Тихомандрицкий М.
Курс
теории вероятностей.

M. Tikhomandritzky. Cours de la théorie des probabilités.

КУРСЪ

ТЕОРІИ ВѢРОЯТНОСТЕЙ.

Проф. М. Тихомандрицкаго.

ХАРЬКОВЪ.
Паровая Типографія и Литографія Зильбербергъ.
(Рыбная улица, домъ № 30-й).
1898.

На основаніи ст. 41 § 1 п. 4 и ст. 138 Унив. Уст. печатать и выпустить въ свѣтъ разрѣшается. Сентября 23 дня 1898 года.

За Ректора Университета *А. Лебедевъ.*

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Хотя на русскомъ языкѣ имѣется уже нѣсколько курсовъ и трактатовъ по теоріи вѣроятностей, тѣмъ не менѣе я рѣшился издать свой курсъ, какъ въ интересахъ моихъ слушателей, такъ главнымъ образомъ потому, что мое изложеніе имѣетъ свои особенности, благодаря которымъ студентамъ университетовъ, для которыхъ этотъ курсъ предназначается, не трудно будетъ, какъ мнѣ кажется, въ сравнительно короткое время усвоить главныя основанія и главные методы анализа вѣроятностей.

Изъ приложеній я ограничиваюсь только однимъ, имѣющимъ важнѣйшее значеніе въ опытныхъ и наблюдательныхъ наукахъ — именно способомъ наименьшихъ квадратовъ, знать который необходимо всѣмъ студентамъ математикамъ; другія-же приложенія къ практическимъ вопросамъ, могущія интересовать спеціалистовъ практиковъ, болѣе умѣстны въ трактатахъ, посвященныхъ соотвѣтственно этимъ спеціальнымъ вопросамъ. Что касается самого изложенія способа наименьшихъ квадратовъ, то оно совершенно отличается отъ прежнихъ. Принимая во вниманіе, что способъ наименьшихъ квадратовъ даетъ, какъ теперь всѣми признано, не вѣроятнѣйшія значенія неизвѣстныхъ, а лишь лучшія въ томъ смыслѣ, что предѣлы погрѣшности выводовъ, полученныхъ по этому способу, оказываются наитѣснѣйшими при одинаковомъ нисшемъ предѣлѣ для вѣроятности въ нихъ заключаться,—я могъ воспользоваться замѣчаніями профес. С. П. Ярошенко на счетъ вывода теоріи этого способа и прямо приступилъ къ самому общему случаю его примѣненія. Не смотря на это, все таки я думаю, что это новое изложеніе потребуетъ не больше усилій, для овладѣнія этимъ предметомъ, отъ студентовъ послѣднихъ семестровъ, (каковымъ обыкновенно и читается этотъ предметъ), чѣмъ еслибы ему была предпослана обычная пропедевника, которая только увеличила бы объемъ книги и отняла бы лишнее время у читателя.

При выработкѣ этого курса я пользовался больше всего собственными записками, составленными по лекціямъ акад. П. Л. Чебышева, которыя я имѣлъ счастіе слушать въ весенній семестръ 1865 г., и его мемуарами, а затѣмъ уже и другими русскими и иностранными сочиненіями и мемуарами по этому предмету, знакомство съ которыми дало мнѣ возможность еще болѣе оцѣнить этотъ курсъ Чебышева. Въ своихъ лекціяхъ однако я нашелъ цѣлесообразнымъ допустить различныя измѣненія и отступленія, такъ что и покойный знаменитый учитель мой, которому я показывалъ свой курсъ въ 1887 г., нашелъ его въ значительной мѣрѣ уклонившимся отъ тогдашняго своего, прибавивъ, что и онъ позднѣе читалъ иначе, чѣмъ тогда, когда я его слушалъ. При этомъ онъ высказалъ ту мысль, что по его мнѣнію теперь нужно перестроить всю теорію вѣроятностей. За такое дѣло, не считая себя спеціалистомъ въ этомъ предметѣ, понятно, я взяться не могъ, а ограничился лишь тѣми исправленіями, которыя отвѣчали моимъ силамъ. Изучить такой предметъ, который нерѣдко представлялъ значительныя трудности и хорошимъ математикамъ, по краткому курсу нельзя; но университетскіе курсы общаго характера и имѣютъ назначеніемъ своимъ лишь заложить прочный фундаментъ основательнаго знанія, которое пріобрѣтается уже потомъ внимательнымъ изученіемъ капитальныхъ сочиненій по избранной наукѣ и собственными изслѣдованіями различныхъ вопросовъ ея. Сообразно съ этимъ и я въ моемъ курсѣ старался по возможности ясно изложить лишь общія основанія и методы теоріи вѣроятностей, не вдаваясь въ подробную разработку различныхъ частныхъ вопросовъ и задачъ. Насколько мнѣ это удалось, предоставляю судить знатокамъ этого предмета.

М. Т.

Харьковъ
17 сентября 1898 г.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

§§ Стр.

ВВЕДЕНІЕ.

1. Если мы знаемъ всѣ условія необходимыя и достаточныя для наступленія извѣстнаго событія, а также, что въ данномъ случаѣ всѣ онѣ выполнены, то наступленіе ожидаемаго событія для насъ *достовѣрно*, т. е. не подлежитъ сомнѣнію; равнымъ образомъ ненаступленіе событія для насъ достовѣрно, когда мы знаемъ, что не всѣ изъ необходимыхъ и достаточныхъ условій его появленія выполнены въ данномъ случаѣ. Такъ, напримѣръ имѣя предъ собою сосудъ, содержащій, какъ мнѣ извѣстно, только бѣлые шары, и вынимая одинъ изъ нихъ не смотря, я увѣренъ, что вынутый шаръ будетъ бѣлый; вынутіе бѣлаго шара изъ такого сосуда будетъ событіе достовѣрное; если я имѣю предъ собою неполную колоду картъ, т. е. „безъ двоекъ", какъ говорятъ, то вынимая карту на удачу, я увѣренъ, что двойка не попадется; невынутіе двойки будетъ событіе достовѣрное для меня.

2. Но чаще бываетъ, что мы или знаемъ только часть условій необходимыхъ и достаточныхъ для наступленія извѣстнаго событія, или-же, хотя и знаемъ ихъ всѣ, но не знаемъ всѣ-ли они выполнены въ данномъ случаѣ; тогда мы не имѣемъ увѣренности, что ожидаемое событіе непремѣнно наступитъ, ибо это зависитъ отъ того, выполнены или нѣтъ остальныя необходимыя и достаточныя для наступленія ожидаемаго событія условія, на счетъ которыхъ мы находимся въ неизвѣстности: если они всѣ выполнены, то событіе непремѣнно наступитъ; если не всѣ выполнены, то навѣрно оно не наступитъ; слѣдовательно событіе можетъ быть, можетъ и не быть. Такое событіе, которое можетъ быть, но не навѣрно, называется *вѣроятнымъ*. Такъ, если я знаю, что въ сосудѣ, стоящемъ предо мною, имѣются бѣлые шары, но не знаю всѣ-ли они бѣлые, или же тамъ есть шары и другихъ цвѣтовъ, то вынимая наудачу шаръ изъ сосуда, я не имѣю увѣренности, что онъ будетъ бѣлый, хотя и можетъ быть таковымъ,—ибо можетъ попасться и шаръ другого цвѣта; въ этомъ случаѣ, вынутіе бѣлаго шара будетъ событіе вѣроятное, а не достовѣрное, какъ въ примѣрѣ предъидущаго §.

Равнымъ образомъ, имѣя предъ собою полную колоду картъ и вынимая на удачу карту, я неимѣю увѣренности, что вынутая карта не будетъ изъ „двоекъ“, ибо теперь можетъ попасться и такая; въ этомъ случаѣ невынутіе двойки будетъ событіемъ только вѣроятнымъ, но не достовѣрнымъ.

3. Различныя событія, только возможныя, но недостовѣрныя, вообще въ различной степени вѣроятны. Напримѣръ вынутіе фигуры изъ полной колоды картъ представляется намъ событіемъ менѣе вѣроятнымъ, чѣмъ вынутіе простой карты, ибо фигуръ всего 12 въ колодѣ, а простыхъ картъ 40; вынутіе туза еще менѣе вѣроятно, ибо ихъ всего 4 въ колодѣ. Итакъ, вѣроятности различныхъ событій не одинаковы, могутъ быть больше или меньше; слѣдовательно *вѣроятность есть величина*, а потому можетъ сдѣлаться предметомъ математической теоріи, какъ скоро будетъ найденъ способъ измѣренія вѣроятности, выраженія ея числомъ.

4. Положимъ, что въ сосудѣ находится 100 бѣлыхъ шаровъ и другихъ не имѣется: вынутіе бѣлаго шара изъ такого сосуда — событіе достовѣрное. Опустимъ туда одинъ черный шаръ: вынутіе бѣлаго шара уже перестанетъ быть достовѣрнымъ событіемъ, однако будетъ весьма вѣроятнымъ, ибо противъ 100 бѣлыхъ шаровъ только одинъ черный. Если мы будемъ прибавлять по черному шару, то вѣроятность вынутія бѣлаго шара съ каждымъ новымъ прибавленнымъ чернымъ шаромъ будетъ все уменьшаться, тогда какъ вѣроятность вынутія чернаго шара, сперва очень малая, будетъ все возрастать. Когда окажется въ сосудѣ на 100 бѣлыхъ шаровъ такое-же число 100 черныхъ, то обѣ вѣроятности сравняются, ибо нѣтъ причины ожидать появленія бѣлаго шара скорѣе чѣмъ чернаго, когда условія одинаковыя: и тѣхъ и другихъ по 100 штукъ. Слѣдовательно когда изъ двухъ событій, взаимно-исключающихъ одно другое (какъ черное и бѣлое), на долю каждаго приходится по половинѣ всего числа шансовъ, вѣроятности этихъ событій равны. Вынуть изъ полной колоды красную карту событіе столь же вѣроятное, какъ и вынуть черную, ибо тѣхъ и другихъ поровну въ колодѣ. Если въ сосудѣ кромѣ бѣлыхъ и черныхъ шаровъ имѣются и шары другихъ цвѣтовъ, но черныхъ столько же, сколько и бѣлыхъ, то опять вѣроятность вынуть черный шаръ будетъ та же, что вынуть бѣлый, ибо нѣтъ причины ожидать появленія бѣлаго шара скорѣе чѣмъ чернаго. Итакъ, *если числа благопріятствующихъ ожидаемому событію случаевъ для двухъ событій равны при одинаковомъ числѣ всѣхъ равновозможныхъ случаевъ, то и вѣроятности этихъ событій равны.* Замѣтимъ, что общее число всѣхъ случаевъ здѣсь не при чемъ: вѣроятность вскрытія орла равняется вѣроятности вскрытія рѣшетки въ игрѣ въ орлянку, какъ вѣроятность вскрытія красной карты равняется вѣро-

ятности вскрытія черной карты, будетъ-ли колода полная или не полная, хотя общее число всѣхъ случаевъ будетъ различно въ каждомъ изъ этихъ примѣровъ: въ первомъ 2, во второмъ 52, въ третьемъ 36, и это потому, что число благопріятствующихъ каждому изъ двухъ возможныхъ событій случаевъ въ этихъ примѣрахъ одинаковое.

5. Предположимъ теперь, что изъ числа всѣхъ шаровъ въ сосудѣ одна треть черныхъ, а двѣ бѣлыхъ: въ этомъ случаѣ на каждый черный шаръ приходится по два бѣлыхъ, и потому вѣроятность вскрытія бѣлаго шара намъ представляется вдвое большею вѣроятности вскрытія чернаго. Если-бы одна четверть всѣхъ шаровъ была-бы черные, а остальные три четверти бѣлые, то на каждый черный шаръ приходилось-бы по три бѣлыхъ, и вѣроятность вскрытія бѣлаго шара была-бы въ три раза болѣе вѣроятности вскрытія чернаго, и т. д. Еще примѣръ: положимъ, имѣемъ два сосуда A и B, содержащихъ каждый по 10 шаровъ, изъ которыхъ 4 бѣлыхъ въ каждомъ, а остальные черные; очевидно, что вѣроятность вынуть бѣлый шаръ изъ сосуда A будетъ такая же, какъ и вѣроятность вынуть бѣлый шаръ изъ сосуда B, ибо условія тождественныя. Пусть теперь изъ 10 шаровъ въ A будетъ 8 бѣлыхъ, тогда какъ въ B ихъ будетъ 4; тогда вѣроятность вынуть бѣлый шаръ изъ сосуда A будетъ вдвое болѣе вѣроятности вынуть бѣлый шаръ изъ сосуда B, ибо на каждый бѣлый шаръ въ послѣднемъ приходится по два бѣлыхъ въ первомъ. Такимъ образомъ *при одинаковомъ числѣ всѣхъ равно-возможныхъ случаевъ вѣроятности пропорціональны числамъ благопріятствующихъ ожидаемому событію случаевъ.* Такъ вѣроятности вынуть фигуру и вынуть простую изъ полной колоды картъ пропорціональны числамъ 12 и 40, ибо фигуръ 12, а простыхъ картъ 40 въ полной колодѣ. Для неполной колоды картъ тѣже вѣроятности пропорціональны числамъ 12 и 24, ибо всѣхъ картъ въ ней 36, и изъ нихъ 12 фигуръ, а 24 простыя.

6. Пусть теперь въ сосудѣ A 10 шаровъ; изъ нихъ 5 бѣлыхъ, остальные черные; въ сосудѣ B всѣхъ шаровъ 20, изъ которыхъ бѣлыхъ тоже 5, остальные черные; такимъ образомъ здѣсь одинаковое число благопріятствующихъ ожидаемому событію вынутія бѣлаго шара случаевъ, тогда какъ число всѣхъ случаевъ различное. Прибавивъ въ сосудъ A 5 бѣлыхъ и 5 черныхъ шаровъ, мы не измѣнимъ вѣроятности вынуть бѣлый шаръ изъ этого сосуда, ибо опять половина всего числа будутъ бѣлые; но теперь въ сосудѣ A будетъ всѣхъ шаровъ столько, сколько и въ сосудѣ B, но бѣлыхъ уже 10, слѣдовательно вдвое болѣе; слѣдовательно по пред. § вѣроятность вынуть бѣлый шаръ изъ сосуда A вдвое больше вѣроятности вынуть его изъ сосуда B. Отсюда заключаемъ, что *при одинаковомъ числѣ беагопріятствуюшихъ ожидаемому событію случаевъ вѣроятности событій обратно-пропорціональны чи-*

сламъ всѣхъ равно-возможныхъ случаевъ (т. е. и благопріятствующихъ событію и исключающихъ его). Такъ вѣроятности вынуть фигуру изъ полной и неполной колодъ картъ относятся какъ:

$$36:52=9:13.$$

7. Это законъ общій и не зависитъ отъ того числа благопріятствующихъ случаевъ, которое мы предположили въ примѣрѣ предъидущаго §. Пусть въ сосудѣ A изъ 10 шаровъ 3 бѣлыхъ, а въ B изъ 20 шаровъ 3 бѣлыхъ. Означая вѣроятности вынутія бѣлаго шара въ случаѣ предъидущаго § чрезъ p и q, а въ настоящемъ случаѣ чрезъ P и Q соотвѣтственно, будемъ имѣть по предъидущему §:

$$p:q=2:1; \tag{1}$$

но изъ § 4 имѣемъ:

$$P:p=3:5, \tag{2}$$

ибо общее число всѣхъ шаровъ въ сосудѣ A въ обоихъ случаяхъ одинаковое—10, и

$$q:Q=5:3, \tag{3}$$

ибо общее число всѣхъ шаровъ въ сосудѣ B въ обоихъ случаяхъ одинаковое—20; перемножая эти три пропорціи, по сокращеніи получимъ:

$$P:Q=2:1, \tag{4}$$

т. е. отношеніе P и Q и въ этомъ случаѣ обратное отношенію чиселъ всѣхъ шаровъ въ сосудѣ A къ таковому въ сосудѣ B.

8. Если теперь въ сосудѣ A всего n шаровъ и изъ нихъ m бѣлыхъ, а сосудѣ въ B всего k шаровъ и изъ нихъ l бѣлыхъ, то вѣроятности p и q вынуть бѣлый шаръ изъ сосудовъ A и B будутъ пропорціональны отношеніямъ $\frac{m}{n}$ и $\frac{l}{k}$, т. е. будетъ:

$$p:q=\frac{m}{n}:\frac{l}{k}. \tag{1}$$

Дѣйствительно, предполагая $n>k$, возьмемъ третій сосудъ C, въ которомъ было-бы n шаровъ, но изъ нихъ l бѣлыхъ; тогда, означая чрезъ r вѣроятность вынутія бѣлаго шара изъ сосуда C, мы будемъ имѣть по § 4:

$$p:r=m:l, \tag{2}$$

ибо общее число шаровъ въ сосудахъ A и C одинаковое, именно n, и по §§ 6 и 7:

$$r:q=k:n, \tag{3}$$

ибо въ обоихъ сосудахъ C и B бѣлыхъ шаровъ по l; перемножая (2) и (3) и сокращая, получимъ:

$$p:q = km:ln; \tag{4}$$

раздѣляя оба члена второй части на произведеніе nk, получимъ:

$$p:q = \frac{m}{n}:\frac{l}{k}, \tag{5}$$

что и требовалось доказать.

9. Изъ этой пропорціи получаемъ:

$$p = \left(\frac{m}{n}:\frac{l}{k}\right)q. \tag{1}$$

Если примемъ за единицу вѣроятностей вѣроятность вынутія бѣлаго шара изъ сосуда B, въ которомъ на k шаровъ приходится l бѣлыхъ, т. е. примемъ $q = 1$ вѣроятностей, то вѣроятность p выразится числомъ:

$$p = \frac{m}{n}:\frac{l}{k}. \tag{2}$$

Эта формула значительно упростится, если за единицу вѣроятностей принять вѣроятность вынутія бѣлаго шара изъ сосуда, для котораго $l = k$, слѣдовательно въ которомъ всѣ шары бѣлые, т. е. *если за единицу вѣроятностей принять достовѣрность; тогда вѣроятность* вынуть бѣлый шаръ изъ сосуда A, въ которомъ изо всего числа n шаровъ бѣлыхъ числомъ m, *выразится* дробнымъ числомъ $\frac{m}{n}$:

$$p = \frac{m}{n}, \tag{3}$$

т. е. *отношеніемъ числа случаевъ благопріятствующихъ ожидаемому событію къ общему числу всѣхъ равно-возможныхъ случаевъ*, т. е. и допускающихъ и исключающихъ событіе. Достовѣрность выразится въ этомъ случаѣ числомъ 1; это есть высшій предѣлъ для числа выражающаго вѣроятность, ибо оно всегда правильная дробь; 0 есть нисшій для того числа, выражающаго вѣроятность, и означаетъ, что событіе, для котораго $p = 0$, совсѣмъ невѣроятно, другими словами— достовѣрность *не быть* событію. Такимъ образомъ вѣроятность вынуть фигуру изъ полной колоды картъ будетъ $\frac{12}{52} = \frac{3}{13}$, вѣроятность вынутія простой карты будетъ $\frac{40}{52} = \frac{10}{13}$; вѣроятность вынутія фигуры изъ неполной колоды (безъ двоекъ,) будетъ $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$, а вѣроятность вынутія простой $\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$; вѣроятность вынутія пиковаго туза изъ полной колоды $\frac{1}{52}$, вѣроятность вынутія валета какой бы то ни было масти $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$, и т. д. Если въ сосудѣ k красныхъ шаровъ, l бѣлыхъ, m синихъ, наконецъ n желтыхъ, то вѣроятности вынуть:

красный шаръ будетъ $p_1 = \frac{k}{k+l+m+n}$;

бѣлый " " $p_2 = \frac{l}{k+l+m+n}$;

синій " " $p_3 = \frac{m}{k+l+m+n}$;

желтый " " $p_4 = \frac{n}{k+l+m+n}$.

Для опредѣленія вѣроятности событія нужно вѣрно сосчитать число случаевъ благопріятствующихъ ожидаемому событію и число всѣхъ возможныхъ случаевъ, и первое число раздѣлить на второе.

10. Но при счетѣ случаевъ, какъ благопріятствующихъ ожидаемому событію, такъ и всѣхъ возможныхъ, необходимо прежде всего изслѣдовать надлежащимъ образомъ равно-возможность этихъ случаевъ, ибо иначе можно придти къ ошибочному выводу. Примѣровъ такихъ ошибочныхъ опредѣленій вѣроятности исторія науки о вѣроятностяхъ представляетъ много; большое число ихъ читатель найдетъ въ „*Théorie des probabilités*“ par J. Bertrand. Paris, 1889; мы ограничимся однимъ примѣромъ, ошибкою д'Аламбера. Въ игрѣ, извѣстной подъ именемъ орлянки, бросаютъ монету и смотрятъ, что вскроется: орелъ или рѣшетка; оба эти событія равно возможны, ибо монета имѣетъ только двѣ стороны, изъ которыхъ на каждую одинаково легко можетъ упасть, и, какъ каждому изъ нихъ благопріятствуетъ одинъ изъ двухъ равно-возможныхъ случаевъ, то вѣроятность вскрытія какъ орла, такъ и рѣшетки будетъ $= \frac{1}{2}$. Предположимъ теперь, что ищется вѣроятность вскрытія орла при двукратномъ бросаніи монеты. Д'Аламберъ такъ разсуждалъ: возможны такіе три случая:

1) орелъ съ перваго разу; бросать еще разъ не нужно;

2) рѣшетка, орелъ;

3) рѣшетка, рѣшетка;

два случая, первый и второй благопріятствуютъ ожидаемому событію—вскрытія орла; третій неблагопріятствуетъ; слѣдовательно вѣроятность вскрытія орла при двукратномъ бросаніи монеты будетъ

$$\frac{2}{3}.$$

Но это невѣрно, ибо первый случай имѣетъ другую вѣроятность чѣмъ каждый изъ остальныхъ, именно двойную противъ вѣроятности каждаго изъ этихъ послѣднихъ; ибо вѣроятность вскрытія орла съ перваго раза есть $\frac{1}{2}$, вѣроятность каждаго изъ остальныхъ двухъ случаевъ 2) и 3) есть $\frac{1}{4}$. На счетъ перваго случая—это мы сейчасъ видѣли; что же касается вѣроятностей остальныхъ двухъ случаевъ, то она найдется такимъ образомъ: при двукратномъ бросаніи монеты равновозможны четыре случая:

орелъ—орелъ;
орелъ—рѣшетка;
рѣшетка—рѣшетка;
рѣшетка—орелъ,

всего 4; слѣдовательно вѣроятность каждаго отдѣльнаго случая есть $\frac{1}{4}$. Изъ этой таблицы видно, что благопріятствующихъ ожидаемому событію, вскрытію орла при двукратномъ бросаніи монеты, случаевъ всего три, а всѣхъ равновозможныхъ случаевъ 4; слѣдовательно искомая вѣроятность будетъ

$$\frac{3}{4}.$$

Часто вѣроятности невѣрно опредѣлялись вслѣдствіе не отчетливой постановки вопроса; такъ и въ этомъ случаѣ вопросъ слѣдовало бы такъ поставить: найти вѣроятность, что при двукратномъ бросаніи монеты орелъ вскроется не менѣе одного раза; тогда Д'Аламберъ не сказалъ бы, что въ случаѣ появленія орла съ перваго раза, второй разъ бросать не нужно.

11. Въ болѣе сложныхъ задачахъ вычисленіе какъ всѣхъ возможныхъ случаевъ, такъ и благопріятствующихъ ожидаемому событію, есть задача комбинаторнаго анализа; однако весьма часто вычисленія этого анализа оказываются весьма запутанными и продолжительными; но есть кромѣ того много и такихъ вопросовъ теоріи вѣроятностей, которые совсѣмъ не могутъ быть рѣшены при помощи этого анализа, потому что число всѣхъ возможныхъ случаевъ очень велико, иногда безконечно велико. Рѣшеніе вопросовъ теоріи вѣроятностей въ этихъ случаяхъ

невозможно безъ знанія общихъ законовъ, которымъ подчиняются вѣроятности, а также и безъ помощи высшаго анализа. *Теорія вѣроятностей* имѣетъ своимъ предметомъ изслѣдованіе этихъ законовъ и систематическое изложеніе наиболѣе употребительныхъ общихъ пріемовъ и методовъ для рѣшенія различныхъ вопросовъ, касающихся вѣроятностей. Во многихъ курсахъ разсматриваются также приложенія теоріи вѣроятностей къ различнымъ практическимъ вопросамъ; мы ограничимся лишь однимъ приложеніемъ ея, именно способомъ наименьшихъ квадратовъ, какъ имѣющимъ огромное научное значеніе, находя приложенія къ житейскимъ вопросамъ болѣе умѣстными въ сочиненіяхъ имъ посвященныхъ, подобно тому, какъ и различныя приложенія Теоріи эллиптическихъ функцій къ разнымъ областямъ Анализа, Геометріи, Механики, нынѣ разсматриваются въ этихъ наукахъ, а не входятъ въ курсы Теоріи эллиптическихъ функцій.

ГЛАВА I-я.

Основные законы Теоріи Вѣроятностей.

12. Основныхъ законовъ теоріи вѣроятностей четыре: *первый* опредѣляетъ вѣроятность случиться одному изъ нѣсколькихъ несовмѣстныхъ событій, когда даны вѣроятности каждаго; *второй*—вѣроятность совпаденія нѣсколькихъ событій, *третій*—опредѣляетъ вѣроятность причины наблюденнаго событія; *четвертый* опредѣляетъ вѣроятность будущаго событія на основаніи наблюденнаго, когда они имѣютъ одинаковыя причины. Примѣненіе ихъ проходитъ чрезъ всю теорію вѣроятностей, и потому знаніе ихъ очень важно: оно облегчаетъ рѣшеніе болѣе сложныхъ вопросовъ даже и изъ числа такихъ, которые могутъ быть рѣшены съ помощію комбинаторнаго анализа. Разсмотримъ ихъ по порядку, начиная съ перваго.

13. Два событія называются несовмѣстными, когда не могутъ наступить заразъ; такъ карта не можетъ быть заразъ и фигура, и простая; слѣдовательно вынутіе фигуры и вынутіе простой карты два событія несовмѣстныя; напротивъ вынутіе фигуры и вынутіе красной карты суть событія, которыя могутъ быть совмѣстны, ибо фигура можетъ быть красной масти. *Первый законъ* касается несовмѣстныхъ событій и выражается такимъ образомъ:

I. „Вѣроятность случиться одному изъ нѣсколькихъ несовмѣстныхъ событій равна суммѣ вѣроятностей этихъ событій"; т. е. I. Если E_1, $E_2, \cdots E_k$ суть несовмѣстныя событія и вѣроятности ихъ соотвѣтственно суть

$$p_1, p_2, \cdots p_k, \tag{1}$$

то вѣроятность P случиться одному изъ нихъ равна суммѣ ихъ вѣроятностей:

$$P = p_1 + p_2 + \cdots + p_k. \tag{2}$$

Въ самомъ дѣлѣ, по приведенiи дробей (1) къ одному знаменателю будемъ имѣть:

$$p_1 = \frac{m}{n}, \quad p_2 = \frac{m_2}{n}, \ldots, p_k = \frac{m_k}{n}, \tag{3}$$

слѣдовательно изъ n случаевъ m_1 благопрiятствуютъ событiю E_1, m_2 событiю E_2, ... m_k событiю E_k; слѣдовательно случаевъ благопрiятствующихъ которому нибудь изъ нихъ безразлично, будетъ

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k; \tag{4}$$

отношенiе этого числа къ числу n всѣхъ возможныхъ случаевъ и будетъ искомая вѣроятность P случиться одному изъ нихъ:

$$P = \frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_k}{n}, \tag{5}$$

а это по раздѣленiи каждаго члена на n по (3) и приведется къ (2).

Примѣръ. При условiяхъ послѣдняго примѣра § 9 вѣроятность вынуть красный или синiй шаръ безразлично, будетъ

$$p_1 + p_3 = \frac{k}{k+l+m+n} + \frac{m}{k+l+m+n} = \frac{k+m}{k+l+m+n}.$$

Частный случай закона: Если вѣроятности (1) событiй E_1, E_2, ... E_k равны:

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_k = p, \tag{6}$$

то вѣроятность P случиться одному изъ нихъ будетъ равна произведенiю p на k, число событiй:

$$P = kp. \tag{7}$$

Примѣръ: Вѣроятность вынуть бубновую фигуру изъ полной колоды картъ $= \frac{3}{52}$; такова-же вѣроятность вынуть фигуру каждой изъ остальныхъ мастей; слѣдовательно вѣроятность P вынуть фигуру какой бы то ни было масти будетъ по (7):

$$P = 4 \cdot \frac{3}{52} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13},$$

согласно съ раньше найденнымъ.

Другой частный случай закона, который мы отмѣтимъ, это когда изъ событій $E_1, E_2, \ldots E_k$ одно непремѣнно должно случиться; въ этомъ случаѣ $P=1$, и равенство (2) обращается въ такое:

$$p_1+p_2+\ldots+p_k=1. \tag{8}$$

Если имѣется только два взаимно-исключающихъ событій E и F, вѣроятности которыхъ p и q, то (8) принимаетъ такой видъ:

$$p+q=1. \tag{9}$$

Такія два событія E и F, взаимноисключающія одно другое, изъ которыхъ одно непремѣнно должно случиться, называются *прямо-противопожными*; изъ (9) находимъ

$$1-p=q, \tag{10}$$

т. е. вѣроятность не быть событію, равна вѣроятности быть событію прямо-противоположному.

