣдовательно получимъ:

$$Q : P = \operatorname{Sin} PFN : \operatorname{Sin} QFN.$$

Для равнодѣйствующей N, получимъ:

$$P : N = \operatorname{Sin} QFN : \operatorname{Sin} PFQ.$$

Слѣдовательно, каждая изъ силъ P, Q, N можетъ быть выражена синусомъ угла, составляемаго направленіями двухъ другихъ силъ.

Итакъ, всѣ задачи, въ которыхъ даны отношенія между тремя силами P, Q, N, и ихъ направленіями, приводятся къ рѣшенію треугольника, котораго стороны представляютъ величины P, Q, N, а углы взаимныя ихъ наклоненія.

Положимъ, что сила P представляетъ вѣсъ самаго тѣла; тогда ея направленіе FP, будетъ вертикально, и пройдетъ чрезъ центръ тяжести тѣла.

Проведемъ горизонтальную плоскость LDH, пересѣкающуюся съ плоскостью, на которую тѣло опирается, по прямой LD, и которая будетъ наклонною плоскостью. Плоскость двухъ силъ P и Q, которая будетъ отчасти перпендикулярна къ наклонной плоскости, потому что проходитъ чрезъ нормаль FH, и потомъ перпендикулярна къ горизонтальной плоскости, какъ проходящая чрезъ вертикальную линію FP, пересѣчетъ эти двѣ плоскости по прямымъ AB и AC перпендикулярнымъ къ общему ихъ пересѣченію LD, и составляющимъ между собою уголъ, равный наклоненію плоскости LD къ горизонту.

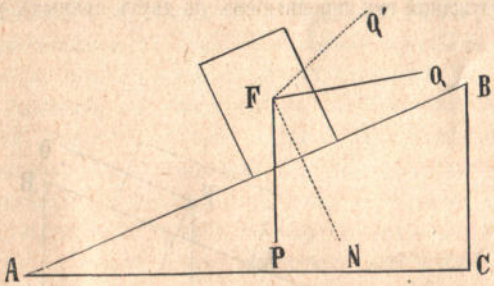


Рис. 79.

Представимъ себѣ горизонтальную плоскость просто горизонтальною линіею AC (рис. 79), а наклонную плоскость, линіею AB, составляющею съ AC какой-нибудь уголъ. Изъ какой-нибудь точки B, взятой на линіи AB, опустимъ на AC перпендикуляръ BC, и въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC, назовемъ, по обыкновенію, гипотенузу AB — длиною наклонной плоскости, сторону BC — ея высотою, и сторону AC — ея основаніемъ.

Такъ какъ линія FP перпендикулярна къ AC, то уголъ PFN будетъ равенъ углу BAC, и пропорція:

$$Q : P = \operatorname{Sin} PFN : \operatorname{Sin} QFN$$

обратится въ слѣдующую:

$$Q : P = \operatorname{Sin} BAC : \operatorname{Sin} QFN.$$

Если намъ дана только величина силы Q, то по этой пропорціи, въ которой Sin QFN неизвѣстенъ, найдется, подъ какимъ угломъ QFN эта сила Q должна дѣйствовать, чтобы удержать грузъ P въ равновѣсіи. Но какъ одному и тому же синусу соотвѣтствуютъ два угла, которыхъ сумма равна двумъ прямымъ, то очевидно, что сила Q можетъ быть употреблена двумя различными образами, для того чтобы уравновѣсить сопротивленіе; она можетъ составлять съ нормалью FN къ наклонной плоскости уголъ QFN, найденный изъ предъидущей пропорціи, или, служащій ему дополненіемъ до двухъ прямыхъ уголъ Q'FN.

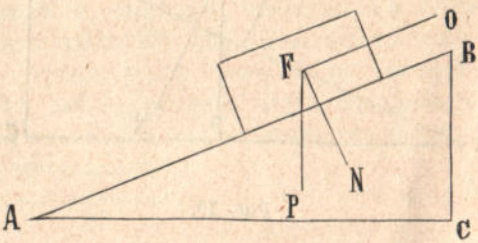


Рис. 80.

По той-же пропорціи найдется и величина силы Q, когда извѣстно ея направленіе, или уголъ QFN, составляемый ею съ нормалью.

Въ томъ случаѣ, когда сила Q будетъ наименьшей относительно сопротивленія P, тогда уголъ QFN имѣетъ наибольшій синусъ, потому что сила всегда обратно пропорціональна этому синусу. Наибольшій-же синусъ соотвѣтствуетъ прямому углу; слѣдовательно наименьшая сила должна быть перпендикулярна къ нормали FN, или параллельна наклонной плоскости.

Въ этомъ случаѣ уголъ QFN равенъ прямому углу ACB (рис. 80), слѣдовательно предъидущая пропорція получитъ такой видъ:

$$Q:P = \operatorname{Sin} BAC : \operatorname{Sin} ACB;$$

но такъ какъ въ треугольникѣ ABC синусы угловъ A и C пропорціональны противолежащимъ сторонамъ BC и BA, то получимъ:

$$Q:P = BC:AB;$$

т, е., если сила параллельна наклонной плоскости, то она относится къ вѣсу тѣла, который она удерживаетъ, въ равновѣсіи, какъ высота плоскости къ ея длинѣ.

Итакъ тяжелое тѣло, свободно лежащее на наклонной плоскости, стремится скользить по длинѣ этой плоскости только отъ дѣйствія тяжести, уменьшенной въ отношеніи высоты плоскости къ ея длинѣ; эту-то тяжесть, дѣйствующую по длинѣ плоскости, называютъ относительною тяжестью, въ отношеніи къ той, которая дѣйствуетъ по вертикальной линіи и которая называется абсолютною тяжестью. Отсюда понятно, что абсолютная тяжесть представится длиною наклонной плоскости, а относительная тяжесть выразится ея высотою; или проще, абсолютная тяжесть выразится синусомъ прямаго угла, или единицею, а относительная тяжесть представится синусомъ угла наклоненія плоскости. Когда это наклоненіе равно нулю, или когда плоскость горизонтальна, тогда относительная тяжесть будетъ равна нулю, и тѣло останется въ покоѣ на плоскости, если-же уголъ наклоненія плоскости равенъ одной трети прямаго угла, тогда относительная тяжесть равна половинѣ абсолютной; и, наконецъ, она равна абсолютной тяжести, когда уголъ наклоненія плоскости равенъ прямому углу; слѣдовательно, когда наклонная плоскость вертикальна.

Возьмемъ двѣ различно наклоненныя плоскости, имѣющія одну и ту же высоту, и прислонимъ одну къ другой такъ, какъ показано на рис. 81; въ этомъ случаѣ тяжести, скользящія по длинамъ плоскостей будутъ обратно пропорціональны длинамъ AB и BD; потому что онѣ прямо пропорціональны синусамъ угловъ A и D, которые измѣряютъ наклоненіе плоскостей; въ треугольникѣ ABD эти синусы пропорціональны противолежащимъ сторонамъ BD и AB.

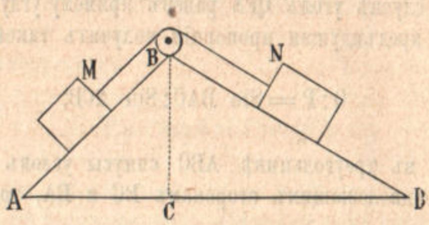


Рис. 81.

Слѣдовательно, если два тяжелыя тѣла M и N, опирающіяся на эти наклонныя плоскости, соединимъ нитью, проходящею чрезъ неподвижный блокъ, находящійся въ B, такъ, чтобы обѣ прямолинейныя части нити были параллельны плоскости, то эти два тогда тѣла только будутъ въ равновѣсіи, когда ихъ массы пропорціональны длинамъ AB и BD двухъ плоскостей, на которыхъ онѣ находятся.

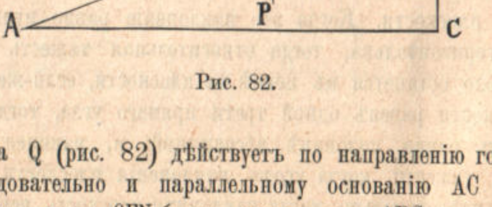


Рис. 82.

Если сила Q (рис. 82) дѣйствуетъ по направленію горизонтальному, а слѣдовательно и параллельному основанію AC наклонной плоскости, тогда уголъ QFN будетъ равенъ углу ABC, и мы получимъ:

$$Q : = \text{Sin BAC} : \text{Sin ABC};$$

или:

$$Q : P = BC : AC.$$

Итакъ если сила горизонтальна, то она относится къ вѣсу тѣла, удерживаемаго ею въ равновѣсіи на наклонной плоскости, какъ высота плоскости къ ея основанію,

Когда сила Q есть наибольшая относительно вѣса, тогда уголъ QFN равенъ нулю. Въ этомъ случаѣ сила Q будетъ перпендикулярна къ наклонной плоскости и пропорціи

$$Q : P \times \text{Sin BAC} : \text{Sin QFN},$$

для ея величины дастъ:

$$Q \times \frac{P \times \text{Sin BAC}}{0} = \text{безконечности.}$$

Итакъ, сила не имѣетъ наибольшей величины; но этотъ выводъ показываетъ намъ, что какъ-бы ни была велика сила, она не можетъ препятствовать скользить тѣлу по длинѣ наклонной плоскости, дѣйствуя на тѣло перпендикулярно къ этой плоскости. Если же мы видимъ часто противное, то это происходитъ отъ того, что поверхности тѣла, даже хорошо полированныя, имѣютъ множество шероховатостей, которыя при взаимнотъ прикосновеніи этихъ поверхностей, входя однѣ въ другія, препятствуютъ свободно скользить тѣлу. Но мы совсѣмъ не ебращали вниманіе на шероховатость тѣлъ, отъ которой происходитъ сопротивленіе, называемое треніемъ.

Когда тяжелое тѣло опирается въ одно время на нѣсколько наклонныхъ плоскостей, то, разсматривая его вѣсъ какъ вертикальную силу, проходящую чрезъ его центръ тяжести, мы найдемъ условія равновѣсія и давленія, которыя претерпѣваютъ точки прикосновенія, если только эти давленія могутъ быть опредѣлены.

Въ случаѣ когда тѣло поддерживается въ двухъ точкахъ I и O (рис. 83) двумя наклонными плоскостями HI и HO, тогда необходимо чтобы нормали IA и OA къ этимъ плоскостямъ, пересѣкались въ одной точкѣ съ вертикальною линіею, проходящею чрезъ центръ тяжести G тѣла и представляющую направленіе вѣса тѣла. Но такъ какъ вѣсъ P этого тѣла долженъ разлагаться по направленіямъ этихъ нормалей, то необходимо, чтобы эти двѣ линіи находились въ одной плоскости съ направленіемъ GP, а слѣдовательно и въ вертикальной плоскости.

Этихъ условій достаточно для равновѣсія.

Если на направленіи вѣса возьмемъ какую-нибудь часть AD, представляющую его величину, и построимъ на AD, какъ на діагонали, параллелограмъ ABCD, котораго стороны параллельны направленіямъ AI и AO, то сила P разложится на двѣ другія, представленныя сторонами AB и AC этого параллелограмма. Эти двѣ послѣднія силы уничтожатся двумя наклонными плоскостями, и дадутъ, въ то-же время, величины отдѣльныхъ давленій, ими производимыхъ.

