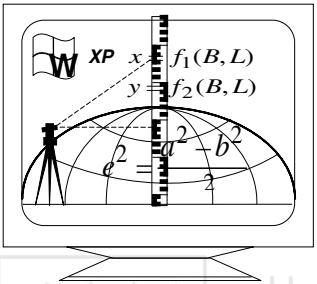
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВОДНОГО ГОСПОДАРСТВА ТА ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ

Інститут агроекології та землеустрою

Кафедра геодезії та геоінформатики



05 - 04 - 48

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання самостійних та практичних робіт
з дисципліни “Вища геодезія”
студентами напряму 6.080101 „Геодезія, картографія та землеустрій”

Рекомендовано
методичною комісією напряму 6.080101 „Геодезія, картографія та землеустрій”.
Протокол №3 від 26 листопада 2014 р.

РІВНЕ 2014

Методичні вказівки до виконання самостійних та практичних робіт з дисципліни “Вища геодезія” студентами напряму 6.080101 „Геодезія, картографія та землеустрій” / О.А.Тадєєв, Т.І.Дець, А.В.Прокопчук, Рівне: НУВГП, 2014. – 39с.

Упорядники: О.А.Тадєєв, кандидат технічних наук, доцент кафедри геодезії та геоінформатики;
Т.І.Дець, асистент кафедри геодезії та геоінформатики;
А.В.Прокопчук, асистент кафедри геодезії та геоінформатики.

ЗМІСТ

ВСТУП

Вища геодезія – наука про фігуру та зовнішнє гравітаційне поле Землі.

Завдання вивчення фігури та гравітаційного поля Землі, як основної задачі вищої геодезії, розв'язується за результатами вимірів як на земній поверхні, так і з засобами глобальних навігаційних супутникових систем. Це геодезичні виміри в мережах тріангуляції, трилатерації, полігонометрії та нівелювання 1 класу, гравіметричні виміри потенціалу сили тяжіння, астрономо-геодезичні виміри широт і довгот пунктів та азимутів напрямів на земній поверхні, а також супутниково-навігаційні спостереження з метою визначення координат точок земної поверхні. Методи постановки та виконання вказаних вимірів складають предмет *першої частини вищої геодезії*. За результатами вимірів розв'язується основна задача вищої геодезії, а також визначаються координати пунктів опорної геодезичної мережі і відносно них методами топографії вивчається форма фізичної поверхні Землі. *Друга частина вищої геодезії* – теоретична основа розв'язування основної задачі. В ній розглядаються і встановлюються аналітичні залежності між результатами вимірів і фігурою Землі та її гравітаційним полем. Друга частина включає два розділи: 1) сфероїдна геодезія (розглядає методи розв'язання геодезичних задач на поверхні земного еліпсоїду); 2) теоретична геодезія (розглядає методи визначення параметрів земного еліпсоїду та відхилень від його поверхні реальної Землі, а також методи визначення потенціалу сили тяжіння).

Земний еліпсоїд – геометрична форма із встановленими параметрами форми та розмірів, яка математично найкраще описує фігуру Землі і зорієнтована у її тілі. *Референц-еліпсоїд* – еліпсоїд, який має визначені

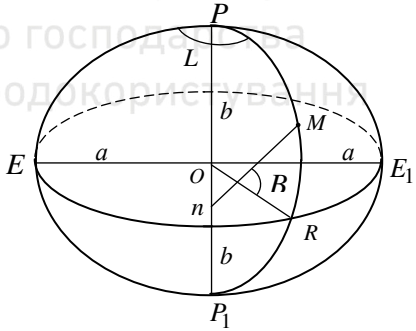
розміри, певним чином зорієнтований у тілі Землі і використовується як математична основа при обробці геодезичних вимірів та створенні опорної мережі окремої держави чи держав континенту. Його параметри встановлені за вимірами на території цих держав. Поверхня референц-еліпсоїду є відносною координатною поверхнею для розв'язування геодезичних задач. В Україні застосовується *референц-еліпсоїд Красовського 1942 р*.

Сфероїдна геодезія – розділ вищої геодезії, який вивчає геометрію поверхні прийнятого еліпсоїду і методи розв'язування геодезичних задач на цій поверхні з метою зображення її на сфері та площині, а також для визначення координат геодезичних пунктів у єдиній державній системі.

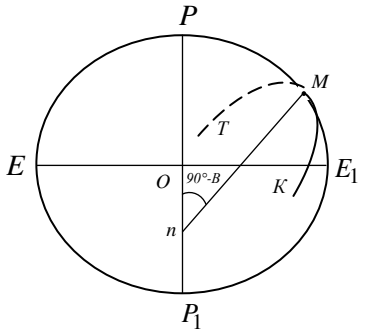
Параметри референц-еліпсоїду Красовського, які повністю описують його розміри та форму:

1) основні: $a = 6378245 0 м$ - велика (або екваторіальна) піввісь; $b = 6356863 0 1877 м$ - мала (або полярна) піввісь;

2) допоміжні: $\alpha = \dfrac{a-b}{a} = \dfrac{1}{298.3}$ - полярне стиснення; e –перший ексцентриситет меридіанного еліпсу: $e^2 = \dfrac{a^2-b^2}{a^2} = 0.006693421623$; e' –другий ексцентриситет меридіанного еліпсу: $e'^2 = \dfrac{a^2-b^2}{b^2} = 0.00673852545$.



При визначенні положення точок на поверхні земного еліпсоїду основною є *система геодезичних координат*. *Геодезичною широтою B* точки *M* на поверхні еліпсоїду називають гострий кут, утворений нормаллю *Mn* до поверхні в точці *M* та площиною екватора ERE_1. *Геодезичною довготою L* точки *M* на поверхні еліпсоїду називають двогранний кут, утворений площиною PEP_1 нульового (Грінвічського) меридіану та площиною $PMRP_1$ меридіану точки *M*.



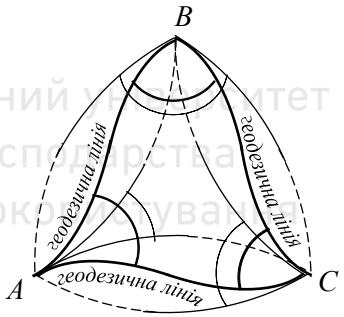
Площини, проведені через нормаль до поверхні еліпсоїду в точці *M*, називають нормальними площинами. Криві на поверхні еліпсоїду, утворені перетином поверхні з нормальними площинами, називають нормальними перерізами. *Головні нормальні перерізи* – це два взаємно перпендикулярних нормальних

перерізи в точці, які мають найбільшу і найменшу кривину. Головні нормальні перерізи - це *меридіанний переріз* PMP_1 з кривиною радіусу $M = \frac{a(1-e^2)}{W^3}$ та *переріз першого вертикалу* *ТМК* з кривиною $N = \frac{a}{W}$.