Примѣръ: фигура и простая двѣ вещи прямотивоположныя, исключающія одна другую; когда я вынимаю карту, то она будетъ непремѣнно или фигура или простая; и дѣйствительно сумма вѣроятностей ихъ равна единицѣ:

$$\frac{12}{52}+\frac{40}{52}=1 \qquad \text{для полной колоды;}$$

$$\frac{12}{36}+\frac{24}{36}=1 \qquad \text{для колоды безъ двоекъ.}$$

14. Съ помощію этого основнаго закона приходимъ къ вѣрному опредѣленію вѣроятности въ задачѣ § 10, если даже будемъ разбивать событіе на виды по д'Аламберу: вскрытіе орла съ перваго раза—вѣроятность $\frac{1}{2}$; вскрытіе орла со второго—вѣроятность $\frac{1}{4}$, какъ мы видѣли въ § 10; слѣдовательно вѣроятность вскрытія орла при двукратномъ бросаніи монеты безразлично съ перваго или со второго раза будетъ равна суммѣ этихъ вѣроятностей:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4},$$

согласно съ прежде найденнымъ. Прямопротивоположнымъ событіемъ будетъ невскрытіе орла при двукратномъ бросаніи монеты ни разу; его вѣроятность

$$1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4},$$

что представляетъ вѣроятность случая рѣшетка—рѣшетка.

15. Иногда ищутъ относительную вѣроятность событій. Если имѣются событія $E_1, E_2, \ldots E_k$, вѣроятности которыхъ суть $p_1, p_2, \cdots p_k$, и мы интересуемся только, положимъ, первыми тремя E_1, E_2, E_3, то относительныя вѣроятности ихъ выразятся формулами:

$$\frac{p_1}{p_1+p_2+p_3}; \quad \frac{p_2}{p_1+p_2+p_3}; \quad \frac{p_3}{p_1+p_2+p_3}. \tag{1}$$

Дѣйствительно, пусть по приведеніи къ одному знаменателю всѣхъ p_i будемъ имѣть: $p_i=\frac{m_i}{n}$; для опредѣленія относительныхъ вѣроятностей событій E_1, E_2, E_3 изъ всѣхъ n возможныхъ случаевъ надобно имѣть въ виду только m_1 случаевъ приводящихъ къ E_1, m_2 случаевъ приводящихъ къ E_2, и m_3, приводящихъ къ E_3, всего $m_1+m_2+m_3$ случаевъ; тогда искомыя относительныя вѣроятности будутъ соотвѣтственно:

$$\frac{m}{m_1+m_2+m_3}; \quad \frac{m_2}{m_1+m_2+m_3}; \quad \frac{m_3}{m_1+m_2+m_3}; \tag{2}$$

раздѣляя числителя и знаменателя на n и имѣя въ виду, что $p_i=\frac{m_i}{n}$, мы и приходимъ къ формуламъ (1).

Примѣръ. Въ случаѣ послѣдняго примѣра § 9 относительныя вѣроятности вынутія краснаго или бѣлаго шаровъ будутъ:

$$\frac{p_1}{p_1+p_2}=\frac{k}{k+l}; \quad \frac{p_2}{p_1+p_2}=\frac{l}{k+l}.$$

16. *Второй основной законъ* теоріи вѣроятности опредѣляетъ вѣроятность совпаденія событій.

II. „Если E и F суть два событія, p и q ихъ вѣроятности—послѣдняя въ предположеніи, что событіе E имѣло мѣсто, то вѣроятность совпаденія событій E и F равна произведенію pq ихъ вѣроятностей".

Прежде чѣмъ приступить къ выводу этого закона, нужно объяснить, почему здѣсь q вѣроятность событія F, вычисленная въ предположеніи, что событіе E имѣло мѣсто. Дѣло въ томъ, что вѣроятность событія F въ нѣкоторыхъ случаяхъ зависитъ отъ того, имѣло-ли мѣсто событіе E или не имѣло. Такъ, если я вынимаю карту изъ колоды и возвращаю ее назадъ, то вѣроятность вскрытія фигуры во второй опытъ будетъ та же, что и въ первый; если же я вынутую карту откладываю въ сторону, то вѣроятность вынуть фигуру во второй опытъ будетъ зависѣть отъ того, вышла-ли она въ первый опытъ или нѣтъ; если нѣтъ, то изъ числа 51 оставшихся въ колодѣ картъ фигуръ будетъ 12, и вѣроятность вынутъ фигуру во второй опытъ будетъ $\frac{12}{51}$; если же въ первый опытъ вышла фигура, то ихъ останется только 11 на 51 карту, и вѣроятность вскрытія фигуры во второй опытъ будетъ $\frac{11}{51}$; такимъ образомъ въ этомъ случаѣ вѣроятность событія F—вынуть фигуру во второй опытъ, зависитъ отъ того, имѣло-ли мѣсто событіе E—вынуть фигуру въ первый опытъ, или нѣтъ. Въ первомъ случаѣ, когда вынутая карта возвращается въ колоду, $q=\frac{12}{52}$, какъ и p, такъ что вѣроятность того, что въ оба опыта попадется фигура, въ этомъ случаѣ по второму закону будетъ:

$$P=pq=\frac{12}{52}\cdot\frac{12}{52}=\left(\frac{12}{52}\right)^2, \qquad (a)$$

тогда какъ во второмъ случаѣ, (когда вынутая карта откладывается въ сторону), будетъ $q=\frac{11}{51}$, и слѣдовательно:

$$P=p\cdot q=\frac{12}{52}\cdot\frac{11}{51}. \qquad (b)$$

Эти выводы изъ общаго закона нетрудно провѣрить въ настоящемъ случаѣ при помощи комбинаторнаго анализа. Когда карта возвращается въ колоду, то всѣхъ возможныхъ случаевъ будетъ $52\times52=(52)^2$, ибо каждая карта второго опыта можетъ соединиться съ каждою, выходящею въ первый опытъ; благопріятствующихъ случаевъ будетъ 12×12, ибо каждая фигура во второмъ опытѣ можетъ выйти послѣ каждой вышедшей въ первый опытъ; слѣдовательно искомая вѣроятность, что фигура попадется въ оба опыта, будетъ:

$$P=\frac{12\times12}{52\times52}=\left(\frac{12}{52}\right)^2,$$

согласно съ (a). Во второмъ случаѣ, когда вышедшая карта откладывается въ сторону, за каждой, вышедшей въ первый опытъ изъ 52, можетъ послѣдовать во второй лишь каждая изъ остальныхъ 51 картъ; слѣдовательно всѣхъ возможныхъ случаевъ будетъ 52×51; далѣе за каждой изъ 12 фигуръ, которыя могутъ выйти въ первый опытъ, можетъ послѣдовать во второй лишь каждая изъ остальныхъ 11 фигуръ; а потому число всѣхъ случаевъ благопріятствующихъ ожидаемому событію — выходу фигуры въ оба опыта, въ этомъ случаѣ будетъ 12×11, и потому вѣроятность ожидаемаго событія выразится дробью $\frac{12 \times 11}{52 \times 51}$, согласно съ (b).

17. Пояснивъ второй законъ, переходимъ къ его доказательству. Пусть изъ n случаевъ m приводятъ къ событію E — такъ что $p = \frac{m}{n}$, и изъ этихъ m случаевъ только k влекутъ за собою событіе F, такъ что $q = \frac{k}{m}$; тогда изъ n всѣхъ возможныхъ случаевъ только эти k послѣднихъ приводятъ къ совпаденію событій E и F, а потому искомая вѣроятность P ихъ совпаденія будетъ:

$$P = \frac{k}{n};$$

но это можно такъ представить:

$$P = \frac{m}{n} \cdot \frac{k}{m} = p \cdot q,$$

что и выражаетъ законъ.

Примѣръ. Вынимаемъ карту; найти вѣроятность, что если она будетъ фигура, то именно красной масти. Событіе E — вынутіе фигуры, имѣетъ вѣроятность $p = \frac{12}{52}$; событіе F, что вынутая фигура будетъ красная, имѣетъ вѣроятность $q = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, ибо изъ 12 фигуръ 6 красныхъ; искомая вѣроятность, что вынутая карта будетъ именно красная фигура, есть вѣроятность совпаденія событій E — что карта будетъ фигура, и F — что она будетъ красная:

$$P = p \cdot q = \frac{12}{52} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{52},$$

что и прямо видно, ибо красныхъ фигуръ 6 на 52 карты въ колодѣ.

18. Такъ какъ не всѣ случаи совпаденія двухъ событій легко подводятся подъ это доказательство, то мы дадимъ еще другое. Пусть послѣ наступленія событія E непремѣнно должно имѣть мѣсто которое нибудь изъ m равно-возможныхъ событій: $G_1, G_2, \ldots G_m$, изъ кото-

рыхъ только $G_{i_1}, G_{i_2}, \dots G_{i_k}$ тождественны съ F; означимъ вѣроятность каждаго событія $G_1, G_2, \dots G_m$ чрезъ r. Такъ какъ послѣ E непремѣнно случится одно изъ этихъ событій, то вѣроятность случиться одному изъ нихъ безразлично равна вѣроятности случиться событію E; отсюда по первому закону (первый частный случай) будетъ слѣдовать:

$$p = mr. \tag{1}$$

Далѣе, случиться совпаденію E съ F, это значитъ случиться одному изъ событій $G_{i_1}, G_{i_2}, \dots G_{i_k}$, вѣроятность каждаго изъ которыхъ есть опять r; такъ какъ ихъ k, то по тому же частному случаю перваго закона будемъ имѣть:

$$P = kr. \tag{2}$$

Теперь изъ (1) находимъ: $r = \frac{p}{m}$; внося во (2), получимъ:

$$P = k.\frac{p}{m} = p.\frac{k}{m}; \tag{3}$$

но $\frac{k}{m}$ и есть вѣроятность q случиться событію F, если имѣло мѣсто событіе E; слѣдовательно

$$P = p.q, \tag{4}$$

что и требовалось доказать.

Во второмъ случаѣ примѣра изъ картъ предыдущаго § каждое событіе $G_1, G_2, \dots G_{51}$ есть выходъ одной карты изъ оставшихся, во второй опытъ, напримѣръ G_1 бубноваго туза, G_2 бубновой двойки, и т. д.; $m = 51$; событія $G_{i_1}, G_{i_2}, \dots G_{i_k}$ — это тѣ случаи, числомъ 11, когда эта выходящая карта будетъ фигура; вѣроятность p по (1) выразится такъ чрезъ r:

$$p = \frac{12}{52} = 51.r; \tag{5}$$

а вѣроятность P по (2) такъ:

$$P = 11.r; \tag{6}$$

внося сюда вмѣсто r его значеніе изъ (5), получимъ, какъ въ пред. §:

$$P = \frac{12}{52}.\frac{11}{51}. \tag{7}$$

19. Этотъ законъ можетъ быть распространенъ на какое угодно число событій, имѣющихъ совпасть. Въ самомъ дѣлѣ, если имѣемъ рядъ событій

$$E_1, E_2, E_3, \dots E_k, \tag{1}$$

и вѣроятности каждаго изъ нихъ, вычисленныя въ предположеніи, что всѣ предшествующія имѣли мѣсто, означимъ чрезъ

$$p_1, p_2, p_3, \dots p_k, \tag{2}$$

то вѣроятность совпаденія E_1 и E_2 по сейчасъ доказанному будетъ $p_1 p_2$; считая совпаденіе событій E_1 и E_2 за одно событіе F_1, мы можемъ разсматривать совпаденіе трехъ событій E_1, E_2 и E_3 какъ совпаденіе двухъ событій F_1 и E_3, и потому по доказанному будемъ имѣть для вѣроятности совпаденія трехъ событій такое число:

$$(p_1 p_2) p_3 = p_1 p_2 p_3. \tag{3}$$

Продолжая эти разсужденія мы придемъ окончательно къ такому выраженію для вѣроятности P совпаденія событій (1):

$$P = p_1 p_2 p_3 \cdots p_k. \tag{4}$$

Примѣръ. Вѣроятность троекратнаго вскрытія фигуры и слѣдующаго затѣмъ двукратнаго вскрытія простой карты, когда вынутая карта откладывается въ сторону, будетъ по (4):

$$P = \frac{12}{52} \cdot \frac{11}{51} \cdot \frac{10}{50} \cdot \frac{40}{49} \cdot \frac{39}{48} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 40 \cdot 39}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}. \tag{5}$$

Если мы оставимъ то же число вскрытій фигуры, но измѣнимъ послѣдовательность этихъ вскрытій, то вѣроятность для каждой послѣдовательности будетъ получаться таже самая P, опредѣляемая формулою (5), ибо произойдетъ только перестановка множителей въ числителѣ (5), какъ легко видѣть. Вслѣдствіе этого вѣроятность троекратнаго вскрытія простой карты при 5-ти опытахъ въ какой бы то ни было послѣдовательности будетъ равна P, помноженному на число послѣдовательностей, (по первому частному случаю I-го закона,) которое будетъ $= \frac{5!}{3!\,2!}$, такъ что означая эту вѣроятность чрезъ Q, будемъ имѣть:

$$Q = \frac{5!}{3!\,2!} P, \tag{6}$$

гдѣ P опредѣляется по формулѣ (5).

20. *Примѣчаніе.* Число послѣдовательностей въ нашемъ примѣрѣ есть не что иное, какъ число соединеній изъ 2 буквъ по 5 съ повтореніями первой 3 раза, второй 2 раза; оно легко находится слѣдующимъ образомъ въ самомъ общемъ случаѣ. Пусть имѣемъ n буквъ различныхъ между собою; составивъ произведеніе изъ нихъ, мы можемъ представить его, мѣняя всѣми возможными способами послѣдовательность множителей (дѣлая всевозможныя перестановки множителей), въ столькихъ видахъ:

$$N = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n, \tag{7}$$

которые всѣ будутъ различны между собою.

Если теперь m_1 буквъ мы сдѣлаемъ равными между собою, то тѣ изъ этихъ $n!$ видовъ, которые различались лишь мѣстами этихъ m_1 буквъ, слѣдовательно, выводились одно изъ другого перестановкою только этихъ m_1 буквъ, сдѣлаются между собою равными, и какъ изъ m_1 буквъ можно сдѣлать $m_1!$ перестановокъ, то число различныхъ видовъ нашего произведенія будетъ теперь меньше въ $m_1!$ разъ противъ прежняго; означая его чрезъ N_1 будемъ имѣть:

$$N_1 = \frac{N}{m_1!}. \tag{8}$$

Если изъ остальныхъ $n - m_1$ буквъ опять m_2 сдѣлаемъ равными между собою, то число различныхъ видовъ произведенія опять уменьшится въ $m_2!$ разъ и будетъ:

$$N_2 = \frac{N}{m_1!\, m_2!}. \tag{9}$$

Продолжая эти разсужденія, придемъ къ формулѣ:

$$N_k = \frac{n!}{m_1!\, m_2!\, m_3! \ldots m_k!}, \tag{10}$$

гдѣ

$$m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_k = n, \tag{11}$$

щей число соединеній по n изъ k буквъ съ повтореніями первой m_1 разъ, второй m_2 разъ, третьей m_3 разъ, ... наконецъ k-ой m_k разъ. Въ нашемъ примѣрѣ было $n = 5$, $k = 2$, $m_1 = 3$, $m_2 = 2$, откуда

$$N_2 = \frac{5!}{3!\,2!}. \tag{12}$$

21. Въ частномъ случаѣ § 19, когда

$$p_1 = p_2 = p_3 = \cdots = p_k = p. \qquad (1)$$

формула (4) § 19 обратится въ такую:

$$P = p^k. \qquad (2)$$

Такъ, если мы будемъ возвращать вынутую карту въ колоду, то вѣроятность троекратнаго вскрытія фигуры выразится формулой:

$$\left(\frac{12}{52}\right)^3. \qquad (3)$$

Вѣроятность троекратнаго вскрытія фигуры и слѣдующаго за симъ двукратнаго вскрытія простой карты, при условіи возвращенія въ колоду вынутой карты, представится такъ:

$$\left(\frac{12}{52}\right)^3 \left(\frac{40}{52}\right)^2. \qquad (4)$$

Если послѣдовательность фигуры и простой въ 5 испытаній не задается, а лишь число 3 вскрытій фигуры и 2 вскрытій простой, то по пред. § это число надобно помножить на $\frac{5!}{3!\,2!}$, чтобы получить искомую вѣроятность трехкратнаго вскрытія фигуры и двукратнаго простой въ 5 испытаній въ какой бы то ни было послѣдовательности при условіи возвращенія вынутой карты въ колоду:

$$\frac{5!}{3!\,2!}\left(\frac{12}{52}\right)^3 \cdot \left(\frac{40}{52}\right)^2. \qquad (5)$$

22. На основаніи уже этихъ двухъ законовъ можно рѣшать многіе вопросы. Напр. какова вѣроятность, что событіе E, само по себѣ мало вѣроятное, все-таки случится при значительномъ числѣ испытаній? Означая чрезъ p вѣроятность событія E, найдемъ вѣроятность случиться ему въ n испытаній по крайней мѣрѣ одинъ разъ. Вмѣсто этой вѣроятности можно искать вѣроятность не случиться ему ни разу въ n испытаній; если эта послѣдняя вѣроятность есть Q, то искомая P будетъ $1 - Q$. Но вѣроятность не случиться E въ одно испытан $1 - p$; слѣдовательно вѣроятность не случиться ему ни разу въ n испытаній будетъ $(1-p)^n$ по предыдущему §, т. е.:

$$Q = (1-p)^n,$$

и слѣдовательно

$$P = 1 - (1-p)^n.$$

Такъ, вѣроятность, что въ 20 испытаній пиковый тузъ вскроется хотя одинъ разъ, будетъ:

$$P = 1 - \left(1 - \frac{1}{52}\right)^{20} = \frac{20}{52} - \frac{20.19}{1.2} \cdot \frac{1}{(52)^2} + \ldots; \tag{2}$$

второй членъ $< \frac{1}{2}\left(\frac{20}{50}\right)^2 = \frac{2}{25}$; если такой дробью позволительно пренебречь, то P будетъ почти равно $\frac{2}{5}$. Съ помощію таблицы логариѳмовъ найдемъ

$$P = 0{,}321831; \tag{3}$$

ограничиваясь двумя десятичными знаками получаемъ дробь 0,32, тогда какъ $\frac{2}{5} = 0{,}40$, слѣдовательно на 0,08 больше.—Если замѣтимъ, что

$$\log(1-p) = -p - \frac{p^2}{2} - \frac{p^3}{3} - \ldots, \tag{4}$$

то, пренебрегая высшими степенями p, будемъ имѣть $\log(1-p) = -p$, слѣдовательно $1 - p = e^{-p}$, и потому съ точностью до величинъ порядка np^2, будетъ

$$P = 1 - e^{-np}. \tag{5}$$

23. Изъ (1) предыдущаго §, рѣшая по n, находимъ:

$$n = \frac{\log(1-P)}{\log(1-p)}. \tag{1}$$

Эта формула позволяетъ рѣшить вопросъ, сколько нужно сдѣлать испытаній, чтобы вѣроятность появленія событія, котораго вѣроятность есть p, въ n испытаній по крайней мѣрѣ одинъ разъ, имѣла данную величину. Положимъ, что $P = \frac{1}{2}$, слѣдовательно мы желаемъ найти, сколько разъ должно повторить испытаніе, чтобы появленіе и непоявленіе событія въ n испытаній были равно-вѣроятны.

Въ этомъ случаѣ изъ (1) получимъ:

$$n = -\frac{\log 2}{\log(1-p)}. \tag{2}$$

Такъ, если желаемъ знать, сколько разъ надобно вынимать карту изъ полной колоды, чтобы вѣроятность вскрытія пиковаго туза, хотя одинъ разъ, была бы $\frac{1}{2}$, мы должны принять $p = \frac{1}{52}$ въ формулѣ (2), откуда и найдемъ:

$$n = \frac{\log 2}{\log 52 - \log 51} = \frac{3010300}{84331} = 35{,}6\ldots \tag{3}$$

или, такъ какъ n должно быть цѣлое число:

$$n = 36.$$

Слѣдовательно надо повторить опытъ 36 разъ, чтобы вскрытіе и невскрытіе пиковаго туза были бы почти равно-вѣроятны.

24. *Третій основной законъ* имѣетъ предметомъ опредѣленіе вѣроятностей *гипотезъ* на счетъ *причинъ* событія. Если событіе F можетъ наступить только послѣ одного изъ событій

$$E_1, E_2, \ldots E_k, \ldots E_m, \tag{1}$$

то эти послѣднія называются возможными причинами событія F. Мы знаемъ, что событіе F случилось; опредѣлить вѣроятность, что оно имѣло причиною именно событіе E_k, другими словами, что оно случилось послѣ событія E_k. Вотъ рѣшеніе какого вопроса даетъ третій законъ теоріи вѣроятностей.

Означая чрезъ X_k искомую вѣроятность, что именно событіе E_k было причиною событія F; чрезъ

$$p_1, p_2, \cdots p_k, \cdots p_m \tag{2}$$

вѣроятности событій (1); чрезъ

$$q_1, q_2, \cdots q_k, \cdots q_m \tag{3}$$

вѣроятности случиться событію F послѣ того, какъ имѣли мѣсто соотвѣтственно эти событія, мы будемъ имѣть по этому третьему закону, извѣстному подъ именемъ закона *Bayes*'а, слѣдующее выраженіе искомой вѣроятности:

$$X_k = \frac{p_k q_k}{p_1 q_1 + p_2 q_2 + \cdots + p_m q_m}. \tag{4}$$

Такъ, если имѣя предъ собою три полныхъ колоды и двѣ безъ двоекъ, и вынувъ изъ одной на удачу, положимъ, фигуру, желаемъ опредѣлить вѣроятность, что эта фигура была вынута изъ полной колоды, то, означая чрезъ E_1 событіе вынутія фигуры изъ полной колоды, чрезъ E_2 — изъ неполной, будемъ имѣть: вѣроятность попасть рукой на полную колоду $p_1 = \frac{3}{5}$, вѣроятность попасть на неполную $p_2 = \frac{2}{5}$; вѣроятность вынуть фигуру послѣ того, какъ рука попала на полную колоду, $q_1 = \frac{12}{52}$, вѣроятность вынуть ее послѣ того, какъ рука попала на неполную колоду, $q_2 = \frac{12}{36}$, и слѣдовательно для искомой вѣроятности X_1, что карта была вынута изъ полной колоды, по формулѣ (4) слѣдующее:

$$X_1 = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{12}{52}}{\frac{3}{5} \cdot \frac{12}{52} + \frac{2}{5} \cdot \frac{12}{36}} = \frac{3 \cdot 36}{3 \cdot 36 + 2 \cdot 52} = \frac{27}{53},$$

т. е. немного болѣе $\frac{1}{2}$.

Покажемъ теперь выводъ формулы (4).

Если причиною событія F было событіе E_k, то значитъ произошло совпаденіе событій E_k и F; вѣроятность сего найдется по второму закону и можетъ быть представлена въ двоякой формѣ, ибо это совпаденіе E_k и F можно двояко разсматривать: или такъ: 1⁰) случилось событіе E_k, за симъ послѣдовало событіе F; или такъ: 2⁰) случилось событіе F, ему предшествовало событіе E_k. Первая точка зрѣнія на это совпаденіе E_k и F доставляетъ по второму закону для вѣроятности Q_k этого совпаденія такую формулу:

$$Q_k = p_k q_k; \tag{5}$$

вторая—такую:

$$Q_k = P . X_k, \tag{6}$$

если P вѣроятность случиться событію F вообще, безразлично съ которымъ изъ $E_1, E_2, \ldots E_m$, а X_k искомая вѣроятность, что, если событіе случилось, то ему предшествовало именно E_k. По первому закону и по формулѣ (5) будетъ:

$$P = \sum_{k=1}^{k=m} Q_k = \sum_{k=1}^{k=m} p_k q_k = p_1 q_1 + p_2 q_2 + \cdots + p_m q_m. \tag{7}$$

Сравнивая (5) и (6), находимъ:

$$X_k = \frac{p_k q_k}{P}, \tag{8}$$

а подставляя сюда вмѣсто P его значеніе изъ (7), и получимъ формулу *Bayes*'а, т. е. (4).

25. *Четвертый основной законъ* теоріи вѣроятностей позволяетъ опредѣлять вѣроятность будущаго событія на основаніи того, что имѣло мѣсто другое событіе, зависящее отъ тѣхъ же причинъ, или, какъ обыкновенно выражаются, опредѣлять вѣроятности будущихъ событій по наблюденнымъ. Онъ рѣшаетъ слѣдовательно такую задачу: Пусть имѣло мѣсто событіе F, которое можетъ случиться только послѣ одного изъ несовмѣстныхъ событій:

$$E_1\,,\ E_2\,,\cdots E_k\,,\cdots E_m\,, \tag{1}$$

(которыя будутъ такимъ образомъ его возможными причинами); вѣроятности этихъ событій означимъ соотвѣтственно чрезъ

$$p_1\,,\ p_2\,,\cdots p_k\,,\cdots p_m\,; \tag{2}$$

вѣроятности быть событію F послѣ того, какъ имѣли мѣсто эти событія, соотвѣтственно чрезъ

$$q_1\,,\ q_2\,,\cdots q_k\,,\cdots q_m\,. \tag{3}$$

Событіе G можетъ имѣть мѣсто точно также лишь послѣ наступленія одного изъ событій (1), (другими словами, имѣть тѣже причины, какъ и событіе F), при чемъ вѣроятности быть ему послѣ того, какъ имѣли мѣсто эти событія, пусть будутъ соотвѣтственно:

$$r_1\,,\ r_2\,,\cdots r_k\,,\cdots r_m\,; \tag{4}$$

найти вѣроятность случиться событію G, если имѣло мѣсто событіе F.

Если событіе E_k было причиною событія F, то вѣроятность случиться событію G будетъ по второму закону равна произведенію вѣроятности X_k, что именно E_k было причиною событія F, на вѣроятность r_k случиться событію G, когда имѣло мѣсто событіе E_k, т. е. $X_k r_k$. Вѣроятность Π быть событію G, если имѣло событіе F, есть ничто иное какъ вѣроятность случиться G, какое бы изъ событій (1) ни было причиною событія F, и слѣдовательно по первому закону будетъ:

$$\Pi = \sum_{k=1}^{k=m} X_k r_k\,. \tag{5}$$

Подставляя сюда вмѣсто X_k его значеніе изъ (8) и (7) предыдущаго §, будемъ имѣть:

$$\Pi = \frac{\sum\limits_{k=1}^{k=m} p_k q_k r_k}{\sum\limits_{k=1}^{k=m} p_k q_k}\,, \tag{6}$$

или, написавъ пространнѣе:

$$\Pi = \frac{p_1 q_1 r_1 + p_2 q_2 r_2 + \cdots + p_m q_m r_m}{p_1 q_1 + p_2 q_2 + \cdots + p_m q_m}. \qquad (7)$$

Для примѣра предположимъ, что на столѣ лежатъ 5 колодъ картъ; изъ нихъ три полныя, а двѣ безъ двоекъ; снимаю карту съ одной изъ нихъ на удачу, попалась фигура; собираясь снять карту еще разъ, желаю опредѣлить вѣроятность, что попадется тузъ. Здѣсь E_1 вынутіе фигуры изъ полной колоды, а E_2 изъ неполной; $p_1 = \frac{3}{5}$ вѣроятность попасть рукою на полную колоду, $p_2 = \frac{2}{5}$ — на неполную; $q_1 = \frac{12}{52}$ — вѣроятность вынуть фигуру послѣ того, какъ рука попала на полную колоду; $q_2 = \frac{12}{36}$ — вѣроятность вынуть фигуру, послѣ того, какъ рука попала на неполную колоду; $r_1 = \frac{4}{52}$ вѣроятность вынутія туза изъ полной колоды, $r_2 = \frac{4}{36}$ — изъ неполной; искомая вѣроятность Π, что во второй опытъ вскроется тузъ, будетъ:

$$\Pi = \frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{52}\cdot\frac{4}{52} + \frac{2}{5}\cdot\frac{12}{36}\cdot\frac{4}{36}}{\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{52} + \frac{2}{5}\cdot\frac{12}{36}} = \frac{4[3.(36)^2 + 2(52)^2]}{(3.36 + 2.52)36.52} =$$

$$= \frac{3.9^2 + 2.(13)^2}{(3.9 + 2.13)9.13} = \frac{243 + 338}{53.9.13} = \frac{581}{6201} < \frac{1}{10}.$$

ГЛАВА II-я.

Различные способы опредѣленія вѣроятностей.

26. Въ предыдущей главѣ были показаны способы опредѣленія съ помощію четырехъ основныхъ законовъ вѣроятностей ожидаемыхъ событій въ тѣхъ случаяхъ, когда мы можемъ сосчитать какъ число всѣхъ равновозможныхъ случаевъ, такъ и числа случаевъ благопріятствующихъ ожидаемымъ событіямъ. (Читатель, желающій большаго числа примѣровъ, можетъ обратиться къ сочиненіямъ по теоріи вѣроятностей Lacroix, Буняковскаго, Laurent, Ермакова, Bertrand, Некрасова, Poincarré, Czuber, Liagre). Въ этой главѣ мы разсмотримъ на частныхъ примѣрахъ нѣкоторые другіе методы опредѣленія вѣроятностей, какъ въ случаѣ конечнаго числа шансовъ, такъ и безконечно-большаго. Въ послѣднемъ случаѣ нужно прибѣгать къ методу предѣловъ, котораго примѣненіе можетъ имѣть различныя формы, какъ то видно будетъ изъ слѣдующихъ примѣровъ.