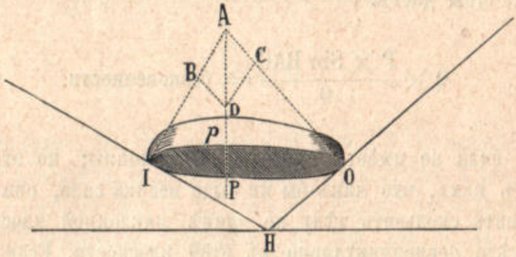


Рис. 83.

Замѣтимъ, что плоскость двухъ нормалей IA и OA, будучи въ одно время перпендикулярна къ двумъ наклоннымъ плоскостямъ, будетъ перпендикулярна также и къ общему ихъ пересѣченію: но эта плоскость въ то-же время вертикальна, потому что проходитъ чрезъ вертикальную линію GP; слѣдовательно общее пересѣченіе двухъ наклонныхъ плоскостей должно быть перпендикулярно къ вертикальной плоскости, т.-е. горизонтально.

Итакъ, тяжелое тѣло тогда только будетъ въ равновѣсіи между двумя наклонными плоскостями, когда пересѣченіе этихъ плоскостей горизонтально.

4. Винтъ.

Винтъ представляетъ собою машину, которая одновременно относится къ рычагу и наклонной плоскости. Въ немъ разсматривается равновѣсіе тѣла вращающагося около неподвижной оси и равномѣрно спускающагося по длинѣ этой оси, опираясь на наклонную плоскость.

Чтобы уяснить себѣ построеніе этой машины разсмотримъ цилиндръ ABCD (рис. 84), который развернемъ въ плоскость. Развернутая поверхность цилиндра дастъ прямоугольникъ BEMC, котораго основаніе равно длинѣ окружности цилиндра и обыкновенно выражается чрезъ $2\pi r$, гдѣ r будетъ радіусъ цилиндра, а π — отношеніе окружности къ діаметру.

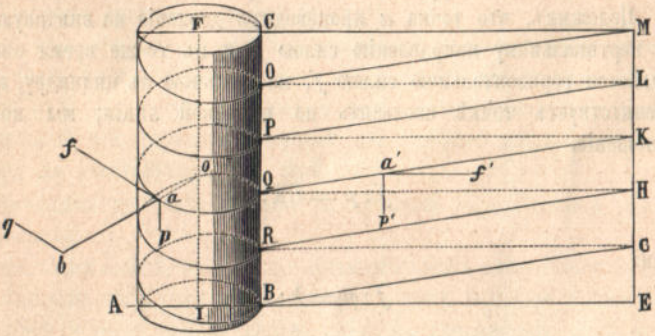


Рис. 84.

Сторону BC раздѣлимъ на равныя части BR, RQ, QP, PO и OC; на линіи EM возьмемъ часть EG = BR, затѣмъ проведемъ BG и параллельныя ей линіи BH, QR.... Если мы изъ прямоугольника BEMC снова составимъ цилиндръ, то прямыя BG, RH.... произведутъ на поверхности цилиндра непрерывную кривую, которую называютъ *винтовою линіею*, или *завиткомъ*. Первая прямая BG образуетъ часть винтовой линіи, начинающейся въ B и оканчивающейся въ R, откуда она будотъ непрерывно продолжаться другою прямою RH и т. д. Каждая изъ этихъ частей винтовой линіи, имѣющая два своихъ конца на одной и той-же производящей, а слѣдовательно дѣлающая полный оборотъ около поверхности цилиндра, называемая винтомъ, а промежутокъ между послѣдовательными завитками, измѣряемый по длинѣ производящей, и который вездѣ ровный, будетъ *ширина* завитка или *высота винтоваго хода*.

Такъ какъ при развертываніи цилиндра винтовая линія превращается въ рядъ параллельныхъ прямыхъ, то понятно, что отличительное свойство этой кривой должно состоять въ одинаковомъ наклоненіи ко всѣмъ производящимъ, которыя она встрѣчаетъ на поверхности цилиндра. Если цилиндръ вертикаленъ, то винтовая линія будетъ вездѣ одинаково наклонена къ горизонту, а потому и точка a, лежащая на этой кривой, которую можно разсматривать, какъ находящуюся на ея касательной, будетъ при равновѣсіи въ тѣхъ-же обстоятельствахъ, какъ-бы она находилась въ a' на наклонной плоскости QHK, которой основаніе равно $2\pi r$, а высота HK равна ширинѣ винтовой линіи, которую обозначимъ чрезъ h.

Положимъ, что точка a производитъ давленіе на винтовую линію по вертикальному направленію силою p, и въ то-же время она удерживается горизонтальною силою f, касательною къ цилиндру, которая препятствуетъ точкѣ скользить по винтовой линіи; мы получимъ отношеніе:

$$f : p = \mathrm{HK} : \mathrm{QH},$$

или:

$$f : p = h : 2\pi r.$$

Проведемъ чрезъ точку a горизонтальную линію ao, встрѣчающую ось цилиндра, которую предположимъ неподвижной въ точкѣ O и примемъ за негибкій рычагъ, вращающійся около неподвижной точки O. Тогла вмѣсто непосредственнаго приложенія горизонтальной силы f въ точкѣ a, для удержанія этой точки на винтовой линіи, можно приложить къ какой-нибудь точкѣ рычага bo другую силу q, параллельную f; эта сила q произведетъ на точку a такое-же дѣйствіе, какъ и сила f, если она будетъ съ этою послѣднею силою находиться въ обратномъ отношеніи двухъ плечей рычага bo и ao. Затѣмъ, положимъ $bo = \mathrm{R}$, плечо-же ao есть радіусъ r цилиндра, тогда получимъ:

$$q : f = r : \mathrm{R};$$

но мы нашли выше, что:

$$f : p = h : 2\pi r,$$

перемноживъ эти уравненія, получимъ:

$$q : p = h : 2\pi \mathrm{R}.$$

Итакъ горизонтальная сила q относится къ силѣ вертикальной, давящей на точку a, лежащую на винтовой линіи, какъ ширина этой линіи, т, е. завитка къ окружности круга, которую стремится описать сила q около оси цилиндра. Замѣтимъ, что радіусъ r цилиндра вовсе не входитъ въ предъидущую пропорцію.

Итакъ отношеніе между силами q и p будетъ одно и тоже, для всякаго цилиндра, по которому идетъ винтовая линія, при условіи, чтобы ширина завитка была постоянна.

Для простоты объясненія, мы предположили цилиндръ вертикальнымъ, тѣмъ не менѣе все то, что мы сказали относительно вертикальной силѣ p и горизонтальной q тоже можно сказать и о силѣ параллельной оси цилиндра и другой дѣйствующей къ ней перпендикулярно, на разстояніи R отъ этой линіи,

Переходимъ къ болѣе точному опредѣленію теоріи винта и условія его равновѣсія.

Представимъ себѣ, какой-либо прямоугольникъ движущійся по винтовой спирали такъ, что плоскость его всегда остается нормальною къ боковой поверхности цилиндра, т.-е. на продолженіи этой плоскости всегда лежитъ ось цилиндра и что одна изъ вершинъ прямоугольника движется по винтовой спирали. При такомъ движеніи вокругъ цилиндра площадь нашего прямоугольника опишетъ особое тѣло, которое называется *винтовою нарѣзкою*; самый-же цилиндръ, снабженный нарѣзкою носитъ названіе винта. Если вообразимъ себѣ такую-же, но вогнутую нарѣзку, сдѣланную на внутренней поверхности цилиндра, то мы получимъ *гайку*. Понятно, что нарѣзка нашего винта будетъ имѣть прямоугольное поперечное сѣченіе, почему и винтъ, имѣющій такую нарѣзку, носитъ соотвѣтствующее названіе винта съ *прямоугольной* или *прямой нарѣзкой* (рис. 85). Трехугольникъ, движущійся по спирали вокругъ цилиндра даетъ *острую* или *трехугольную* нарѣзку (рис. 86). Винтъ съ гайкой, имѣющіе вполнѣ одинаковые нарѣзки, въ своей совокупности, представляютъ *полный* винтъ. Нарѣзка винта входитъ въ вогнутую нарѣзку гайки и движется въ ней, при поворачиваніи винта около его оси, какъ по наклонной плоскости. Понятно, что если винтъ повернется на 360°, то при неподвижной гайки онъ пройдетъ по направленію своей оси путь, равный ширинѣ завитка. Такимъ образомъ винтъ долженъ имѣть два движенія: одно вращательное около своей оси и другое поступательное, параллельно этой оси; если-же винтъ будетъ лишенъ возможности двигаться поступательно, то движеніемъ этимъ должна быть одарена гайка.

Итакъ, если одна изъ двухъ частей, т.-е. гайка или винтъ будетъ неподвижна, то другая соединенная съ первою такимъ образомъ, что можетъ вращаться около оси цилиндра и въ тоже время проходить по первой части, какъ по наклонной плоскости. Слѣдовательно, между силами, находящимися въ равновѣсіи около неподвижной оси, будутъ существовать отношенія, зависящія отъ вліянія на нее другой части машины; эти отношенія и составляютъ условія равновѣсія винта.

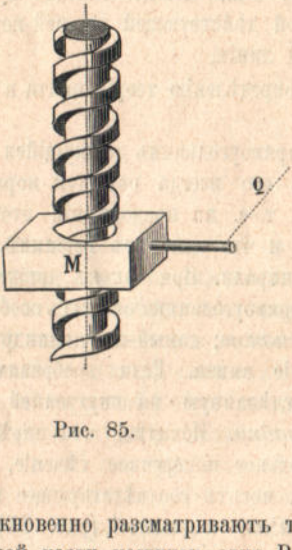


Рис. 85.

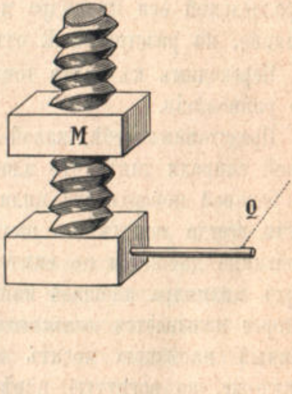


Рис. 86.

Обыкновенно разсматриваютъ только двѣ силы, приложенныя къ подвижной части машины: одну P параллельную оси, которая стремится опустить подвижную часть, вращая ее около оси; другую Q лежащую въ плоскости перпендикулярной къ оси, и которая, посредствомъ рычага, стремится поднять подвижную часть въ противоположную сторону. Чтобы яснѣе понять это, положимъ, что гайка подвижная, а винтъ неподвиженъ (рис. 85 и 86). Отношеніе между двумя силами P и Q, въ этомъ случаѣ, будетъ тоже какъ если-бы гайка была неподвижна, а винтъ подвиженъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если-бы гайка опиралась на винтовой нарѣзъ одною только точкою, то называя чрезъ h ширину винта и чрезъ

R плечо рычага, къ которому приложена сила, или разстояніе силы отъ оси, мы получимъ:

$$Q : P = h : 2\pi R$$

На какое-бы число точекъ винтоваго нарѣза гайка не опиралась, мы можемъ допустить; 1) что сопротивленіе P разлагается на столько-же параллельныхъ силъ p, p', p'', p''' ..... производящихъ давленіе въ этихъ точкахъ, 2) что сила Q раздѣлится на столько-же силъ q, q', q'', q''' ...., изъ которыхъ каждая уравновѣшиваетъ соотвѣтствующую ей между силами p, p', p'', p''' .... Тогда получимъ:

$$q : p = h : 2\pi R$$

$$q' : p' = h : 2\pi R$$

$$q'' : p'' = h : 2\pi R$$

$$q''' : p''' - h : 2\pi R$$

. . . .