Величину $W = \sqrt{1-e^2 \sin^2 B}$ називають першою функцією геодезичної широти.

Середнім радіусом кривини $R = \sqrt{MN}$ в точці поверхні еліпсоїду називають граничне значення середнього арифметичного радіусів кривини нормальних перерізів у точці, якщо їх число прямує до нескінченності.

Якщо у двох точках *A* і *B* провести нормальні площини так, щоб вони проходили з точки *A* на точку *B* і навпаки, то дві таких площини внаслідок перетину з поверхнею еліпсоїду утворять на ній дві різні криві. Такі криві називають *взаємними нормальними перерізами*. Візирна площина приладу, встановленого в т.*A* і наведеного на т.*B*, співпадає з кривою прямого нормального перерізу. Візирна площина приладу, встановленого в точці *B* і наведеного на точку *A*, співпадає з кривою зворотного нормального перерізу. Розбіжності взаємних нормальних перерізів приводить до того, що виміряні у вершинах кути не утворюють на поверхні еліпсоїду замкненого трикутника. Таку невизначеність ліквідовує геодезична лінія. *Геодезична лінія* між точками *A* і *B* – це крива на поверхні еліпсоїду, в кожній точці якої побудована нормаль співпадає з головною нормаллю. Геодезична лінія проходить між взаємними нормальними перерізами ближче до прямого нормального перерізу з даної точки і визначає найкоротшу відстань *s* між точками *A* і *B* на поверхні еліпсоїду. Основне рівняння геодезичної лінії $r \sin A = const$: добуток радіусу $r = N \cos B$ паралелі на синус азимуту *A* в кожній точці геодезичної лінії є сталою величиною. Це рівняння є одним з наслідків *системи вихідних диференційних рівнянь поверхні еліпсоїду*

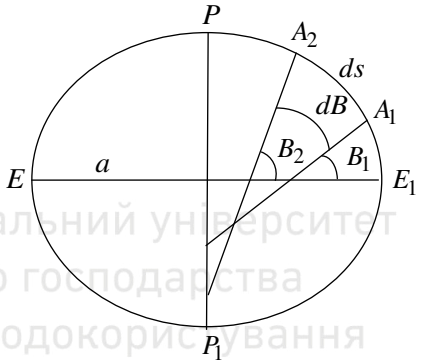


$$\left.\begin{aligned} \frac{dB}{ds} &= \frac{\cos A}{M} = \frac{V^3}{c}\cos A \\ \frac{d\lambda}{ds} &= \frac{\sin A}{N\cos B} = \frac{V}{c}\sec B \sin A \\ \frac{dA}{ds} &= \frac{\sin A}{N} tgB = \frac{V}{c} tgB \sin A \end{aligned}\right\},$$

де λ - різниця довгот точок A і B; $c = a\sqrt{1+e'^2}$ - радіус кривизни меридіанного перерізу в полюсі при $B = 90^{\circ}$; $V = \sqrt{1+e'^2\cos^2 B}$ - друга функція геодезичної широти. Кути між взаємними нормальними перерізами та між геодезичною лінією і кривою прямого нормального перерізу враховуються як поправки при обробці кутових та лінійних вимірів для розв'язування основної задачі вищої геодезії.

1. ОБЧИСЛЕННЯ ДОВЖИНИ ДУГИ МЕРИДІАНУ

A_1 - точка на меридіанному еліпсі з широтою B_1. A_2 - точка на меридіанному еліпсі з широтою B_2. Якщо різниця широт точок виражається величиною $B_2 - B_1 = dB$, то при $dB \to 0$ елементарна дуга меридіанного перерізу $ds = MdB$, а довжина дуги s виражається інтегралом



$$s = \int_{B_1}^{B_2} M\,dB. \qquad (1)$$

$$M = \frac{a(1-e^2)}{W^3}, \qquad (2)$$

M - радіус кривини меридіанного перерізу ;

$$W = \sqrt{1-e^2\sin^2 B}, \qquad (3)$$

W - перша функція геодезичної широти. Оскільки еліптичний інтеграл (1) не виражається елементарними функціями, то підінтегральну функцію розкладують в ряд. Число членів ряду встановлюється в залежності від точності визначення довжини s і протяжності дуги A_1A_2. Тому для практичних потреб користуються різними формулами розрахунку довжини дуги меридіану:

1) загальна формула для дуги меридіану довільної довжини

$$s = a(1-e^2)\Big(A\frac{B_2-B_1}{\rho} - B\sin(B_2-B_1)\cos 2B_m + \\ + \frac{C}{2}\sin 2(B_2-B_1)\cos 4B_m - \frac{D}{3}\sin 3(B_2-B_1)\cos 6B_m\Big). \qquad (4)$$

A, B, C, D - сталі коефіцієнти прийнятого референц-еліпсоїду; ρ - число кутових одиниць (градусів, хвилин чи секунд) в одному радіані; $B_m = \frac{B_1+B_2}{2}$ - середня широта дуги A_1A_2.

2) формула для дуги меридіану від екватора до точки A_1 з широтою B_1

$$s = a(1-e^2)\left(A\frac{B_1}{\rho} - \frac{B}{2}\sin 2B_1 + \frac{C}{4}\sin 4B_1 - \frac{D}{6}\sin 6B_1\right). \quad (5)$$

3) формула для довжини дуги меридіану при обчисленнях в тріангуляції на віддалі порядку сотень кілометрів

$$s = M_m \frac{B_2 - B_1}{\rho}\left(1 + \frac{e^2}{8}\frac{(B_2 - B_1)^2}{\rho^2}\cos 2B_m\right). \quad (6)$$

Радіус M_m обчислюється за середньою широтою B_m.

4) формула для довжини дуги меридіану при обчисленнях в тріангуляції на віддалі ≤ 45 кілометрів

$$s = M_m \frac{B_2 - B_1}{\rho}. \quad (7)$$

При обчисленні довжини дуги меридіану для вибору робочої формули можна попередньо встановити приблизне значення довжини, враховуючи, що приросту широти $dB = 1^{\circ}$ вздовж меридіанного перерізу відповідає довжина дуги перерізу ≈ 110 км.

За умови точності широти точки $m_B = \pm 0.0001''$ всі зазначені формули забезпечують середню квадратичну похибку довжини дуги $m_S = \pm 0.001$ м.

Завдання. Обчислити довжину дуги між точками меридіану з широтами $B_1 = 48^{\circ}30'48.1111'' - N'$ та $B_2 = 49^{\circ}30'49.2222'' + N'$; N – номер варіанту.

Приклад.