27. *Задача I.* Очень тонкій брусокъ ломаютъ на три части; какъ велика вѣроятность, что изъ нихъ можно будетъ составить треугольникъ?

Означая длину бруска чрезъ l, а длины частей чрезъ x, y, z, мы будемъ имѣть во первыхъ такое соотношеніе между этими величинами:

$$x+y+z=l; \tag{1}$$

далѣе, для того, чтобы изъ этихъ частей можно было-бы составить треугольникъ, должны имѣть мѣсто слѣдующія неравенства:

$$x<y+z; \qquad y<x+z; \qquad z<x+y, \tag{2}$$

ибо каждая сторона должна быть меньше суммы прочихъ.

Мы предположимъ сперва, что брусокъ можетъ размываться только по линіямъ дѣленія его на $2n$ равныхъ частей, (линіямъ перпендикулярнымъ къ его длинѣ); тогда, принимая длину такой части за единицу, будемъ имѣть $l=2n$, и слѣдовательно изъ (1) найдемъ:

$$z=2n-x-y, \tag{3}$$

по внесеніи этого въ неравенства (2) мы легко дадимъ имъ такой видъ:

$$x < n; \quad y < n; \quad x + y > n. \tag{4}$$

Этимъ неравенствамъ можно удовлетворить, полагая:

$$\left.\begin{array}{l}
1)\, x = 2;\ y = n - 1; \\
2)\, x = 3;\ y = n - 1;\ n - 2; \\
3)\, x = 4;\ y = n - 1;\ n - 2;\ n - 3; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
m - 1)\, x = m;\ y = n - 1;\ n - 2;\ n - 3; \ldots n - m + 1; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
n - 2)\, x = n - 1;\ y = n - 1;\ n - 2;\ n - 3; \ldots n - m + 1; \ldots 3, 2.
\end{array}\right\} \tag{5}$$

Такихъ случаевъ слѣдовательно всего:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n - 2 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}. \tag{6}$$

Переходя ко счету всѣхъ возможныхъ случаевъ, мы должны хотя одно дѣленіе оставить на долю z; тогда эти всѣ возможные случаи будутъ слѣдующіе:

$$\left.\begin{array}{l}
1)\, x = 1;\quad y = 1,\ 2,\ 3, \ldots 2n - 2; \\
2)\, x = 2;\quad y = 1,\ 2,\ 3, \ldots 2n - 3; \\
3)\, x = 3;\quad y = 1,\ 2,\ 3, \ldots 2n - 4; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
2n - 2)\, x = 2n - 2;\quad y = 1;
\end{array}\right\} \tag{7}$$

всѣхъ ихъ будетъ:

$$(2n-2) + (2n-3) + (2n-4) + \ldots + 1 = \frac{(2n-1)(2n-2)}{2}. \tag{8}$$

Искомая вѣроятность P_{2n} выразится по этому отношеніемъ числа (6) къ числу (8):

$$P_{2n} = \frac{(n-1)(n-2)}{(2n-1)(2n-2)}. \tag{9}$$

Представивъ это выраженіе въ такомъ видѣ:

$$P_{2n} = \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{\left(2 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{2}{n}\right)}, \tag{10}$$

мы легко усматриваемъ, что по мѣрѣ возрастанія n до безконечности —что необходимо сдѣлать, чтобы перейти къ тому случаю, когда прутъ можетъ ломаться на части по любой линіи, перпендикулярной къ его длинѣ,—вѣроятность P_{2n} будетъ стремиться къ предѣлу:

$$P=\frac{1}{4}, \tag{1}$$

что и будетъ искомая вѣроятность, что ломая прутъ на удачу на три части, можно будетъ составить изъ нихъ треугольникъ.

28. *Задача II.* Опредѣлить вѣроятность попасть острымъ копьемъ, (или коническою пулею) въ какую либо опредѣленную часть s диска S.

Мы разобьемъ дискъ на квадратики прямыми, горизонтальными и вертикальными, равно и очень мало отстоящими одна отъ другой, и назовемъ чрезъ ω величину квадрата, чрезъ m число ихъ, которое окажется внутри площади s, и чрезъ n, число ихъ, которое окажется внутри площади S. Предполагая одинаковою вѣроятность p попасть копьемъ (или пулею) въ одинъ изъ этихъ квадратиковъ, мы будемъ имѣть по формулѣ для относительной вѣроятности и по первому закону

$$\frac{mp}{np}=\frac{m}{n} \tag{1}$$

для вѣроятности попасть въ одинъ изъ тѣхъ квадратиковъ, которые находятся внутри s.

Помножая числителя дроби (1) на ω, будемъ имѣть:

$$\frac{m\omega}{n\omega}=\frac{s-\beta}{S-\alpha}, \tag{2}$$

гдѣ α и β — разности между $n\omega$ и S, и $m\omega$ и s соотвѣтственно, будутъ безконечно-малыя перваго порядка, если таковою будетъ сторона квадратика ω (ибо разность α между S и ω меньше суммы полныхъ квадратиковъ пересѣкаемыхъ контуромъ площади S, которая въ свою очередь меньше контура площади S, помноженнаго на удвоенную высоту квадратика, и точно также β,—разность между s и $m\omega$, меньше суммы квадратиковъ встрѣчаемыхъ контуромъ площади s, которая въ свою очередь меньше контура помноженнаго на удвоенную высоту квадратика). По мѣрѣ убыванія до нуля этой стороны, лѣвая часть послѣдняго равенства, какъ то видно изъ (1), будетъ стремиться къ искомой вѣроятности P попасть копьемъ въ часть s диска S, вторая къ отношенію этихъ площадей; но если двѣ величины постоянно равны, то и предѣлы ихъ равны; слѣдовательно:

$$P=\frac{s}{S}. \tag{3}$$

29. *Задача III.* Кружокъ вращается около вертикальной оси. Идеальный стрѣлокъ цѣлится попасть коническою пулею въ опредѣленную точку круга, въ неподвижномъ его состояніи; какъ велика вѣроятность, что пущенная имъ пуля попадетъ во вращающійся кружокъ, предполагая скорость вращенія незначительною въ сравненіи съ быстротою полета пули?

Чтобы пуля попала въ кругъ въ моментъ, когда плоскость его будетъ отклонена на уголъ θ отъ первоначальнаго положенія (перпендикулярнаго къ линіи прицѣливанія) и когда слѣдовательно его проэкція на это первоначальное положеніе его плоскости будетъ эллипсъ, выражаемый уравненіемъ:

$$\frac{x^2}{\cos^2\theta}+y^2=R^2,^{*)}$$

надобно, чтобы точка прицѣла была внутри этого эллипса или на самомъ эллипсѣ; слѣдовательно, чтобы координаты a и b точки прицѣла удовлетворяли слѣдующему условію:

$$\frac{a^2}{\cos^2\theta}+b^2\leqq R^2. \tag{2}$$

Отсюда находимъ, что для этого должно быть:

$$\cos\theta\geqq\frac{a}{\sqrt{R^2-b^2}} \tag{3}$$

или

$$\theta\leqq\arccos\frac{a}{\sqrt{R^2-b^2}}. \tag{4}$$

Такъ какъ отклоненіе на уголъ, не превосходящій указанный здѣсь предѣлъ, можетъ произойти впередъ (къ стрѣлку) и назадъ отъ первоначальнаго положенія плоскости круга, и то же будетъ имѣть мѣсто и тогда, когда дискъ повернется къ стрѣлку другой стороной; то мы видимъ, что число всѣхъ благопріятствующихъ ожидаемому событію случаевъ будетъ въ четыре раза больше предѣльнаго по (4) значенія угла θ, именно:

$$4\arccos\frac{a}{\sqrt{R^2-b^2}}. \tag{5}$$

Число всѣхъ возможныхъ случаевъ равно числу всѣхъ возможныхъ значеній угла θ, т. е. 2π. Слѣдовательно искомая вѣроятность P попасть идеальному стрѣлку во вращающійся дискъ будетъ:

$$P=\frac{2}{\pi}\arccos\frac{a}{\sqrt{R^2-b^2}}. \tag{6}$$

---

*) Принимая ось вращенія за ось OY и горизонталь чрезъ центръ за ось OX.

30. *Задача IV*. При тѣхъ же условіяхъ найти вѣроятность попасть пулею во вращающійся кружокъ обыкновенному, не идеальному стрѣлку.

Такой стрѣлокъ, прицѣливаясь въ одну точку, можетъ попасть въ каждую другую точку диска.

Вѣроятность попасть въ опредѣленный координатами x и y элементъ $dxdy$ площади покоющагося круга по задачѣ II будетъ:

$$\frac{dxdy}{\pi R^2}; \tag{1}$$

когда же кругъ вращается, то для того, чтобы стрѣлокъ попалъ въ кругъ, нужно чтобы произошло совпаденіе такихъ событій: 1) чтобы пуля попала въ намѣченный элементъ площади въ первоначальномъ ея положеніи, 2) чтобы уголъ θ отклоненія плоскости диска отъ первоначальнаго положенія удовлетворялъ условію (4) пред. §; вѣроятность этого обстоятельства выражается такъ по (5) пред. §:

$$\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{R^2-y^2}}; \tag{2}$$

вѣроятность совпаденія событій 1) и 2) по второму закону представится произведеніемъ вѣроятности (1) попасть въ намѣченный элементъ на вѣроятность (2), что положеніе диска будетъ благопріятно для того, чтобы направленная въ тотъ элементъ пуля задѣла его при его вращеніи:

$$\frac{2}{\pi^2 R^2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dxdy. \tag{3}$$

Такъ какъ точка (x, y) есть какая либо точка диска, то искомая вѣроятность попасть во вращающійся дискъ, все равно въ какую точку его, найдется по первому закону, когда мы просуммируемъ (3) для всѣхъ точекъ плоскости круга; слѣдовательно выразится интеграломъ распространеннымъ на его площадь, именно искомая вѣроятность будетъ:

$$P=\int_{-R}^{+R}\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{+\sqrt{R^2-y^2}}\frac{2}{\pi^2 R^2}\arccos\frac{x}{\sqrt{R^2-y^2}}\,dxdy, \tag{4}$$

гдѣ сперва должно проинтегрировать по x, а затѣмъ по y между указанными предѣлами.

Положимъ

$$\arccos\frac{x}{\sqrt{R^2-y^2}}=\theta; \tag{5}$$

тогда будемъ имѣть:

$$x=\sqrt{R^2-y^2}\cos\theta, \tag{6}$$

слѣдовательно

$$dx = -\sqrt{R^2-y^2}\sin\theta\, d\theta\,, \tag{7}$$

и потому

$$\left.\begin{aligned} \int \arccos\frac{x}{\sqrt{R^2-y^2}}\,dx &= -\sqrt{R^2-y^2}\int \theta\sin\theta\, d\theta = \\ &= -\sqrt{R^2-y^2}\,(-\theta\cos\theta+\sin\theta)+C = \\ &= \sqrt{R^2-y^2}\,(\theta\cos\theta-\sin\theta)+C. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Такъ какъ $\arccos\dfrac{x}{\sqrt{R^2-y^2}}$ четная функція, то

$$\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{+\sqrt{R^2-y^2}} \arccos\frac{x}{\sqrt{R^2-y^2}}\,dx = 2\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} \arccos\frac{x}{\sqrt{R^2-y^2}}\,dx\,; \tag{9}$$

но при $x=0$ будетъ по (6) $\theta=\dfrac{\pi}{2}$; при $x=\sqrt{R^2-y^2}$ будетъ $\theta=0$; слѣдовательно по (8)

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} \arccos\frac{x}{\sqrt{R^2-y^2}}\,dx &= \left[\sqrt{R^2-y^2}\,(\theta\cos\theta-\sin\theta)+C\right]_{\frac{\pi}{2}}^{0} = \\ &= \sqrt{R^2-y^2}\,; \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

внося это въ (9) и оттуда въ (4), будемъ имѣть:

$$P = \frac{4}{\pi^2 R^2}\int_{-R}^{+R}\sqrt{R^2-y^2}\,dy = \frac{8}{\pi^2 R^2}\int_0^R \sqrt{R^2-y^2}\,dy\,, \tag{11}$$

въ виду четности функціи $\sqrt{R^2-y^2}$. Но

$$\int \sqrt{R^2-y^2}\,dy = \frac{1}{2}y\sqrt{R^2-y^2}+\frac{1}{2}R^2\arcsin\frac{y}{R}+C\,; \tag{12}$$

потому

$$\int_0^R \sqrt{R^2-y^2}\,dy = \frac{R^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{R^2\pi}{4}. \tag{13}$$

Внося это въ (11) будемъ имѣть:

$$P = \frac{2}{\pi}. \tag{14}$$

31. Иногда вѣроятности легко находятся, уподобляя данный вопросъ о вѣроятности нѣкоторому вопросу чистаго анализа. Пояснимъ это на примѣрѣ, взятомъ изъ игры въ кости. Кости эти суть, обыкновенно, кубики равной величины, на граняхъ каждаго изъ которыхъ нанесены очки въ числѣ 1, 2, 3, 4, 5, 6, такимъ образомъ, что числа очковъ, дающіе въ суммѣ число 7, помѣщаются на противоположныхъ граняхъ кубика. Обыкновенно берутъ шесть такихъ костей и бросаютъ всѣ шесть костей разомъ: по суммѣ вскрывшихся номеровъ (которыхъ сумма, понятно, не можетъ быть больше 36), выдаютъ выигрышъ, цѣнность котораго обыкновенно обратно-пропорціональна вѣроятности вскрытія соотвѣтствующей ему суммы; потому надо напередъ опредѣлить вѣроятность вскрытія данной суммы.

Если напримѣръ требуется найти вѣроятность вскрытія суммы 8, то мы замѣчаемъ, что эта сумма можетъ составиться, если на костяхъ

I, II, III, IV, V, VI

вскрываются соотвѣтственно такіе номера:

№№:	1	1	1	1	2	2
или:	1	1	1	2	1	2
или:	1	1	1	2	2	1
или:	1	1	2	1	2	1
или:	1	1	2	2	1	1

и т. д.,

Ясно, что вопросъ о числѣ благопріятствующихъ случаевъ сводится къ опредѣленію всѣхъ способовъ разложить данное число (небо́льшее 36) на шесть слагаемыхъ, изъ которыхъ каждое не болѣе 6, не менѣе 1. Возьмемъ теперь полиномъ:

$$t^1+t^2+t^3+t^4+t^5+t^6=t\,\frac{1-t^6}{1-t}\,, \tag{1}$$

и написавъ его шесть разъ, одинъ подъ другимъ, возьмемъ произведеніе всѣхъ шести полиномовъ, тождественныхъ (1); получимъ:

$$(t+t^2+t^3+t^4+t^5+t^6)^6=t^6\left(\frac{1-t^6}{1-t}\right)^6; \tag{2}$$

но, если будемъ перемножать полиномы по-членно, то налѣво получимъ сумму:

$$\sum_{k=6}^{k=36} N_k t^k, \tag{3}$$

въ которой каждый показатель k есть сумма шести слагаемыхъ, взятыхъ изъ ряда показателей:

$$1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ 4\,,\ 5\,,\ 6\,, \tag{4}$$

а коэффиціентъ N_k будетъ равенъ числу способовъ, какими можно составить число k изъ такихъ шести слагаемыхъ; слѣд. будемъ имѣть:

$$\sum_{k=6}^{k=36} N_k t^k = t^6 \left(\frac{1-t^6}{1-t}\right)^6. \tag{5}$$

Отсюда видимъ, что искомое число N_k найдется, опредѣляя коэффиціентъ при t^k въ разложеніи функціи, стоящей во второй части этого равенства, по степенямъ t, или какъ коэффиціентъ при t^{k-6} въ разложеніи второй части равенства

$$\sum_{k=6}^{k=36} N_k t^{k-6} = (1-t^6)^6 (1-t)^{-6}, \tag{6}$$

получающагося изъ (5) чрезъ сокращеніе обѣихъ частей его на t^6. Во второй части можно оба множителя разложить по биному Ньютона для цѣлыхъ степеней, положительныхъ и отрицательныхъ, а затѣмъ перемножить на самомъ дѣлѣ эти разложенія:

$$\left.\begin{aligned} &(1-t^6)^6(1-t)^{-6} = \\ &= (1 - 6t^6 + \frac{6.5}{1.2}t^{12} - \frac{6.5.4}{1.2.3}t^{18} + \frac{6.5}{1.2}t^{24} - 6t^{30} + t^{36}) \times \\ &\times (1 + 6t + \frac{6.7}{1.2}t^2 + \frac{6.7.8}{1.2.3}t^3 + \frac{6.7.8.9}{1.2.3.4}t^4 + \dots). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Если желаемъ найти N_s, то должны отобрать тѣ члены по одному изъ каждой суммы, которые по умноженію одинъ на другой дадутъ члены съ t^{s-6}, и сложить затѣмъ алгебраически коэффиціенты всѣхъ полученныхъ такимъ образомъ членовъ: сумма и будетъ N_s. Эти члены такъ найдутся: показатели членовъ перваго множителя вида 6λ, гдѣ $\lambda = 0\,,\ 1\,,\ 2 \dots 6$, втораго вида μ, гдѣ $\mu = 0\,,\ 1\,,\ 2\,,\ 3\,, \dots$; а потому показатель каждаго члена произведенія въ (7) будетъ вида $6\lambda + \mu$;

слѣдовательно надобно найти такія λ и μ, которыя удовлетворяютъ уравненію:

$$6\lambda + \mu = s - 6. \tag{8}$$

Отсюда находимъ:

$$\mu = s - 6(\lambda + 1); \tag{9}$$

подставляя сюда вмѣсто λ всѣ числа начиная съ 1 до тѣхъ поръ, пока не получится отрицательное число, мы будемъ имѣть для каждаго λ соотвѣтственное μ. Такъ, если $s = 8$, то $\mu = 8 - 6(\lambda + 1)$; откуда видно, что $\lambda = 0$ единственное значеніе, для котораго μ получается положительное, именно $\mu = 2$; слѣдовательно для полученія N_8 нужно перемножить первый членъ перваго множителя на третій второго, и мы будемъ имѣть такимъ образомъ:

$$N_8 = \frac{6.7}{1.2} = 21. \tag{10}$$

Вѣроятность вскрытія суммы 8 будетъ слѣдовательно

$$P_8 = \frac{N_8}{6^6} = \frac{6.7}{2.6^6} = \frac{7}{2.6^5}, \tag{11}$$

такъ какъ всѣхъ возможныхъ случаевъ 6^6, ибо каждый номеръ одной кости можетъ вскрыться съ каждымъ номеромъ каждой другой кости. Если положимъ, для другого примѣра $s = 18$, то давая λ значенія $0, 1, 2$, получимъ для μ значенія $12, 6, 0$; слѣдовательно нужно для полученія N_{18} помножить $1, -6, +\frac{6.5}{1.2}$ соотвѣтственно на

$$\frac{(6+11)!}{5!\,12!} = \frac{13.14.15.16.17}{5!} = 6188,$$

$$\frac{(6+5)!}{5!\,6!} = \frac{67.8.9.10.11}{6!} = 154$$

и 1, и затѣмъ сложить; получимъ:

$$N_{18} = 5279.$$

32. Вѣроятность P_s вскрытія суммы s будетъ коэффиціентъ при t^{s-6} въ разложеніи функціи

$$V = \frac{(1-t^6)^6}{6^6.(1-t)^6};$$

эта функція поэтому называется по Лапласу *производящей* функціей (fonction génératrice) вѣроятностей P_s. Лапласъ при помощи метода производящихъ функцій получилъ всѣ почти формулы теоріи конечныхъ разностей и рѣшилъ много задачъ теоріи вѣроятностей, которыя нерѣдко сводятся къ вопросамъ этой теоріи, въ знаменитомъ своемъ сочиненіи „Théorie des probabilitées", составляющемъ VII томъ новѣйшаго изданія его сочиненій. — И теперь этотъ методъ часто употребляется въ теоріи вѣроятностей. Мы примѣнимъ его въ слѣдующей главѣ еще къ одному весьма важному въ этой теоріи вопросу, именно объ опредѣленіи вѣроятности случиться событію E, котораго вѣроятность есть p, m разъ въ n испытаній.

ГЛАВА III-я.

Законы вѣроятностей при повтореніи испытаній.

33. Означимъ чрезъ $P_{n;m}$ искомую вѣроятность случиться событію E, котораго вѣроятность есть p, m разъ въ n испытаній. Здѣсь возможны два случая: событіе E въ послѣднее испытаніе случится, или не случится. Если событіе E случится въ послѣднее испытаніе, то въ предшествующія $n-1$ испытаній оно можетъ случиться лишь $m-1$ разъ, чего вѣроятность по принятому способу обозначенія изобразится чрезъ $P_{n-1;m-1}$; тогда вѣроятность случиться событію E m разъ въ n испытаній, будучи вѣроятностію совпаденія событій: 1) случиться ему $m-1$ разъ $n-1$ испытаній, и 2) случиться въ послѣднее испытаніе, представится произведеніемъ:

$$P_{n-1;m-1} . p; \tag{1}$$

если же событіе E не случится въ послѣднее испытаніе, то оно должно случиться всѣ m разъ въ $n-1$ первыхъ испытаній, — вѣроятность чего по принятому означится чрезъ $P_{n-1;m}$, и не случиться въ послѣднее испытаніе; а тогда вѣроятность случиться въ n испытаній m разъ, будучи вѣроятностью совпаденія событій: 1) случиться m разъ въ $n-1$ испытаній и 2) не случиться въ послѣднее (чего вѣроятность есть $1-p$), выразится произведеніемъ:

$$P_{n-1;m}(1-p). \tag{2}$$

Такъ какъ другой альтернативы быть не можетъ, то по первому закону теоріи вѣроятностей мы должны имѣть:

$$P_{n;m} = P_{n-1;m-1}\,p + P_{n-1;m}(1-p). \tag{3}$$

Чтобы эта формула была вѣрна для всякихъ значеній m и n, мы должны условиться принимать символы:

$$P_{n;-\lambda} = 0; \qquad P_{n;n+\mu} = 0; \tag{4}$$

безъ этого не имѣющіе смысла; тогда она будетъ вѣрна и для $m=0$:

$$P_{n;0}=P_{n-1;0}(1-p), \tag{5}$$

и для $m=n$:

$$P_{n;n}=P_{n-1;n-1}\cdot p, \tag{6}$$

что очевидно.

Помножимъ теперь (3) на t^m и просуммируемъ по m отъ 0 до n; будемъ имѣть:

$$\sum_{m=0}^{m=n} P_{n;m}\, t^m = \sum_{m=0}^{m=n} P_{n-1;m-1}\, p t^m + \sum_{m=0}^{m=n} P_{n-1;m}(1-p)\, t^m. \tag{7}$$

Пусть

$$V_n=\sum_{m=0}^{m=n} P_{n;m}\, t^m, \tag{8}$$

—это слѣдовательно fonction génératrice нашихъ $P_{n;m}$; тогда по (4) равенство (5) легко приметъ такой видъ:

$$V_n=ptV_{n-1}+(1-p)V_{n-1},$$

или

$$V_n=V_{n-1}(pt+1-p). \tag{9}$$

Полагая въ этой формулѣ $n=2, 3, \ldots n$ и перемножая полученные результаты, мы будемъ имѣть по сокращеніи:

$$V_n=V_1(pt+1-p)^{n-1}. \tag{10}$$

Но

$$V_1=\sum_{m=0}^{m=1} P_{1;m}\, t^m = P_{1;0}\, t^0 + P_{1;1}\, t,$$

а

$$P_{1;0}=1-p, \quad \text{и} \quad P_{1;1}=p; \tag{11}$$

слѣдовательно

$$V_1=1-p+pt; \tag{12}$$

внося это въ (10), будемъ имѣть окончательно:

$$V_n=(pt+1-p)^n. \tag{13}$$

Отсюда

$$P_{n;m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}p^m(1-p)^{n-m}. \tag{14}$$

34. Эту вѣроятность можно найти и прямо на основанiи слѣдующихъ соображенiй. Вѣроятность случиться событiю E m разъ въ n испытанiй и его прямопротивоположному $n-m$ разъ въ опредѣленной послѣдовательности по второму закону выразится произведенiемъ

$$p^m(1-p)^{n-m}; \tag{1}$$

всѣхъ же послѣдовательностей будетъ

$$\frac{n!}{m!(n-m)!}, \tag{2}$$

какъ мы видѣли въ § 20; слѣдовательно по первому закону будемъ имѣть:

$$P_{n;m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}p^m(1-p)^{n-m}, \tag{3}$$

согласно съ (14) предыдущаго §.

35. Этотъ результатъ можетъ быть распространенъ на k несовмѣстныхъ событiй, исключающихъ одно другое:

$$E_1, E_2, E_3, \ldots E_k, \tag{1}$$

которыхъ вѣроятности пусть будутъ:

$$p_1, p_2, p_3, \ldots p_k, \tag{2}$$

причемъ пусть

$$p_1+p_2+p_3+\ldots+p_k=1, \tag{3}$$

такъ что изъ событiй (1) одно непремѣнно должно случиться. Найдемъ вѣроятность случиться этимъ событiямъ въ n испытанiй соотвѣтственно такiя числа разъ:

$$m_1, m_2, m_3, \ldots, m_k, \tag{4}$$

причемъ

$$m_1+m_2+m_3+\ldots+m_k=n. \tag{5}$$

Событiя могутъ, совершаясь въ n испытанiй требуемое число разъ, слѣдовать одно за другимъ въ весьма различной послѣдовательности, число которыхъ по § 20 выразится формулой:

$$\frac{n!}{m_1!\,m_2!\,m_3!\ldots m_k!}; \tag{6}$$

вѣроятность же каждой отдѣльной послѣдовательности по второму закону выразится такъ:

$$p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot p_3^{m_3} \dots p_k^{mk}; \tag{7}$$

вѣроятность случиться событіямъ (1) въ n испытаній соотвѣтственно $m_1, m_2, \dots m_k$ число разъ въ какой бы то ни было послѣдовательности по первому закону представится формулою:

$$P_{n;m_1,m_2,\dots mk} = \frac{n!}{m_1!\, m_2! \dots m_k!} p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \dots p_k^{mk}. \tag{8}$$

36. Это выраженіе представляетъ, какъ легко видѣть коэффиціентъ общаго члена, т. е. при

$$t_1^{m_1} t_2^{m_2} \dots t_k^{mk}, \tag{1}$$

въ разложеніи по степенямъ $t_1, t_2, \dots t_k$ такой функціи:

$$(p_1 t_1 + p_2 t_2 + \dots + p_k t_k)^n; \tag{2}$$

къ этому результату прямо приводитъ методъ производящихъ функцій (fonctions génératrices).

Составимъ сперва уравненіе въ конечныхъ разностяхъ, которому удовлетворяетъ искомая вѣроятность $P_{n;m_1,m_2,\dots mk}$ случиться событіямъ $E_1, E_2, \dots E_k$ соотвѣтственно $m_1, m_2, \dots m_k$ разъ въ n испытаній. Смотря потому, которое изъ этихъ событій имѣло мѣсто въ послѣднее испытаніе, будемъ имѣть для вѣроятности случиться всѣмъ событіямъ требуемыя числа разъ въ $n-1$ испытаній за исключеніемъ событія E_1, которому случиться $m_1 - 1$ разъ въ первыя $n-1$ испытаній и одинъ разъ въ послѣднее:

$$P_{n-1;m-1,m_2,\dots mk} \cdot p_1; \tag{3}$$

случиться въ послѣднее испытаніе событію E_2, а прочимъ требуемыя числа разъ въ предшествующія $n-1$ испытаній:

$$P_{n-1;m_1,m_2-1,\dots mk} \cdot p_2; \tag{4}$$

и т. д. наконецъ въ послѣднее испытаніе случиться событію E_k, а прочимъ требуемыя числа разъ въ первыя $n-1$ испытаній:

$$P_{n-1;m_1,m_2,\dots mk-1} \cdot p_k; \tag{5}$$

и потому по первому закону для искомой вѣроятности такое выраженіе:

$$\left.\begin{aligned} P_{n;m_1,m_2,\dots m_k} = P_{n-1;m_1-1,m_2,\dots m_k}\,p_1 + \\ + P_{n-1;m_1,m_2-1,\dots m_k}\,p_2 + \dots + P_{n-1;m_1,m_2,\dots m_k-1}\,p_k. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Умножая обѣ части этого равенства на (1) и суммируя по всѣмъ m отъ 0 до n, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{m\;0}^{n\;(k)} P_{n;m_1,m_2,\dots m_k}\, t_1^{m_1} t_2^{m_2}\dots t_k^{m_k} = \\ &= p_1 t_1 \sum_{m\;0}^{n\;(k)} P_{n-1;m_1-1,m_2,\dots m_k}\, t_1^{m_1-1} t_2^{m_2}\dots t_k^{m_k} + \\ &+ p_2 t_2 \sum_{m\;0}^{n\;(k)} P_{n-1;m_1,m_2-1,\dots m_k}\, t_1^{m_1} t_2^{m_2-1}\dots t_k^{m_k} + \\ &+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\ &+ p_k t_k \sum_{m\;0}^{n\;(k)} P_{n-1;m_1,m_2,\dots m_k-1}\, t_1^{m_1} t_2^{m_2}\dots t_k^{m_k-1}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

причемъ опять всѣ P, въ которыхъ значки m получаютъ значеніе отрицательное или бóльшее перваго значка, т. е. n, или даютъ сумму бóльшую n, въ лѣвой части равенства, и $n-1$ въ правой, принимаются равными нулю. Положимъ теперь

$$V_n = \sum_{m\;0}^{n\;(k)} P_{n;m_1,m_2,\dots,m_k}\, t_1^{m_1} t_2^{m_2}\dots t_k^{m_k}; \tag{8}$$

тогда предыдущее легко можно будетъ такъ представить:

$$V_n = V_{n-1}\,(p_1 t_1 + p_2 t_2 + \dots + p_k t_k). \tag{9}$$

Давая здѣсь числу n всѣ значенія отъ 2 до n и перемножая, по сокращеніи получимъ:

$$V_n = V_1\,(p_1 t_1 + p_2 t_2 + \dots + p_k t_k)^{n-1}. \tag{10}$$

Но

$$V_1 = p_1 t_1 + p_2 t_2 + \dots + p_k t_k; \tag{11}$$

ибо, если $n=1$, то одно изъ m будетъ $=1$, а остальныя $=0$, и каждое $P_{n;m_1,m_2\ldots m_k}$ въ (8) приведется къ соотвѣтственной вѣроятности быть тому событію одинъ разъ въ одно испытаніе; внося изъ (11) въ (10), получимъ окончательно:

$$V_n=(p_1t_1+p_2t_2+\ldots+p_kt_k)^n. \tag{12}$$

Сличая это съ (8), убѣждаемся въ сказанномъ въ началѣ этого §.