. . . .

Откуда:

$$q + q' + q'' + \ldots \text{ или } Q : p + p' + p'' \ldots \text{ или } P = h : 2\pi R$$

Итакъ *при равновѣсіи винта, сила стремящаяся вращать гайку относится къ сопротивленію производящему давленіе на гайку, по оси, какъ ширина винта къ окружности круга, которую сила стремится описывать.*

Отсюда понятно, что силѣ тѣмъ выгоднѣе уравновѣшивать сопротивленіе или производить давленіе, чѣмъ болѣе разстояніе точки ея приложенія отъ оси, и чѣмъ менѣе ширина завитка или винтоваго хода.

Теорія винта имѣющаго трехугольную нарѣзку значительно сложнѣе теоріи винта съ прямоугольной нарѣзкою, что зависитъ отъ тренія, которое при трехугольной нарѣзкѣ больше, чѣмъ въ прямоугольной

Поэтому тамъ, гдѣ желаютъ, при сравнительно небольшихъ усиліяхъ, преодолѣть большія сопротивленія и избѣжать большей затраты работы на преодолѣніе тренія, тамъ употребляютъ винты съ прямоугольной нарѣзкой; и наоборотъ, когда желаютъ воспользоваться треніемъ, то прибѣгаютъ къ винтамъ, имѣющимъ трехугольную нарѣзку.

Такимъ образомъ винты съ прямоугольной нарѣзкою употребляются какъ части прессовъ, домкратовъ и друг.; винты-же съ трехугольной нарѣзкою назначаются для разнаго рода скрѣпленій и тогда ихъ, обыкновенно, называютъ *болтами*.

Для какой-бы цѣли винтъ не назначался, необходимо дать ему размѣры, достаточные для прочнаго сопротивленія дѣйствующимъ на него силамъ. Діаметръ тѣла винта разсчитывается по величинѣ натяженія, направленнаго по его оси и потомъ повѣряется на скручиваніе. Для желѣзныхъ болтовъ, обыкновенно, принимаютъ натяженіе не свыше 60 пудовъ на квадратный дюймъ площади поперечнаго сѣченія тѣла болта. Деревянные винты дѣлаются въ $2^1/_2$—3 раза толще желѣзныхъ. Кромѣ того, чтобы нарѣзка гайки не могла-бы сколоть нарѣзку винта по цилиндрической поверхности, величина которой, при опредѣленныхъ размѣрахъ винта, должна зависить отъ высоты гайки. При трехугольной нарѣзкѣ, высоту гайки дѣлаютъ 1,2—1,6 діаметра тѣла винта. Для винта съ квадратной нарѣзкой, дѣлаютъ гайку не меньше какъ на 12 винтовыхъ ходовъ.

Самое замѣчательное примѣненіе винта какъ машины, мы видимъ въ *архимедовомъ винтѣ*, который дѣйствуетъ какъ вентиляторъ, водоподъемная машина, какъ двигатель въ винтовыхъ пароходахъ и т. п.; наконецъ, въ *безконечномъ* винтѣ, о которомъ рѣчь будетъ ниже. Примѣненія микрометрическаго винта основаны на томъ, что при одномъ оборотѣ винта, онъ,—или гайка его,—подвигается впередъ на высоту одного хода. Микрометрическіе винты приготовляются такъ, что на одинъ дюймъ высоты винта приходится 300 и даже больше оборотовъ; кромѣ того винтъ можно повернуть на полъ оборота, четверть оборота и даже на $^1/_{100}$ часть оборота—что дѣлается при помощи круга съ дѣленіями, прикрѣпленнаго къ винту; такимъ образомъ помощью микрометрическаго винта можно производить произвольно малыя поступательныя перемѣщенія. Положимъ, что микрометрическій винтъ имѣетъ 100 ходовъ на 1″ высоты, такъ что высота хода$=^1/_{100}$ дюйма или $^1/_{10}$ линіи, и что кругъ или *головка* раздѣлена на 1000 частей, которыя можно отсчитывать по неподвижной шкалѣ, помѣщенной у круга. Въ такомъ случаѣ, при оборотѣ головки на 1 дѣленіе, винтъ подвинулся бы только на $^1/_{100} \cdot {}^1/_{10}$ линіи, т.-е. на $^1/_{1000}$ линіи.

5. Клинъ.

Клиномъ называется трехгранная призма AF (рис. 87), одинъ изъ угловъ которой острѣе двухъ другихъ угловъ. Ребро EF этого угла наситъ названіе *острія* или *лезвія* клина; грань, ABCD противолежащая острію называется *обухомъ* или *головкою*, въ отличіе отъ другихъ двухъ граней ADFE и BCFE, называемыхъ *боками* клина.

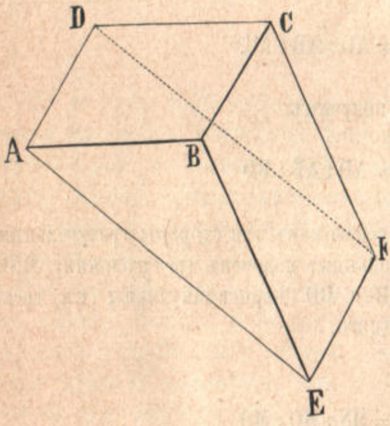


Рис. 87.

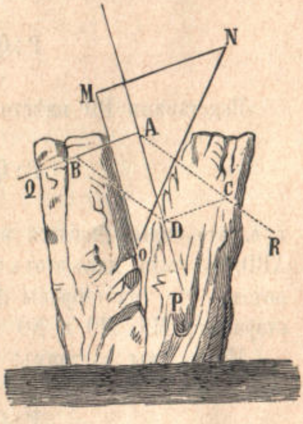


Рис. 88.

Назначеніе клина состоитъ въ томъ, чтобы проникая лезвіемъ между частями даннаго тѣла преодолѣть сопротивленіе, оказываемое этимъ тѣломъ разъединенію его частей, т.-е. расколоть эти части.

При работѣ клиномъ на голову его, обыкновенно производится ударъ посредствомъ молотка или какого-либо другого орудія. Каково-бы ни было направленіе удара, мы можемъ разсматривать его дѣйствіе, какъ разложенное на два другія; одно перпендикулярное къ головѣ, которое передаетъ ему все свое усиліе, другое параллельное головѣ клина, несообщающее ему движенія. Слѣдовательно, мы можемъ допустить, что сила приложена перпендикулярно къ головѣ клина и должны опредѣлить усилія, которыя она производитъ между двумя препятствіями, перпендикулярно къ сторонамъ или бокамъ клина.

По направленію силы P, перпендикулярно къ ребрамъ клина, сдѣлаемъ сѣченіе MNO (рис. 88), тогда линія MN будетъ головою клина, а двѣ линіи MO и NO его бока. Изъ точки A, взятой по направленію силы, опустимъ два перпендикуляра AB и AC на стороны MO и NO; затѣмъ возьмемъ часть AD, представляющую величину и направленіе силы P и построимъ параллелограмъ ABCD. Тогда сила P, представленная чрезъ AD, разложится на двѣ другія Q и R по направленіямъ AB и AC. Эти силы выразятъ усилія производимыя перпендикулярно къ бокамъ MO и NO.

Мы получимъ отношеніе:

$$P : Q : R = AD : AB : AC.$$

Подставивъ BD вмѣсто AC, получимъ:

$$P : Q : R = AD : AB : BD$$

т.-е., что силы относятся между собою какъ три стороны трехугольника ABD; но такъ какъ этотъ трехугольникъ подобенъ трехугольнику MNO, потому что три стороны AD, AB и BD перпендикулярны къ тремъ сторонамъ MN, MO и NO послѣдняго.

Итакъ, мы получимъ:

$$P : Q : R = MN : MO : MO$$

Отсюда явствуетъ, что, *если сила будетъ представлена головою клина, то двѣ силы, на которыя она разложится перпендикулярно къ сторонамъ клина, выразятся этими сторонами.*

Въ томъ случаѣ, когда треугольникъ MNO будетъ равнобедренный, то двѣ силы Q и R будутъ равны; тогда сила P будетъ относиться къ одной изъ нихъ какъ голова клина къ одной изъ его сторонъ, которую мы назовемъ *длиною* клина.

Отсюда понятно, что *при равныхъ силахъ удара усиліе производимое клиномъ будетъ тѣмъ больше, чѣмъ голова клина менѣе его длины.*

При всѣхъ практическихъ примѣненіяхъ клина: для сжиманія (въ прессахъ), для подъема (подкладныя клинья), для раскалыванія (въ ломахъ и топорахъ), нужно принять во вниманіе треніе, которое вообще велико и увеличиваетъ величину силы дѣйствующей на клинъ почти въ четыре раза.

Благодаря большему сопротивленію отъ тренія, клинъ нашелъ много примѣненій при скрѣпленіи частей машинъ, въ видѣ заклепокъ, гвоздей и т. п. Но для того, чтобы клинъ могъ успѣшно дѣйствовать какъ машина, иногда бываетъ нужно уменьшить треніе тѣлъ (какъ напр. въ прессѣ), замѣнивъ треніе скользящее, треніемъ катящимъ, чрезъ введеніе такъ называемыхъ колесъ тренія.

6. Сложныя машины.

Мы до сихъ поръ разсматривали только одно твердое тѣло, встрѣчающее въ своихъ движеніяхъ различныя препятствія; это такъ называемыя простыя машины. Намъ остается разсмотрѣть совокупность такихъ машинъ, противодѣйствующихъ однѣ другимъ чрезъ взаимное ихъ соединеніе. Эта совокупность простыхъ машинъ называется *сложною машиною.*

Положимъ, что къ сложной машинѣ приложены двѣ силы, при чемъ простая машина, непосредственно получающая дѣйствіе отъ одной изъ нихъ, передаетъ это дѣйствіе, по законамъ своего равновѣсія, другой простой машинѣ съ нею соединенной; эта передаетъ то-же дѣйствіе слѣдующей машинѣ и т. д. до послѣдней, которая уже сообщаетъ дѣйствіе второй силѣ или сопротивленію, которое надо преодолѣть.

Итакъ отношеніе силы къ сопротивленію можно опредѣлить при помощи ряда пропорцій, выводимыхъ изъ законовъ равновѣсія промежуточныхъ машинъ, что мы увидимъ изъ нѣсколькихъ простыхъ примѣровъ.

Вопросы, которыми мы теперь займемся относятся къ общей задачѣ статики, составляя часть той обширной теоріи, гдѣ отыскиваются законы равновѣсія системъ измѣняющихъ свои фигуры по даннымъ условіямъ.