B_1	$48^{\circ}30'48.1111'' - N'$	48° 30′ 48.1111″	48°,51336419
B_2	$49^{\circ}30'49.2222'' + N'$	49° 30′ 49.2222″	49°,51367283

Сталі величини.

a	6378245 *м*		e^2	0,00669342		$\rho°$	57°,29577951
A	1,00505177	B	0,00506238	C	0,00001062	D	0,00000002

Обчислення довжини дуги меридіану за формулою (4):

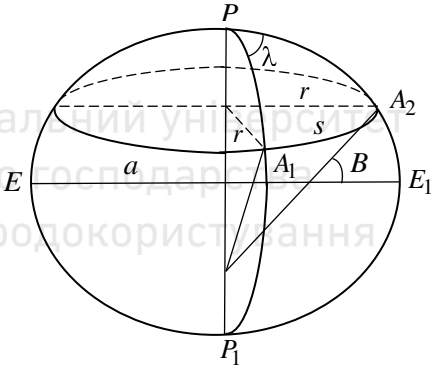
Позначення дій	Результати
B_m	49°,01351851
$a(1-e^2)$	6335552,717
$A\frac{B_2 - B_1}{\rho}$	0,01754688
$B\sin(B_2 - B_1)\cos 2B_m$	-0,00001234
$\frac{C}{2}\sin 2(B_2 - B_1)\cos 4B_m$	-0,00000018
$\frac{D}{3}\sin 3(B_2 - B_1)\cos 6B_m$	0,00000000
s (*м*)	111 246,219

Обчислення довжини дуги меридіану за формулою (6):

Позначення дій	Результати
$W_m = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_m}$	0,99809115
$M_m = \frac{a(1-e^2)}{W_m^3}$	6371972,436
$M_m \frac{B_2 - B_1}{\rho}$	111246,2232
$\frac{e^2}{8} \frac{(B_2 - B_1)^2}{\rho^2} \cos 2B_m$	-0,00000004
s (м)	111 246,219

2. ОБЧИСЛЕННЯ ДОВЖИНИ ДУГИ ПАРАЛЕЛІ

A_1 та A_2 - точки на паралелі з широтою B. L_1 та L_2 - їх довготи.



Паралель на еліпсоїді утворює коло. Радіус r паралелі з широтою B виражається формулою

$$r = N \cos B. \quad (8)$$

$$N = \frac{a}{W}. \quad (9)$$

N - радіус кривини перерізу першого вертикалу. Дуга паралелі між точками A_1 та A_2 є дугою кола з центральним кутом, який дорівнює різниці довгот кінцевих точок дуги $\lambda = L_2 - L_1$. Довжина s дуги паралелі з широтою B, яка відповідає різниці $\lambda = L_2 - L_1$, виражається формулою $s = r\frac{\lambda}{\rho}$. Остаточно

$$s = \frac{\lambda}{\rho} \frac{a}{W} \cos B. \quad (10)$$

За умови точності широти і довгот $m_B = m_L = \pm 0.0001''$ формула (10) забезпечує середню квадратичну похибку довжини дуги $m_S = \pm 0.001$м.

Завдання. Обчислити довжину дуги між точками паралелі з широтою $B = 48^{\circ}30'48.1111'' - N'$ та довготами $L_1 = 25^{\circ}30'25.1111'' - N'$, $L_2 = 27^{\circ}30'27.2222'' + N'$; N – номер варіанту.

Приклад.

B	$48^{\circ}30'48.1111'' - N'$	$48^\circ \quad 30' \quad 48.1111''$	$48^\circ,51336419$
L_1	$25^{\circ}30'25.1111'' - N'$	$25^\circ \quad 30' \quad 25.1111''$	$25^\circ,50697531$
L_2	$27^{\circ}30'27.2222'' + N'$	$27^\circ \quad 30' \quad 27.2222''$	$27^\circ,50756172$

Сталі величини.

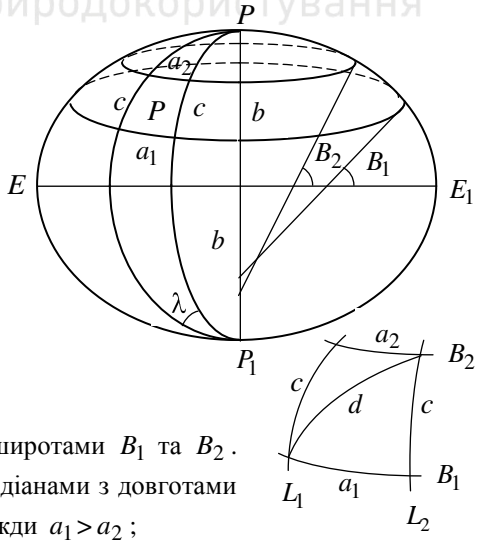
a	6378245 *м*	e^2	0,00669342	ρ°	$57^\circ,29577951$

Обчислення довжини дуги меридіану за формулою (10):

Позначення дій	Результати
$\lambda = L_2 - L_1$	2,00058642
$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}$	0,99812017
$N = \dfrac{a}{W}$	6390257,584
s (*м*)	147 809,754

3. ОБЧИСЛЕННЯ РОЗМІРІВ ТА ПЛОЩІ ЗНІМАЛЬНОЇ ТРАПЕЦІЇ

Сторони знімальної трапеції чи листа карти заданого масштабу є лініями меридіанів та паралелей на поверхні земного еліпсоїду. Тому обчислення натуральних розмірів та площі знімальної трапеції – це визначення частини поверхні еліпсоїду в межах ліній меридіанів та паралелей, які окреслюють лист карти заданого масштабу.



Розміри знімальної трапеції описують такі параметри:

- південна a_1 та північна a_2 сторони, які є дугами паралелей з широтами B_1 та B_2. Дуги a_1 та a_2 окреслюються меридіанами з довготами L_1 та L_2. Для північних широт завжди $a_1 > a_2$;
- західна та східна сторони c, які є дугами меридіанів, окреслених паралелями з широтами B_1 та B_2, тому завжди рівні між собою;

- діагональ d трапеції $$d = \sqrt{a_1 a_2 + c^2}\ . \qquad (11)$$

Якщо знімальну трапецію вважати безкінечно малою фігурою, то при $B_2 - B_1 = dB \to 0$ і $L_2 - L_1 = d\lambda \to 0$ її сторони і площу P виражають інтеграли

$$a_1 = N_1 \cos B_1 \int_{L_1}^{L_2} d\lambda;\ a_2 = N_2 \cos B_2 \int_{L_1}^{L_2} d\lambda;\ c = \int_{B_1}^{B_2} M dB;\ P = \int_{B_1}^{B_2} \int_{L_1}^{L_2} MN \cos B dB d\lambda .$$

N_1 і N_2 - радіуси кривини перерізів першого вертикалу на широтах B_1 і B_2.