37. Возвращаясь къ задачѣ § 33, опредѣлимъ наивѣроятнѣйшее число повторенія событія E въ n испытаній, т. е. то значеніе числа m для котораго

$$P_{n;m} \tag{1}$$

есть maximum. Здѣсь maximum опредѣляется условіемъ:

$$P_{n;m-1} \leqq P_{n;m} \overline{\overline{>}} P_{n;m+1}. \tag{2}$$

По (14) § 33 неравенства (2) принимаютъ такой видъ:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{n!}{(m-1)!\,(n-m+1)}\,p^{m-1}(1-p)^{n-m+1} \leqq \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\,p^m(1-p)^{n-m};\\
&\frac{n!}{m!\,(n-m)!}\,p^m(1-p)^{n-m} \overline{\overline{>}} \frac{n!}{(m+1)!\,(n-m-1)!}\,p^{m+1}(1-p)^{n-m-1};
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

а послѣ сокращенія на общихъ множителей обѣихъ частей, такой:

$$\left.\begin{aligned}
&m(1-p) \leqq (n-m+1)\,p;\\
&(m+1)(1-p) \overline{\overline{>}} (n-m)\,p,
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

или

$$m \leqq (n+1)\,p; \quad \text{и} \quad m+1 \overline{\overline{>}} (n+1)\,p. \tag{5}$$

Эти неравенства показываютъ, что

$$m=E(n+1)\,p, \tag{6}$$

т. е. цѣлой части отъ $(n+1)p$, иначе наибольшему цѣлому числу, заключающемуся въ $(n+1)p$. Если $(n+1)p$ есть цѣлое число, то $m=E(n+1)p=(n+1)p$; но въ этомъ случаѣ обоимъ неравенствамъ удовлетворяетъ также число $m=(n+1)p-1$; здѣсь слѣдовательно будутъ два maxima. Напримѣръ наивѣроятнѣйшее число появленія фигуры въ 10 испытаній для полной колоды при условіи возвращенія снятой карты въ колоду, будетъ:

$$E(10+1)\frac{12}{52}=E\,11\cdot\frac{3}{13}=2.$$

38. Выведемъ теперь формулу для приближеннаго вычисленія вѣроятности случиться событію въ n испытаній число разъ m, близкое къ наивѣроятнѣйшему, опредѣляемому формулою (6) предыдущаго §, на случай когда числа n и, слѣдовательно, m очень большія. Въ этомъ случаѣ можно для вычисленія произведеній чиселъ, входящихъ въ эту формулу, воспользоваться формулою Стирлинга:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots x = \sqrt{2\pi}\, x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x+\frac{1}{12x}-\frac{1}{360x^3}+\cdots}, \tag{1}$$

въ которой при x очень большемъ дробную часть въ показателѣ степени числа e можно отбросить. Предполагая n, а слѣдовательно и m и $n-m$ въ формулѣ (6) предыдущаго § очень большими, мы на основаніи этой формулы (1) и сдѣланнаго сейчасъ замѣчанія будемъ имѣть:

$$P_{n;m} = \frac{\sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \cdot p^m (1-p)^{n-m}}{\sqrt{2\pi}\, m^{m+\frac{1}{2}} e^{-m} \sqrt{2\pi}\,(n-m)^{n-m+\frac{1}{2}} e^{-(n-m)}}; \tag{2}$$

сокращая, послѣ легкихъ преобразованій получимъ:

$$P_{n;m} = \sqrt{\frac{n}{2\pi\, m(n-m)}} \left(\frac{np}{m}\right)^m \left(\frac{n(1-p)}{n-m}\right)^{n-m}. \tag{3}$$

Такъ какъ при n очень большомъ $E(n+1)p$ очень мало отличается отъ np, а m мы принимаемъ очень близкимъ къ наивѣроятнѣйшему $E(n+1)p$, то и m будетъ мало отличаться отъ np, и если мы положимъ:

$$m = np + z, \tag{4}$$

то z будетъ очень малое число въ сравненіи съ np. Внося вмѣсто m его значеніе изъ (4) въ (3), будемъ имѣть:

$$P_{n;m} = \sqrt{\frac{n}{2\pi(np+z)(n-np-z)}} \left(\frac{np}{np+z}\right)^{np+z} \left(\frac{n(1-p)}{n(1-p)-z}\right)^{n(1-p)-z}. \tag{5}$$

Здѣсь подъ знакомъ радикала можно пренебречь величиною z, ибо сдѣланная чрезъ это погрѣшность будетъ одного порядка съ $\frac{z}{n^{\frac{3}{2}}}$; но въ остальныхъ множителяхъ этого сдѣлать нельзя, ибо тамъ показатели большія числа; но приблизительныя значенія этихъ множителей можно получить при помощи извѣстныхъ формулъ:

$$a) \qquad \log(1+\alpha) = \alpha - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} - \cdots,$$

$$b) \qquad \log(1-\alpha) = -\alpha - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^3}{3} - \cdots.$$

Полагая въ первой $\alpha = \frac{z}{np}$, во второй $\alpha = \frac{z}{n(1-p)}$, мы будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}\log\left(\frac{np}{np+z}\right)^{np+z} &= -(np+z)\log\left(1+\frac{z}{np}\right) = \\ &= -(np+z)\left(\frac{z}{np}-\frac{z^2}{2n^2p^2}+\dots\right) = \\ &= -\left[z+\frac{z^2}{2np}+\dots\right];\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

$$\left.\begin{aligned}\log\left(\frac{n(1-p)}{n(1-p)-z}\right)^{n(1-p)-z} &= -[n(1-p)-z]\log\left(1-\frac{z}{n(1-p)}\right) = \\ &= [n(1-p)-z]\left(\frac{z}{n(1-p)}+\frac{z^2}{2n^2(1-p)^2}+\dots\right) = \\ &= z - \frac{z^2}{2n(1-p)} + \dots;\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

складывая, найдемъ:

$$\log\left\{\left(\frac{np}{np+z}\right)^{np+z}\left(\frac{n(1-p)}{n(1-p)-z}\right)^{n(1-p)-z}\right\} = -\frac{z^2}{2np(1-p)} + \dots, \quad (8)$$

и переходя отъ логариѳма къ числу:

$$\left(\frac{np}{np+z}\right)^{np+z}\left(\frac{n(1-p)}{n(1-p)-z}\right)^{n(1-p)-z} = e^{-\frac{z^2}{2np(1-p)}+\dots}. \quad (9)$$

Внося это въ (5), будемъ имѣть:

$$P_{n;m} = \frac{1}{\sqrt{2\pi p(1-p)n}} e^{-\frac{z^2}{2np(1-p)}+\dots}. \quad (10)$$

При n очень большомъ второй множитель будетъ очень мало отличаться отъ 1, и потому можно будетъ принять:

$$P_{n;m} = \frac{1}{\sqrt{2\pi p(1-p)n}}. \quad (11)$$

Эта формула показываетъ, что сама наибо́льшая вѣроятность безконечно убываетъ вмѣстѣ съ безконечнымъ возрастаніемъ n. Результатъ этотъ однако не долженъ казаться страннымъ, а напротивъ есть вполнѣ естественный, такъ какъ число всѣхъ возможныхъ значеній m безпредѣльно возрастаетъ при возрастаніи n до безконечности. Для примѣра возьмемъ игру въ орлянку; вѣроятность вскрытія орла (или рѣшетки) есть $p=\frac{1}{2}$ для одного испытанія; если будемъ дѣлать 10000 испытаній, то наивѣроятнѣйшее число вскрытій орла будетъ:

$$E(n+1)p = E\,\frac{10001}{2} = 5000\,;$$

вѣроятность вскрытія орла такое число разъ въ 10000 испытаній по формулѣ (11) будетъ:

$$P_{10000;\,5000} = \frac{1}{\sqrt{2\pi.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.10000}} = \frac{1}{\sqrt{\pi.5000}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3{,}1415927 \times 5000}} = \frac{1}{\sqrt{15707{,}9635}} = \frac{1}{125{,}3}.$$

39. Найдемъ теперь вѣроятность заключаться числу m повторенія событія E съ вѣроятностью p въ n испытаній въ нѣкоторыхъ предѣлахъ M_0 и M_1, близкихъ къ наивѣроятнѣйшему числу повторенія событій, т. е. къ

$$E(n+1)p. \tag{1}$$

Въ этомъ случаѣ каждая изъ вѣроятностей:

$$P_{n;\,M_0},\ P_{n;\,M_0+1},\ P_{n;\,M_0+2},\ \ldots\ P_{n;\,M_1-2},\ P_{n;\,M_1-1} \tag{2}$$

можетъ быть представлена формулою (10) предыдущаго §, и какъ искомая вѣроятность находиться числу m повторенія событія E въ n испытаній въ предѣлахъ M_0 и M_1 (послѣдній исключительно, exclusive), которую означимъ чрезъ:

$$\Pi_{M_0}^{M_1},$$

по первому закону равна суммѣ вѣроятностей (2), т. е.

$$\Pi_{M_0}^{M_1} = \sum_{m=M_0}^{m=M_1} P_{n;\,m}\,, \tag{3}$$

то мы будемъ имѣть:

$$\Pi_{M_0}^{M_1} = \sum_{m=M_0}^{m=M_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi p(1-p)n}}\, e^{-\frac{z^2}{2np(1-p)}}, \tag{4}$$

гдѣ

$$z = m - np;$$

слѣдовательно окончательно:

$$\varPi_{M_0}^{M_1} = \sum_{m=M_0}^{m=M_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi p(1-p)n}} e^{-\frac{(m-np)^2}{2np(1-p)}}. \tag{5}$$

Если n очень велико, то эту сумму можно замѣнить интеграломъ. Въ теоріи конечныхъ разностей выводится такая формула Эйлера-Маклорена *):

$$\sum u_x = \frac{1}{h}\int u_x dx - \frac{1}{2}u_x + \frac{h}{12}\frac{du_x}{dx} - \frac{h^3}{720}\frac{d^3 u_x}{dx^3} + \dots; \tag{6}$$

въ нашемъ случаѣ формулы (5) $x = m$, $h = 1$ и

$$u_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi p(1-p)n}} e^{-\frac{(m-np)^2}{2np(1-p)}};$$

это величина очень малая при n очень большомъ; дифференцируя по m, получимъ:

$$\frac{du_x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi p(1-p)n}} e^{-\frac{(m-np)^2}{2np(1-p)}} \cdot \frac{2(m-np)}{2np(1-p)},$$

что представитъ величину порядка малости $\frac{3}{2}$, когда n будетъ число очень большое; высшія производныя будутъ еще болѣе высшаго порядка малыя величины, а потому, пренебрегая ими, мы можемъ принять:

$$\varPi_{M_0}^{M_1} = \int_{M_0}^{M_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi p(1-p)n}} e^{-\frac{(m-np)^2}{2np(1-p)}} dm.$$

Положимъ

$$\frac{m-np}{\sqrt{2p(1-p)n}} = t; \tag{8}$$

отсюда

$$m = np + \sqrt{2p(1-p)n}\, t, \tag{9}$$

*) См. *Тихомандрицкій, М.* Курсъ теоріи конечныхъ разностей. Харьковъ, 1890 г. §§ 132—133.

и слѣдовательно

$$dm = \sqrt{2p(1-p)n}\, dt.$$

Внося это въ (7), получимъ:

$$\Pi_{M_0}^{M_1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{T_0}^{T_1} e^{-t^2}\, dt, \tag{10}$$

гдѣ T_0 и T_1 опредѣляются изъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned} M_0 &= np + \sqrt{2p(1-p)n} \cdot T_0 ; \\ M_1 &= np + \sqrt{2p(1-p)n} \cdot T_1 . \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Вводя эти выраженія M_0 и M_1 въ (10), будемъ имѣть такую формулу:

$$\Pi_{np+\sqrt{2p(1-p)n}\; T_0}^{np+\sqrt{2p(1-p)n}\; T_1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{T_0}^{T_1} e^{-t^2}\, dt ; \tag{12}$$

такова вѣроятность заключаться числу повторенія событія E въ n испытаній въ предѣлахъ:

$$np + \sqrt{2p(1-p)n}\; T_0 \quad \text{и} \quad np + \sqrt{2p(1-p)n}\; T_1 .$$

Въ случаѣ, когда $T_0 = -T_1$, эта формула принимаетъ такой видъ:

$$\Pi_{np-\sqrt{2p(1-p)n}\; T_1}^{np+\sqrt{2p(1-p)n}\; T_1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{T_1} e^{-t^2}\, dt , \tag{13}$$

ибо интегралъ

$$\int_{-T_1}^{+T_1} e^{-t^2}\, dt = \int_{-T_1}^{0} e^{-t^2}\, dt + \int_{0}^{T_1} e^{-t^2}\, dt = 2\int_{0}^{T_1} e^{-t^2}\, dt , \tag{14}$$

такъ какъ первый интегралъ чрезъ подстановку $-t$ вмѣсто t приводится ко второму.

Интегралъ

$$\int_{0}^{T_1} e^{-t^2}\, dt \tag{15}$$

будетъ въ дальнѣйшемъ очень часто встрѣчаться, а потому слѣдующую главу мы посвятимъ изложенію различныхъ способовъ вычисленія его.

ГЛАВА IV-я.

Объ интегралѣ $\int_0^{T_1} e^{-t^2}\,dt$.

40. Интегралъ

$$\int_0^{T_1} e^{-t^2}\,dt \tag{1}$$

не можетъ быть вычисленъ точно для произвольно-заданнаго значенія T_1; но при безпредѣльномъ возростаніи T_1 стремится къ предѣлу, который можетъ быть найденъ. Мы имѣемъ:

$$\int_0^a e^{-\alpha x}\,dx = \left(\frac{e^{-\alpha x}}{-\alpha}\right)_0^n = \frac{1-e^{-\alpha a}}{\alpha}; \tag{2}$$

здѣсь мы принимаемъ $\alpha > 0$; въ такомъ случаѣ можно положить $\alpha = 1+y^2$, ибо эта величина очевидно > 0; тогда мы получимъ:

$$\int_0^a e^{-(1+y^2)x}\,dx = \frac{1-e^{-(1+y^2)a}}{1+y^2}; \tag{3}$$

помножимъ это равенство на dy и проинтегрируемъ по y отъ 0 до b; будемъ имѣть:

$$\int_0^b\left(\int_0^a e^{-(1+y^2)x}\,dx\right)dy = \int_0^b \frac{1-e^{-(1+y^2)a}}{1+y^2}\,dy. \tag{4}$$

Вторая часть здѣсь разбивается на два члена:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^b \frac{1-e^{-(1+y^2)a}}{1+y^2}\,dy &= \int_0^b \frac{dy}{1+y^2} - \int_0^b \frac{e^{-(1+y^2)a}}{1+y^2}\,dy = \\ &= \operatorname{arctg} b - \int_0^b \frac{e^{-(1+y^2)a}}{1+y^2}\,dy.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Въ первой части можно перемѣнить порядокъ интегрированія по x и по y; тогда будемъ имѣть:

$$\int_0^b \left(\int_0^a e^{-(1+y^2)x}\,dx\right)dy = \int_0^a \left(\int_0^b e^{-(1+y^2)x}\,dy\right)dx. \tag{6}$$

Здѣсь можно вывести e^{-x} за знакъ интеграла по y, такъ что будемъ имѣть:

$$\int_0^b \left(\int_0^a e^{-(1+y^2)x}\,dx\right)dy = \int_0^a e^{-x}\left(\int_0^b e^{-y^2x}\,dy\right)dx. \tag{7}$$

Положимъ $\sqrt{x}\cdot y = z$, или $y = \dfrac{z}{\sqrt{x}}$; тогда $dy = \dfrac{dz}{\sqrt{x}}$, и потому будетъ:

$$\int_0^a e^{-x}\left(\int_0^b e^{-y^2x}\,dy\right)dx = \int_0^a \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\left(\int_0^{\sqrt{x}.b} e^{-z^2}\,dz\right)dx. \tag{8}$$

Положимъ теперь $\sqrt{x} = t$, слѣдовательно $\dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2dt$; тогда будетъ:

$$\int_0^a \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\left(\int_0^{b\sqrt{x}} e^{-z^2}\,dz\right)dx = 2\int_0^{\sqrt{a}} e^{-t^2}\left(\int_0^{tb} e^{-z^2}\,dz\right)dt. \tag{9}$$

Внося это въ (4), а также вмѣсто второй части ея выраженіе изъ (5), мы получимъ такое равенство:

$$2\int_0^{\sqrt{a}} e^{-t^2}\left(\int_0^{bt} e^{-z^2}\,dz\right)dt = \operatorname{arctg} b - \int_0^b \frac{e^{-(1+y^2)a}\,dy}{1+y^2}. \tag{10}$$

Если мы будемъ подводить a къ безконечности, то интегралъ второй части будетъ стремиться къ нулю, ибо очевидно

$$\int_0^b \frac{e^{-(1+y^2)a}}{1+y^2}\,dy < e^{-a}\int_0^b \frac{dy}{1+y^2} = e^{-a}\operatorname{arctg} b, \tag{11}$$

и мы будемъ имѣть, (дѣля обѣ части на 2):

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\left(\int_0^{bt_1} e^{-z^2}\,dz\right)dt = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} b. \tag{12}$$

Если мы теперь будемъ b подводить къ ∞, то множитель каждаго элемента интеграла по t будетъ стремиться къ такой постоянной:

$$\int_0^\infty e^{-z^2}\,dz\,, \tag{13}$$

а вторая часть къ $\frac{\pi}{4}$, ибо $\operatorname{arctg} b$ при $b=\infty$ есть $\frac{\pi}{2}$; слѣдовательно (12) превратится въ такое:

$$\int_0^\infty e^{-z^2}\,dz\cdot\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt=\frac{\pi}{4}\,, \tag{14}$$

или, такъ какъ опредѣленный интегралъ независитъ отъ названія перемѣнной, по которой интегрируется:

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,, \tag{15}$$

гдѣ предъ корнемъ должно взять $+$, ибо всѣ элементы этого интеграла положительные.

41. Можно этотъ результатъ получить и такимъ образомъ. Двойной интегралъ:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy\,, \tag{1}$$

будучи истолкованъ геометрически, представляетъ объемъ, ограниченный тремя координатными плоскостями XOY, YOZ, ZOX и поверхностью

$$z=e^{-(x^2+y^2)}. \tag{2}$$

Если перемѣнимъ координаты x и y на полярныя, то изъ формулъ

$$x=r\cos\theta\,,\qquad y=r\sin\theta\,, \tag{3}$$

найдемъ:

$$x^2+y^2=r^2\,, \tag{4}$$

элементъ же площади основанія $dxdy$ замѣнится элементомъ $rd\theta\cdot dr=$ $=rdr\cdot d\theta$; предѣлы по r будутъ отъ 0 до ∞, а по θ отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$, такъ какъ мы разсматриваемъ лишь первый октантъ.

Такимъ образомъ будемъ имѣть:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^\infty e^{-r^2}\,rdr\right)d\theta. \tag{5}$$

Но, полагая $r^2=t$, имѣемъ $rdr=\frac{1}{2}dt$; слѣдовательно

$$\int_0^\infty e^{-r^2}\,rdr=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}\,dt=\frac{1}{2}\left(-e^{-t}\right)_0^\infty=\frac{1}{2}; \tag{6}$$

интегрированіе по θ дастъ поэтому:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^\infty e^{-r^2}\,rdr\right)d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\frac{\pi}{4}, \tag{7}$$

и мы будемъ имѣть:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy=\frac{\pi}{4}; \tag{8}$$

но лѣвая часть разбивается на два множителя, равныхъ между собою:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy=\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx.\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy=\left(\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt\right)^2; \tag{9}$$

слѣдовательно:

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{10}$$

какъ выше было найдено.

42. Если T_1 не велико, то можно получить довольно быстро значеніе интеграла

$$\int_0^{T_1} e^{-t^2}\,dt, \tag{1}$$

разлагая подъинтегральную функцію въ рядъ такимъ образомъ:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{T_1} e^{-t^2}\,dt&=\int_0^{T_1}\left(1-t^2+\frac{t^4}{1.2}-\frac{t^6}{1.2.3}+\dots\right)dt=\\&=T_1-\frac{T_1^3}{3}+\frac{T_1^5}{1.2.5}-\frac{T_1^7}{1.2.3.7}+\dots\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Но для нѣсколько значительныхъ T_1 этотъ рядъ, какъ знако-перемѣнный, будетъ сходиться очень медленно, и потому не годится для вычисленія нашего интеграла; въ этомъ случаѣ съ помощію формулы:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{T_1} e^{-t^2}\,dt &= \int_0^{\infty} e^{-t^2}\,dt - \int_{T_1}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_{T_1}^{\infty} e^{-t^2}\,dt,\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

сводятъ его на интегралъ

$$\int_{T_1}^{\infty} e^{-t^2}\,dt. \tag{4}$$

43. Этотъ интегралъ мы будемъ интегрировать по частямъ, замѣчая, что

$$-\frac{d(e^{-t^2})}{dt}\cdot\frac{dt}{2t} = e^{-t^2}\,dt, \tag{1}$$

и слѣдовательно

$$\int_{T_1}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = -\int_{T_1}^{\infty}\frac{d(e^{-t^2})}{dt}\cdot\frac{dt}{2t}. \tag{2}$$

Полагая именно:

$$\frac{1}{2t} = u, \quad \frac{d(e^{-t^2})}{dt}\,dt = dv,$$

мы будемъ имѣть по формулѣ интегрированія по частямъ:

$$\int_{T_1}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{e^{-T_1{}^2}}{2T_1} - \frac{1}{2}\int_{T_1}^{\infty} e^{-t^2}\,\frac{dt}{t^2}. \tag{3}$$

Но здѣсь интегралъ второй части можетъ быть по (1) такъ представленъ:

$$\int_{T_1}^{\infty} e^{-t^2}\,\frac{dt}{t^2} = -\int_{T_1}^{\infty}\frac{d(e^{-t^2})}{dt}\cdot\frac{dt}{2t^3};$$

слѣдовательно, интегрируя по частямъ, будемъ имѣть:

$$\int_{T_1}^{\infty} e^{-t^2}\,\frac{dt}{t^2} = \frac{e^{-T_1{}^2}}{2T_1^3} - \frac{3}{2}\int_{T_1}^{\infty} e^{-t^2}\,\frac{dt}{t^4}; \tag{4}$$

вносся это въ (3), получимъ:

$$\int_{T_1}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{e^{-T_1^2}}{2T_1}\left[1 - \frac{1}{2T^2}\right] + \frac{3}{2^2}\int_{T_1}^{\infty} e^{-t^2}\frac{dt}{t^4}. \qquad (5)$$

Продолжая преобразовывать послѣдній интегралъ при помощи формулы (1) и интегрированія по частямъ, придемъ наконецъ къ такой формулѣ:

$$\left.\begin{aligned} \int_{T_1}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{e^{-T_1^2}}{2T_1}\Bigg[1 - \frac{1}{2T_1^2} + \frac{1.3}{(2T_1^2)^2} - \frac{1.3.5}{(2T_1^2)^3} + \ldots \\ \ldots + (-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{(2T_1^2)^n}\Bigg] + \\ + (-1)^{n+1}\frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2^{n+1}}\int_{T_1}^{\infty} e^{-t^2}\frac{dt}{t^{2n+2}}, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

справедливость которой докажется по способу заключенія отъ n къ $n+1$. Этотъ рядъ сходится только до извѣстнаго члена, а затѣмъ становится расходящимся, есть слѣдовательно полусходящійся, какъ называютъ такіе ряды: дѣйствительно, численное значеніе отношенія $n+1$-го члена къ $n-1$-му, именно:

$$\frac{2n-1}{2T_1^2} \qquad (7)$$

безпредѣльно возрастаетъ вмѣстѣ съ n, какъ бы велико ни было T_1. Погрѣшность менѣе послѣдняго удерживаемаго члена; дѣйствительно:

$$\frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2^{n+1}}\int_{T_1}^{\infty} e^{-t^2}\frac{dt}{t^{2n+2}} < \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^{n+1}} e^{-T_1^2}\int_{T_1}^{\infty}\frac{(2n+1)dt}{t^{2n+2}}, \qquad (8)$$

но

$$\int_{T_1}^{\infty}\frac{(2n+1)\,dt}{t^{2n+2}} = \left(-\frac{1}{t^{2n+1}}\right)_{T_1}^{\infty} = \frac{1}{T_1^{2n+1}}; \qquad (9)$$

слѣдовательно погрѣшность, абсолютно взятая:

$$\frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2^{n+1}}\int_{T_1}^{\infty} e^{-t^2}\frac{dt}{t^{2n+2}} < \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{(2T_1^2)^n}\cdot\frac{e^{-T_1^2}}{2T_1}, \qquad (10)$$

а это и есть послѣдній удерживаемый въ (6) членъ. Это свойство ряда (6) позволяетъ остановиться, когда послѣдній полученный членъ будетъ менѣе погрѣшности, которую мы можемъ допустить.

44. Лапласъ далъ разложенie того же интеграла въ непрерывную дробь. Положимъ, слѣдуя ему:

$$e^{t^2}\int_t^\infty e^{-t^2}\,dt = U; \tag{1}$$

тогда будетъ

$$\frac{dU}{dt} = 2tU - 1. \tag{2}$$

Дифференцируя n разъ это равенство по формулѣ Лейбница, получимъ:

$$\frac{d^{n+1}U}{dt^{n+1}} = 2t\frac{d^nU}{dt^n} + 2n\frac{d^{n-1}U}{dt^{n-1}}; \tag{3}$$

полагая по умноженiи обѣихъ частей на $\frac{1}{n!}$:

$$\frac{1}{n!}\frac{d^nU}{dt^n} = U_n, \tag{4}$$

получимъ изъ (3):

$$(n+1)U_{n+1} = 2tU_n + 2U_{n-1}. \tag{5}$$

Отсюда находимъ:

$$-2\frac{U_{n-1}}{U_n} = 2t - (n+1)\frac{U_{n+1}}{U_n}, \tag{6}$$

и слѣдовательно

$$-\frac{1}{2}\frac{U_n}{U_{n-1}} = \frac{1}{2t - (n+1)\dfrac{U_{n+1}}{U_n}}, \tag{7}$$

или

$$-\frac{1}{2}\frac{U_n}{U_{n-1}} = \frac{\dfrac{1}{2t}}{1 - \dfrac{n+1}{t}\dfrac{1}{2}\dfrac{U_{n+1}}{U_n}}. \tag{8}$$

Изъ (2), полагая $\frac{dU}{dt} = U_1$, находимъ

$$\frac{U_1}{U} = 2t - \frac{1}{U},$$

и слѣдовательно

$$U=\frac{1}{2t-\frac{U_1}{U}}=\frac{\frac{1}{2t}}{1-\frac{1}{2t}\frac{U_1}{U}}\,; \tag{9}$$

вставляя сюда результатъ положенія $n=1$ въ формулѣ (8), затѣмъ въ полученную результатъ положенія $n=2$ въ (8), и т. д., мы придемъ къ такому разложенію функціи U въ непрерывную дробь:

$$U=\cfrac{\frac{1}{2t}}{1+\cfrac{1\cdot\frac{1}{2t^2}}{1+\cfrac{2\cdot\frac{1}{2t^2}}{1+\cfrac{3\cdot\frac{1}{2t^2}}{1+\cdots}}}} \tag{10}$$

45. Для вычисленія значеній интересующаго насъ интеграла имѣются таблицы. Къ сочиненію акад. *В. Я. Буняковскаго* „Основанія Математической Теоріи Вѣроятностей“ С.-Пб. 1846 г. 4⁰, приложены двѣ таблицы: таблица I даетъ значенія интеграла

$$i=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}\,dt \tag{1}$$

съ семью десятичными знаками для всѣхъ значеній t отъ 0 до 2 чрезъ каждую сотую долю единицы; таблица II даетъ значенія интеграла

$$J=\int_T^{\infty} e^{-t^2}\,dt\,, \tag{2}$$

съ восемью десятичными знаками и значенія

$$L=10+\log J\,,$$

съ семью десятичными знаками для всѣхъ значеній T отъ 0 до 3 чрезъ каждую сотую долю единицы. Первая заимствована изъ Berliner Astronomisches Jahrbuch на 1834 г., вторая изъ сочиненія *Kramp*, Analyse des réfractions astronomiques et terrestres; Strasbourg, 1799. Къ сочиненію *J. Bertrand*, Calcul des probabilités, Paris 1889, приложена таблица значеній интеграла (1) для всѣхъ значеній t чрезъ каждую сотую отъ 0 до 3,45 включительно съ семью десятичными знаками и отъ 3,46 до 4,80 съ одинадцатью десятичными знаками, причемъ значенiе i для $t = 4{,}80$ равняется

$$0{,}99999999999.$$

Radeau и акад. А. Марковъ обратили вниманiе ученыхъ на то, что на послѣднюю цифру таблицы Крампа нельзя полагаться, что и побудило акад. Маркова вновь вычислить эти таблицы, которыя и изданы Академiей Наукъ въ 1888 г. подъ заглавiемъ: Tables des valeurs de l'intégrale $\int_x^{\infty} e^{-t^2}\,dt$, par *André Markoff*, S.-Petersbourg 1888. Это самыя полныя таблицы: въ нихъ значенiя этого интеграла даны съ одинадцатью десятичными знаками чрезъ каждую тысячную долю единицы отъ 0 до 2,999, и чрезъ каждую сотую долю единицы отъ 3 до 4,80; и затѣмъ значенiя интеграла (1) для всѣхъ значенiй t отъ 0 до 2,49 чрезъ каждую сотую съ шестью десятичными знаками, и отъ 2,5 до 3,7 чрезъ каждую десятую съ семью десятичными знаками. Въ предисловiи къ таблицамъ читатель найдетъ подробныя объясненiя самихъ вычисленiй.