Основаніемъ этой теоріи служатъ двѣ аксіомы:

1) *Если система точекъ находится въ равновѣсіи, то каж-*

дая ея точка необходимо будетъ сама по себѣ въ равновѣсіи, принимая во вниманіе какъ силы непосредственно къ ней приложенныя, такъ и сопротивленія ею претерпѣваемыя отъ другихъ точекъ системы.

2) *Двѣ точки могутъ дѣйствовать одна на другую не иначе, какъ по направленію прямой линіи ихъ соединяющей, при чемъ дѣйствіе равно и противоположно противодѣйствію.*

Эти двѣ аксіомы и условія равновѣсія свободнаго тѣла могутъ служить для опредѣленіи условій равновѣсія какой угодно, системы тѣлъ, при условіи, что мы умѣемъ опредѣлить сопротивленія происходящія отъ взаимныхъ соединеній тѣлъ. Зная ихъ, намъ останется только соединить эти сопротивленія съ силами, которыя непосредственно даны вопросомъ и затѣмъ выразить условія равновѣсія каждаго тѣла, какъ совершенно свободнаго.

Мы не будемъ излагать всю теорію равновѣсія измѣняемыхъ системъ, но ограничимся только тѣми, которыя чаще другихъ встрѣчаются и разсматриваются въ начальныхъ основаніяхъ статики.

Веревки. Разсмотримъ веревочный многоугольникъ, т.-е. систему точекъ соединенныхъ между собою веревками негибкими и нерастяжимыми.

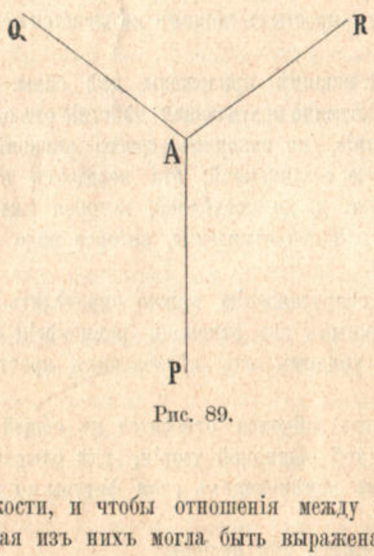


Рис. 89.

Мы знаемъ, что если силы P, Q и R, (рис. 89), направленныя по осямъ трехъ веревокъ AP, AQ, AR, находятся въ равновѣсіи около одной и тойже точки A, то каждая изъ этихъ силъ должна быть равна и прямопротивоположна равнодѣйствующей двухъ другихъ.

Слѣдовательно необходимо, чтобы оси трехъ веревокъ были въ одной плоскости, и чтобы отношенія между силами были таковы,. чтобы каждая изъ нихъ могла быть выражена синусомъ угла составляемаго направленіями другихъ двухъ. Такимъ образомъ для равновѣсія мы получимъ слѣдующія отношенія:

$$P : Q : R = \operatorname{Sin} QAR : \operatorname{Sin} PAR : \operatorname{Sin} PAQ.$$

Если предположить, что концы веревокъ AQ и AR неподвижны, то величины силъ Q и R, данныя предъидущимъ отношеніями, выразятъ усилія, которыя выдерживаютъ эти неподвижныя точки отъ силы P, или напряженія двухъ веревокъ AQ и AR. Также точно направленія будутъ тѣмъ больше, чѣмъ уголъ QAR будетъ тупѣе, и равно безконечности, когда уголъ равенъ двумъ прямымъ.

Отсюда понятно, что веревка, вытянутая въ прямую линію между двумя неподвижными точками, разорвется отъ дѣйствія самой малѣйшей силы, приложенной къ ней поперекъ, если только веревка не растягивается и не представляетъ по своей длинѣ безконечнаго сопротивленія.

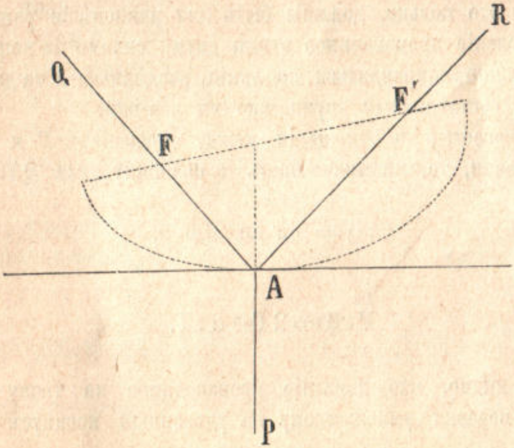


Рис. 90.

Предъидущія условія равновѣсія трехъ силъ P, Q, R, предполагаютъ, что точка A неизмѣнно соединена съ каждою изъ веревокъ, но если-бы точка A могла двигаться по длинѣ веревки RAQ (рис. 90), или точка A была безконечно-малое кольцо, надѣтое на веревку, тогда предъидущихъ отношеній между силами будетъ недостаточно; надо еще чтобы направленіе силы P раздѣляло уголъ, составляемый двумя частями веревки QAR, на двѣ равныя части.

Въ самомъ дѣлѣ, если мы положимъ, что равновѣсіе имѣетъ мѣсто, и что двѣ точки F и F′, произвольно взятыя на этихъ частяхъ веревки, неподвижны, то ясно, что точка A будетъ находиться въ такомъ-же положеніи, какъ если-бы она могла свободно двигаться по эллипсу, фокусами котораго будутъ точки F и F′, а радіусами-векторами линіи AF и AF′. Но для того, чтобы точка A была въ равновѣсіи на этой кривой при дѣйствіи на нее силы P, надо, чтобы эта сила была перпендикулярна къ линіи касательной въ этой точкѣ, а слѣдовательно, она должна раздѣлять пополамъ уголъ FAF′, составляемый двумя частями веревки.

Итакъ, въ случаѣ подвижнаго узла, обѣ части веревки, по длинѣ которой узелъ можетъ скользить, должны быть равно натянуты.

Въ тоже время, если положимъ точку или кольцо A неподвижнымъ, то двѣ силы Q и R, приложенныя къ веревкѣ QAR, проходящей чрозъ это кольцо, должны быть для равновѣсія равны между собою, и давленіе производимое этими двумя силами на неподвижную точку A, должно направляться по линіи, раздѣляющей на двѣ равныя части уголъ, составляемый двумя частями веревки.

Что-же касается до отношенія между давленіемъ P и напряженіемъ Q веревки, то, называя чрезъ α половину угла QAR, будетъ:

$$P : Q = \operatorname{Sin} 2\alpha : \operatorname{Sin} \alpha;$$

или:

$$P : Q = 2 \operatorname{Cos} \alpha : 1.$$

Откуда видно, что давленіе производимое на точку A, равно напряженію веревки умноженному на удвоенный косинусъ половины угла QAR.

Возьмемъ нѣсколько точекъ A, B, C, D (рис. 91), соединенныхъ между собою веревками AB, BC, CD, на которыя дѣйствуютъ силы N, P, Q, R, S, F, приложенныя къ другимъ веревкамъ, но такъ, чтобы въ каждой изъ точекъ или узловъ A, B, C, D соединилось въ одно время не болѣе трехъ веревокъ.

Если вся система находится въ равновѣсіи, то и каждая точка, сама по себѣ, должна находиться въ равновѣсіи, какъ отъ силъ къ ней приложенныхъ, такъ и отъ напряженій смежныхъ веревокъ. Напримѣръ, точка A непосредственно соединенная съ точкою B, должна быть въ равновѣсіи отъ двухъ силъ N и P, и отъ напряженія веревки AB, потому что другія точки C и D могутъ на нее дѣйствовать только посредствомъ веревки AB.

Итакъ, надо чтобы три веревки AN, AP, AB были въ одной плоскости.

Если назовемъ чрезъ X напряженіе веревки AB, то получимъ слѣдующія отношенія:

$$N : P = \operatorname{Sin} PAB : \operatorname{Sin} NAB,$$

$$P : X = \operatorname{Sin} NAB : \operatorname{Sin} NAP.$$

Точно также точка B должна быть въ равновѣсіи отъ силы Q и отъ напряженія веревокъ BA и BC. Но напряженіе веревки AB равно X, потому что дѣйствіе точки A на точку B совершенно равно и противоположно дѣйствію точки B на точку A.

Итакъ, называя чрезъ Y напряженіе веревки BC, получимъ:

$$X : Q = \operatorname{Sin} QBC : \operatorname{Sin} ABC,$$

$$Q : Y = \operatorname{Sin} ABC : \operatorname{Sin} QBA.$$

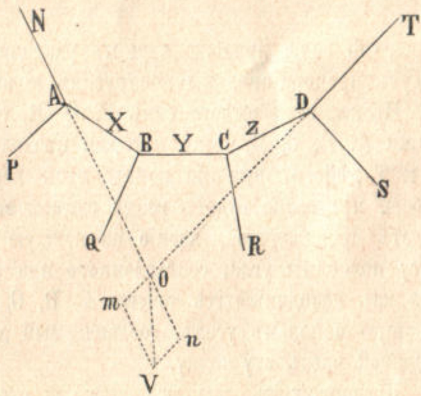


Рис. 91.

Для равновѣсія точки C, найдемъ:

$$Y : R = \operatorname{Sin} RCD : \operatorname{Sin} BCR,$$

$$R : Z = \operatorname{Sin} BCD : \operatorname{Sin} BCR.$$

Для равновѣсія точки D точно также получимъ двѣ пропорціи и т. д., какъ бы ни было велико число точекъ.

Перемножая по порядку нѣсколько такихъ пропорцій, мы найдемъ отношеніе между какою-нибудь изъ силъ и другою силою или какимъ-нибудь напряженіемъ. Напримѣръ, перемножая три первыя пропорціи, получимъ отношеніе между N и Q. Перемноживъ-же четыре первыя, получимъ отношеніе между N и напряженіемъ Y, и т. д.

Если продолженныя направленія силъ Q, R, S, раздѣляютъ соотвѣтствующіе имъ углы NAB, ABC, BCD, CDT, веревочнаго многоугольника на двѣ равныя части, то веревки AN, AB, BC, CD, DT, будутъ всѣ равно натянуты потому что, изъ предъидущихъ отношеній мы имѣемъ:

$$N = X, \quad X = Y, \quad Y = Z, \quad Z = T.$$

Кромѣ того называя чрезъ 2α, 2β, 2γ, 2δ углы многоугольника, мы получимъ изъ тѣхъ-же пропорцій:

$$P : Q : R : S = \text{Cos}\ \alpha ; \ \text{Cos}\ \beta ; : \text{Cos}\ \gamma : \text{Cos}\ \delta :$$

т. е., что силы приложенныя къ различнымъ угламъ многоугольника, будутъ пропорціональны косинусамъ половинъ тѣхъ-же угловъ.

Итакъ, если вмѣсто силъ P, Q, R, S, подставимъ неподвижныя точки A, B, C, D, чрезъ которыя проходитъ веревка NABCDT, то силы N и T дѣйствующія на концы этой веревки, будутъ равны между собою, и веревка будетъ вездѣ одинаково натянута; потомъ веревка будетъ производить давленіе на каждую точку пропорціонально косинусу половины угла, составленнаго при этой точкѣ, потому что каждая изъ неподвижныхъ точекъ A, B, C, D замѣняетъ силу раздѣляющую пополамъ уголъ, составляемый двумя частями веревки, проходящей чрезъ эту точку.