З інтегрування виразів для південної та північної сторін маємо формули

$$a_1 = \frac{L_2 - L_1}{\rho} N_1 \cos B_1;\ (12) \qquad a_2 = \frac{L_2 - L_1}{\rho} N_2 \cos B_2 .\ (13)$$

Для вираження довжини дуги меридіану c підінтегральну функцію у відповідному виразі розкладують у біноміальний ряд і після інтегрування в робочих формулах остаточно приймають таке число членів ряду, яке відповідає точності розв'язування задачі та протяжності дуги меридіану (дивись формули (4)–(7)). Для карт масштабів 1:100 000 і крупніше натуральні розміри трапеції дають підстави наближено вважати її сферичною. В таких випадках достатньо користуватись формулою (7):

$$c = M_m \frac{B_2 - B_1}{\rho} . \qquad (14)$$

При обчисленні довжин сторін в масштабі листа карти їх значення множать на коефіцієнт $\frac{100}{n}$ (n – знаменник масштабу) і тоді параметрами виражають розміри листа карти в сантиметрах.

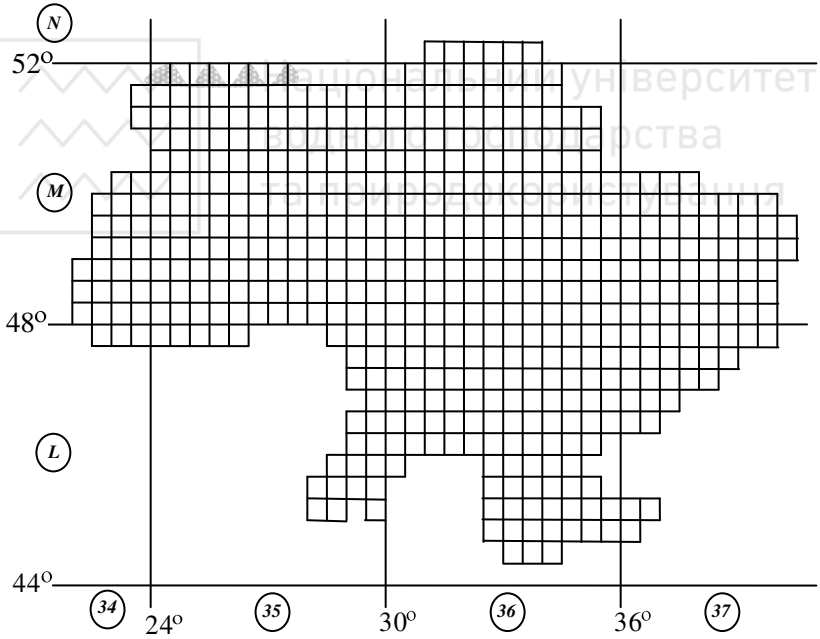
Для вираження площі трапеції P підінтегральну функцію розкладуємо у біноміальний ряд і після інтегрування маємо робочу формулу вигляду

$$P = 2b^2 \frac{L_2 - L_1}{\rho} (A' \sin \frac{B_2 - B_1}{2} \cos B_m - B' \sin 3 \frac{B_2 - B_1}{2} \cos 3B_m + C' \sin 5 \frac{B_2 - B_1}{2} \cos 5B_m),\ (15)$$

де A', B', C' - сталі коефіцієнти еліпсоїду. Формула забезпечує розрахунок площі із середньою квадратичною похибкою не більше $m_P = \pm 0.0005\,\text{км}^2$.

Геодезичні координати вершин знімальної трапеції можна визначити за номенклатурою листа карти заданого масштабу на основі „Бланкової карти території Європи масштабу 1:6 000 000". Територія України розташована в межах дев'яти знімальних трапецій масштабу 1:1 000 000 з номенклатурами *L-34, M-34, L-35, M-35, L-36, M-36, N-36, L-37, M-37* . Різниця широт північної та південної сторін кожної трапеції масштабу 1:1 000 000 складає $B_2 - B_1 = 4^{\circ}$, а різниця довгот східної та західної сторін - $L_2 - L_1 = 6^{\circ}$. Одна

трапеція масштабу 1:1 000 000 поділяється на 144 трапеції масштабу 1:100 000 і кожній з них присвоюється номенклатура відповідно до порядкового номера від 1 до 144 (наприклад *М – 34 – 141*). Для сторін трапеції масштабу 1:100 000 різниця широт складає $B_2 - B_1 = 0^{\circ}20'$, різниця довгот $L_2 - L_1 = 0^{\circ}30'$. Одна трапеція масштабу 1:100 000 поділяється на 4 трапеції масштабу 1:50 000 і кожній з них присвоюється номенклатура за літерами *А, Б, В, Г* (наприклад *М – 34 – 141 - В*). Для сторін трапеції масштабу 1:50 000 різниця широт $B_2 - B_1 = 0^{\circ}10'$, різниця довгот $L_2 - L_1 = 0^{\circ}15'$. Ділення окремої трапеції масштабу 1:50 000 на трапеції крупніших масштабів проводиться у відповідності з діючими правилами розграфки листів карт заданих масштабів.



За геодезичними координатами точки, розташованої на поверхні земного еліпсоїду, можна визначити її приналежність листу карти чи знімальній трапеції будь-якого потрібного масштабу за геодезичними координатами вершин та сторін цієї трапеції.

M - 34

1:1 000 000

52°

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	30	131	132
133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144

$B_2 - B_1 = 4^o$

48°

18° $L_2 - L_1 = 6^o$ 24°

M – 34 - 141

1:100 000

48°20′

А	*Б*
В	*Г*

$B_2 - B_1 = 0°20'$

48° $L_2 - L_1 = 0^o30'$

22°00′ 22°30′

M – 34 – 141- B

1:50 000

48°10′

$B_2 - B_1 = 0°10'$

48° $L_2 - L_1 = 0°15'$

22°00′ 22°15′

Завдання. Задано геодезичні координати точки A: широта [redacted], довгота $L_A = 22^{o}11'11.1111'' + 30' \times N$; N – номер варіанту. Визначити приналежність точки знімальній трапеції масштабу $1:50\ 000$, номенклатуру та геодезичні координати рамки відповідного листа карти і розрахувати розміри та площу цієї трапеції.

Приклад.

B_A	$48^{o}01'01.1111'' + 7' \times N$	48° 01′ 01,1111″
L_A	$22^{o}11'11.1111'' + 30' \times N$	22° 11′ 11,1111″

Сталі величини.

a	6378245*м*	b	6356,863019*км*	e^2	0,00669342	$\rho°$	57°,29577951
A'	1,00336361	B'	0,00112403	C'	0,00000170		
Номенклатура листа карти масштабу 1 : 50 000 *M – 34 – 141 - B*							

Геодезичні координати сторін трапеції.

B_1	48° 00′	48°,0
B_2	48° 10′	48°,16666667
L_1	22° 00′	22°,0
L_2	22° 15′	22°,25

Обчислення довжин сторін трапеції за формулами (11), (12), (13), (14).