ГЛАВА V.

Теорема Якова Бернулли.

46. Вернемся къ формулѣ (13) § 39, именно:

$$\Pi_{np-\sqrt{2p(1-p)n}\,T_1}^{np+\sqrt{2p(1-p)n}\,T_1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{T_1} e^{-t^2}\,dt\,, \tag{1}$$

которая даетъ вѣроятность заключаться числу m появленія событія въ n испытаній въ предѣлахъ $np - \sqrt{2p(1-p)n}\;T_1$ и $np + \sqrt{2p(1-p)n}\;T_1$.

По (3) § 42 имѣемъ:

$$\int_0^{T_1} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_{T_1}^{\infty} e^{-t^2}\,dt\,, \tag{2}$$

а по (6) § 43:

$$\int_{T_1}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \theta\,\frac{e^{-T_1^2}}{2T_1}\,, \tag{3}$$

гдѣ θ правильная положительная дробь:

$$0 < \theta < 1\,; \tag{4}$$

внося изъ (3) во (2), а оттуда въ (1), будемъ имѣть:

$$\Pi_{np-\sqrt{2p(1-p)n}\,T_1}^{np+\sqrt{2p(1-p)n}\,T_1} = 1 - \frac{\theta}{\sqrt{\pi}}\,\frac{e^{-T_1^2}}{T}\,. \tag{5}$$

Это вѣроятность заключаться числу m повторенія событія въ n испытаній въ указанныхъ предѣлахъ; но туже самую величину очевидно будетъ имѣть вѣроятность заключаться отношенію

$$\frac{m}{n} \tag{6}$$

числа повторенія событія въ n испытаній къ числу испытаній въ предѣлахъ

$$p - \sqrt{2p(1-p)}\frac{T_1}{\sqrt{n}} \quad \text{и} \quad p + \sqrt{2p(1-p)}\frac{T_1}{\sqrt{n}}, \tag{7}$$

такъ что будемъ имѣть для опредѣленія послѣдней вѣроятности такую формулу:

$$\Pi_{p-\sqrt{2p(1-p)}\frac{T_1}{\sqrt{n}}}^{p+\sqrt{2p(1-p)}\frac{T_1}{\sqrt{n}}} = 1 - \frac{\theta}{\sqrt{\pi}} . \frac{e^{-T_1^2}}{T_1}. \tag{8}$$

Второй членъ этой формулы, съ увеличеніемъ T_1 до ∞ стремится къ нулю; а потому всегда можно найти столь большое значеніе T_1, что будетъ

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-T_1^2}}{T_1} < \varepsilon \tag{9}$$

гдѣ ε произвольно заданная малая величина; подавно будетъ $< \varepsilon$ численное значеніе второго члена второй части (8). Затѣмъ, какъ бы велико T_1 ни было, всегда можно найти столь большое значеніе n, что будетъ

$$\sqrt{2p(1-p)}\frac{T_1}{\sqrt{n}} < \alpha, \tag{10}$$

гдѣ α произвольно выбранная, сколь угодно малая величина. Такимъ образомъ получаемъ слѣдующую теорему:

„Надлежащимъ выборомъ числа испытаній n можно достигнуть того, что вѣроятность заключаться отношенію $\frac{m}{n}$ числа повторенія событій въ эти n испытаній къ числу испытаній въ предѣлахъ $p - \alpha$ и $p + \alpha$, гдѣ α произвольно заданная сколь угодно малая величина, будетъ отличаться отъ единицы (т. е. отъ достовѣрности) менѣе чѣмъ на произвольно заданную малую величину ε". Эта знаменитая теорема дана *Яковомъ Бернулли* въ сочиненіи озаглавленномъ: Ars cojectandi, изданномъ въ 1713 г. въ Базелѣ его племянникомъ, Николаемъ Бернулли. Доказательство своей теоремы Яковъ Бернулли обдумывалъ 20 лѣтъ. Его читатель можетъ найти въ „Traité élémentaire du calcul des probabilités", *Lacroix*. Paris, 1864. Изд. 4-е. р. 45 и слѣд.

Теорема эта громаднаго значенія: она указываетъ на весьма важный законъ, что съ увеличеніемъ числа испытаній отношеніе числа появленія событій къ числу испытаній стремится къ вѣроятности событія p. На этомъ законѣ и основано опредѣленіе вѣроятностей à posteriori, единственно возможное, когда дѣло идетъ о такихъ сложныхъ явленіяхъ, какъ явленія соціальныя, когда нѣтъ возможности вычислить всѣ равновозможныя случайности. На этомъ законѣ основана всякая статистика, страхованіе, разныя пенсіонныя и сберегательныя кассы, и т. д.

47. Въ виду столь капитальной важности теоремы Якова Бернулли, мы дадимъ еще другое доказательство, принадлежащее покойному академику П. Л. Чебышеву, отличающееся элементарнымъ характеромъ *).

Въ § 33 мы видѣли, что $P_{n;m}$ — вѣроятность случиться событію E m разъ въ n испытаній есть коэффиціентъ при t^m въ разложеніи такой функціи:

$$V = (pt + 1 - p)^n = \sum_{m=0}^{m=n} P_{n;m} t^m, \tag{1}$$

продифференцируемъ это равенство по t два раза; будемъ имѣть:

$$V' = np(pt + 1 - p)^{n-1} = \sum_{m=0}^{m=n} P_{n;m} m t^{m-1}; \tag{2}$$

$$V'' = n(n-1)p^2(pt + 1 - p)^{n-2} = \sum_{m=0}^{m=n} P_{n;m} m(m-1) t^{m-2}. \tag{3}$$

Положимъ въ этихъ трехъ равенствахъ $t = 1$; будемъ имѣть:

$$\sum_{m=0}^{m=n} P_{n;m} = 1; \tag{4}$$

$$\sum_{m=0}^{m=n} m P_{n;m} = np; \tag{5}$$

$$\sum_{m=0}^{m=n} m(m-1) P_{n;m} = n(n-1)p^2. \tag{6}$$

Складывая послѣднія два равенства мы получимъ:

$$\sum_{m=0}^{m=n} m^2 P_{n;m} = np[1 + (n-1)p]. \tag{7}$$

---

*) Оно записано нами на лекціи проф. Чебышева, читанной въ 1865 г. (въ весеннее полугодіе).

Возьмемъ теперь сумму

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{m=0}^{m=n}\left(\frac{m}{n}-p\right)^2 P_{n;m}=\\&=\frac{1}{n^2}\sum_{m=0}^{m=n} m^2 P_{n;m}-2\frac{p}{n}\sum_{m=0}^{m=n} m P_{n;m}+p^2\sum_{m=0}^{m=n} P_{n;m};\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

вставляя сюда вмѣсто суммъ ихъ значенія изъ (4), (5) и (7), будемъ имѣть послѣ упрощеній:

$$\sum_{m=0}^{m=n}\left(\frac{m}{n}-p\right)^2 P_{n;m}=\frac{p(1-p)}{n}.\tag{9}$$

Означая теперь чрезъ ω малую положительную величину, которую можетъ принять разность $\frac{m}{n}-p$, мы разобьемъ сумму лѣвой части этого равенства на три части такимъ образомъ:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{m=0}^{m=np-n\omega}\left(\frac{m}{n}-p\right)^2 P_{n;m}+\sum_{m=np-n\omega}^{m=np+n\omega}\left(\frac{m}{n}-p\right)^2 P_{n;m}+\\&+\sum_{m=np+n\omega}^{m=n}\left(\frac{m}{n}-p\right)^2 P_{n;m}=\frac{p(1-p)}{n}.\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

Такъ какъ всѣ три суммы состоятъ все изъ положительныхъ членовъ, и потому сами положительны, то отсюда слѣдуетъ, что

$$\sum_{m=0}^{m=np-n\omega}\left(\frac{m}{n}-p\right)^2 P_{n;m}+\sum_{m=np+n\omega}^{m=n}\left(\frac{m}{n}-p\right)^2 P_{n;m}<\frac{p(1-p)}{n}.\tag{11}$$

Если въ каждой изъ этихъ суммъ вмѣсто $\left(\frac{m}{n}-p\right)^2$ подставимъ наименьшее изъ значеній этого выраженія, т. е. ω^2, то это неравенство будетъ имѣть мѣсто à fortiori; т. е. тѣмъ болѣе будетъ имѣть мѣсто неравенство:

$$\sum_{m=0}^{m=np-n\omega} P_{n;m}+\sum_{m=np+n\omega}^{m=n} P_{n;m}<\frac{p(1-p)}{n\omega^2},\tag{12}$$

гдѣ мы еще раздѣлили все на положительную величину ω^2.—Разбивая теперь въ (4) сумму на такія же три части, какъ въ (11), мы будемъ имѣть:

$$\sum_{m=0}^{m=np-n\omega} P_{n;m} + \sum_{m=np-n\omega}^{m=np+n\omega} P_{n;m} + \sum_{m=np-n\omega}^{m=n} P_{n;m} = 1; \qquad (13)$$

вычитая теперь отсюда неравенство (12), получимъ такое:

$$\sum_{m=np-n\omega}^{m=np+n\omega} P_{n;m} > 1 - \frac{p(1-p)}{n\omega^2}. \qquad (14)$$

Но

$$\sum_{m=np-n\omega}^{m=np+n\omega} P_{n;m} = \Pi_{np-n\omega}^{np+n\omega}, \qquad (15)$$

т. е. вѣроятности заключаться числу m повторенія событія въ n испытаній въ предѣлахъ $np - n\omega$ и $np + n\omega$, и какъ туже величину будемъ имѣть вѣроятность $\Pi_{p-\omega}^{p+\omega}$ заключаться отношенію $\frac{m}{n}$ въ предѣлахъ $p - \omega$ и $p + \omega$, то мы будемъ имѣть:

$$\Pi_{p-\omega}^{p+\omega} > 1 - \frac{p(1-p)}{n\omega^2}; \qquad (16)$$

а отсюда и видно, что какъ бы мала ни была задана величина ω, всегда можно выбрать n столь большимъ, что второй членъ второй части этого неравенства будетъ меньше всякой данной величины ε, иначе, что съ неопредѣленнымъ возрастаніемъ n вѣроятность заключаться отношенію $\frac{m}{n}$ появленія событія въ n испытаній къ числу испытаній въ предѣлахъ сколь угодно близкихъ къ вѣроятности p событія E, будетъ стремиться къ единицѣ, т. е. достовѣрности; а это и есть теорема Якова Бернулли.

48. Предыдущій выводъ въ другомъ нѣсколько изложеніи читатель найдетъ въ „Теоріи Вѣроятностей“ профессора *В. П. Ермакова*. (Кіевъ, 1879 г.).

Покойный академикъ В. Г. Имшенецкій въ статьѣ: „Элементарный выводъ закона большихъ чиселъ теоріи вѣроятностей“, помѣщенной въ I томѣ 2-й серіи „Сообщеній Харьковскаго Математическаго Общества, 1889 г.“, показалъ, что при надлежащемъ обобщеніи пріема доказательства проф. Ермакова, получается прямой и весьма простой выводъ *закона большихъ чиселъ*, какъ назвалъ Пуассонъ съ своемъ сочиненіи Recherches sur la probabilité des jugements, 1837 г. одно, весьма общее предложеніе (заключающее въ себѣ теорему Якова Бернулли какъ частный случай), относящееся къ тому случаю, когда вѣроятность событія можетъ измѣняться отъ одного испытанія къ другому и вообще à priori неизвѣстна.

Въ виду того, что событія такого рода наиболѣе часто представляются въ природѣ и жизни соціальной и потому законъ большихъ чиселъ имѣетъ большое значеніе, мы дадимъ здѣсь выводъ Имшенецкаго въ нѣсколько измѣненномъ изложеніи, приблизивъ его къ выводу теоремы Якова Бернулли, данному нами по Чебышеву въ предыдущемъ §.

Означимъ чрезъ p_i и q_i вѣроятности случиться и соотвѣтственно не случиться событію E въ i-ое изъ n испытаній, такъ что слѣдовательно для всякаго i отъ 1 до n будемъ имѣть:

$$p_i + q_i = 1. \tag{1}$$

По второму закону вѣроятность случиться событію E m разъ въ n испытаній въ опредѣленной послѣдовательности представится произведеніемъ:

$$p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot p_{i_3} \cdots p_{i_m} \cdot q_{j_1} \cdot q_{j_2} \cdot q_{j_3} \cdots q_{j_{n-m}}; \tag{2}$$

вычисливъ это произведеніе для всѣхъ возможныхъ послѣдовательностей при повтореніи событія E m разъ въ n испытаній и взявъ сумму, получимъ по первому закону искомую вѣроятность случиться событію m разъ въ n испытаній:

$$P_{n;m} = \sum p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot p_{i_3} \cdots p_{i_m} \cdot q_{j_1} \cdot q_{j_2} \cdot q_{j_3} \cdots q_{j_{n-m}}, \tag{3}$$

гдѣ сумма распространена на всѣ возможныя послѣдовательности, при повтореніи буквы p m разъ, буквы q $n-m$ разъ. Нетрудно видѣть, что это $P_{n;m}$ будетъ коэффиціентомъ при t^m въ разложеніи такой функціи:

$$V(t) = \prod_{i=1}^{i=n} (p_i t + q_i) = \sum_{m=0}^{m=n} P_{n;m} t^m. \tag{4}$$

Продифференцировавъ это равенство два раза, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} V'(t) &= V(t) \sum_{i=1}^{i=n} \frac{p_i}{p_i t + q_i} = \sum_{m=0}^{m=n} m P_{n;m} t^{m-1}; \\ V''(t) &= V'(t) \sum_{i=1}^{i=n} \frac{p_i}{p_i t + q_i} - V(t) \sum_{i=1}^{i=n} \frac{p_i^2}{(p_i t + q_i)^2} = \\ &= \sum_{m=0}^{m=n} m(m-1) P_{n;m} t^{m-2}; \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

или упрощая съ помощію предыдущаго:

$$\left.\begin{aligned} V''(t) = V(t)\left\{\left(\sum_{i=1}^{i=n}\frac{p_i}{p_i t+q_i}\right)^2 - \sum_{i=1}^{i=n}\frac{p_i^2}{(p_i t+q_i)^2}\right\} = \\ = \sum_{m=1}^{m=n} m(m-1) P_{n;m} t^{m-2}. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Полагая въ (4), (5) и (6), $t=1$, будемъ имѣть на основаніи (1) слѣдующее:

$$V(t) = 1 = \sum_{m=0}^{m=n} P_{n;m}; \quad (7)$$

$$V'(t) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i = \sum_{m=0}^{m=n} m P_{n;m}; \quad (8)$$

$$V''(t) = \left(\sum_{i=1}^{i=n} p_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{i=n} p_i^2 = \sum_{m=0}^{m=n} m(m-1) P_{n;m}. \quad (9)$$

Складывая послѣднее съ (8), получимъ:

$$\left(\sum_{i=1}^{i=n} p_i\right)^2 + \sum_{i=1}^{i=n} p_i(1-p_i) = \sum_{m=0}^{m=n} m^2 P_{n;m},$$

или, по (1):

$$\left(\sum_{i=1}^{i=n} p_i\right)^2 + \sum_{i=1}^{i=n} p_i q_i = \sum_{m=0}^{m=n} m^2 P_{n;m}. \quad (10)$$

Возьмемъ теперь опять туже сумму, какъ въ предыдущемъ §:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{m=0}^{m=n}\left(\frac{m}{n}-p\right)^2 P_{n;m} = \\ = \frac{1}{n^2}\sum_{m=0}^{m=n} m^2 P_{n;m} - 2\frac{p}{n}\sum_{m=0}^{m=n} m P_{n;m} + p^2 \sum_{m=0}^{m=n} P_{n;m}; \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

вставляя сюда вмѣсто суммъ второй части ихъ значенія изъ (7), (8), (9), будемъ имѣть:

$$\sum_{m=0}^{m=n}\left(\frac{m}{n}-p\right)^2 P_{n;m}=\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} p_i}{n}\right)^2+\frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} p_i q_i}{n^2}-2p\frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} p_i}{n}+p^2,$$

или, упрощая:

$$\sum_{m=0}^{m=n}\left(\frac{m}{n}-p\right)^2 P_{n;m}=\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} p_i}{n}-p\right)^2+\frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} p_i q_i}{n^2}. \tag{12}$$

Разбивая лѣвую часть этого равенства на три суммы, какъ въ § 47, и выбрасывая среднюю сумму, получимъ такое неравенство:

$$\sum_{m=0}^{m=np-n\omega}\left(\frac{m}{n}-p\right)^2 P_{n;m}+$$

$$+\sum_{m=np+n\omega}^{m=n}\left(\frac{m}{n}-p\right)^2 P_{n;m}<\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} p_i}{n}-p\right)^2+\frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} p_i q_i}{n^2},$$

которое усилится, если мы замѣнимъ въ суммахъ лѣвой части $\left(\frac{m}{n}-p\right)^2$ наименьшимъ его значенiемъ ω^2; раздѣливъ полученное послѣ этой замѣны неравенство на ω^2, получимъ такое:

$$\sum_{m=0}^{m=np-n\omega} P_{n;m}+\sum_{m=np+n\omega}^{m=n} P_{n;m}<\frac{1}{\omega^2}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} p_i}{n}-p\right)^2+\frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} p_i q_i}{n^2\omega^2}. \tag{13}$$

Представивъ теперь (7) въ такомъ видѣ:

$$\sum_{m=0}^{m=np-n\omega} P_{n;m}+\sum_{m=np-n\omega}^{m=np+n\omega} P_{n;m}+\sum_{m=np+n\omega}^{m=n} P_{n;m}=1, \tag{14}$$

и вычтя изъ него предыдущее, получимъ:

$$\sum_{m=np-n\omega}^{m=np+n\omega} P_{n;m}>1-\frac{1}{\omega^2}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} p_i}{n}-p\right)^2-\frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} p_i q_i}{n\omega^2}; \tag{15}$$

но лѣвая часть здѣсь на основанiи перваго закона есть ни что иное, какъ вѣроятность заключаться числу m въ предѣлахъ $np-n\omega$ и $np+n\omega$, которой равна вѣроятность заключаться отношенію $\frac{m}{n}$ въ предѣлахъ $p-\omega$ и $p+\omega$:

$$\sum_{m=np-n\omega}^{m=np+n\omega} P_{n;\,m} = \Pi_{np-n\omega}^{np+n\omega} = \Pi_{p-\omega}^{p+\omega}\,; \tag{16}$$

а потому изъ (15) получаемъ такое неравенство:

$$\Pi_{p-\omega}^{p+\omega} > 1 - \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} p_i}{n} - p\right)^2 - \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} p_i q_i}{n^2\omega^2} \tag{17}$$

для вѣроятности заключаться отношенію $\frac{m}{n}$ въ предѣлахъ $p-\omega$ и $p+\omega$, гдѣ p пока произвольная величина. Если положимъ

$$p = \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} p_i}{n}, \tag{18}$$

т. е. возьмемъ для p среднюю ариѳметическую изъ значеній p_i во всѣ n испытаній, и далѣе положимъ:

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} p_i q_i}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} p_i} = q\,, \tag{19}$$

такъ что q будетъ среднею величиною между самымъ большимъ и самымъ малымъ значеніемъ вѣроятности q_i не быть событію E, для всѣхъ i отъ 1 до n, то какъ изъ (18) и (19) слѣдуетъ

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i q_i = npq, \tag{20}$$

мы получимъ изъ (17) такое неравенство для вѣроятности заключаться отношенію $\frac{m}{n}$ въ предѣлахъ отклоняющихся на ω въ ту и другую сторону отъ средней ариѳметической изъ всѣхъ значеній p_i:

$$\Pi_{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{i=n} p_i-\omega}^{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{i=n} p_i+\omega} > 1 - \frac{pq}{n\omega^2}. \tag{21}$$

Изъ этого неравенства и слѣдуетъ законъ большихъ чиселъ, ибо положивъ

$$\omega = \alpha \tag{22}$$

гдѣ α произвольно малая положительная величина, мы всегда можемъ затѣмъ n выбрать столь большимъ, что будетъ

$$\frac{pq}{n\alpha^2} < \varepsilon, \tag{23}$$

гдѣ ε опять произвольно заданная малая положительная величина, такъ что *надлежащимъ выборомъ числа испытаній можемъ сдѣлать сколь угодно близкою къ единицѣ* (достовѣрности) *вѣроятность заключаться отношенію* $\frac{m}{n}$ *въ предѣлахъ, сколь угодно мало отличающихся отъ средней ариѳметической изъ значеній вѣроятности разсматриваемаго событія во всѣ эти испытанія.*

Теорема Якова Бернулли заключается въ этомъ предположеніи какъ частный случай: если всѣ p_i равны между собою, то изъ (18) будетъ слѣдовать $p_i = p$, а изъ (19) $q = 1 - p$ [въ виду (1)], и формула (21) переходитъ въ (16) § 47.

49. Въ 1866 г. покойный акад. П. Л. Чебышевъ помѣстилъ во 2-мъ томѣ Московскаго математическаго сборника замѣтку: „О среднихъ величинахъ“, въ который даетъ элементарное доказательство одного общаго предложенія о среднихъ величинахъ, частнымъ приложеніемъ котораго является законъ большихъ чиселъ Пуассона, и, какъ частный случай послѣдняго, какъ сейчасъ видѣли, теорема Якова Бернулли.

Имѣемъ N величинъ $x, y, z, \ldots$, изъ которыхъ первая принимаетъ l значеній

$$x_1, x_2, \ldots x_\lambda, \ldots x_l \tag{1}$$

вѣроятности которыхъ соотвѣтственно суть

$$p_1, p_2, \ldots p_\lambda, \ldots p_l, \text{ причемъ } \sum_{\lambda=1}^{\lambda=l} p_\lambda = 1, \tag{1'}$$

вторая—значенія числомъ m:

$$y_1, y_2, \ldots y_\mu, \ldots y_m, \tag{2}$$

вѣроятности которыхъ суть соотвѣтственно:

$$q_1, q_2, \ldots q_\mu, \ldots q_m, \text{ причемъ } \sum_{\mu=1}^{\mu=m} q_\mu = 1, \tag{2'}$$

третья—значенія числомъ n:

$$z_1, z_2, \ldots z_\nu, \ldots z_n, \tag{3}$$

съ вѣроятностями

$$v_1, v_2, \ldots v_r, \ldots v_n, \text{ причемъ } \sum_{\nu=1}^{\nu=n} r_\nu = 1 \tag{3'}$$

и т. д. Математическимъ ожиданіемъ какой либо величины называется сумма всѣхъ ея значеній, помноженныхъ соотвѣтственно на ихъ вѣроятность. Мы означимъ такъ математическія ожиданія первыхъ степеней и квадратовъ величинъ x, y, z:...

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} a_1 &= \sum_{\lambda=1}^{\lambda=l} x_\lambda p_\lambda, & a_2 &= \sum_{\lambda=1}^{\lambda=l} x_\lambda^2 p_\lambda; \\ b_1 &= \sum_{\mu=1}^{\mu=m} y_\mu q_\mu, & b_2 &= \sum_{\mu=1}^{\mu=m} y_\mu^2 q_\mu, \\ c_1 &= \sum_{\nu=1}^{\nu=n} z_\nu r_\nu, & c_2 &= \sum_{\nu=1}^{\nu=n} z_\nu^2 q_\nu; \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

и т. д.