Предположимъ, что двѣ смежныя стороны AB и BC равны; тогда косинусъ половины угла, заключающагося между ими, выразится отношеніемъ одной изъ сторонъ къ діаметру круга, проходящаго чрезъ три точки A, B, C.

Итакъ, если всѣ стороны веревочнаго многоугольника равны между собою, то можно сказать, что силы P, Q, R, S обратно пропорціональны діаметрамъ этихъ различныхъ круговъ, изъ которыхъ каждый проходитъ чрезъ три послѣдовательные угла многоугольника.

Но, разсматривая кривую, какъ многоугольникъ, состоящій изъ безконечнаго числа равныхъ сторонъ, каждый изъ такихъ круговъ долженъ быть, во всякой точкѣ кривой, такъ называемымъ соприкасающимся кругомъ, т.-е. кругомъ, имѣющимъ въ этой точкѣ одинаковую кривизну съ кривою.

Итакъ, когда на всѣ равныя части веревки, концы которой неподвижно укрѣплены, и которая составляетъ непрерывный обводъ, дѣйствуютъ нормальныя силы, находящіяся въ равновѣсіи, то веревка будетъ одинаково натянута, и каждая сила, нормальная къ кривой, будетъ обратно пропорціональна радіусу кривизны въ точкѣ приложенія этой силы.

Простѣйшій примѣръ такого равновѣсія мы можемъ видѣть на веревкѣ, натягиваемой друмя силами по обводу какой-нибудь неподвижной кривой, потому что каждая точка неподвижной кривой замѣняетъ силу направленную по нормали къ этой кривой.

Итакъ, при равновѣсіи веревки, напряженіе будетъ вездѣ одно и тоже, и каждая точка неподвижной кривой подвержена давленію, направленному по нормали, обратно пропорціональному радіусу кривизны.

Веревочный многоугольникъ NABCDT, находящійся въ равновѣсіи отъ силъ N, P, Q, R, S, T, будетъ имѣть фигуру совершенно неизмѣняемую; именно такую, которой точки A, B, C, D не могутъ перемѣнять взаимныхъ между собою разстояній; очевидно, что равновѣсіе не нарушится. Но такъ какъ силы N, P, Q, R, S, T находятся въ равновѣсіи на неизмѣняемой системѣ, то одна итъ нихъ равна и прямопротивоположна равнодѣйствующей всѣхъ прочихъ, а потому всѣ остальныя силы имѣютъ одну равнодѣйствующую, которая не перемѣнится, если всѣ ея составляющія будутъ перенесены параллельно самимъ себѣ въ какую-нибудь точку ея направленія.

Отсюда слѣдуетъ, что каждая веревка натягивается силою къ ней приложенною такъ, какъ если-бы она была натягиваема равнодѣйствующею всѣхъ прочихъ силъ, перенесенныхъ параллельно самимъ себѣ на эту веревку.

Если крайнія веревки AN и DT находятся въ одной плоскости, то силы N и T имѣютъ одну равнодѣйствующую, и эта равнодѣйствующая, должна быть равна и прямопротивоположна равнодѣйствующей V остальныхъ силъ P, Q, R, S, когда многоугольникъ имѣетъ неизмѣняемую фигуру. Слѣдовательно, равнодѣйствующая силъ P, Q, R, S, приложенныхъ къ угламъ многоугольника, должна проходить чрезъ точку O, гдѣ встрѣчаются направленія крайнихъ веревокъ; слѣдовательно, если оба конца N и T этихъ веревокъ неподвижны, то, разлагая въ точкѣ O равнодѣйствующую V на двѣ силы M и N, по направленіямъ веревокъ AN и DT, мы получимъ усилія, выдерживаемыя неподвижными концами или напряженія веревокъ AN и DT.

Точно также найдемъ напряженія двухъ какихъ нибудь веревокъ, лежащихъ въ одной плоскости, взявъ равнодѣйствующую силъ приложенныхъ къ промежуточнымъ узламъ, и разложивъ ее по направленіямъ этихъ веревокъ въ точкѣ, гдѣ онѣ встрѣчаются; потому что если веревочный многоугольникъ находится въ равновѣсіи, то и каждая часть этого многоугольника сама по себѣ также должна быть въ равновѣсіи отъ силъ, приложенныхъ къ этой части и отъ напряженій двухъ крайнихъ веревокъ, нами разсматриваемыхъ.

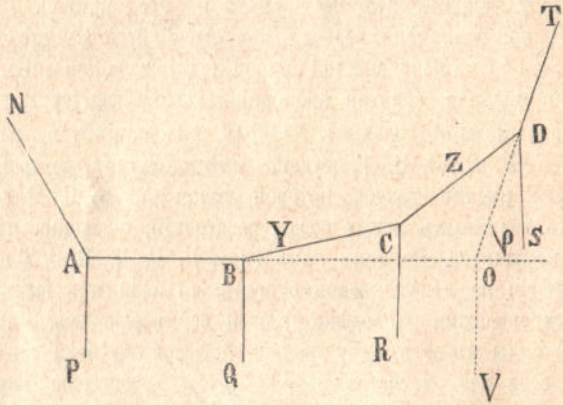


Рис. 92.

Когда направленія силъ P, Q, R, S параллельны между собою (рис. 92), то найденныя выше пропорціи для силъ и напряженій неизмѣнятся; но въ этомъ случаѣ для равновѣсія надо прибавить еще то условіе, чтобы всѣ силы P, Q, R, S, и стороны многоугольника находились въ одной плоскости; потому что веревки около каждаго узла должны находиться въ одной плоскости. Если-же веревка BQ параллельна веревкѣ AP, то плоскость PAB трехъ первыхъ веревокъ, будетъ то же, что̀ и плоскость ABQ трехъ слѣдующихъ и т. д.

По этому предположенію, для параллельныхъ силъ имѣемъ:

$$\text{Sin PAB} = \text{Sin QBA}, \quad \text{Sin QBC} = \text{Sin RCB} \ldots .$$

Откуда найдемъ, что послѣдовательныя напряженія N, X, Y, Z, T, обратно пропорціональны синусамъ наклоненій сторонъ къ направленію параллельныхъ силъ P, Q, R, S, и что каждое изъ напряженій выражается секансомъ его наклоненія къ линіи перпендикулярной этимъ силамъ.

Это можно доказать, весьма удобно, непосредственнымъ сравненіемъ напряженій двухъ какихъ-нибудь сторонъ, которыя, въ этомъ случаѣ, будутъ лежать всегда въ одной плоскости. Но для того, чтобы получить выраженія болѣе простыя и болѣе удобныя, примемъ всѣ силы, приложенныя къ многоугольнику за вертикальныя, и положимъ, что одна изъ сторонъ многоугольника горизонтальна.

Если мы желаемъ сравнить напряженіе t какой-нибудь стороны съ напряженіемъ a горизонтальной стороны, то представимъ себѣ, что эти двѣ стороны продолжены до ихъ пересѣченія въ точкѣ, въ которой приложимъ вертикальную силу V, равную суммѣ силъ приложенныхъ къ промежуточнымъ узламъ, и которая должна уравновѣсить два напряженія a и t.

Называя чрезъ ψ уголъ наклоненія напряженія t къ горизонтальному напряженію a, мы получимъ:

$$t : a = 1 : \text{Cos } \psi$$

или:

$$t = a \text{ Cos } \psi$$

Откуда видно, что при равновѣсіи веревочнаго многоугольника, при дѣйствіи на него вертикальныхъ силъ, напряженіе каждой стороны пропорціонально секансу угла, составляемаго этою стороною съ горизонтомъ.

Затѣмъ получимъ:

$$t : \text{V} = 1 : \text{Sin } \psi;$$

что даетъ напряженіе какой-нибудь стороны, выраженное ея наклоненіемъ къ горизонтальной сторонѣ, и сумму параллельныхъ силъ, дѣйствующихъ между этими двумя сторонами.

Наконецъ, какъ слѣдствіе двухъ предъидущихъ пропорцій, имѣемъ:

$$V : a = \operatorname{Sin} \psi : \operatorname{Cos} \psi,$$

или:

$$V = a \operatorname{Tang} \psi.$$

Откуда выводимъ слѣдующую теорему, относящуюся къ фигурѣ, которую принимаетъ многоугольникъ отъ дѣйствія на него приложенныхъ силъ; тангенсъ наклоненія каждой стороны къ горизонту, пропорціоналенъ суммѣ вертикальныхъ силъ, приложенныхъ къ обводу многоугольника, начиная съ самой нижней стороны до разсматриваемой нами.

Цѣпная линія. Мы можемъ разсматривать тяжелую веревку, какъ нить обремененную безконечнымъ множествомъ весьма малыхъ грузовъ, или какъ нить, на которую дѣйствуютъ во всѣхъ точкахъ безконечно малыя вертикальныя силы, а слѣдовательно, параллельныя. Итакъ, мы видимъ, что если такая веревка укрѣплена въ неподвижныхъ точкахъ S и T (рис. 93), то она тогда только будетъ въ равновѣсіи, когда вся будетъ лежать въ вертикальной плоскости. Въ этомъ случаѣ веревка образуетъ веревочный многоугольникъ съ множествомъ сторонъ, или лучше, кривую линію, которую называютъ цѣпною линіею.

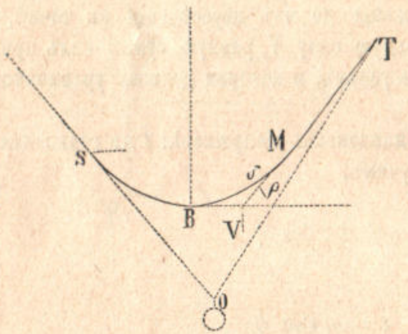


Рис. 93.

Для опредѣленія усилій, которыя производитъ веревка на двѣ точки S и T ее поддерживающихъ, проведемъ чрезъ эти двѣ точки касательныя SO и TO къ кривой, которыя будутъ продолженіями крайнихъ сторонъ веревочнаго многоугольника; потомъ, въ точкѣ O приложимъ силу равную равнодѣйствующей всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на веревку, т.-е. равную полному вѣсу веревки, и разложимъ эту силу на двѣ другія по направленіямъ двухъ касательныхъ OS и OT, то эти силы выразятъ давленія претерпѣваемыя точками привѣса.

Точно также найдемъ напряженіе веревки въ какой угодно ея точкѣ, принимая, что эта точка неподвижна и опредѣляя, давленіе ею претерпѣваемое отъ вѣса остальной части веревки, находящейся въ равновѣсіи.

Впрочемъ, называя: чрезъ t напряженіе въ какой угодно точкѣ M цѣпной линіи; чрезъ a напряженіе въ самой нижней точкѣ B; чрезъ V вѣсъ дуги s, заключенной между этими двумя точками; и чрезъ φ уголъ, образуемый касательною въ оконечности дуги s съ горизонтальною линіею, мы получимъ, между этими четырьмя величинами, тѣ-же уравненія параллельныхъ силъ.

Итакъ, изъ перваго уравненія $t = a \operatorname{Sin} \varphi$, мы выводимъ, что при равновѣсіи тяжелой веревки, напряженіе въ каждой ея точкѣ измѣняется пропорціонально секансу наклоненія кривой къ горизонтальной линіи.