Позначення дій	Результати	Позначення дій	Результати
$W_1 = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1}$	0,99815002	$W_2 = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_2}$	0,99814032
$N_1 = \dfrac{a}{W_1}$	6390066,494	$N_2 = \dfrac{a}{W_2}$	6390128,573
a_1 (*м*)	18 656,649	a_2 (*м*)	18 596,478
a_1 (*см карти*)	37,31	a_2 (*см карти*)	37,19
$B_m = \dfrac{B_1 + B_2}{2}$	48,08333333		
$W_m = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_m}$	0,99814517		
$M_m = \dfrac{a(1 - e^2)}{W_m^3}$	6370938,005		
c (*м*)	18 532,307	d (*м*)	26 275,357
c (*см карти*)	37.06	d (*см карти*)	52.55

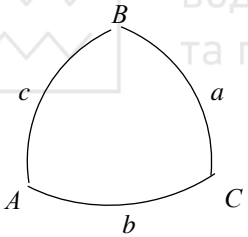
Обчислення площі трапеції за формулою (15).

Позначення дій	Результати	Позначення дій	Результати
$2b^2\dfrac{L_2-L_1}{\rho}$	352641,2223	$A'\sin\dfrac{B_2-B_1}{2}\cos B_m$	0,00097491
$B'\sin 3\dfrac{B_2-B_1}{2}\cos 3B_m$	-0,00000398	$C'\sin 5\dfrac{B_2-B_1}{2}\cos 5B_m$	-0,00000001
P ($км^2$)	345,1935	P ($га$)	34 519,35

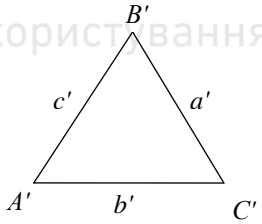
4. НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ ЗА ТЕОРЕМОЮ ЛЕЖАНДРА

Після визначення кінцевих значень виміряних кутів або напрямів у тріангуляції на поверхні еліпсоїду розпочинають розв'язування трикутників, яке зводиться до послідовного обчислення довжин їх сторін за одним виміряним базисом і кутами трикутників. При довжинах сторін до 90 км розбіжностями між поверхнею еліпсоїду і сферою можна нехтувати, а трикутники вважати сферичними. Отже, їх можна розв'язувати за правилами сферичної тригонометрії.

Сферичний трикутник



Плоский трикутник



Теорема Лежандра: Малий сферичний трикутник *ABC* можна розв'язувати як плоский, якщо кожний з його кутів *A, B, C* зменшити на третину сферичного надлишку: $A'=A-\dfrac{\varepsilon}{3}$; $B'=B-\dfrac{\varepsilon}{3}$; $C'=C-\dfrac{\varepsilon}{3}$. A', B', C' - плоскі приведені кути. Величину $\varepsilon=\dfrac{P}{R_m^2}$ називають сферичним надлишком трикутника. Оскільки $A'+B'+C'=180^{\circ}$, то $A+B+C=180^{\circ}+\varepsilon$. Тому величина ε є різницею сум кутів сферичного і плоского трикутників. R_m - радіус сфери, який дорівнює середньому радіусу кривини поверхні еліпсоїду, на якій побудований трикутник: $R_m=\dfrac{a\sqrt{1-e^2}}{W_m^2}=\dfrac{b}{W_m^2}$; $W_m=\sqrt{1-e^2\sin^2 B_m}$ - перша

функція геодезичної середньої широти трикутника. P – площа трикутника. Оскільки порядок величини P малий порівняно з порядком величини R_m^2, то площу можна приблизно розрахувати за його відомими елементами: $P=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$; $P=\frac{1}{2}c^2\frac{\sin A\sin B}{\sin C}=\frac{1}{2}b^2\frac{\sin A\sin C}{\sin B}=\frac{1}{2}a^2\frac{\sin B\sin C}{\sin A}$.

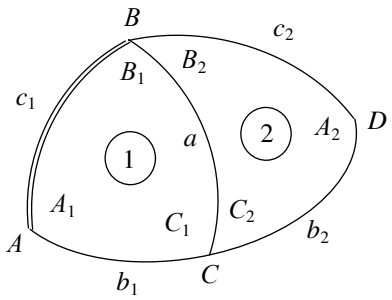
Для забезпечення точності обчислень довжин $m_S=\pm 0.001м$ у тріангуляції 1 класу похибка ε не повинна перевищувати порядку $m_\varepsilon=\pm 0.0005''$.

При довжинах сторін трикутника не більше 90 км його сферичний надлишок не перевищує величини $\varepsilon''\approx 17''$.

Якщо розв'язування сферичного трикутника розпочинати за виміряними кутами, то попередньо потрібно позбутися його кутової нев'язки. Кожен з виправлених кутів розраховують як суму виміряного кута і поправки $-\frac{w}{3}$, де нев'язка $w=A+B+C-180^\circ-\varepsilon$. Далі за обчисленими плоскими приведеними кутами та довжиною вихідної сторони трикутник розв'язують за теоремою синусів плоскої тригонометрії: $\frac{a'}{\sin A'}=\frac{b'}{\sin B'}=\frac{c'}{\sin C'}$.

Завдання. Розв'язати два малих сферичних трикутники, зображених на схемі, якщо довжина вихідної сторони $c_1=(60000-500\times N)$ *метрів*, середня широта $B_m=48^\circ 01' 01.1111''+7'\times N$; N – номер варіанту. Виміряні сферичні кути трикутників приведено в таблиці.

№	Кут	Виміряні сферичні кути
1	A_1	78° 27′ 09,18″
	B_1	51° 33′ 02,51″
	C_1	49° 59′ 51,20″
2	A_2	59° 25′ 19,10″
	B_2	51° 46′ 48,52″
	C_2	68° 47′ 54,33″



Приклад.

Довжина вихідної сторони	$c_1=(60000-500\times N)$	60 000 *метрів*
Середня широта	$48^\circ 01' 01.1111''+7'\times N$	48° 01′ 01,1111″

Сталі величини.

b	6356863,019 *м*	e^2	0,00669342	ρ°	57°,29577951

Відомість наближеного розв’язування трикутників.