Составимъ теперь выраженіе

$$U = \sum_\lambda^l \sum_\mu^m \sum_\nu^n \ldots (x_\lambda + y_\mu + z_\nu + \ldots - a_1 - b_1 - c_1 - \ldots)^2 p_\lambda q_\mu r_\nu \ldots \tag{6}$$

Раскрывая скобки, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} U = {} & \sum_{1}^{l}{}_\lambda x_\lambda^2 p_\lambda \sum_{1}^{m}{}_\mu q_\mu \sum_{1}^{n}{}_\nu r_\nu \ldots + \sum_{1}^{l}{}_\lambda p_\lambda \sum_{1}^{m}{}_\mu y_\mu^2 q_\nu \sum_{1}^{n}{}_\nu r_\nu \ldots + \\ & + \sum_{1}^{l}{}_\lambda p_\lambda \sum_{1}^{m}{}_\mu q_\mu \sum_{1}^{n}{}_\nu z_\nu^2 r_\nu \ldots + \ldots + 2 \sum_{1}^{l}{}_\lambda x_\lambda p_\lambda \sum_{1}^{m}{}_\mu y_\mu q_\mu \sum_{1}^{n}{}_\nu r_\nu \ldots + \\ & + 2 \sum_{1}^{l}{}_\lambda x_\lambda p_\lambda \sum_{1}^{m}{}_\mu q_\mu \sum_{1}^{n}{}_\nu z_\nu r_\nu \ldots + 2 \sum_{1}^{l}{}_\lambda p_\lambda \sum_{1}^{m} y_\mu q_\mu \sum_{1}^{n}{}_\nu z_\nu r_\nu \ldots + \ldots \\ & - 2(a_1 + b_1 + c_1 + \ldots) \left\{ \sum_{1}^{l}{}_\lambda x_\lambda p_\lambda \sum_{1}^{m}{}_\mu q_\mu \sum_{1}^{n}{}_\nu r_\nu \ldots + \right. \\ & \left. + \sum_{1}^{l}{}_\lambda p_\lambda \sum_{1}^{m}{}_\mu y_\mu q_\mu \sum_{1}^{n}{}_\nu r_\nu \ldots + \sum_{1}^{l} p_\lambda \sum_{1}^{m}{}_\mu q_\mu \sum_{1}^{n}{}_\nu z_\nu r_\nu \ldots + \ldots \right\} + \\ & + (a_1 + b_1 + c_1 + \ldots)^2 \sum_{1}^{l}{}_\lambda p_\lambda \sum_{1}^{m}{}_\mu q_\mu \sum_{1}^{n}{}_\nu r \ldots ; \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

на основаніи (1′), (2′), (3′), (4) и (5) это приметъ такой видъ:

$$\left.\begin{aligned} U &= a_2 + b_2 + c_2 + \ldots + 2b_1c_1 + 2c_1a_1 + 2a_1b_1 + \ldots - \\ &- 2(a_1 + b_1 + c_1 + \ldots)\{a_1 + b_1 + c_1 + \ldots\} + (a_1 + b_1 + c_1 + \ldots)^2 = \\ &= a_2 + b_2 + c_2 + \ldots + 2b_1c_1 + 2c_1a_1 + 2a_1b_1 + \ldots - \\ &\qquad - (a_1 + b_1 + c_1 + \ldots)^2, \end{aligned}\right\} \quad (7')$$

или окончательно:

$$U = a_2 + b_2 + c_2 + \ldots - a_1^2 - b_1^2 - c_1^2 - \ldots \qquad (8)$$

Раздѣлимъ теперь равенство (6) на эту величину, умноженную на α^2; тогда получимъ:

$$\frac{1}{\alpha^2} = \sum_{1}^{l}{}_{\lambda} \sum_{1}^{m}{}_{\mu} \sum_{1}^{n}{}_{\nu} \ldots \left(\frac{x_\lambda + y_\mu + z_\nu + \ldots - a_1 - b_1 - c_1 - \ldots}{\alpha\sqrt{a_2 + b_2 + c_2 + \ldots - a_1^2 - b_1^2 - c_1^2 - \ldots}}\right)^2 p_\lambda q_\mu r_\nu \ldots \qquad (9)$$

Замѣнивъ теперь здѣсь выраженіе въ ( ) нулемъ тамъ, гдѣ численное значеніе его не превосходитъ единицы, слѣдовательно для тѣхъ системъ значеній $x, y, z, \ldots$ для которыхъ сумма

$$x + y + z + \ldots \qquad (10)$$

не выходитъ изъ предѣловъ

$$\left.\begin{aligned} &a_1 + b_1 + c_1 + \ldots - \alpha\sqrt{a_2 + b_2 + c_2 + \ldots - a_1^2 - b_1^2 - c_1^2 - \ldots}, \\ \text{и}\quad &a_1 + b_1 + c_1 + \ldots + \alpha\sqrt{a_2 + b_2 + c_2 + \ldots - a_1^2 - b_1^2 - c_1^2 - \ldots}, \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

для всѣхъ же другихъ единицей, мы уменьшимъ вторую часть; но то, что тамъ останется, представитъ вѣроятность совпаденія тѣхъ значеній $x, y, z, \ldots$, для которыхъ сумма (10) выходитъ изъ предѣловъ (11). Если означимъ чрезъ P вѣроятность не выходить суммѣ (10) изъ этихъ предѣловъ (11), то это будетъ слѣдовательно $1 - P$. Такимъ образомъ чрезъ сказанную замѣну получимъ неравенство:

$$1 - P < \frac{1}{\alpha^2}, \qquad (12)$$

откуда найдемъ:

$$P > 1 - \frac{1}{\alpha^2} \qquad (13)$$

для вѣроятности P не выходить суммѣ (10) изъ предѣловъ (11). Положивъ

$$\alpha = \frac{\sqrt{N}}{t}, \tag{14}$$

мы получаемъ изъ предыдущаго такую теорему:

I. „Если математическія ожиданія величинъ

$$x, y, z, \dots; x^2, y^2, z^2, \dots, \tag{15}$$

суть

$$a_1, b_1, c_1, \dots; a_2, b_2, c_2, \dots, \tag{16}$$

то вѣроятность, что среднее ариѳметическое N величинъ $x, y, z, \dots$ отъ средняго ариѳметическаго математическихъ ожиданій этихъ величинъ разнится не болѣе какъ на

$$\frac{1}{t}\sqrt{\frac{a_2+b_2+c_2+\dots}{N} - \frac{a_1^2+b_1^2+c_1^2+\dots}{N}}, \tag{17}$$

при всякомъ значеніи t будетъ превосходить

$$1 - \frac{t^2}{N}.“ \tag{18}$$

Всякій разъ, когда количества (16) не превосходятъ какого либо конечнаго предѣла, то же будетъ и съ ихъ средними ариѳметическими и ихъ квадратовъ, входящими въ формулу (17), а слѣдовательно и корнемъ квадратнымъ изъ ихъ разности, и это какъ бы велико N ни было. Поэтому, выбравъ t достаточно большимъ, можно сдѣлать количество (17) сколь угодно малымъ. А какъ при всякомъ t съ увеличеніемъ N до безконечности дробь $\frac{t^2}{N}$ стремится къ нулю, то мы получаемъ отсюда такую теорему:

II. „Если математическія ожиданія величинъ

$$U_1, U_2, U_3, \dots \tag{19}$$

и ихъ квадратовъ

$$U_1^2, U_2^2, U_3^2, \dots \tag{20}$$

не превосходятъ какого либо конечнаго предѣла, то вѣроятность, что среднее ариѳметическое N такихъ величинъ отъ средняго ихъ математическихъ ожиданій разнится менѣе, чѣмъ на какую нибудь данную величину, съ возрастаніемъ числа N до ∞, стремится къ единицѣ“.

Если предположимъ теперь, что величины (19) приводятся къ 1 или 0, смотря потому, случается-ли событіе E или нѣтъ, то сумма

$$U_1 + U_2 + \cdots + U_N \tag{21}$$

представитъ число повтореній событія E въ N испытаній, и потому

$$\frac{U_1 + U_2 + \cdots + U_N}{N} \tag{22}$$

будетъ его отношеніе къ числу испытаній. Если $p_1, p_2, \ldots p_N$ суть значенія вѣроятности случиться событію E для перваго, второго, ... N-аго испытанія, то математическія ожиданія величинъ U_k и ихъ квадратовъ U_k^2 будутъ:

$$p_i \cdot 1 + (1 - p_i) \cdot 0 = p_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots N) \tag{23}$$

$$p_i \cdot 1^2 + (1 - p_i) \cdot 0^2 = p_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots N) \tag{24}$$

т. е. приведутся къ вѣроятностямъ $p_1, p_2, \cdots p_N$, и слѣдовательно среднее ариѳметическое ихъ ожиданій къ средней ариѳметической этихъ вѣроятностей:

$$\frac{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_N}{N}.$$

Вслѣдствіе этого, изъ предыдущей теоремы вытекаетъ такая, выражающая законъ большихъ чиселъ:

III. „Вѣроятность, что отношеніе числа повтореній событія къ числу испытаній разнится отъ средней ариѳметической величины вѣроятности событія въ эти испытанія менѣе чѣмъ на какую нибудь данную величину, съ увеличеніемъ числа испытаній до безконечности стремится къ единицѣ“.

Въ частномъ случаѣ, когда вѣроятность событія во всѣ испытанія остается одна и таже, отсюда получается, какъ уже показано выше, теорема Якова Бернули.

50. Въ предыдущемъ § мы предполагали вмѣстѣ съ Чебышевымъ, что величины $x, y, z, \ldots$ получаютъ рядъ отдѣльно стоящихъ значеній; проф. *И. В. Слешинскій* распространилъ доказательство Чебышева на тотъ случай, когда онѣ принимаютъ каждая непрерывный рядъ значеній, первая отъ x_0 до x_1, вторая отъ y_0 до y_1, третья отъ z_0 до z_1 и т. д. Въ этомъ случаѣ ихъ вѣроятности будутъ функціями ихъ значеній:

$$p = f(x), \qquad q = \varphi(y), \qquad r = \psi(z), \ldots \tag{1}$$

и суммы 1′), 2′), 3′) и (4), (5), (6) предыдущаго § обратятся въ интегралы:

$$\left.\begin{aligned}&\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx=1\,,\\ &\int_{y_0}^{y_1} \varphi(x)\,dx=1\,,\\ &\int_{z_0}^{z_1} \psi(x)\,dx=1\,,\end{aligned}\right\}(2)\quad \left.\begin{aligned}a_1&=\int_{x_0}^{x_1} x f(x)\,dx\,,\\ b_1&=\int_{y_0}^{y_1} y\varphi(y)\,dy\,,\\ c_1&=\int_{z_0}^{z_1} z\psi(z)\,dz,\end{aligned}\right\}(3)\quad \left.\begin{aligned}a_2&=\int_{x_0}^{x_1} x^2 f(x)\,dx\,,\\ b_2&=\int_{y_0}^{y_1} y^2\varphi(y)\,dy\,,\\ c_2&=\int_{z_0}^{z_1} z^2\psi(z)\,dz.\end{aligned}\right\}(4)$$

и т. д.

$$U=\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1}(x+y+z+\ldots-a_1-b_1-c_1-\ldots)^2 f(x)\varphi(y)\psi(z)\ldots dx\,dy\,dz\ldots$$

$$=a_2+b_2+c_2+\ldots-a_1^2-b_1^2-c_1^2-\ldots\,. \qquad (5)$$

Дѣля это на

$$\alpha^2(a_2+b_2+c_2+\ldots-a_1^2-b_1^2-c_1^2-\ldots)\,, \qquad (6)$$

будемъ имѣть:

$$\frac{1}{\alpha^2}=\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1}\ldots\left(\frac{x+y+z+\ldots-a_1-b_1-c_1-\ldots}{\alpha\sqrt{a_2+b_2+c_2+\ldots-a_1^2-b_1^2-c_1^2\ldots}}\right)^2 f(x)\varphi(y)\psi(z)\ldots dx\,dy\,dz\ldots \qquad (7)$$

Замѣняя здѣсь, какъ и выше, выраженіе въ ( ) нулемъ, когда оно не болѣе единицы, и единицей, когда оно болѣе единицы, мы вторую часть уменьшимъ, и въ тоже время сведемъ на вѣроятность $1-P$, что значенія x, y, z, ... даютъ для суммы

$$x+y+z+\ldots \qquad (8)$$

значенія, выходящія изъ предѣловъ

$$\left.\begin{aligned}&a_1+b_1+c_1+\ldots-\alpha\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2+\ldots-a_1^2-b_1^2-c_1^2-\ldots}\,,\\ &a_1+b_1+c_1+\ldots+\alpha\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2+\ldots-a_1^2-b_1^2-c_1^2-\ldots}\,;\end{aligned}\right\}(9)$$

откуда для вѣроятности P не выходить изъ этихъ предѣловъ получимъ такое неравенство:

$$P>1-\frac{1}{\alpha^2}. \qquad (10)$$

51, На основаніи теоремы Якова Бернули мы можемъ опредѣлить, каково должно быть отношеніе между ставкою и выигрышемъ для безобидности игры или лотереи, т. е. для того, чтобы выигрышъ или проигрышъ былъ дѣломъ случая. Положимъ, что игрокъ A ставитъ каждый разъ α, а когда выигрываетъ, то получаетъ β. Пусть p будетъ вѣроятность для A выиграть въ одну игру. Если изъ n сыгранныхъ партій A выигралъ m, то его окончательный выигрышъ будетъ:

$$m\beta - n\alpha; \tag{1}$$

это можно такъ представить:

$$m\beta - n\alpha = n\beta\left(\frac{m}{n} - \frac{\alpha}{\beta}\right) = n\beta\left(\frac{m}{n} - p + p - \frac{\alpha}{\beta}\right). \tag{2}$$

Пусть

$$p - \frac{\alpha}{\beta} = \pm k, \tag{3}$$

означая слѣдовательно чрезъ k абсолютное значеніе этой разности.

По теоремѣ Якова Бернули всегда можно найти столь большое значеніе n, что будетъ

$$\left|\frac{m}{n} - p\right| < k; \tag{4}$$

слѣдовательно $m\beta - n\alpha$ по (2) будетъ одного знака съ $p - \frac{\alpha}{\beta}$, т. е. > 0, когда $p - \frac{\alpha}{\beta} = +k$, и < 0, когда $p - \frac{\alpha}{\beta} = -k$; слѣдовательно въ первомъ случаѣ A на послѣдокъ будетъ всегда въ выигрышѣ, во второмъ всегда въ проигрышѣ: игра въ обоихъ случаяхъ слѣдовательно не будетъ безобидною. Отсюда видимъ, что для безобидности нужно принять $k = 0$, т. е.

$$\frac{\alpha}{\beta} = p, \tag{5}$$

т. е. для безобидности игры или лотереи отношеніе ставки къ выигрышу должно равняться вѣроятности выиграть игроку A партію. Если играютъ двое, A и B, вѣроятности выиграть партію для которыхъ соотвѣтственно означимъ чрезъ p и q, причемъ

$$p + q = 1, \tag{6}$$

предполагая, что одинъ изъ нихъ непремѣнно выигрываетъ, а ставки ихъ чрезъ a и b соотвѣтственно, то изъ предыдущаго легко вывести, каково должно быть отношеніе между ставками обоихъ для безобидности игры. Дѣйствительно, A ставитъ a, а когда выигрываетъ, то получаетъ и свою ставку и ставку игрока B, слѣдовательно $a+b$; слѣдовательно то, что въ предыдущей задачѣ было означено чрезъ α, теперь есть a, а то, что тамъ было означено чрезъ β, теперь есть $a+b$; полагая въ (5): $\alpha = a$, $\beta = a+b$, мы будемъ имѣть:

$$\frac{a}{a+b} = p, \tag{7}$$

откуда по извѣстному свойству пропорціи $\left(\text{такъ какъ } p = \frac{p}{1}\right)$, получимъ:

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{1-p}, \tag{8}$$

или по (6):

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q}, \tag{9}$$

т. е. ставки должны быть пропорціональны вѣроятностямъ выиграть партію.

ГЛАВА VI-я.

Опредѣленіе вѣроятностей à posteriori.

52. Теорема Якова Бернули, также ея обобщеніе—законъ большихъ чиселъ Пуассона, указываютъ на возможность опредѣленія вѣроятности à posteriori: производя большое число испытаній и отмѣчая всякій разъ появленіе ожидаемаго событія, мы будемъ имѣть въ отношеніи $\frac{m}{n}$ числа m появленія событія къ числу n испытаній приближенное значеніе вѣроятности p событія и тѣмъ болѣе точное, чѣмъ больше число произведенныхъ испытаній. Опредѣленію вѣроятностей à posteriori будетъ посвящена настоящая глава.

53. Когда мы не знаемъ величины вѣроятности p событія E, то для насъ всѣ слѣдующія значенія ея равновозможны:

$$p = \frac{1}{N},\ \frac{2}{N},\ \frac{3}{N}, \ldots \frac{N-1}{N}, \tag{1}$$

число которыхъ есть $N-1$, гдѣ N число очень большое. Означая чрезъ P вѣроятность каждаго изъ этихъ значеній p, каждой *гипотезы*, мы будемъ имѣть по первому закону вѣроятностей:

$$(N-1)P = 1, \tag{2}$$

откуда

$$P = \frac{1}{N-1}. \tag{3}$$

Теперь, вѣроятность случиться событію m разъ въ n испытаній, въ предположеніи, что

$$p = \frac{\lambda}{N}, \tag{4}$$

по формулѣ (10) § 33 такъ представится:

$$P^{(\lambda)}_{n;m} = \frac{n}{m!(n-m)!}\left(\frac{\lambda}{N}\right)^m \left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^{n-m}. \tag{5}$$

Вѣроятность предположенія (4) насчетъ значенія p по третьему закону опредѣлится такою формулою:

$$\Pi_\lambda = \frac{\frac{n!}{m!(n-m)!}\left(\frac{\lambda}{N}\right)^m\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^{n-m}\cdot\frac{1}{N-1}}{\sum\limits_{h=0}^{h=N}\frac{n!}{m!(n-m)!}\left(\frac{h}{N}\right)^m\left(1-\frac{h}{N}\right)^{n-m}\cdot\frac{1}{N-1}}, \tag{6}$$

гдѣ мы могли начать суммированіе съ нуля вмѣсто единицы потому, что прибавленный къ суммѣ членъ есть очевидно нуль; верхнимъ же предѣломъ написали N вмѣсто $N-1$ согласно установленному въ Теоріи конечныхъ разностей правилу писать верхнимъ предѣломъ непосредственно слѣдующее число за самымъ большимъ значеніемъ аргумента суммы. Сокращая (6) на общихъ множителей числителя и знаменателя, будемъ имѣть:

$$\Pi_\lambda = \frac{\left(\frac{\lambda}{N}\right)^m\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^{n-m}}{\sum\limits_{h=0}^{h=N}\left(\frac{h}{N}\right)^m\left(1-\frac{h}{N}\right)^{n-m}}. \tag{7}$$

Съ помощію этой формулы на основаніи перваго закона для вѣроятности $J_{\frac{\lambda_0}{N}}^{\frac{\lambda_1}{N}}$, что p имѣетъ одно изъ значеній

$$\frac{\lambda_0}{N},\ \frac{\lambda_0+1}{N},\ \frac{\lambda_0+2}{N},\ldots\frac{\lambda_1-1}{N}, \tag{8}$$

мы найдемъ такую формулу:

$$J_{\frac{\lambda_0}{N}}^{\frac{\lambda_1}{N}} = \frac{\sum\limits_{\lambda=\lambda_0}^{\lambda=\lambda_1}\left(\frac{\lambda}{N}\right)^m\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^{n-m}}{\sum\limits_{h=0}^{h=N}\left(\frac{h}{N}\right)^m\left(1-\frac{h}{N}\right)^{n-m}}. \tag{9}$$

Мы предположили здѣсь N числомъ очень большимъ, а потому можно входящія сюда суммы замѣнить интегралами, причемъ погрѣшности ε_1 и ε, которыя мы сдѣлаемъ соотвѣтственно въ числителѣ и знаменателѣ выраженія (9), будутъ одного порядка съ членами суммъ. Сдѣлавъ это, будемъ имѣть:

$$J_{\frac{\lambda_0}{N}}^{\frac{\lambda_1}{N}} = \frac{\int_{\lambda_0}^{\lambda}\left(\frac{\lambda}{N}\right)^m\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^{n-m}dx+\varepsilon_1}{\int_0^N\left(\frac{\lambda}{N}\right)^m\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^{n-m}dx+\varepsilon}. \tag{10}$$

Полагая здѣсь $\frac{\lambda}{N}=x$, слѣдовательно $d\lambda=Ndx$, далѣе $\frac{\lambda_0}{N}=x_0$, $\frac{\lambda_1}{N}=x_1$, и сокращая за тѣмъ на N, мы получимъ:

$$J_{x_0}^{x_1}=\frac{\int_{x_0}^{x_1} x^m(1-x)^{n-m}\,dx+\frac{\varepsilon_1}{N}}{\int_0^1 x^m(1-x)^{n-m}\,dx+\frac{\varepsilon}{N}}. \tag{11}$$

Переходя теперь къ предѣлу, положивъ $N=\infty$, мы получимъ окончательно такое выраженіе для вѣроятности, что p имѣетъ значеніе лежащее между x_0 и x_1:

$$J_{x_0}^{x_1}=\frac{\int_{x_0}^{x_1} x^m(1-x)^{n-m}\,dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^{n-m}\,dx}. \tag{12}$$

53. Входящій въ знаменатель этой формулы интегралъ

$$\int_0^1 x^m(1-x)^{n-m}\,dx \tag{1}$$

легко вычисляется. Полагая $x^m dx=dv$, $(1-x)^{n-m}=u$, по формулѣ интегрированія по частямъ будемъ имѣть:

$$\int x^m(1-x)^{n-m}\,dx=\frac{x^{m+1}(1-x)^{n-m}}{m+1}+\frac{n-m}{m+1}\int x^{m+1}(1-x)^{n-m-1}\,dx; \tag{2}$$

но

$$x^{m+1}=x^m\cdot x=-x^m(1-x-1);$$

слѣдовательно равенству (2) можно дать такой видъ:

$$\int x^m(1-x)^{n-m}\,dx=\frac{x^{m+1}(1-x)^{n-m}}{m+1}-$$

$$-\frac{n-m}{m+1}\int x^m(1-x)^{n-m}\,dx+\frac{n-m}{m+1}\int x^m(1-x)^{n-m-1}\,dx,$$

откуда получимъ:

$$\int x^m(1-x)^{n-m}\,dx=\frac{x^{m+1}(1-x)^{n-m}}{n+1}+\frac{n-m}{n+1}\int x^m(1-x)^{n-m-1}dx. \tag{3}$$

Взявъ опредѣленный интегралъ отъ 0 до 1, будемъ имѣть:

$$\int_0^1 x^m(1-x)^{n-m}\,dx = \frac{n-m}{n+1}\int_0^1 x^m(1-x)^{n-m-1}\,dx. \tag{4}$$

Перемѣняя здѣсь n на $n-1$, $n-2$, ... $m+1$, мы сведемъ интегралъ къ такому:

$$\int_0^1 x^m\,dx = \frac{1}{n+1}; \tag{5}$$

и перемножая полученныя такимъ образомъ равенства, по сокращеніи найдемъ:

$$\int_0^1 x^m(1-x)^{n-m}\,dx = \frac{(n-m)(n-m-1)\ldots 3.2.1}{(n+1).n.(n-1)\ldots(m+2)(m+1)}, \tag{6'}$$

что можно и такъ представить:

$$\int_0^1 x^m(1-x)^{n-m}\,dx = \frac{(n-m)!\,m!}{(n+1)!}. \tag{6}$$

Внося это въ (12) предыдущаго §, будемъ имѣть:

$$J_{x_0}^{x_1} = \frac{(n+1)!}{m!\,(n-m)!}\int_{x_0}^{x_1} x^m(1-x)^{n-m}\,dx. \tag{7}$$

Эта формула напоминаетъ своимъ видомъ формулу (10) § 33:

$$P_{n;\,m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}p^m(1-p)^{n-m}, \tag{8}$$

въ которую переходитъ, если чрезъ p обозначить нѣкоторое среднее значеніе между x_0 и x_1; тогда, такъ какъ подъинтегральная функція не мѣняетъ своего знака между предѣлами интеграла, по извѣстному предложенію интегральнаго исчисленія мы будемъ имѣть:

$$\int_{x_0}^{x_1} x^m(1-x)^{n-m}dx = (x_1-x_0)\,[x_0+\theta\,(x_1-x_0)]^m[1-x_0-\theta\,(x_1-x_0)]^{n-m}; \tag{9}$$

полагая $x_0+\theta\,(x_1-x_0)=p$, мы получимъ отсюда:

$$\int_{x_0}^{x_1} x^m(1-x)^{n-m}\,dx = (x_1-x_0)\,p^m(1-p)^{n-m}; \tag{10}$$

внося это въ (7) и принимая тамъ еще

$$(n+1)(x_1-x_0)=1, \tag{11}$$

слѣдовательно

$$x_1-x_0=\frac{1}{n+1}, \tag{12}$$

мы переведемъ формулу (7) въ (8).

55. Формула (7) предыдущаго § даетъ вѣроятность заключаться вѣроятности p событія E въ предѣлахъ x_0 и x_1, когда это событіе случилось m разъ въ n испытаній. Эта вѣроятность $J_{x_0}^{x_1}$ измѣняется, какъ съ шириною промежутка отъ x_0 до x_1, такъ и съ положеніемъ его въ ряду $0-1$ всѣхъ возможныхъ для вѣроятности p событія значеній. Если пожелаемъ опредѣлить maximum этой вѣроятности, то должны фиксировать ширину интервала отъ x_0 до x_1, чтобы сдѣлать вопросъ опредѣленнымъ: тогда вопросъ сведется къ опредѣленію положенія середины этого промежутка въ ряду всѣхъ возможныхъ для p значеній. Для насъ особенное значеніе имѣетъ случай безконечно-малаго промежутка. Итакъ положимъ

$$x_1-x_0=\alpha, \tag{1}$$

гдѣ α безконечно малая величина, и

$$\frac{x_1+x_0}{2}=t; \tag{2}$$

— это среднее въ промежуткѣ значеніе p. Отсюда находимъ:

$$x_0=t-\frac{1}{2}\alpha,\quad x_1=t+\frac{1}{2}\alpha. \tag{3}$$

Внося это въ формулу (7) предыдущаго §, будемъ имѣть:

$$J_{t-\frac{1}{2}\alpha}^{t+\frac{1}{2}\alpha}=\frac{(n+1)!}{m!(n-m)!}\int_{t-\frac{1}{2}\alpha}^{t+\frac{1}{2}\alpha}x^m(1-x)^{n-m}\,dx. \tag{4}$$

Дифференцируя это по t и приравнивая результатъ нулю, получимъ такое уравненіе для опредѣленія того значенія t, при которомъ $J_{t-\frac{1}{2}\alpha}^{t+\frac{1}{2}\alpha}$ можетъ быть maximum:

$$\frac{dJ_{t-\frac{1}{2}\alpha}^{t+\frac{1}{2}\alpha}}{dt}=\frac{(n+1)!}{m!\,(n-m)!}\left\{\left(t+\frac{1}{2}\alpha\right)^m\left(1-\frac{1}{2}\alpha-t\right)^{n-m}-\right.$$

$$\left.-\left(t-\frac{1}{2}\alpha\right)^m\left(1+\frac{1}{2}\alpha-t\right)^{n-m}\right\}=0\,, \qquad (5)$$

или, разлагая по степенямъ α и сокращая:

$$\alpha t^{m-1}(1-t)^{n-m-1}\{m(1-t)-(n-m)t\}+\ldots=0,$$

или, еще упрощая:

$$\alpha t^{m-1}(1-t)^{n-m-1}\{m-nt\}+\ldots=0\,, \qquad (6)$$

гдѣ точками обозначены члены съ высшими степенями α. Пренебрегая ими, мы получимъ отсюда три значенія:

$$t=0\,, \qquad t=1\,, \qquad t=\frac{m}{n}\,; \qquad (7)$$

но изъ нихъ первыя два не годятся, ибо для перваго событіе не могло бы повториться m разъ, для второго оно случилось бы всѣ n разъ; остается третье:

$$t=\frac{m}{n}, \qquad (8)$$

которое даетъ наивѣроятнѣйшее значеніе p въ предположеніи предѣловъ значеній для p безконечно близкими. Что вѣроятность $J_{t-\frac{1}{2}\alpha}^{t+\frac{1}{2}\alpha}$ для этого значенія будетъ maximum, слѣдуетъ изъ того, что во второй производной главный членъ, какъ то видно изъ (6), будетъ:

$$\alpha\frac{(n+1)!}{m!\,(n-m)!}\left(\frac{m}{n}\right)^{m-1}\left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-m-1}.(-n)<0. \qquad (9)$$

Формула (8) показываетъ, что наивѣроятнѣйшее значеніе для p будетъ равно отношенію $\frac{m}{n}$; — результатъ согласный съ теоремою Якова Бернули.

56. Разсмотримъ теперь, какъ вычисляется вѣроятность находиться числу p въ предѣлахъ $\frac{m}{n}+\beta_0$ и $\frac{m}{n}+\beta_1$, близкихъ къ наивѣроятнѣйшему значенію p, т. е. $\frac{m}{n}$. По формулѣ (7) § 54 имѣемъ:

$$J^{\frac{m}{n}+\beta_1}_{\frac{m}{n}+\beta_0}=\frac{(n+1)!}{m!\,(n-m)!}\int_{\frac{m}{n}+\beta_0}^{\frac{m}{n}+\beta_1} x^m(1-x)^{n-m}\,dx\,; \tag{1}$$

положимъ

$$x=\frac{m}{n}+z\,; \tag{2}$$

тогда предѣлами интеграла по z будутъ β_0 и β_1, и мы будемъ имѣть:

$$J^{\frac{m}{n}+\beta_1}_{\frac{m}{n}+\beta_0}=\frac{(n+1)!}{m!\,(n-m)!}\int_{\beta_0}^{\beta_1}\left(\frac{m}{n}+z\right)^m\left(\frac{n-m}{n}-z\right)^{n-m}dz, \tag{3}$$

или

$$J^{\frac{m}{n}+\beta_1}_{\frac{m}{n}+\beta_0}=\frac{(n+1)!}{m!(n-m)!}\cdot\frac{m^m(n-m)^{n-m}}{n^n}\int_{\beta_0}^{\beta_1}\left(1+\frac{n}{m}z\right)^m\left(1-\frac{nz}{n-m}\right)^{n-m}dz. \tag{4}$$

Предполагая m, n, $n-m$ очень большими, можемъ первый множитель предъ интеграломъ преобразовать съ помощію формулы Стирлинга [(1) § 38], какъ то было сдѣлано для $P_{n;\,m}$ въ § 38; тогда второй множитель предъ интеграломъ сократится, и мы будемъ имѣть:

$$J^{\frac{m}{n}+\beta_1}_{\frac{m}{n}+\beta_0}=\frac{n+1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{n}{m\,(n-m)}}\int_{\beta_0}^{\beta_1}\left(1+\frac{n}{m}z\right)^m\left(1-\frac{n}{n-m}z\right)^{n-m}dz. \tag{5}$$

Чтобы избавиться отъ большихъ показателей подъ знакомъ интеграла, мы прибѣгаемъ, какъ въ § 38, къ логариѳмамъ, съ помощію разложенія которыхъ въ рядъ по формуламъ (a) и (b) названнаго §, останавливаясь на членахъ съ z^2, находимъ:

$$\log\left[\left(1+\frac{n}{m}z\right)^m\left(1-\frac{n}{n-m}z\right)^{n-m}\right]=-\frac{n^3}{2m\,(n-m)}z^2+\ldots, \tag{6}$$

откуда

$$\left(1+\frac{n}{m}z\right)^m\left(1-\frac{n}{n-m}z\right)^{n-m}=e^{-\frac{n^3}{2m(n-m)}z^2+\ldots}. \tag{7}$$

Для того, чтобы можно было воспользоваться формулами (a) и (b) § 38, должно быть

$$\frac{n}{m}z<1\,,\quad \frac{n}{n-m}z<1\,, \tag{8}$$

что конечно будетъ выполнено, если численныя значенія β_0 и β_1 будутъ менѣе наименьшей изъ дробей $\frac{m}{n}$ и $\frac{n-m}{n}$. Внося изъ (7) (отбросивъ тамъ члены обозначенные точками) въ (5), находимъ:

$$J_{\frac{m}{n}+\beta_0}^{\frac{m}{n}+\beta_1}=\frac{n+1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{n}{m(n-m)}}\int_{\beta_0}^{\beta_1} e^{-\frac{n^3}{2m(n-m)}z^2}\,dz. \tag{9}$$

Полагая

$$t=\sqrt{\frac{n^3}{2m(n-m)}}\,z, \tag{10}$$

$$t_0=\sqrt{\frac{n^3}{2m(n-m)}}\,\beta_0,\quad t_1=\sqrt{\frac{n^3}{2m(n-m)}}\,\beta_1, \tag{11}$$

мы получимъ окончательно такую формулу для искомой вѣроятности заключаться p въ предѣлахъ близкихъ къ $\frac{m}{n}$:

$$J_{\frac{m}{n}+\sqrt{\frac{2m(n-m)}{n^3}}\,t_0}^{\frac{m}{n}+\sqrt{\frac{2m(n-m)}{n^3}}\,t_1}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_0}^{t_1} e^{-t^2}\,dt. \tag{12}$$

Въ частномъ случаѣ $t_0=-t_1$, будемъ имѣть отсюда:

$$J_{\frac{m}{n}-\sqrt{\frac{2m(n-m)}{n^3}}\,t_1}^{\frac{m}{n}+\sqrt{\frac{2m(n-m)}{n^3}}\,t_1}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{t_1} e^{-t^2}\,dt. \tag{13}$$

Изъ этой формулы опять можно получить теорему Якова Бернули, ибо вѣроятность заключаться вѣроятности p въ предѣлахъ при J таже, что заключаться разности

$$p-\frac{m}{n}\ \text{въ предѣлахъ}\ \pm\sqrt{\frac{2m(n-m)}{n^3}}\,t_1; \tag{14}$$

выбравъ t_1 такимъ, чтобы вторая часть въ (13) отличалась бы отъ 1 на сколь угодно малую величину ε, мы можемъ затѣмъ выбрать n столь большимъ, что будетъ

$$\sqrt{\frac{2m(n-m)}{n^3}}\,t_1<\alpha, \tag{15}$$

гдѣ α произвольно-малая величина, и слѣдовательно надлежащимъ выборомъ числа n сдѣлать вѣроятность—отличаться p отъ $\frac{m}{n}$ на сколь угодно малую величину, сколь угодно близкою къ единицѣ, согласно съ теоремою Якова Бернули. То что мы теперь сдѣлали, представляетъ обратное тому, что было сдѣлано въ гл. IV: тамъ намъ было дано p, и мы нашли, что съ увеличенiемъ числа испытанiй n, отношенiе $\frac{m}{n}$, числа наступленiя событiя къ числу испытанiй, стремится къ p; теперь, не зная p, мы нашли, что наоборотъ, наивѣроятнѣйшее значенiе p будетъ равно этому отношенiю.