Изъ втораго уравненія $V = t \operatorname{Sin} \varphi$, видно, что напряженіе въ концѣ какой-нибудь дуги веревки, равно вѣсу этой дуги, раздѣленному на синусъ ея наклоненія въ концѣ дуги.

Замѣтимъ, что эти уравненія имѣютъ мѣсто, каково-бы ни было неравенство въ толщинѣ разсматриваемой веревки или цѣпи.

Если цѣпь однородна, то можно вѣсъ V дуги s представить длиною этой дуги, и тогда третье уравненіе обратится въ $s = a \operatorname{tang} \varphi$, уравненіе очень простое между координатами s и φ цѣпной линіи.

Итакъ, цѣпная линія будетъ такой кривой, которой тангенсъ наклоненія къ горизонтальной оси увеличивается, какъ длина дуги, начиная отъ самой нижней точки.

Слѣдовательно, эта кривая расположена симметрично относительно вертикальной оси, проходящей чрезъ вершину B, и подобно параболѣ она имѣетъ двѣ равныя вѣтви, простирающіяся до безконечности.

Легко видѣть, что радіусъ ея кривизны выражается чрезъ:

$$P = a : 2 \operatorname{Cos}^2 \varphi,$$

т.-е. что онъ обратно пропорціоналенъ квадрату косинуса угла наклоненія кривой къ ея горизонтальной оси. Потому что, разсматривая кривую какъ многоугольникъ съ безконечно-малыми равными сторонами, мы будемъ имѣть, для радіуса R круга, имѣющаго хордами двѣ смежныя стороны многоугольника, уравненіе:

$$R = c : 2 \operatorname{Sin} \varepsilon.$$

гдѣ c и ε означаютъ сторону и половину внѣшняго угла многоугольника,

Но уголъ φ есть наклоненіе первой изъ двухъ смежныхъ сторонъ многоугольника къ горизонтальной оси, слѣдовательно:

$$\varphi + 2 \varepsilon$$

будетъ наклоненіе второй; то изъ уравненій

$$s = a \operatorname{tang} \varphi \text{ и } s + c = a \operatorname{tang} (\varphi + 2 \varepsilon),$$

получимъ:

$$c = a \, [\operatorname{Tang} (\varphi + 2 \varepsilon) - \operatorname{Tung} \varphi],$$

которое можно будетъ замѣнить:

$$c = a \, . \frac{2 \operatorname{Sin} \varepsilon \operatorname{Cos} \varepsilon}{\operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Cos} (\varphi + 2 \varepsilon)} .$$

Итакъ, мы имѣемъ:

$$R = \frac{c}{2 \operatorname{Sin} \varepsilon} = a \, . \frac{\operatorname{Cos} \varepsilon}{\operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Cos} (\varphi + 2 \varepsilon)} ;$$

Для того, чтобы перейти отъ многоугольника къ самой кривой, полагая внѣшній уголъ 2ε равнымъ нулю будетъ:

$$R = \frac{a}{\operatorname{Cos}^2 \varphi} .$$

Все, что мы сказали о тяжелой веревкѣ, или о совокупности малыхъ тяжелыхъ тѣлъ, соединенныхъ между собою нерастяжимою нитью, можно приложить къ шарикамъ, опирающимся одинъ на другой, и которые представляютъ сводъ. Эта совокупность, въ случаѣ равновѣсія, должна представлять видъ опрокинутой цѣпной линіи, потому что всѣ эти шарики, по причинѣ ихъ взаимной непроницаемости, будутъ находиться въ равновѣсіи отъ ихъ вѣсовъ, или вертикальныхъ силъ, на нихъ дѣйствующихъ; понятно, что они будутъ въ равновѣсіи и тогда, когда всѣ силы будутъ дѣйствовать въ противоположную сторону, лишь бы только шарики были связаны нерастяжимою нитью; но тогда эта нить составила-бы опрокинутую цѣпную линію. Итакъ, эта линія дѣйствительно имѣетъ такую фигуру.

Такую же фигуру принимаетъ надуваемый вѣтромъ вертикальный парусъ; потому что разсматривая какое-нибудь горизонтальное сѣченіе s паруса, и принимая это сѣченіе за многоульникъ съ безконечно-малыми равными сторонами, увидимъ, что число частицъ воздуха, встрѣчающихся съ одною изъ этихъ сторонъ, будетъ пропорціонально не длинѣ c этой стороны, но ея проэкціи $c \operatorname{Cos} \varphi$ на перпендикуляръ къ направленію вѣтра. Итакъ сила, дѣйствующая на каждый элементъ кривой s, будетъ пропорціональна косинусу наклоненія φ элемента, къ перпендикуляру къ направленію вѣтра. Но эта сила не вся, цѣликомъ, дѣйствуетъ на парусъ; такъ какъ встрѣчая сторону c, скорость v каждой частицы воздуха разлагается на двѣ: одну $c \operatorname{Sin} \varphi$ параллельную c, и которая заставляетъ скользить частицы воздуха по парусу, ни производя никакого дѣйствія; другую $c \operatorname{Cos} \varphi$ перпендикулярную къ сторонѣ c, которая и будетъ надувать парусъ. Слѣдовательно, нормальная сила, оказывающая давленіе на каждый элементъ кривой s, будетъ пропорціональна $\operatorname{Cos}^2 \varphi$.

Если-же кривая будетъ въ равновѣсіи при дѣйствіи на нее нормальныхъ силъ, приложенныхъ въ точкахъ равностоящимъ одна отъ другой, то каждая изъ нихъ будетъ обратно пропорціональна радіусу кривизны въ точкѣ приложенія силы, и наоборотъ, радіусъ кривизны обратно пропорціоналенъ силѣ. Здѣсь сила пропорціональна $\operatorname{Cos}^2\varphi$; слѣдовательно, всякое горизонтальное сѣченіе вертикальнаго паруса, надуваемаго вѣтромъ, имѣетъ то свойство, что радіусъ кривизны обратно пропорціоналенъ квадрату косинуса наклоненія кривой, т.-е, сѣченія, къ линіи перпендикулярной къ направленію вѣтра. Эта кривая и есть цѣпная линія, ось которой будетъ направленіе вѣтра.

Блоки и полиспасты. — Разсмотримъ теперь систему подвижныхъ блоковъ A, A′, A″, и т. д. (рис. 94). Первый A, на который дѣйствуетъ грузъ P, прикрѣпленъ къ обоймицѣ и обхватывается веревкою, одинъ конецъ которой, F, укрѣпленъ неподвижно, а другой прикрѣпляется къ обоймицѣ слѣдующаго блока A′; этотъ второй блокъ обхватывается также веревкою, которой одинъ конецъ F″ тоже неподвиженъ, а другой прикрѣпленъ къ обоймицѣ третьяго блока F″, и т. д. до послѣдняго, котораго одна часть веревки прикрѣплена къ неподвижной точкѣ F″, а на другую дѣйствуетъ сила Q.

Если вся система находится въ равновѣсіи, то и каждый блокъ, самъ по себѣ, будетъ въ равновѣсіи отъ силъ, или напряженій, на него дѣйствующихъ.

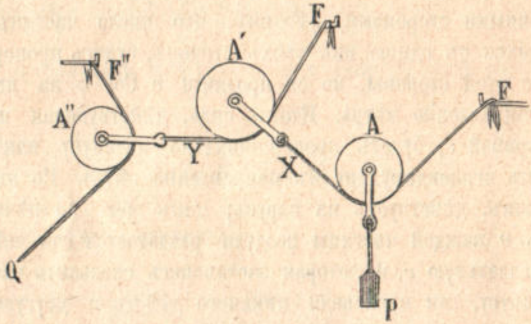


Рис. 94.

Называя чрезъ r, r', r'', радіусы блоковъ, чрезъ c, c', c'', хорды дугъ, обхватываемыхъ веревкою, чрезъ X напряженіе первой веревки, Y напряженіе слѣдующей, мы будемъ имѣть, для равновѣсія блока A:

$$X : P = r : c,$$

Точно также для рзвновѣсія блока A, получимъ:

$$Y : X = r' : c',$$

для равновѣсія третьяго A″,

$$Q : Y = r'' : c''$$

Перемноживъ по порядку эти пропорціи, получимъ:

$$Q : P = r r' r'' : c c' c'';$$

т.-е. сила относится къ сопротивленію, какъ произведеніе радіусовъ всѣхъ блоковъ къ произведенію хордъ дугъ, обхватываемыхъ веревками.

Если всѣ веревки будутъ параллельны (рис. 95), то хорды c, c', c'', дѣлаются равными діаметрамъ $2r$, $2r'$, $2r''$, и тогда, раздѣляя два члена послѣдней пропорціи на произведеніе $r\ r'\ r''$, мы получимъ:

$$Q : P = 1 : 2 . 2 . 2;$$

т.-е. сила относится къ сопротивленію какъ единица къ числу 2, возвышенному въ степень равную числу блоковъ.

Этотъ случай будетъ самый благопріятный для силы, потому что произведеніе хордъ c, c', c'', будетъ наибольшее, когда онѣ равны діаметрамъ.

Если въ каждомъ блокѣ дуга, обхватываемая веревкою, будетъ равна трети полуокружности, то хорды этихъ дугъ будутъ равны радіусамъ блоковъ, а сила будетъ равна сопротивленію.

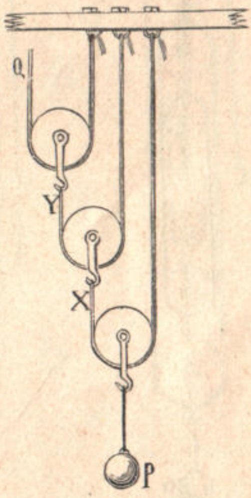


Рис. 95.

Полиспастъ есть система блоковъ, утвержденныхъ въ одной обоймицѣ, или на отдѣльныхъ осяхъ (рис. 96 и 97), или на одной оси (рис. 98).

Разсмотримъ два полиспаста, одинъ подвижной, а другой неподвижный, и положимъ, что всѣ блоки обхватываются одною веревкою, прикрѣпленною однимъ концомъ къ обоймицѣ, а на другой дѣйствуетъ сила Q, уравновѣшивающая грузъ P, привѣшенный къ подвижному полиспасту. Предположимъ, что различныя части веревки параллельны между собою, тогда сила Q будетъ относиться къ сопротивленію P, какъ единица къ числу веревокъ, поддерживающихъ подвижной полиспастъ, потому что, когда всѣ блоки обхваты-

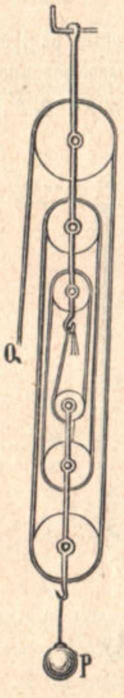


Рис. 96.

Рис. 97.

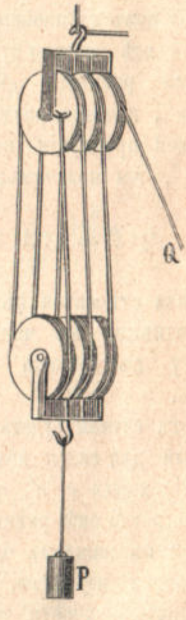


Рис. 98.