№ тр	Верш.	Виміряні сферичні кути	$-w$ / 3	Виправлені сферичні кути	$-\varepsilon$ / 3	Виправлені плоскі кути	Синуси кутів	Довжини сторін
1	*C*	49° 59′ 51,20″	2.082	49° 59′ 53,282″	-3,045	49° 59′ 50,237″	0,76601402	60 000,000
	B	51° 33′ 02,51″	2.082	51° 33′ 04,592″	-3,045	51° 33′ 01,547″	0,78315577	61 342,671
	A	78° 27′ 09,18″	2.082	78° 27′ 11,262″	-3,045	78° 27′ 08,217″	0,97975833	76 742,068
	Σ_1	180° 00′ 02,89″	6.245″	180° 00′ 09,135″	-9,135″	180°00′ 00,000″		
	ε_1	9,135″						
	w_1	-6,245″						
2	*D*	59° 25′ 19,10″	3.581	59° 25′ 22,681″	-4,231	59° 25′ 18,450″	0,86093557	76 742,068
	B	51° 46′ 48,52″	3.581	51° 46′ 52,101″	-4,231	51° 46′ 47,870″	0,78564059	70 030,424
	C	68° 47′ 54,33″	3.581	68° 47′ 57,911″	-4,231	68° 47′ 53,680″	0,93231272	83 104,483
	Σ_2	180° 00′ 01,95″	10.743″	180° 00′ 12,693″	-12,693″	180°00′ 00,000″		
	ε_2	12,693″						
	w_2	-10,743″						

Робочі формули:

Радіус сфери $R_m = \dfrac{b}{1-e^2\sin^2 B_m}$ = 6 380 461,215 *м*.

Трикутник № 1:

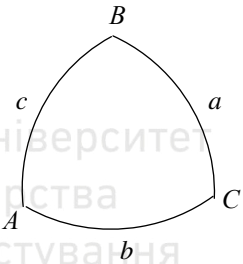
$$\varepsilon_1 = \rho\frac{c_1^2}{2R_m^2}\frac{\sin A_1 \sin B_1}{\sin C_1};\ w_1 = A_1 + B_1 + C_1 - 180^{\circ} - \varepsilon_1;\ b_1 = c_1\frac{\sin B_1'}{\sin C_1'};\ a = c_1\frac{\sin A_1'}{\sin C_1'}.$$

Трикутник № 2:

$$\varepsilon_2 = \rho\frac{a^2}{2R_m^2}\frac{\sin C_2 \sin B_2}{\sin A_2};\ w_2 = A_2 + B_2 + C_2 - 180^{\circ} - \varepsilon_2;\ b_2 = a\frac{\sin B_2'}{\sin A_2'};\ c_2 = a\frac{\sin C_2'}{\sin A_2'}.$$

5. НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ СПОСОБОМ АДДИТАМЕНТІВ

Сторони сферичного трикутника *ABC* можна виразити в частинах радіусу *R* кривизни поверхні сфери через виміряні кути *A, B, C* і вихідну сторону *a* за теоремою синусів співвідношеннями такого вигляду:



для сторони *b* $\sin\dfrac{b}{R} = \sin\dfrac{a}{R}\dfrac{\sin B}{\sin A}$;

для сторони *c* $\sin\dfrac{c}{R} = \sin\dfrac{a}{R}\dfrac{\sin C}{\sin A}$.

Якщо синуси сторін розкласти в тригонометричний ряд, то після спрощення виразів з точністю малих величин до четвертого порядку отримаємо:

$$b = a\frac{\sin B}{\sin A}\left(1-\frac{a^2}{6R^2}\right)\left(1-\frac{b^2}{6R^2}\right)^{-1};\qquad c = a\frac{\sin C}{\sin A}\left(1-\frac{a^2}{6R^2}\right)\left(1-\frac{c^2}{6R^2}\right)^{-1}.$$

Члени формул $\left(1-\dfrac{b^2}{6R^2}\right)^{-1}$ та $\left(1-\dfrac{c^2}{6R^2}\right)^{-1}$ розкладуємо в біноміальний ряд $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \ldots$ і з такою ж точністю остаточно отримаємо:

$$b = a\frac{\sin B}{\sin A}\left(1-\frac{a^2}{6R^2}+\frac{b^2}{6R^2}\right);\qquad c = a\frac{\sin C}{\sin A}\left(1-\frac{a^2}{6R^2}+\frac{c^2}{6R^2}\right).$$

Величини $\dfrac{a^2}{6R^2} = A_a$, $\dfrac{b^2}{6R^2} = A_b$, $\dfrac{c^2}{6R^2} = A_c$ називають аддитаментами.

Аддитаменти – це поправки до сторін сферичного трикутника, з врахуванням яких його можна розв'язувати за сферичними кутами за теоремою синусів:

$$b = a\frac{\sin B}{\sin A}\left(-A_a + A_b\right); \qquad c = a\frac{\sin C}{\sin A}\left(-A_a + A_c\right).$$

Числові значення аддитаментів невідомих сторін можна розраховувати за приблизними значеннями їх довжин $b' = a\dfrac{\sin B}{\sin A}$ та [illegible].

Отримані формули дійсні при розв'язуванні сферичних трикутників з довжинами сторін до 200км.

Для забезпечення точності довжин $m_S = \pm 0.001м$ у тріангуляції 1 класу при обчисленні аддитаментів середній радіус R сфери достатньо вважати постійним для поясу між паралелями протяжністю ±5° відносно середньої широти B_m. Оскільки пояс в 10° по широті відповідає ≈1000км, то середньою широтою B_m можна вважати широту деякої середньої точки мережі тріангуляції, якщо віддаль від неї до крайніх точок досягає 500км у напрямі з півдня на північ. Територія України розташована в широтах приблизно від 44° до 52°, тому при обчисленні аддитаментів достатньо прийняти середню широту $B_m \approx 48^{\circ}$ і середній радіус сфери R = 6 380 461м.

Якщо розв'язування сферичного трикутника розпочинати за виміряними кутами, то попередньо потрібно позбутися його кутової нев'язки і визначити виправлені сферичні кути. Кожен з виправлених кутів розраховують як суму виміряного кута і поправки $-\dfrac{w}{3}$, де нев'язка $w = A + B + C - 180^{\circ} - \varepsilon$. ε - сферичний надлишок трикутника.

Завдання. Розв'язати два малих сферичних трикутники, зображених на схемі та з вихідними даними, наведеними у §4.

Приклад.