Такимъ образомъ обратнымъ путемъ пришли къ тому же выводу—теоремѣ Якова Бернули; чрезъ это прiобрѣтено надежное основанiе для опредѣленiя вѣроятностей à posteriori путемъ опыта и наблюденiй, на на чемъ основана вся статистика и построенныя на ней учрежденiя: сберегательныя, эмеритальныя кассы, страхованiе и проч.

ГЛАВА VII-я.

Опредѣленіе вѣроятности будущихъ событій по наблюденнымъ.

57. Найдемъ вѣроятность случиться событію m' разъ въ n' испытаній, не зная его вѣроятности, но зная, что въ n испытаній оно случилось m разъ. Мы тогда рѣшимъ задачу, выставленную въ заголовкѣ главы, задачу опредѣленія вѣроятности будущихъ событій по наблюденнымъ. Эта задача рѣшается по четвертому закону, подобно тому, какъ задача предыдущей главы была рѣшена нами на основаніи третьяго закона.

Вѣроятность случиться событію E m' разъ въ n' испытаній въ гипотезѣ

$$p = \frac{\lambda}{N}, \tag{1}$$

выразится по (3) § 34 такою формулою:

$$\frac{n'!}{m'!(n'-m')!}\left(\frac{\lambda}{N}\right)^{m'}\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^{n'-m'}; \tag{2}$$

вѣроятность же самой гипотезы (1) по (7) § 52 выражается такъ:

$$\Pi_\lambda = \frac{\left(\frac{\lambda}{N}\right)^{m}\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^{n-m}}{\sum\limits_{h=0}^{h=N}\left(\frac{h}{N}\right)^{m}\left(1-\frac{h}{N}\right)^{n-m}}; \tag{3}$$

а потому по четвертому закону—формула (7) § 25, мы будемъ имѣть для искомой вѣроятност $K_{n';m'}$ случиться событію m' разъ въ n' испытаній, если оно случилось m разъ въ n испытаній, такое выраженіе:

$$K'_{n';m'} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=N}\frac{\frac{n'!}{m'!(n'-m')!}\left(\frac{\lambda}{N}\right)^{m'}\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^{n'-m'}\left(\frac{\lambda}{N}\right)^{m}\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^{n-m}}{\sum\limits_{h=0}^{h=N}\left(\frac{h}{N}\right)^{m}\left(1-\frac{h}{N}\right)^{n-m}}, \tag{4'}$$

или

$$K_{n';m'} = \frac{n'!}{m'!(n'-m')!} \frac{\sum\limits_{\lambda=0}^{\lambda=N} \left(\frac{\lambda}{N}\right)^{m+m'} \left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^{n+n'-m-m'}}{\sum\limits_{h=0}^{h=N} \left(\frac{h}{N}\right)^{m} \left(1-\frac{h}{N}\right)^{n-m}}. \tag{4}$$

Замѣняя здѣсь суммы интеграломъ, подобно тому, какъ то было нами сдѣлано въ § 53, мы сдѣлаемъ погрѣшность одного порядка съ членами суммъ; по введеніи же новой перемѣнной и положеніи $N=\infty$, мы получимъ точную формулу:

$$K_{n';m'} = \frac{n'!}{m'!(n'-m')!} \frac{\int_0^1 (1-x)^{m+m'}(1-x)^{n+n'-m-m'}\,dx}{\int_0^1 (1-x)^m (1-x)^{n-m}\,dx}. \tag{5}$$

Входящіе сюда интегралы суть Эйлеровы перваго рода, которые были нами вычислены въ § 54 [формула (6)]; внося ихъ значенія, опредѣленныя по этой формулѣ, мы будемъ имѣть такое выраженіе для искомой вѣроятности $K_{n';m'}$:

$$K_{n';m'} = \frac{n'!}{m'!(n'-m')!} \cdot \frac{(m+m')!(n+n'-m-m')!}{(n+n'+1)!} \cdot \frac{(n+1)!}{m!(n-m)!}. \tag{6}$$

Примѣръ. Если въ n испытаній событіе случалось каждый разъ, то какъ велика вѣроятность, что оно случится въ $n+1$-е испытаніе? Отвѣтъ даетъ наша формула, въ которой слѣдуетъ принять $m=n$, $n'=1$, $m'=1$; по сокращеніи мы получимъ:

$$K_{1;1} = \frac{n+1}{n+2}, \tag{7}$$

(такъ какъ принимаютъ $0!=1$).

58. Найдемъ теперь наивѣроятнѣйшее число повтореній событія въ n' испытаній, если въ n испытаній оно случилось m разъ, т. е. то значеніе m', для котораго $K_{n';m'}$, опредѣляемое формулою (6) предыдущаго §, получаетъ наибольшее значеніе. $K_{n';m'}$ будетъ maximum для того значенія m', для котораго будетъ

$$K_{n';m'-1} \leqq K_{n';m'} \geqq K_{n';m'+1}. \tag{1}$$

Подставляя сюда вмѣсто $K_{n';m'-1}$, $K_{n';m'}$ и $K_{n';m'+1}$ ихъ выраженія по формулѣ (6) предыдущаго § и сокращая на одинаковые множители, въ нихъ входящіе, получимъ:

$$\frac{(n+n'-m-m')(n+n'-m-m'+1)}{(n'-m'+1)(n'-m')} \leqq \frac{(m+m')(n+n'-m-m')}{m'(n'-m')} \overline{\gtrdot}$$

$$\overline{\gtrdot} \frac{(m+m')(m+m'+1)}{m'(m'+1)}; \tag{2}$$

написавъ ихъ отдѣльно, можно будетъ еще сократить, такъ что получатся такія два неравенства:

$$\frac{n+n'-m-m'+1}{n'-m'+1} \leqq \frac{m+m'}{m'}, \tag{3}$$

$$\frac{n+n'-m-m'}{n'-m'} \overline{\gtrdot} \frac{m+m'+1}{m'+1}, \tag{4}$$

или, отнимая отъ обѣихъ частей каждаго по единицѣ;

$$\frac{n-m}{n'-m'+1} \leqq \frac{m}{m'}; \tag{5}$$

$$\frac{n-m}{n'-m'} \overline{\gtrdot} \frac{m}{m'+1}; \tag{6}$$

освобождая ихъ отъ знаменателей, получимъ:

$$(n-m)m' \leqq m(n'-m'+1), \tag{7}$$

$$(n-m)(m'+1) \overline{\gtrdot} m(n'-m'), \tag{8}$$

откуда, сокращая первое на $-mm'$, второе на $-m(m'+1)$, получимъ такія два:

$$nm' \leqq m(n'+1), \tag{9}$$

$$n(m'+1) \overline{\gtrdot} m(n'+1), \tag{10}$$

или

$$m' \leqq \frac{m}{n}(n'+1), \tag{11}$$

$$m'+1 \overline{\gtrdot} \frac{m}{n}(n'+1); \tag{12}$$

отсюда слѣдуетъ, что m' есть цѣлая часть отъ $\frac{m}{n}(n'+1)$, т. е.

$$m' = E\frac{m}{n}(n'+1). \tag{13}$$

Если $\frac{m}{n}(n'+1)$ есть цѣлое число, то въ (11) и (12) можно взять въ одномъ и знакъ $=$, и тогда будемъ имѣть два значенія для m':

$$m' = \frac{m}{n}(n'+1), \tag{14}$$

$$m' = \frac{m}{n}(n'+1) - 1. \tag{15}$$

Примѣръ. Снимали карту съ полной колоды двадцать разъ; фигура попалась восемь разъ; найти, каково будетъ наивѣроятнѣйшее число вскрытій фигуры въ 9 новыхъ такихъ же испытаній? Полагаемъ $n=20$, $m=8$, $n'=9$; будемъ имѣть:

$$\frac{m}{n}(n'+1) = \frac{8}{20}(9+1) = 4\,;$$

число цѣлое; слѣдовательно по (15) другое наивѣроятнѣйшее число вскрытій фигуры въ 9 испытаній будетъ 3.

59. Найдемъ теперь приближенную формулу для вѣроятности $K_{n';m'}$ [(6) § 57] въ предположеніи, что m' близка къ наивѣроятнѣйшему своему значенію, и числа n, m; n', m' всѣ очень большія. Для m' близкихъ къ $E\frac{m}{n}(n'+1)$, можно положить

$$m' = n'\frac{m}{n} + z, \tag{1}$$

гдѣ z будетъ очень малая величина въ сравненіи съ n. Въ этомъ случаѣ можно сперва при помощи формулы Стирлинга:

$$1.2.3\ldots x = \sqrt{2\pi}\, x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x} \tag{2}$$

величину $K_{n';m'}$ такъ представить:

$$K_{n';m'} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{n+1}{n+n'+1} \sqrt{\frac{n'(m+m')(n+n'-m-m')n}{m'(n'-m')(n+n')m(n-m)}} \cdot Q, \tag{3}$$

гдѣ для краткости положено:

$$Q = A \cdot B \cdot C \cdot D \cdot E \cdot F, \tag{4}$$

и

$$\left.\begin{aligned}
A &= \left(\frac{n'}{m'}\right)^{m'}; \\
B &= \left(\frac{n'}{n'-m'}\right)^{n'-m'}; \\
C &= \left(\frac{m+m'}{n+n'}\right)^{m+m'}; \\
D &= \left(\frac{n+n'-m-m'}{n+n'}\right)^{n+n'-m-m'}; \\
E &= \left(\frac{n}{m}\right)^{m}; \\
F &= \left(\frac{n}{n-m}\right)^{n-m}.
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Положимъ теперь

$$\left.\begin{aligned}
\frac{m}{n} &= q; \\
\frac{n'}{n} &= v;
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

тогда будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}
m &= nq; \\
n' &= vn;
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

далѣе

$$m' = n'\frac{m}{n} + z = qvn + z; \qquad (8)$$

и слѣдовательно:

$$\left.\begin{aligned}
m + m' &= q(1+v)n + z; \\
n' - m' &= nv(1-q) - z; \\
n - m &= n(1-q); \\
n + n' &= n(1+v); \\
n + n' - m - m' &= n(1+v)(1-q) - z;
\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

внося это въ (3) будемъ имѣть:

$$K_{n';m'} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{n+1}{n(1+v)+1}\sqrt{\frac{nv[q(1+v)n+z][n(1+v)(1-q)-z]n}{(qvn+z)[nv(1-q)-z]n(1+v)nq\cdot n(1-q)}}\cdot Q. \qquad (10)$$

Здѣсь множитель передъ корнемъ можетъ быть замѣненъ чрезъ $\frac{1}{1+v}$ съ погрѣшностью порядка $\frac{1}{n}$; съ погрѣшностью не меньшаго порядка можно пренебречь величиною z подъ знакомъ радикала; а тогда сдѣлается возможнымъ сокращеніе подъ знакомъ радикала на нѣкоторыхъ множителей, послѣ чего, подводя притомъ $\frac{1}{1+v}$ подъ знакъ радикала, выраженіе (10) приметъ такой видъ:

$$K'_{n';m'} = \frac{1}{\sqrt{2\pi v(1+v)q(1-q)n}}\cdot Q. \tag{11}$$

Что касается до Q, то тамъ пренебречь величиною z нельзя въ виду большихъ показателей; для приближеннаго его вычисленія нужно получить приближенныя выраженія входящихъ по (4) въ составъ его множителей при помощи формулъ:

$$\left.\begin{aligned}\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots\\ \log(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots\end{aligned}\right\}. \tag{12}$$

Такъ какъ въ силу (7) и (8) будетъ

$$A = \left(\frac{nv}{qnv+z}\right)^{qnv+z}, \tag{13}$$

то

$$\begin{aligned}\log A &= (qnv+z)\log\left(\frac{nv}{qnv+z}\right) =\\ &= -(qnv+z)\log\left(\frac{qnv+z}{nv}\right) =\\ &= -(qnv+z)\left[\log q + \log\left(1+\frac{z}{qnv}\right)\right] =\\ &= -(qnv+z)\left(\log q + \frac{z}{qnv} - \frac{z^2}{2q^2n^2v^2} + \dots\right) =\\ &= -(qnv+z)\log q - z - \frac{z^2}{2nqv} - \dots,\end{aligned}$$

такъ что съ приближеніемъ до величинъ порядка $\frac{1}{n^2}$ будетъ:

$$\log A = -(qnv+z)\log q - z - \frac{z^2}{2nqv}. \tag{14}$$

Далѣе, въ силу (7) и (9):

$$B = \left(\frac{nv}{nv(1-q)-z} \right)^{nv(1-q)z}; \qquad (15)$$

слѣдовательно

$$\log B = -[nv(1-q)-z] \log \left(\frac{nv(1-q)-z}{nv} \right) =$$

$$= -[nv(1-q)-z] \left[\log(1-q) + \log\left(1 - \frac{z}{nv(1-q)}\right) \right] =$$

$$= -[nv(1-q)-z] \left[\log(1-q) - \frac{z}{nv(1-q)} - \frac{z^2}{2[nv(1-q)]^2} - \ldots \right] =$$

$$= -[nv(1-q)-z] \log(1-q) + z - \frac{z^2}{2nv(1-q)} + \ldots,$$

такъ что съ тою же точностью можно принять:

$$\log B = -[nv(1-q)-z] \log(1-q) + z + \frac{z^2}{2nv(1-q)}. \qquad (16)$$

Складывая (14) и (16) получимъ:

$$\log(A \cdot B) = -nv[q \log q + (1-q) \log(1-q)] + z \log\left(\frac{1-q}{q}\right) - \frac{z^2}{2nvq(1-q)}. \qquad (17)$$

Точно также, (или еще проще, перемѣняя въ этой формулѣ v на $1+v$ и мѣняя знакъ на противный, какъ то легко усмотрѣть, сравнивая C съ A и D съ B), мы получимъ:

$$\log(C \cdot D) = n(1+v)[q \log q + (1-q) \log(1-q)] - z \log\left(\frac{1-q}{q}\right) +$$

$$+ \frac{z^2}{2n(1+v)q(1-q)}. \qquad (18)$$

Далѣе имѣемъ еще по (5), (7) и (9):

$$\log(E \cdot F) = -n[q \log q + (1-q) \log(1-q)]. \qquad (19)$$

Складывая (17), (18) и (19), по сокращеніи въ виду (4) будемъ имѣть:

$$\log Q = + \frac{z^2}{2nq(1-q)} \left(\frac{1}{1+v} - \frac{1}{v} \right) = - \frac{z^2}{2nv(1+v)q(1-q)}, \qquad (20)$$

и слѣдовательно

$$Q = e^{-\frac{z^2}{2n\nu(1+\nu)q(1-q)}}. \tag{21}$$

Вставляя сюда вмѣсто z его значеніе изъ (8) и внося затѣмъ результатъ въ (11), будемъ имѣть искомую формулу:

$$K_{n';m'} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\nu(1+\nu)q(1-q)}} e^{-\frac{(m'-nq\nu)^2}{2n\nu(1+\nu)q(1-q)}}. \tag{22}$$

60. Пусть теперь M'_0 и M'_1 обозначаютъ два числа близкія къ $E\frac{m}{n}(n'+1) = E(n'+1)q$; тогда вѣроятность заключаться числу m' повтореній событія въ предѣлахъ M'_0 и M'_1, которую означимъ чрезъ $\Pi_{M'_0}^{M'_1}$, по первому закону будетъ:

$$\Pi_{M'_0}^{M'_1} = \sum_{m'=M'_0}^{m'=M'_1} K_{n';m'}. \tag{1}$$

Такъ какъ m' лежитъ въ предѣлахъ близкихъ къ наивѣроятнѣйшему своему значенію, то вмѣсто точнаго выраженія $K'_{n';m'}$ по формулѣ (6) § 57, мы можемъ сюда внести его приближенное выраженіе, именно (22) предыдущаго §; тогда будемъ имѣть:

$$\Pi_{M'_0}^{M'_1} = \sum_{m'=M'_0}^{m'=M'_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi n\nu(1+\nu)q(1-q)}} e^{-\frac{(m'-nq\nu)^2}{2n\nu(1+\nu)q(1-q)}}. \tag{2}$$

Замѣняя здѣсь сумму интеграломъ, при чемъ погрѣшность будетъ одного порядка съ каждымъ слагаемымъ, мы будемъ имѣть:

$$\Pi_{M'_0}^{M'_1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{M'_0}^{M'_1} \frac{1}{\sqrt{n\nu(1+\nu)q(1-q)}} e^{-\frac{(m'-nq\nu)^2}{2n\nu(1+\nu)q(1-q)}} dm'. \tag{3}$$

Полагая здѣсь

$$\frac{m'-nq\nu}{\sqrt{2n\nu(1+\nu)q(1-q)}} = t, \tag{4}$$

будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} M'_0 &= nq\nu + t_0\sqrt{2n\nu(1+\nu)q(1-q)}, \\ M'_1 &= nq\nu + t_1\sqrt{2n\nu(1+\nu)q(1-q)}; \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

и, внося это въ (3), дадимъ ему такой видъ:

$$\Pi^{nq\nu+t_1\sqrt{2n\nu(1+\nu)q(1-q)}}_{nq\nu+t_0\sqrt{2n\nu(1+\nu)q(1-q)}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_0}^{t_1}e^{-t^2}dt. \tag{6}$$

Если $t_0=-t_1$ (случай наиболѣе замѣчательный), то

$$\Pi^{nq\nu+t_1\sqrt{2n\nu(1+\nu)q(1-q)}}_{nq\nu-t_1\sqrt{2n\nu(1+\nu)q(1-q)}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{t_1}e^{-t^2}dt. \tag{7}$$

Этимъ закончимъ теоретическую часть Теоріи Вѣроятностей и перейдемъ затѣмъ къ приложенію ея къ вопросу, важному въ опытныхъ и наблюдательныхъ наукахъ, о наилучшемъ комбинированіи результатовъ опытовъ или наблюденій.

ГЛАВА VIII-я.

Способъ наименьшихъ квадратовъ.

61. Пусть дана система m уравненій, линейныхъ относительно n перемѣнныхъ $x_1, x_2, \dots x_n$:

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n = b_i, \quad (i=1,2,\dots m) \tag{1}$$

при чемъ предполагается $m > n$. Здѣсь величины b_i предполагаются взятыми изъ наблюденій, а потому несвободными отъ погрѣшностей, которыя принимаются очень малыми; мы означимъ чрезъ e_i ошибку величины b_i; тогда точныя значенія второй части уравненій (1) будутъ соотвѣтственно $b_i + e_i$, такъ что точныя значенія $x_1, x_2, \dots x_n$ найдутся изъ уравненій:

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n = b_i + e_i. \quad (i=1,2,\dots m) \tag{2}$$

Чтобы рѣшить эти уравненія относительно x_h, помножимъ эти уравненія соотвѣтственно на λ_i и сложимъ результаты для $i = 1, 2, \dots m$; полагая затѣмъ

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i1} \lambda_i = 0, \ \sum_{i=1}^{m} a_{i2} \lambda_i = 0, \dots \sum_{i=1}^{m} a_{ih} \lambda_i = 1, \dots \sum_{i=1}^{m} a_{in} \lambda_i = 0, \tag{3}$$

мы будемъ имѣть:

$$x_h = \sum_{i=1}^{m} (b_i + e_i) \lambda_i. \tag{4}$$

62. Если теперь $\varphi(e_i)\, de_i$ вѣроятность заключаться погрѣшности e_i въ предѣлахъ e_i и $e_i + de_i$ *), то будемъ имѣть:

---

*) Для значеній измѣряемой величины, лежащихъ, какъ обыкновенно бываетъ на практикѣ, не въ широкихъ предѣлахъ, вѣроятность погрѣшности измѣренія можетъ разсматриваться какъ функція только одной погрѣшности, независящею, слѣдовательно, отъ самой измѣряемой величины.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(e_i)\,de_i = 1\,, \tag{1}$$

ибо e_i заключается навѣрно въ этихъ предѣлахъ. Далѣе математическое ожиданіе $e_i\varphi(e_i)\,de_i$ ошибки e_i дастъ, будучи взято для всѣхъ возможныхъ ея значеній, интегралъ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e_i\varphi(e_i)\,de_i = \alpha_i\,, \tag{2}$$

называемый *неизбѣжною* ошибкою. Его находятъ изъ очень большаго ряда измѣреній хорошо извѣстной величины, считая сколько разъ повторяется каждая погрѣшность: раздѣляя сумму ихъ, повторенныхъ каждая надлежащее число разъ, на число всѣхъ, и будемъ имѣть α_i на основаніи теоремы Якова Бернули или закона большихъ чиселъ Пуассона (разумѣется приближенно). Неизбѣжную ошибку называютъ и *постоянной частью* ошибки.

Такъ какъ

$$b_i + e_i = b_i + \alpha_i + (e_i - \alpha_i) = b'_i + (e_i - \alpha_i)\,, \tag{3}$$

если положить

$$b'_i = b_i + \alpha_i\,, \tag{4}$$

то $e_i - \alpha_i$ будетъ *случайная* ошибка, а b'_i освобожденное отъ постоянной ошибки значеніе величины b_i, или *исправленное* b_i. Внося изъ (3) въ (4) предыдущаго §, будемъ имѣть:

$$x_h = \sum_{i=1}^{m} b'_i\lambda_i + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(e_i - \alpha_i). \tag{5}$$

Здѣсь второй членъ неизвѣстенъ, ибо содержитъ e_i; если его отбросить, то получимъ приближенное значеніе x_h:

$$x_h = \sum_{i=1}^{m} b'_i\lambda_i\,, \tag{6}$$

съ погрѣшностью равною

$$\xi_h = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(e_i - \alpha_i). \tag{7}$$

Всѣхъ λ_i числомъ m, тогда какъ уравненій (3) предыдущаго § между ними всего $n < m$; слѣдовательно опредѣленіе можно сдѣлать на тысячи ладовъ. Наилучшій изъ результатовъ будетъ тотъ, для котораго предѣлы погрѣшности ξ_h будутъ наитѣснѣйшіе при одинаковомъ нисшемъ предѣлѣ для вѣроятности въ нихъ заключаться. Такую комбинацію данныхъ уравненій, т. е. такія значенія для λ_i, и даетъ способъ наименьшихъ квадратовъ, какъ увидимъ ниже.

63. Но прежде намъ нужно еще вывести нѣкоторыя формулы. Возьмемъ интегралъ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e_i^2 \varphi(e_i)\, de_i = \beta_i, \tag{1}$$

представляющій математическое ожиданіе квадрата e_i. Онъ находится эмпирически, какъ интегралъ (2) предыдущаго §, съ помощію тѣхъ же измѣреній хорошо извѣстной величины. Теперь возьмемъ математическое ожиданіе квадрата случайной ошибки $e_i - \alpha_i$; будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} (e_i - \alpha_i)^2 \varphi(e_i)\, de_i = \\ = &\int_{-\infty}^{+\infty} e_i^2 \varphi(e_i)\, de_i - 2\alpha_i \int_{-\infty}^{+\infty} e_i \varphi(e_i)\, de_i + \alpha_i^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(e_i)\, de_i = \\ &= \beta_i - 2\alpha_i . \alpha_i + \alpha_i^2 = \beta_i - \alpha_i^2; \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

итакъ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (e_i - \alpha_i)^2 \varphi(e_i)\, de_i = \beta_i - \alpha_i^2 = k_i \mu^2. \tag{3}$$

Это k_i будетъ величина непремѣнно положительная, какъ то слѣдуетъ изъ лѣвой части этого равенства, гдѣ всѣ элементы интеграла положительные. Она зависитъ отъ качества наблюденія: чѣмъ оно лучше, тѣмъ быстрѣе убываетъ $\varphi(e_i)$ съ возрастаніемъ величины e_i, и тѣмъ меньше будетъ $k_i \mu^2$. A priori произведеніе $k_i \mu^2$ можетъ быть вычислено лишь, когда извѣстна функція $\varphi(e_i)$, чего никогда не бываетъ на практикѣ. Чебышевъ однако показалъ *), что ассимптотически, съ увеличеніемъ m (числа наблюденій) до безконечности, законъ погрѣшностей стремится къ предположенному Гауссомъ:

$$\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}. \tag{4}$$

---

*) О двухъ теоремахъ относительно вѣроятностей. Приложеніе къ тому LV Записокъ Имп. Академіи Наукъ. № 6. Спб. 1887.

(Гауссъ вывелъ его изъ начала ариѳметической средины *). Величина $\sqrt{k_i \mu}$, взятая со знакомъ $+$, называется *среднею ошибкой* (l'erreur moyenne à craindre, der mittlere Fehler). По ней судятъ о точности наблюденій, за мѣру которой принимаютъ величину обратно пропорціональную этой величинѣ, именно

$$h_i = \frac{1}{\sqrt{2k_i \mu}}. \tag{5}$$

Вѣсъ наблюденія принимается пропорціональнымъ квадрату мѣры точности; именно принимаютъ вѣсъ

$$p_i = \frac{1}{k_i}. \tag{6}$$

Отсюда ясно, что μ средняя ошибка наблюденія, вѣсъ котораго принимается за единицу.

64. Вычислимъ теперь математическое ожиданіе квадрата погрѣшности ξ_h [(7) § 62] вывода (6) (того-же §) для неизвѣстной x_h. Если для каждой изъ входящихъ въ нее величинъ e_i выберемъ опредѣленное значеніе, лежащее соотвѣтственно въ предѣлахъ e_i и $e_i + de_i$, то вѣроятность соотвѣтствующаго значенія ξ_h по 2-ому закону (вѣроятности совпаденія событій) будетъ равна

$$\varphi(e_1)\varphi(e_2)\ldots\varphi(e_m)\,de_1\,de_2\ldots de_m\,; \tag{1}$$

а потому искомое математическое ожиданіе ξ_h^2 будетъ равно интегралу:

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(e_i-\alpha_i)\right\}^2 \varphi(e_1)\varphi(e_2)\ldots\varphi(e_m)de_1\,de_2\ldots de_m. \tag{2}$$

Раскрывая скобки, будемъ имѣть:

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^2(e_i-\alpha_i)^2 + 2\sum_{i,j=1}^{m}{}'\lambda_i\lambda_j(e_i-\alpha_i)(e_j-\alpha_j)\right\}\varphi(e_1)\ldots\varphi(e_m)de_1\ldots de_m =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\lambda_i^2\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(e_1)de_1\ldots\int_{-\infty}^{+\infty}(e_i-\alpha_i)^2\varphi(e_i)de_i\ldots\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(e_m)de_m + \tag{3}$$

$$+2\sum_{i,j=1}^{m}{}'\lambda_i\lambda_j\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(e_1)de_1\ldots\int_{-\infty}^{+\infty}(e_i-\alpha_i)\varphi(e_i)de_i\ldots\int_{-\infty}^{+\infty}(e_j-\alpha_j)\varphi(e_j)de_j\ldots\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(e_m)de_m.$$

---

*) См. объ этомъ въ „Способѣ наименьшихъ квадратовъ“ В. П. Ермакова, Кіевъ, 1887; или въ „Теоріи Вѣроятностей“ П. А. Некрасова, Москва, 1896.