ваются веревкою, и каждый изъ нихъ отдѣльно находится въ равновѣсіи, то всѣ части веревки должны быть одинаково натянуты. Итакъ, грузъ P можно разсматривать, какъ поддерживаемый столькими равными и параллельными силами, сколько имѣется веревокъ, идущихъ отъ одного полиспаста къ другому, а слѣдовательно, напряженіе одной изъ веревокъ, или сила Q, относится къ грузу P, какъ единица къ числу веревокъ.

Итакъ, въ случаѣ, какъ на рис. 96, сила равна одной шестой сопротивленія, а въ случаѣ, какъ на рис. 97, она равна одной пятой части сопротивленія; потому что здѣсь число веревокъ, поддерживающихъ движущійся полиспастъ, одною меньше.

Наконецъ, разсмотримъ систему воротовъ A, A′, A″, дѣйствующихъ одни на другіе, какъ видно на рис. 99. Пусть r, r', r'', будутъ радіусы ихъ цилиндровъ, а R, R′, R″, радіусы колесъ. Веревка, приложенная по касательной къ первому цилиндру, поддерживаетъ грузъ P, а веревка, приложенная къ колесу, вмѣсто того, чтобъ быть непосредственно натягиваемою силою, прикрѣпляется къ цилиндру другого ворота A′. На колесо этого ворота натягивается также веревка, идущая къ цилиндру третьяго ворота A″, и т. д. до послѣдняго, котораго колесо приводится въ движеніе силою Q.

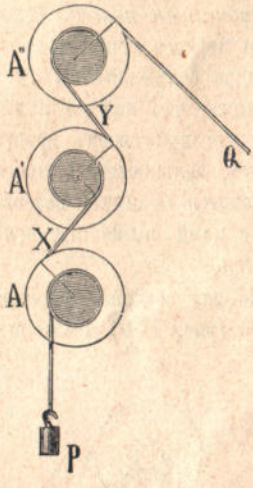


Рис. 99.

Если система находится въ равновѣсіи, то и каждый воротъ отдѣльно долженъ быть въ равновѣсіи отъ напряженій веревокъ, дѣйствующихъ на цилиндръ и колесо.

Называя чрезъ X напряженіе веревки, идущей отъ перваго блока ко второму, имѣемъ:

$$X : P = r : R;$$

называя чрезъ Y напряженіе слѣдующей веревки, получимъ:

$$Y : X = r' : R';$$

для послѣдняго ворота, получимъ:

$$Q : Y = r'' : R'';$$

перемноживъ по порядку эти пропорціи, будемъ имѣть:

$$Q : P = r . r' . r'' : R . R' \cdot R'':$$

т.-е. сила относится къ сопротивленію, какъ произведеніе радіусовъ цилиндровъ къ произведенію радіусовъ колесъ.

Зубчатыя колеса. Если сблизить всѣ эти вороты такъ, чтобы колесо перваго соприкасалось къ цилиндру второго, а колесо второго цилиндра соприкасалось къ цилиндру третьяго и т. д. и если предположимъ, что каждое колесо соединено съ сложнымъ цилиндромъ такъ, что при своемъ вращеніи оно вращаетъ и цилиндры, или на оборотъ, вращающійся цилиндръ приводитъ въ движеніе колесо, то мы можемъ откинуть веревки, соединяющія ворота, при чемъ выведенное нами выше отношеніе между силою и сопротивленіемъ неизмѣнится.

Но для соединенія каждаго колеса съ цилиндромъ слѣдующаго ворота (рис. 100) необходимо снабдить ихъ окружности зубцами, ровно отстоящими одинъ отъ другого, и которые зацѣпляютъ другъ за друга такъ, что каждое колесо, получающее въ этомъ случаѣ названіе *зубчатаго колеса* или *зубчатки*, можетъ вращаться около своей оси, вращая въ то же время и цилиндръ, который тогда получаетъ названіе *шестерни.*

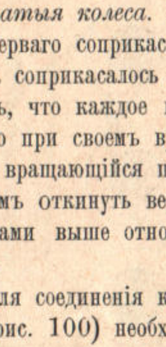


Рис. 100.

Итакъ, для равновѣсія двухъ силъ, дѣйствующихъ одна на другую посредствомъ зубчатыхъ колесъ, необходимо, чтобы *сила относилась къ сопротивленію, какъ произведеніе радіусовъ шестерней къ произведенію радіусовъ колесъ.*

Въ практикѣ зубчатыми зацѣпленіями пользуются въ томъ случаѣ, когда почему-либо передача движенія веревками, ремнями, цѣпями и вообще гибкими приводами оказывается неудобной. Валы, соединенные зубчатою передачею, могутъ быть расположены различнымъ образомъ; направленіе осей могутъ быть взаимно параллельны, встрѣчаться подъ угломъ и наконецъ могутъ лежать въ различныхъ плоскостяхъ.

Если оси валовъ параллельны, то колеса, сидящія на нихъ, соприкасаются другъ съ другомъ по прямой, параллельной осямъ и лежащей въ одной съ ними плоскости; въ этомъ случаѣ колеса должны имѣть форму цилиндровъ, соприкасающихся по своимъ производящимъ.

При расположеніи осей подъ нѣкоторымъ угломъ, колеса соприкасаются по прямой, направленной въ точку встрѣчи осей и лежащей въ одной плоскости съ осями; такія колеса должны имѣть форму конусовъ, соприкасающихся другъ съ другомъ своими производящими.

Для передачи движенія осямъ, не лежащимъ въ одной плоскости, обыкновенно служатъ сложные приводы, устраиваемые сочетаніемъ одной или нѣсколькихъ паръ цилиндрическихъ колесъ съ парами коническими.

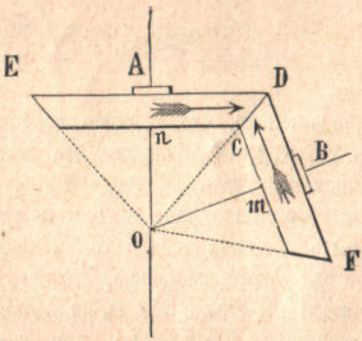


Рис. 101.

При постройкѣ цилиндрическихъ колесъ, обыкновенно, дается отношеніе между числами оборотовъ и разстояніе между осями вращенія. По этимъ даннымъ опредѣляютъ радіусы r и r' двухъ соединяющихся колесъ. Величины этихъ радіусовъ длины находится въ обратномъ отношеніи чиселъ оборотовъ n_1 и n_2 колесъ; кромѣ того сумма ихъ должна быть равна данному разстоянію между осями d.

Такимъ образомъ составятся слѣдующія данныя:

$$r' : r'' = n'' : n \qquad \text{и} \qquad r' + r'' = d$$

Откуда:

$$r' = \frac{d \,.\, n''}{n' + n''} \qquad r'' = \frac{d \,.\, n'}{n' + n''}$$

При постройкѣ коническихъ колесъ, (рис. 101) кромѣ отношенія чиселъ оборотовъ n' и n'' дается величина угла α, составляемаго осями и радіусъ АД $= r$ одного изъ колесъ или разстояніе ОД $= a$. Если дана величина радіуса r', то радіусъ другого колеса ВД $= r''$ опредѣлится изъ отношенія: $r' : r'' = n'' : n'$

Если дана длина линіи a, то обозначивъ уголъ, дѣлаемый направленіемъ этой линіи съ осью АО, чрезъ β получимъ:

$$r' = a \operatorname{Sin} \beta \qquad r'' = a \operatorname{Sin} (d - \beta)$$

Или:

$$\frac{n'}{n''} = \frac{\operatorname{Sin} (\alpha - \beta)}{\operatorname{Sin} \beta}$$

Откуда:

$$\operatorname{Cotang.} \beta = \frac{n' + n''. \operatorname{Cos} \alpha}{n''. \operatorname{Sin} \alpha}$$

Слѣдовательно, чтобы найти величины r' и r'' необходимо опредѣлить уголъ β. Обыкновенно оси коническихъ колесъ встрѣчаются подъ прямымъ угломъ и тогда $\operatorname{cotang} \beta = n' : n''$

Помощью цилиндрическихъ и коническихъ колесъ движеніе можетъ быть передано только тогда, когда поверхности соприкосновенія будутъ, съ нѣкоторою силою, нажаты одна на другую. Треніе, развивающееся въ этомъ случаѣ, не позволяетъ одному колесу скользить по другому и, слѣдовательно, при поворачиваніи одного изъ нихъ другое получитъ опредѣленную угловую скорость. Приводы, передающіе движеніе силою развивающагося тренія, носятъ названіе *трущихся колесъ.* Понятно, что сила передаваемая такимъ колесомъ не можетъ превышать величину происходящаго тренія. Такимъ образомъ, если давленіе, съ которымъ будутъ нажаты колеса другъ на друга будетъ Q, то сила передаваемая на окружности колеса должна быть:

$$P = Q . \operatorname{tang} \varphi$$

Слѣдовательно для увеличенія силы, которую должны передать трущіяся колеса, необходимо или увеличить давленіе Q, или выбрать для постройки колесъ такіе матеріалы, которые имѣли-бы возможно большій коэфиціентъ тренія. Такъ какъ давленіе Q передается шинамъ колесъ и тѣмъ увеличиваетъ вредныя сопротивленія, то сильно нажимать колеса невыгодно; лучшимъ средствомъ, въ этомъ отношеніи, служитъ надлежащій выборъ матеріаловъ для трущихся поверхностей.

Домкратъ. (Рис. 102) Посредствомъ этой машины, какъ извѣстно, можно поднять весьма значительныя тяжести.

Домкратъ состоитъ изъ зубчатаго колеса, называемаго *шестерней*, которая можетъ вращаться около своей оси посредствомъ рукоятки; эта шестерня зацѣпляетъ за зубцы негибкой полосы такъ, что при своемъ вращеніи около оси колесо заставляетъ двигаться полосу по направленію ея длины. Полагая, что сопротивленіе прямо противоположно движенію полосы и разсматривая его какъ силу, перпендикулярную къ концу радіуса, то *сила, приложенная къ рукояткѣ, относится къ сопротивленію, дѣйствующему по длинѣ зубчатой полосы, какъ радіусъ шестерни къ радіусу рукоятки.*

Слѣдовательно, усиліе, производимое домкратомъ, будетъ тѣмъ значительнѣе, чѣмъ радіусъ шестерни менѣе радіуса рукоятки. Поэтому, если мы хотимъ увеличить силу подъема домкрата, безъ увеличенія радіуса шестерни, то вмѣсто того, чтобы дѣйствовать непосредственно на зубчатую полосу мы заставимъ ее дѣйствовать на зубчатое колесо, которое шестерня своими зубцами зацѣпляетъ за зубцы колеса.

Итакъ, для равновѣсія необходимо, чтобы сила приложенная къ рукояткѣ относилась-бы къ сопротивленію, дѣйствующему въ сторону полосы, какъ произведеніе радіусовъ двухъ шестерней къ произведенію радіуса колеса на радіусъ рукоятки.