Робочі формули.

$$A_s = \frac{s^2}{6R^2}.$$

Трикутник № 1:

$$b_1' = c_1\frac{\sin B_1}{\sin C_1}; \quad b_1 = b_1'\left(-A_{c_1} + A_{b_1}\right); \quad a' = c_1\frac{\sin A_1}{\sin C_1}; \quad a = a'\left(-A_{c_1} + A_a\right)$$

Трикутник № 2:

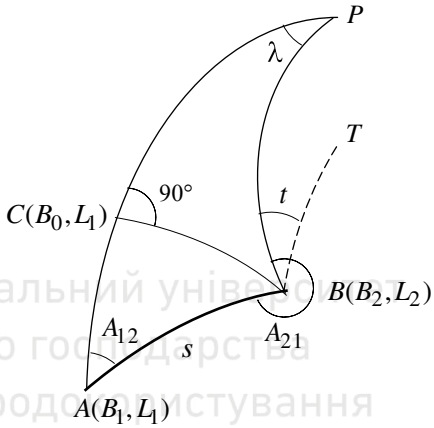
$$b_2' = a\frac{\sin B_2}{\sin A_2}; \quad b_2 = b_2'\left(-A_a + A_{b_2}\right); \quad c_2' = a\frac{\sin C_2}{\sin A_2}; \quad c_2 = c_2'\left(-A_a + A_{c_2}\right)$$

Відомість наближеного розв’язування трикутників

№ тр.	Верш.	Виміряні сферичні кути	$-w/3$	Виправлені сферичні кути	Синуси кутів	Приблизні довжини	Аддита-менти	Довжини сторін
1	C	49° 59′ 51,20″	2.082	49° 59′ 53,282″	0,76602351	-	0,00001474	60 000,000
	B	51° 33′ 02,51″	2.082	51° 33′ 04,592″	0,78316495	61 342,630	0,00001541	61 342,671
	A	78° 27′ 09,18″	2.082	78° 27′ 11,262″	0,97976128	76 741,348	0,00002411	76 742,068
	Σ_1	180° 00′ 02,89″	6.245″	180° 00′ 09,135″				
	ε_1	9,135″						
	w_1	-6,245″						
2	D	59° 25′ 19,10″	3.581	59° 25′ 22,681″	0,86094601	-	0,00002411	76 742,068
	B	51° 46′ 48,52″	3.581	51° 46′ 52,101″	0,78565328	70 030,707	0,00002008	70 030,424
	C	68° 47′ 54,33″	3.581	68° 47′ 57,911″	0,93232014	83 104,137	0,00002827	83 104,483
	Σ_2	180° 00′ 01,95″	10.743″	180° 00′ 12,693″				
	ε_2	12,693″						
	w_2	-10,743″						

6. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРЯМОЇ ГЕОДЕЗИЧНОЇ ЗАДАЧІ СПОСОБОМ ДОПОМІЖНОЇ ТОЧКИ (СПОСІБ ШРЕЙБЕРА)

Результати геодезичних вимірів визначають відносне взаємне положення геодезичних пунктів за відстанями між ними і кутами фігур, які вони утворюють. Абсолютне положення пунктів на земному еліпсоїді найбільш оптимально визначається їх координатами в геодезичній системі. Геодезичні широта, довгота і азимут виражають положення пунктів та орієнтування напрямів між ними відносно ліній меридіанів та паралелей. Визначення геодезичних координат і азимутів – мета основних геодезичних робіт.



A і *B* – пункти на поверхні еліпсоїду з геодезичними координатами B_1, L_1 і B_2, L_2. *AP* – меридіан т.*A*; *BP* – меридіан т.*B*. A_{12} і A_{21} - прямий і зворотній азимути напряму *AB*. *s* – довжина геодезичної лінії.

Задача, в якій за величинами B_1, L_1, A_{12} та *s* розраховують величини B_2, L_2 та A_{21}, називається *прямою геодезичною задачею*.

Задача, в якій за величинами B_1, L_1 та B_2, L_2 розраховують величини A_{12}, A_{21} та *s*, називається *оберненою геодезичною задачею*.

Пряму і обернену задачі називають *головними геодезичними задачами*.

При розв'язуванні головних геодезичних задач з метою забезпечення потрібної точності результатів обчислень необхідно дотримуватись повної відповідності між точністю вихідних даних та точністю робочих формул. Така вимога викликана тим, що формули, які використовуються у вибраному способі розв'язування, є результатом розкладу в ряди тих чи інших диференційних чи тригонометричних співвідношень на поверхні еліпсоїду. В цьому розумінні всі формули є нестрогими і неточними. Використовуючи певне число членів ряду, можна отримати результат розрахунку з різною точністю. Практично, виходячи з точності вихідних даних та заданої точності кінцевого результату обчислень за формулою, встановлюється число членів ряду, які потрібно враховувати у вигляді поправочних коефіцієнтів. Інші члени ряду, як малі величини порівняно з точністю результату розрахунку, відкидаються. Критерієм точності формули є степінь малої величини, якою нехтують у остаточному вигляді формули. Найчастіше такою малою величиною є відношення $\frac{s}{R}$. Формулу вважають практично точною, якщо вона

містить достатнє число поправочних коефіцієнтів і забезпечує десятикратний запас (порядок) точності.

Розв'язування прямої геодезичної задачі способом допоміжної точки виконується посереднім шляхом – обраховують насамперед різниці координат пунктів, а за ними – абсолютні значення координат. За умови використання робочих формул приведеного нижче вигляду, спосіб забезпечує розрахунок геодезичних координат пунктів у тріангуляції 1 класу з точністю десятитисячних часток секунди, азимутів – з точністю тисячних часток секунди.

C – допоміжна точка поверхні еліпсоїду, розташована на меридіані т.*A* так, що геодезична лінія *CB* має азимут $A_{CB} = 90^{\circ}$. Точка *C* має геодезичні координати B_0, L_1.

Черговість дій при розв'язуванні прямої геодезичної задачі способом допоміжної точки:

1. Обчислення широти точки C

$$B_0 = B_1 + b\,. \tag{16}$$

b - різниця широт пункту *A* і точки *C*

$$b = \rho \frac{u}{M_1}\left(1 - \frac{3}{4}\frac{e^2}{a(1-e^2)} u W_1 \sin 2B_1 + \frac{v^2 W_1^4}{3a^2(1-e^2)} - \frac{e^2}{2a^2} u^2 \cos 2B_1\right), \tag{17}$$

де $W_1 = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1}$ - перша функція геодезичної широти пункту *A*; $M_1 = \dfrac{a(1-e^2)}{W_1^3}$ - радіус кривини меридіанного перерізу в п. *A*; $u = s\cos A_{12}$; $v = s \sin A_{12}$; *u*, *v* – проміжні умовні позначення.

При $s < 30$км поправочним коефіцієнтом $\dfrac{e^2}{2a^2} u^2 \cos 2B_1$ формули (17) можна нехтувати.

2. Обчислення широти пункту B

$$B_2 = B_0 - d = B_1 + b - d\,. \tag{18}$$

d –різниця широт пункту *B* і точки *C*

$$d = \frac{c\tau\ W_0^2}{2\rho(1-e^2)}\ \left(1 - \frac{\tau^2}{6\rho^2} - \frac{\lambda^2}{12\rho^2} + \frac{e'^2 \lambda^2 \cos^2 B_0}{12\rho^2}(10\sin^2 B_0 - 1)\right), \tag{19}$$

де $W_0 = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_0}$ - перша функція геодезичної широти точки *C*; *c* – різниця довгот пункту *B* і точки *C*

$$c = \rho\ \frac{v\ W_0}{a}\ \left(1 - \frac{u^2 W_1^4}{6a^2(1-e^2)}\right); \tag{20}$$

$\lambda = \dfrac{c}{\cos B_0}$; $\tau = c\ tgB_0$; λ і τ - проміжні величини.