Имѣя въ виду (3) предыдущаго §, а также, что по (1) и (2) § 62 будетъ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(e_i-\alpha_i)\varphi(e_i)\,de_i=\int_{-\infty}^{+\infty}e_i\varphi(e_i)\,de_i-\alpha_i\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(e_i)\,de_i=\alpha_i-\alpha_i=0\,,\quad(4)$$

мы будемъ имѣть изъ (3):

$$J=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^2(\beta_i-\alpha_i^2)=\mu^2\sum_{i=1}^{m}k_i\lambda_i^2.\quad(5)$$

Согласно опредѣленію предыдущаго §, корень квадратный изъ этой величины, т. е. $\mu\sqrt{\sum_{i=1}^{m}k_i\lambda_i^2}$ будетъ средняя ошибка значенія x_h, опредѣляемаго формулою (6) § 62, которую ошибку означимъ чрезъ $E_m(x_h)$, такъ что будетъ:

$$E_m(x_h)=\mu\sqrt{\sum_{i=1}^{m}k_i\lambda_i^2}.\quad(6)$$

Внося значеніе J изъ (5) во (2) настоящаго § и дѣля обѣ части его затѣмъ на величину:

$$t^2\mu^2\sum_{i=1}^{m}k_i\lambda_i^2,\quad(7)$$

мы будемъ имѣть:

$$\frac{1}{t^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(e_i-\alpha_i)}{t\mu\sqrt{\sum_{i=1}^{m}k_i\lambda_i^2}}\right\}^2\varphi(e_1)\varphi(e_2)\ldots\varphi(e_m)\,de_1\,de_2\ldots de_m,\quad(8)$$

Если выкинемъ здѣсь всѣ элементы интеграла второй части, для которыхъ выраженіе въ скобкахъ $\{\}$, обсолютно взятое, меньше единицы, т. е. для $e_1, e_2, \ldots e_m$, удовлетворяющихъ неравенствамъ:

$$-t\mu\sqrt{\sum_{i=1}^{m}k_i\lambda_i^2}\leq\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(e_i-\alpha_i)\leqq+t\mu\sqrt{\sum_{i=1}^{m}k_i\lambda_i^2},\quad(9)$$

а въ остальныхъ элементахъ этотъ множитель въ скобкахъ замѣнимъ единицей, то правая часть уменьшится и представитъ вѣроятность, что $\overset{m}{\underset{1}{e_i}}$ имѣютъ значенія неудовлетворяющія неравенствамъ (9); такъ что, если означимъ чрезъ P вѣроятность, что $\overset{m}{\underset{1}{e_i}}$ удовлетворяютъ этимъ неравенствамъ (9), то послѣ сказанной замѣны въ (8) направо получимъ $1-P$. Слѣдовательно будемъ имѣть тогда изъ (8) такое неравенство:

$$\frac{1}{t^2} > 1 - P; \tag{10}$$

откуда получимъ, что

$$P > 1 - \frac{1}{t^2}. \tag{11}$$

Таковъ нисшій предѣлъ для вѣроятности, что ξ_h будетъ абсолютно не болѣе $t\mu\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} k_i\lambda_i^2}$.

65. Изъ всѣхъ значеній x_h, опредѣляемыхъ формулою (6) § 62, лучшими будутъ тѣ, для которыхъ предѣлы $\pm t\mu\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} k_i\lambda_i^2}$ для ξ_h при данномъ t, слѣдовательно по (11) предыдущаго § при данномъ нисшемъ предѣлѣ для вѣроятности P въ нихъ заключаться, будутъ тѣснѣйшими, какъ сказано выше (§ 62). Величина t данная; μ зависитъ отъ качества наблюденій; единственно произвольныя величины имѣются между $\overset{m}{\underset{1}{\lambda_i}}$, которыхъ m, тогда какъ связывающихъ ихъ уравненій (3) § 61 всего $n < m$. Слѣдовательно нужно ихъ выбрать такъ, чтобы при соблюденіи сейчасъ упомянутыхъ условій функція U отъ $\overset{m}{\underset{1}{\lambda_i}}$, опредѣляемая равенствомъ:

$$U = \sum_{i=1}^{m} k_i\lambda_i^2, \tag{1}$$

была minimum. Здѣсь намъ нужно слѣдовательно рѣшить вопросъ объ относительныхъ maxima и minima. Слѣдуя Лагранжу *), возьмемъ функцію:

$$W = \sum_{i=1}^{m} k_i\lambda_i^2 + \mu_1\sum_{i=1}^{m} a_{i1}\lambda_i + \ldots + \mu_h\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ih}\lambda_i - 1\right) + \ldots + \mu_n\sum_{i=1}^{m} a_{in}\lambda_i, \tag{2}$$

---

*) См. нашъ „Курсъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій“. (Съ примѣрами для упражненій). Харьковъ, 1891 г. стр. 128 и слѣд.

и приравняемъ нулю ея частныя производныя по $\overset{m}{\underset{1}{\lambda_i}}$; будемъ имѣть m уравненій вида:

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_i} = 2k_i\lambda_i + \mu_i a_{i1} + \dots + \mu_h a_{ih} + \dots + \mu_n a_{in} = 0. \tag{3}$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots m.)$$

Отсюда найдемъ:

$$\lambda_i = -\frac{1}{2k_i}(\mu_1 a_{i1} + \dots + \mu_h a_{ih} + \dots + \mu_n a_{in}); \tag{4}$$

внося это въ уравненія (3) § 61, будемъ имѣть такую систему уравненій для опредѣленія $\overset{n}{\underset{1}{\mu_j}}$:

$$\left.\begin{array}{l}
\sum\limits_{i=1}^{m}\frac{1}{k_i}(a_{i1}^2\mu_1 + a_{i1}a_{i2}\mu_2 + \dots + a_{i1}a_{ih}\mu_h + \dots + a_{i1}a_{in}\mu_n) = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\sum\limits_{i=1}^{m}\frac{1}{k_i}(a_{ih}a_{i1}\mu_1 + a_{ih}a_{i2}\mu_2 + \dots + a_{ih}^2\mu_h + \dots + a_{ih}a_{in}\mu_n) = -2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\sum\limits_{i=1}^{m}\frac{1}{k_i}(a_{in}a_{i1}\mu_1 + a_{in}a_{i2}\mu_2 + \dots + a_{in}a_{ih}\mu_h + \dots + a_{in}^2\mu_n) = 0,
\end{array}\right\} \tag{5}$$

или, располагая уравненія по неизвѣстнымъ $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n$:

$$\left.\begin{array}{l}
\sum\limits_{i=1}^{m}\frac{a_{i1}^2}{k_i}\mu_1 + \sum\limits_{i=1}^{m}\frac{a_{i1}a_{i2}}{k_i}\mu_2 + \dots + \sum\limits_{i=1}^{m}\frac{a_{i1}a_{ih}}{k_i}\mu_h + \dots + \sum\limits_{i=1}^{m}\frac{a_{i1}a_{in}}{k_i}\mu_n = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\sum\limits_{i=1}^{m}\frac{a_{ih}a_{i1}}{k_i}\mu_1 + \sum\limits_{i=1}^{m}\frac{a_{ih}a_{i2}}{k_i}\mu_2 + \dots + \sum\limits_{i=1}^{m}\frac{a_{ih}^2}{k_i}\mu_h + \dots + \sum\limits_{i=1}^{m}\frac{a_{ih}a_{in}}{k_i}\mu_h = -2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\sum\limits_{i=1}^{m}\frac{a_{in}a_{i1}}{k_i}\mu_1 + \sum\limits_{i=1}^{m}\frac{a_{in}a_{i2}}{k_i}\mu_2 + \dots + \sum\limits_{i=1}^{m}\frac{a_{in}a_{ih}}{k_i}\mu_h + \dots + \sum\limits_{i=1}^{m}\frac{a_{in}^2}{k_i}\mu_n = 0.
\end{array}\right\} \tag{6}$$

Пусть A будетъ опредѣлитель этой системы уравненій, такъ что, слѣдовательно

$$A=\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{m}\frac{a_{i1}^2}{k_i} & \sum\limits_{i=1}^{m}\frac{a_{i1}a_{i2}}{k_i} \dots & \sum\limits_{i=1}^{m}\frac{a_{i1}a_{ih}}{k_i} \dots & \sum\limits_{i=1}^{m}\frac{a_{i1}a_{in}}{k_i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{i=1}^{m}\frac{a_{ih}a_{i1}}{k_i} & \sum\limits_{i=1}^{m}\frac{a_{ih}a_{i2}}{k_i} \dots & \sum\limits_{i=1}^{m}\frac{a_{ih}^2}{k_i} \dots & \sum\limits_{i=1}^{m}\frac{a_{ih}a_{in}}{k_i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{i=1}^{m}\frac{a_{in}a_{i1}}{k_i} & \sum\limits_{i=1}^{m}\frac{a_{in}a_{i2}}{k_i} \dots & \sum\limits_{i=1}^{m}\frac{a_{in}a_{ih}}{k_i} \dots & \sum\limits_{i=1}^{m}\frac{a_{in}^2}{k_i} \end{vmatrix}, \tag{7}$$

а A_{hj} его миноръ, отвѣчающій j-му элементу h-ой строки, то изъ уравненій (6) будемъ имѣть:

$$\mu_j = -2\,\frac{A_{hj}}{A}. \qquad (j=1,2,\dots n.) \tag{8}$$

Если теперь внести это въ (4), то получимъ:

$$\lambda_i = \frac{1}{k_i A}(A_{h1}a_{h1} + A_{h2}a_{i2} + \dots + A_{hh}a_{ih} + \dots + A_{hn}a_{in}), \tag{9}$$

внося же это въ (6) § 62, будемъ имѣть:

$$x_h = \frac{1}{A}\left\{A_{h1}\sum_{i=1}^{m}\frac{a_{i1}b_i'}{k_i} + A_{h2}\sum_{i=1}^{m}\frac{a_{h2}b_i'}{k_i} + \dots + A_{hh}\sum_{i=1}^{m}\frac{a_{ih}b_i'}{k_i} + \dots + \sum_{i=1}^{m}\frac{a_{in}b_i'}{k_i}\right\}, \tag{10}$$

или, какъ легко видѣть:

$$x_h = \frac{1}{A}\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{m}\frac{a_{i1}^2}{k_i} & \sum\limits_{i=1}^{m}\frac{a_{i1}a_{i2}}{k_i} \dots & \sum\limits_{i=1}^{m}\frac{a_{i1}a_{ih}}{k_i} \dots & \sum\limits_{i=1}^{m}\frac{a_{i1}a_{in}}{k_i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{i=1}^{m}\frac{a_{i1}b_i'}{k_i} & \sum\limits_{i=1}^{m}\frac{a_{i2}b_i'}{k_i} \dots & \sum\limits_{i=1}^{m}\frac{a_{ih}b_i'}{k_i} \dots & \sum\limits_{i=1}^{m}\frac{a_{in}b_i'}{k_i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{i=1}^{m}\frac{a_{in}a_{i1}}{k_i} & \sum\limits_{i=1}^{m}\frac{a_{in}a_{i2}}{k_i} \dots & \sum\limits_{i=1}^{m}\frac{a_{in}a_{ih}}{k_i} \dots & \sum\limits_{i=1}^{m}\frac{a_{in}^2}{k_i} \end{vmatrix}. \tag{11}$$

[Что эти значенія λ_i (9) даютъ minimum, а не maximum функціи U ((1) настоящаго §), ясно изъ того, что эта функція, какъ состоящая все изъ положительныхъ членовъ, не можетъ имѣть maximum].

66. Для вычисленія средней погрѣшности этого вывода для x_h [формула (6) § 64], нужно найти значеніе U для найденныхъ значеній $\overset{m}{\underset{1}{\lambda_i}}$. Изъ (4) предыдущаго § имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} k_i\lambda_i^2 &= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{k_i}(\mu_1 a_{i1}+\mu_2 a_{i2}+\ldots+\mu_h a_{ih}+\ldots+\mu_n a_{in})^2 = \\ &= \frac{1}{4}\sum_{g=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{a_{ig}a_{ij}}{k_i}\right)\mu_g\mu_j,\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

— выполняя возвышеніе въ квадратъ, а затѣмъ располагая результатъ по перемѣннымъ μ_g. Эта квадратичная форма n величинъ μ_g можетъ быть такъ представлена:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{4}\sum_{g=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{a_{ig}a_{ij}}{k_i}\right)\mu_g\mu_j &= \frac{1}{4}\sum_{g=1}^{n}\mu_g\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{a_{ig}a_{ij}}{k_i}\right)\mu_j = \\ &= -\frac{1}{2}\mu_h,\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

ибо на основаніи уравненій (6) предыдущаго §, опредѣляющихъ μ_h, всѣ суммы по j обратятся тождественно въ нуль за исключеніемъ той, для которой $g=h$, которая обратится въ -2. Внося сюда значеніе μ_h изъ (8) предыдущаго §, будемъ имѣть по (1) настоящаго §:

$$\sum_{i=1}^{m} k_i\lambda_i^2 = \frac{A_{hh}}{A}. \quad (3)$$

Внося это въ (6) § 64, будемъ имѣть:

$$E_m(x_h) = \sqrt{\frac{A_{hh}}{A}}\,\mu. \quad (4)$$

Означивъ чрезъ G_h вѣсъ этого опредѣленія x_h, будемъ имѣть по § 63:

$$G_h = \frac{A}{A_{hh}}, \quad (5)$$

ибо роль k_i для отдѣльнаго наблюденія теперь, для нашего вывода для x_h, играетъ $\sum\limits_{i=1}^{m} k_i\lambda_i^2$, какъ то мы видѣли въ § 64.

67. Тѣже выраженія для $\overset{m}{\underset{1}{x_h}}$, именно (11) § 64, получимъ, если будемъ искать тѣ ихъ значенія, для которыхъ функція n перемѣнныхъ: $x_1, x_2, \ldots x_n$:

$$V(\overset{n}{\underset{1}{x_j}}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{k_i} (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ih}x_h + \cdots + a_{in}x_n - b'_i)^2, \quad (1)$$

представляющая сумму квадратовъ случайныхъ погрѣшностей опредѣленій b_i, приведенныхъ къ одинаковому вѣсу, обращается въ minimum. Дѣйствительно, дифференцируя по x_h и приравнивая результатъ, по раздѣленіи его на 2, нулю, мы получимъ такое уравненіе:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x_h} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{k_i} (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ih}x_h + \cdots + a_{in}x_n - b'_i) a_{ih} = 0, \quad (2)$$

или, располагая по неизвѣстнымъ $x_1, x_2, \ldots x_n$:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{a_{i1}a_{ih}}{k_i} x_1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{a_{i2}a_{ih}}{k_i} x_2 + \ldots + \sum_{i=1}^{m} \frac{a_{ih}^2}{k_i} x_h + \ldots \sum_{i=1}^{m} \frac{a_{in}a_{ih}}{k_i} x_n = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_{ih}b'_i}{k_i}, \quad (3)$$

гдѣ $h = 1, 2, \ldots n$. Отсюда, рѣшая эту систему по x_h, получимъ для него то же самое частное двухъ опредѣлителей, какъ въ (11) предыдущаго §, (только строки будутъ теперь столбцами и наоборотъ).

Итакъ дѣйствительно способъ наименьшихъ квадратовъ даетъ тѣ же самыя величины для $\overset{n}{\underset{1}{x_h}}$, которыя были найдены нами, когда мы искали ихъ подъ условіемъ, чтобы предѣлы погрѣшности были тѣснѣйшими при одинаковомъ нисшемъ предѣлѣ для вѣроятности въ нихъ заключаться; другими словами способъ наименьшихъ квадратовъ даетъ наивыгоднѣйшія значенія, представляетъ наивыгоднѣйшую комбинацію наблюденій.

68. Значеніе $V(\overset{n}{\underset{1}{x_h}})$ для такихъ значеній $\overset{n}{\underset{1}{x_h}}$, которыя удовлетворяютъ уравненіямъ (2) предыдущаго §, приводится на основаніи этихъ уравненій къ такому:

$$V(\overset{n}{\underset{1}{x_h}}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{k_i} (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - b'_i)(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n) -$$

$$- \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{k_i} (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - b'_i) b'_i = \quad (1)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{k_i} (b'_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in}x_n) b'_i,$$

или окончательно къ такому:

$$V(\overset{n}{\underset{1}{x_h}}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{b_i'^2}{k_i} - \sum_{i=1}^{m} \frac{a_{i1} b_i'}{k_i} x_1 - \sum_{i=1}^{m} \frac{a_{i2} b_i'}{k_i} x_2 - \ldots - \sum_{i=1}^{m} \frac{a_{in} b_i'}{k_i} x_n, \quad (2)$$

т. е. $V(\overset{n}{\underset{1}{x_h}})$ выражается линейной функціей отъ значеній $x_1, x_2, \ldots x_n$, опредѣляемыхъ формулами (11) § 65. По этой формулѣ $V(\overset{n}{\underset{1}{x_h}})$ вычисляется легко, и тогда $\sqrt{V(\overset{n}{\underset{1}{x_h}})}$ дастъ возможность судить о качествѣ результата полученнаго по этому способу, ибо если V мало, то отклоненія результатовъ вставки полученныхъ изъ (3) значеній $\overset{n}{\underset{1}{x_h}}$ во (2) § 61 отъ вторыхъ частей ихъ не могутъ быть значительны.

69. Однако вычисленное такимъ образомъ значеніе $V(\overset{n}{\underset{1}{x_h}})$ будетъ меньше того, которое получится, если вмѣсто нашихъ рѣшеній подставимъ истинныя ихъ значенія. Означимъ послѣднія чрезъ $\overset{n}{\underset{1}{x_h^0}}$ и чрезъ $\overset{n}{\underset{1}{\alpha_h}}$ уклоненія ихъ отъ первыхъ, такъ что слѣдовательно будетъ:

$$x_h^0 = x_h + \alpha_h. \qquad (h=1,2,\ldots n.) \qquad (1)$$

Такъ какъ $V(\overset{n}{\underset{1}{x_h}})$ есть функція 2-ой степени своихъ аргументовъ, то по строкѣ Тэйлора будемъ имѣть:

$$V(\overset{n}{\underset{1}{x_h^0}}) = V(\overset{n}{\underset{1}{x_h}}) + \sum_{g=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_g} \alpha_g + \frac{1}{2} \sum_{g=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial x_g \partial x_j} \alpha_g \alpha_j, \quad (2)$$

или, такъ какъ по (2) предыдущаго §

$$\frac{\partial V}{\partial x_g} = 0, \qquad (g=1,2,\ldots n) \qquad (3)$$

короче:

$$V(\overset{n}{\underset{1}{x_h^0}}) = V(\overset{n}{\underset{1}{x_h}}) + \frac{1}{2} \sum_{g=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial x_g \partial x_j} \alpha_g \alpha_j. \quad (4)$$

Но изъ (2) предыдущаго § легко видѣть, что

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x_g \partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_{ig} a_{ij}}{k_i}; \quad (5)$$

потому будетъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{g=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 V}{dx_g dx_j}\alpha_g\alpha_j=\sum_{i=1}^{m}\sum_{g=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_{ig}a_{ij}}{k_i}\alpha_g\alpha_j=\\ =\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{k_i}\sum_{g=1}^{n}a_{ig}\alpha_g\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\alpha_j=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{k_i}\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\alpha_j\Big)^2>0;\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

ибо всѣ $k_i>0$. Но въ такомъ случаѣ изъ (4) будетъ слѣдовать:

$$V(\overset{n}{\underset{1}{x_h^0}})>V(\overset{n}{\underset{1}{x_h}}), \tag{7}$$

откуда и слѣдуетъ сказанное.

Примѣчаніе. Если означимъ чрезъ ε_i истинную погрѣшность i-го наблюденія, а чрезъ e_i ту, которая получается послѣ подстановки въ уравненія величинъ $\overset{n}{\underset{1}{x_h}}$, опредѣленныхъ по способу наименьшихъ квадратовъ, то будетъ:

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j^0-b_i'=\varepsilon_i, \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j-b_i'=e_i; \tag{9}$$

вычитая послѣднее изъ перваго будемъ имѣть:

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x_j^0-x_j)=\varepsilon_i-e_i; \tag{10}$$

или по (1):

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\alpha_j=\varepsilon_i-e_i. \tag{11}$$

Внося это въ (6), будемъ имѣть:

$$\frac{1}{2}\sum_{g=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 V}{dx_g dx_j}\alpha_i\alpha_j=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{k_i}(\varepsilon_i-e_i)^2. \tag{12}$$

Далѣе имѣемъ:

$$\overset{n}{\underset{1}{V}}(x_h^0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\varepsilon_i^2}{k_i}\,; \tag{13}$$

$$\overset{n}{\underset{1}{V}}(x_h) = \sum_{i=1}^{m} \frac{e_i^2}{k_i}\,; \tag{14}$$

внося изъ (12)—(14) правыя части вмѣсто лѣвыхъ въ (4), мы дадимъ ему слѣдующій видъ:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\varepsilon_i^2}{k_i} = \sum_{i=1}^{m} \frac{e_i^2}{k_i} + \sum_{i=1}^{m} \frac{(\varepsilon_i - e_i)^2}{k_i}. \tag{15}$$

Отсюда еще яснѣе выступаетъ только что доказанное предложеніе. Раскрывая скобки направо, получимъ послѣ легкихъ упрощеній любопытную формулу:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{e_i^2}{k_i} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\varepsilon_i e_i}{k_i}. \tag{16}$$

70. Въ виду (3) предыдущаго § мы будемъ имѣть:

$$\frac{\partial \overset{n}{\underset{1}{V}}(x_h^0)}{\partial x_g^0} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \overset{n}{\underset{1}{V}}(x_h)}{\partial x_j \partial x_g} \alpha_j, \tag{1}$$

а потому (4) предыдущаго § можно такъ представить:

$$\overset{n}{\underset{1}{V}}(x_h^0) = \overset{n}{\underset{1}{V}}(x_h) + \frac{1}{2} \sum_{g=1}^{n} \frac{\partial \overset{n}{\underset{1}{V}}(x_h^0)}{\partial x_g^0} \alpha_g. \tag{2}$$

Изъ (2) § 67 видно, что

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \overset{n}{\underset{1}{V}}(x_h^0)}{\partial x_g^0} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_{ig} \varepsilon_i}{k_i}, \tag{3}$$

гдѣ $\overset{n}{\underset{1}{\varepsilon}}$ истинныя случайныя ошибки (т. е. освобожденныя отъ постоянной части); далѣе изъ формулы (10) § 65 [такъ какъ множители λ_i

удовлетворяютъ условіямъ (3) § 61], получимъ x_h^0 перемѣняя b_i на $b_i+\varepsilon_i$; а потому будемъ имѣть для α_h такія формулы:

$$\alpha_h=\frac{1}{A}\sum_{j=1}^{n}A_{hj}\sum_{i=1}^{m}\frac{a_{ij}\varepsilon_i}{k_i}. \tag{4}$$

Отсюда слѣдуетъ, что вторая часть равенства (2) будетъ функція второй степени относительно величинъ ε_i, какъ и первая [см. (13) предыдущаго §]. Если мы помножимъ обѣ части этого равенства (2) на

$$\varphi(\varepsilon_1)\varphi(\varepsilon_2)\dots\varphi(\varepsilon_m)\,d\varepsilon_1 d\varepsilon_2\dots d\varepsilon_m \tag{5}$$

и проинтегрируемъ по каждому ε_i отъ $-\infty$ до $+\infty$, то налѣво получимъ:

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\mu_i^2}{k_i}=m\mu^2, \tag{6}$$

гдѣ μ_i средняя ошибка i-го наблюденія, вѣсъ котораго есть $\frac{1}{k_i}$, а μ средняя ошибка того, котораго вѣсъ равенъ единицѣ; направо же первый членъ сохранитъ свой видъ на основаніи (1) § 62; что же касается до втораго, то, такъ какъ для случайной ошибки

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon=0, \tag{7}$$

какъ то мы видѣли въ § 63, [(4)], всѣ удвоенныя произведенія исчезнутъ, квадратичные же дадутъ такую сумму:

$$\frac{1}{A}\sum_{g=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{gj}\sum_{i=1}^{m}\frac{a_{ig}a_{ij}}{k_i}\cdot\frac{\mu_i^2}{k_i}=\frac{\mu^2}{A}\sum_{g=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{gj}\sum_{i=1}^{m}\frac{a_{ig}a_{ij}}{k_i}=n\mu^2, \tag{8}$$

ибо

$$\sum_{j=1}^{n}A_{gj}\sum_{i-1}^{m}\frac{a_{ig}a_{ij}}{k_i}=A \tag{9}$$

для $g=1, 2,\dots n$. Такимъ образомъ изъ равенства (2) получится слѣдующее:

$$m\mu^2=V\overset{n}{\underset{1}{(x_h)}}+n\mu^2, \tag{10}$$

откуда найдемъ:

$$\mu = \sqrt{\frac{\overset{n}{\underset{1}{V}}(x_h)}{m-n}}. \tag{11}$$

Эта формула дана была Гауссомъ. Внося это въ (4) § 66, мы получимъ для средней ошибки x_h, опредѣленнаго по способу наименьшихъ квадратовъ, такое выраженіе:

$$E_m(x_h) = \sqrt{\frac{A_{hh}}{A}} . \sqrt{\frac{\overset{n}{\underset{1}{V}}(x_h)}{m-n}}. \tag{12}$$

Мѣра точности этого вывода, будучи обратна средней ошибкѣ величины, помноженной на $\sqrt{2}$ [по § 63, (5)], выразится такою формулою:

$$H(x_h) = \frac{\sqrt{\frac{A}{A_{hh}}}}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{\overset{n}{\underset{1}{V}}(x_h)}{m-n}}}. \tag{13}$$

Въ §§ 67—70 мы такимъ образомъ показали, какъ находятся наивыгоднѣйшія значенія n перемѣнныхъ изъ m уравненій, доставленныхъ наблюденіями, а также ихъ вѣса и мѣры точности; оставляемъ читателю примѣнить эти формулы къ простѣйшему случаю $n=1$.

ЗАМѢЧЕННЫЯ ПОГРѢШНОСТИ.

Стр.	*Строка.*	*Напечатано:*	*Должно быть:*
4	12, 30	§ 4	§ 5
21	13	симъ	нимъ
24	25	размываться	разламываться
43	17	Пропущенъ числитель: 1, и номеръ формулы: (7).	
58	11	что	—такъ какъ,
—	13	иначе,	—
68	7	$\int_{z_0}^{z_1}(x+$	$\int_{z_0}^{z_1}\ldots(x+$
69	10	$n\bar{\beta}$	$n\beta$
71	послѣдняя	$\frac{n}{m!\,(n-m)!}$	$\frac{n!}{m!\,(n-m)!}$
73	8	53	54
74	5	$\frac{1}{n+1}$	$\frac{1}{m+1}$
82	10	;	:

ВО ВСѢХЪ КНИЖНЫХЪ МАГАЗИНАХЪ „НОВАГО ВРЕМЕНИ“,

ТАКЖЕ

А. Дрёдера (Харьковъ, Московская ул. № 21) и „Южнаго Края“ (Сумская улица, № 13) можно получать слѣдующія сочиненія проф. М. Тихомандрицкаго:

1) **О гипергеометрическихъ рядахъ**. Спб. 1876 г. . . . . . 2 р. — к.

2) Ueber das Umkehrproblem der elliptischen Integrale. 2 Note. (Изъ Mathem. Annalen Bd. XXV). Leipzig, 1884 г. . . . . . . — „ 20 „

3) Обращеніе эллиптическихъ интеграловъ. (Переводъ предыдущей статьи. Изъ „Сообщеній Математ. Общества при Императорскомъ Харьк. универ. за 1884 г.“) Харьковъ, 1885 г. — „ 20 „

4) Отчетъ о занятіяхъ въ Лейпцигѣ. (Изъ „Сообщ. Матем. Общ. при Императорскомъ Харьковскомъ университетѣ за 1884 г.“) Харьковъ, 1885 г. . . . . — „ 30 „

5) **Курсъ теоріи конечныхъ разностей**. Харьковъ, 1889 г. (Изданіе книжнаго магазина Д. Н. Полуехтова) . . . . . 2 „ — „

6) Разложеніе тригонометрическихъ и эллиптическихъ функцій на частныя дроби и въ безконечныя произведенія. (Изъ „Сообщ. Харьк. Мат. Общ.“. Вторая серія. Т. II, № 4). Харьковъ, 1891 г. . . . . — „ 40 „

7) **Курсъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій** (съ примѣрами для упражненій). Харьковъ, 1891 г. . . . . . 2 „ 50 „

8) **Краткій курсъ высшей алгебры**. Изд. 2-е исправленное и дополненное. Харьковъ, 1892 г. . . . . 2 „ 20 „

9) **Основанія теоріи Абелевыхъ интеграловъ**. Харьк. 1895 г. 4 „ — „

10) **Теорія эллиптическихъ интеграловъ и эллиптическихъ функцій**. Харьковъ, 1895 г. (Удостоено Имп. Акад. наукъ полов. преміи В. Я. Буняковскаго) . . . . 5 „ — „

11) **Курсъ теоріи вѣроятностей**. Харьковъ, 1898 г. . . . . . 1 „ — „

Вспомогательныя таблицы для вычисленія пожизненныхъ эмеритальныхъ пенсій. Составлены А. Н. Тихомандрицкимъ. Спб. 1875 г. . . . . 3 „ — „

(Эту книгу можно получать также въ С.-Петерб. въ книжномъ магазинѣ акц. общ. „Издатель“ Невскій просп. № 68/40).