Безконечный винтъ. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ, когда требуется передать главное и медленное круговое движеніе, или-же когда надо преодолѣть весьма значительныя сопротивленія при небольшихъ величинахъ усилія, употребляютъ особый механизмъ извѣстный подъ именемъ *безконечнаго винта*, который представляетъ собою соединеніе винта съ зубчатымъ колесомъ.

На ведущемъ валу сдѣлана винтовая нарѣзка, поперечное сѣченіе которой имѣетъ очертаніе зубьевъ шестерни. Зубцы колеса сидящаго на рабочемъ валу, нарѣзаны такъ, что боковыя грани ихъ наклонны къ оси колеса, подъ угломъ равнымъ углу уклона нарѣзки. Нарѣзка входитъ между зубьями колеса и, при поворачиваніи винта, колесо повернется на одинъ зубецъ, и такимъ образомъ валъ будетъ имѣть медленное и плавное движеніе.

Для равновѣсія винта необходимо (рис. 103), чтобы сила Q, приложенная къ рукояткѣ радіуса R, относилась-бы къ усилію f, съ ко-

Рис. 102.

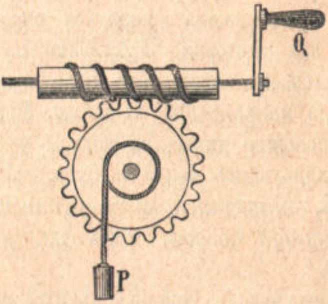


Рис. 103.

торымъ винтовой нарѣзъ производитъ давленіе на зубецъ колеса, какъ ширина h винта къ окружности $2\pi R$, описываемой силою.

Слѣдовательно, будетъ:

$$Q : f = h : 2\pi R$$

Если это зубчатое колесо (радіусъ котораго означимъ чрезъ A), вращаетъ цилиндръ около той-же оси и поднимаетъ грузъ P, привѣшенный къ концу веревки, навивающейся на цилиндръ, то изъ условій равновѣсія ворота (называя чрезъ a цилиндръ), мы получимъ:

$$f : P = a : A$$

Перемноживъ обѣ пропорціи будетъ:

$$Q : P = ah : 2\pi R : A$$

т.-е. *сила относится къ грузу, какъ произведеніе ширины винта на радіусъ горизонтальнаго ворота, къ произведенію радіуса зубчатаго колеса на окружность круга, описываемаго силою.*

18. **Гофманъ, Ф.** Милордъ Кэтъ. Сказки для дѣтей. Переводъ съ нѣмецкаго. В. А. Кушанина. Спб. 1892 г. Ц. 30 к.

19. **Головачевъ, А.** Вопросы Государственнаго хозяйства. 1) Государственная роспись на 1873 г., 2) операціи Государственнаго банка. 3) исторія постройки желѣзныхъ дорогъ въ Россіи. Спб. 1873 г. Ц. 1 р.

20. **Дарвинъ, Г.** Наблюденія надъ жизнію ребенка. Спб. 1881 г. Ц. 20 к.

21. **Дюлонъ, Р.** Изъ Америки, о школѣ вообще, о нѣмецкой и американской школахъ, съ примѣчаніями и прибавленіемъ о раціональной школѣ. М. 1868 г. Ц. 1 р. 50 к.

22. **Жуванселя жизнь.** Перев. подъ редакціей Лебедева Ососова, съ 92 политипаж. Спб. 1871 г. Ц. 1 р. 25 к.

23. **Забылинъ, М.** Русскій народъ, его обычаи, обряды, преданія суевѣрія и поэзія. Книга, содержащая въ себѣ русскіе праздники, обряды, суевѣрія, ложныя убѣжденія, свѣдѣнія о колдунахъ, вѣдьмахъ, нечистой силѣ, заклинанія, заговоры, народная медицина, старинный цвѣтникъ, домашняя жизнь, описаніе костюмовъ и т. д. М. 1880 г. Ц. 2 р. 50 к.

24. **Записки Екатерины Александровны Хвостовой,** рожденной Сушковой 1812—1841 гг. Матеріалы для біографіи М. Ю. Лермонтова. Изд. 2-ое. Спб. 1870 г. Ц. 1 р. 25 к.

25. **Зео.** Три соперницы. Романъ въ 2-хъ частяхъ. Одесса. 1890 г. Ц. 1 р. 50 к.

26. **Его-же.** Изъ жизни. Одесса. 1881 г. Ц. 1 руб.

27. **Его-же.** Сказки. Одесса. 1891 г. Ц. 50 коп.

28. **Ирвингъ.** Путевые очерки и картинки. Перев. съ англійскаго Глазунова. Москва. 1879 г. Ц. 2 р. 50 к.

29. **Кравченко, И.** Циклоны сѣвернаго умѣреннаго пояса. Спб. 1881 г. Ц. 1 р.

30. **Кребсъ, г. Д-ръ.** Сохраненіе энергіи какъ основное положеніе новѣйшей физики. Кіевъ. 1881 г. Ц. 80 к.

31. **Каблицъ І. И.,** (С. Юзовъ). Интеллигенція и народъ въ общественной жизни въ Россіи. Спб. 1896 г. Ц. 1 р. 50 к.

32. **Каролинъ, К. К.** Путевые картины въ Болгаріи въ 1877—1878 гг. Спб. 1883 г. Ц. 1 руб.

33. **Калачевъ, П.** Предварительныя юридическія свѣдѣнія для полнаго объясненія русской правды. Вып. I. изд. 2-ое. Спб. 1880 г. Ц. 1 р. 50 к.

34. **Его-же.** О значеніи кормчей въ системѣ древняго русскаго права. Ц. 2 р.

35. **Его-же.** Матеріалы для исторіи русскаго дворянства. 3 вып. Спб. 1886 г. Ц. 1 руб.

36. **Карновичъ, Евгеній.** Мальтійскіе рыцари въ Россіи. Историческая повѣсть изъ временъ Императора Павла I. Спб. 1890 г. Ц. 2 р.

37. **Ковальскій, М.** Общественный строй Англіи въ концѣ среднихъ вѣковъ. М. 1860 г. Ц. 2 р.

38. **Лалошъ, М.** Сравнительный календарь древнихъ и новыхъ народовъ, съ изложеніемъ времясчисленія и календарей: Китайскаго, Японскаго, Халдейскаго. Египетскаго, древне-Греческаго, Македонскаго, Сирійскаго, Еврейскаго, Римскаго, древне-Персидскаго, Магометанскаго, Юліанскаго и Григоріанскаго. съ особенно подробнымъ объясненіемъ русскаго лѣтосчисленія, съ приложеніемъ таблицъ и съ показаніемъ примѣненія ихъ къ повѣркѣ русскихъ лѣтописей. Изд. 3-ое. Спб. 1869 г. Ц. 1 р.

39. **Лихачевъ, Н. П.** Разрядные дьяки XVI вѣка. Опытъ историческаго изслѣдованія. Спб. 1889 г. Ц. 5 р.

40. **Лутковъ, А. В.** Паровозное депо желѣзныхъ дорогъ, съ хозяйственной и технической его стороны. Оренбургъ. 1880 г. Ц. 2 р.

41. **Лукьяновскій, А.** Русскія народныя сказки и ...ылины въ стихахъ, въ 2-хъ том. Спб. ...384 г. Ц. 4 р.

42. **Мельниковъ.** Новый способъ винокуренія съ примѣненіемъ сѣрнистой кислоты. 4 табл. чертежей. Спб. 1873 г. Ц. 75 к.

43. **Мельниковъ.** Производство бумаги изъ соломы, сѣна, мочалы и другихъ растительныхъ матеріаловъ и значеніе ихъ для писчебумажнаго дѣла въ Россіи съ 17 образцами бумагъ изъ соломы, мочалы и друг. матер. нѣсколько чертежей. Спб. 1873 г. Ц. 1 р.

44. **Милль и Тэнъ.** Наведеніе какъ методъ изслѣдованія природы. Переводъ Хмѣлевскаго. Спб. 1866 г. Ц. 1 р. 25 к.

45. **Некрасовъ, Н.** Очеркъ сравн. ученія о звукахъ и формахъ древняго и церковно-славянскаго языка. Спб. 1889 г. Ц. 1 р. 75 к.

46. **О значеніи формъ русскаго глагола.** Спб. 1865 г. Ц. 1 р. 50 к.

47. **Писцовыя книги XVI вѣка.** Изд. Императорскаго русскаго географическаго общества, подъ редакціей дѣйствительнаго члена Н. В. Калачева, отд. 2-ое мѣстности губерній: Ярославской, Тверской, Витебской, Смоленской, Калужской, Орловской и Тульской. Спб. 1877 г. Ц. 2 р.

То-же. Московской, Владимірской и Костромской. Спб. 1872 г. Ц. 2 р.

48. **Пиллеръ, О.** Итоги женскаго образованія въ Россіи и его задачи. Спб. 1888 г. Ц. 1 р. 50 к.

49. **Погодинъ, А.** Какъ живется червонорусcамъ. Быль, разсказанная Циневичемъ. Спб. 1890 г. Ц. 30 к.

50. **Покатиловъ, Д.** Исторія восточныхъ монголовъ въ періодъ династіи минъ 1368—1634 (по китайскимъ источникамъ). Спб. 1893 г. Ц. 3 р.

51. **Полюта, Г.** Проф. Вс... фармакологія съ общей тера... цептурой. 3 вып. Харьковъ, 18...

52. **Ральфа Ульда Эмерсона.** ... ная философія. 2 т. Перев. ... скаго Ладыженской. Спб. 186...

53. **Рено, А.** Вѣчная красот... эстетическій, философскій и ... скій; съ приложеніемъ вост... генды о гигіенѣ розъ и фе... товъ. Перев. съ франц. 2-о... Спб. 1896 г. Ц. 50 к.

54. **Свѣтловъ, Г.** Золоченая ... манъ изъ петербургской ж... 1895 г. Ц. 1 р. 25 к.

55. **Его-же.** Призраки мину... 1896 г. Ц. 1 р. 25 к.

56. **Его-же.** Семья или сцен... Спб. 1896 г. Ц. 1 р. 25 к.

57. **Его-же.** Жрецы, театрал... ки съ 11 иллюстрац. Спб. 1... 1 р. 25 к.

58. **Его-же.** Кавказскія пред... генды. Спб. 1895 г. Ц. 1 р.

59. **Северинъ.** (Н. И. Мерд... тынцевы (фамильная хрони... 1871 г. Ц. 1 р.

60. **Соколовскій П. А.** Очерк... сельской общины на сѣвер... Спб. 1877 г. Ц. 1 р. 25 к.

61. **Субботинъ, А. П.** Обзоръ... туры по вопросу о прямомъ о... и пошлинахъ, съ предисловіем... И. Васильчикова. Спб. 1880 г. ...

62. **Тимошенко, П.** Опытъ си... ческаго изложенія теоріи слове... Изданіе 2-ое исправленное и до... ное. Спб. 1875 г. Ц. 1 р.

63. **Юридическій Вѣстникъ,** изда... Н. Калачевымъ за 1860, 1861... 1863 и 1864 гг.—всего 48 вы... Цѣна вмѣсто 14 р.—3 р.

Дозв. ценз. Спб. 3 сент. 1897 г. Тип. И. Комелова, Б. Подъяческ., ...