При s < 30км поправочним коефіцієнтом $\dfrac{e'^2 \lambda^2 \cos^2 B_0}{12\rho^2}(10\sin^2 B_0 - 1)$ формули (19) можна нехтувати.

3. Обчислення довготи пункту B

$$L_2 = L_1 + \lambda. \tag{21}$$

λ - різниця довгот пунктів *A* і *B* (приблизне значення різниці λ виражає величина λ).

$$\lambda = \lambda\ (1 - \frac{\tau^2}{3\rho^2} + \frac{\lambda^4}{90\rho^4}(6 + 7\sin^2 B_0)\sin^2 B_0)\cdot \tag{22}$$

При s < 30км поправочним коефіцієнтом $\dfrac{\lambda^4}{90\rho^4}(6 + 7\sin^2 B_0)\sin^2 B_0$ формули (22) можна нехтувати.

4. Обчислення зворотного азимуту A_{21}

$$A_{21} = A_{12} \pm 180^{\circ} + t - \varepsilon. \tag{23}$$

t – кут, утворений на поверхні еліпсоїду кривою *BP* меридіанного перерізу в пункті *B* та кривою *BT*, яка паралельна меридіанному перерізові у пункті *A*. Кут *t* називають зближенням меридіанів у пункті *B*. Приблизне значення зближення меридіанів *t* виражає величина τ.

$$t = \tau\ (1 - \frac{\lambda^2}{6\rho^2} - \frac{\tau^2}{6\rho^2} - \frac{\lambda^2}{6\rho^2} e'^2 \cos^4 B_0)\cdot \tag{24}$$

ε - сферичний надлишок трикутника *ABC*

$$\varepsilon = \rho \frac{u\ v\ W_1^4}{2a^2(1 - e^2)}\cdot \tag{25}$$

При s < 30км поправочним коефіцієнтом $\dfrac{\lambda^2}{6\rho^2} e'^2 \cos^4 B_0$ формули (24) можна нехтувати.

Завдання. Розв'язати пряму геодезичну задачу, якщо геодезична широта пункту *A* $B_1 = 48^{\circ}01'01.1111'' + 7' \times N$, геодезична довгота пункту *A* $L_1 = 22^{\circ}11'11.1111'' + 30' \times N$, прямий азимут напряму *AB* $A_{12} = 1^{\circ}01'01.111'' + 3^{\circ} \times N$, довжина геодезичної лінії $s = (60000 - 500 \times N)$ *метрів*. *N* – номер варіанту.

Приклад.

$B_1 = 48^{\circ}01'01.1111'' + 7' \times N$	48° 01′ 01,1111″	48°,01697531
$L_1 = 22^{\circ}11'11.1111'' + 30' \times N$	22° 11′ 11,1111″	22°,18641975
$A_{12} = 1^{\circ}01'01.111'' + 3^{\circ} \times N$	1° 01′ 01,111″	1°,01697528
$s = 60000 - 500 \times N$	60 000 *метрів*	

Сталі величини.

a	6378245 *м*	e^2	0,00669342	e'^2	0.00673853	$\rho°$	57°,29577951

Обчислення широти точки *C*.

Позначення дій	Результати	Позначення дій	Результати
$W_1 = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1}$	0,99814903	$\rho \dfrac{u}{M_1}$	0,53951948
$M_1 = \dfrac{a(1-e^2)}{W_1^3}$	6370864,071	$\dfrac{3}{4} \dfrac{e^2}{a(1-e^2)} u W_1 \sin 2B_1$	0,00004718
$u = s \cos A_{12}$	59990,545	$\dfrac{v^2 W_1^4}{3a^2(1-e^2)}$	0,00000001
$v = s \sin A_{12}$	1064,918	$\dfrac{e^2}{2a^2} u^2 \cos 2B_1$	-0,00000003
b	0°,53949404	B_0	48°,55646935
	0° 32′ 22,1786″		48° 33′ 23,2897″

Обчислення широти пункту *B*.

Позначення дій	Результати	Позначення дій	Результати
$W_0 = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_0}$	0,99811767	$\dfrac{c\tau \; W_0^2}{2\rho(1-e^2)}$	0,00000090
$\rho \dfrac{v \; W_0}{a}$	0,00954815	$\dfrac{\tau^2}{6\rho^2}$	0,00000001
$\dfrac{u^2 W_1^4}{6a^2(1-e^2)}$	0,00001473		0,00000001
c	0°,00954801	$\dfrac{e'^2 \lambda^2 \cos^2 B_0}{12\rho^2}(10 \sin^2 B_0 - 1)$	0,00000000
$\lambda = \dfrac{c}{\cos B_0}$	0°,01442556	d	0°,00000090
$\tau = c \;\; tg B_0$	0°,01081352	B_2	48°,55646845
			48°33′23,2864″

Обчислення довготи пункту *B*.

Позначення дій	Результати	Позначення дій	Результати
$\frac{\tau^2}{3\rho^2}$	0,00000001	λ	0°,01442556
$\frac{\lambda^4}{90\rho^4}(6+7\sin^2 B_0)\sin^2 B_0$	0,00000000	L_2	22°,20084531
			22°12′03,0431″

Обчислення зворотного азимуту

Позначення дій	Результати	Позначення дій	Результати
$\varepsilon = \rho \frac{u\ v\ W_1^4}{2a^2(1-e^2)}$	0.00004496	t	0°.01081352
$\frac{\lambda^2}{6\rho^2}$	0.00000001	A_{21}	181°.02774384
$\frac{\lambda^2}{6\rho^2}e'^2\cos^4 B_0$	0,00000000		181°01′39.878″

7. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРЯМОЇ ГЕОДЕЗИЧНОЇ ЗАДАЧІ ЗА ФОРМУЛАМИ ГАУССА ІЗ СЕРЕДНІМИ АРГУМЕНТАМИ

Якщо відомі координати B_1, L_1 початкового пункту *A*, азимут A_{12} та довжина елементу геодезичної лінії ds, то координати B_2, L_2 кінцевого пункту *B* лінії та її азимут A_{21} є функціями довжини лінії *s* :

$$\left.\begin{aligned} B_2 &= f_1(s) \\ L_2 &= f_2(s) \\ A_{21} &= f_3(s) \end{aligned}\right\}, \quad \text{причому} \quad \left.\begin{aligned} B_1 &= f_1(0) \\ L_1 &= f_2(0) \\ A_{12} &= f_3(0) \end{aligned}\right\}.$$

Якщо функції f_i розкласти в ряд Маклорена виду $f_i(s) = f_i(0) + \frac{f_i'(0)}{1!}s + \frac{f_i''(0)}{2!}s^2 + \frac{f_i'''(0)}{3!}s^3 + \ldots$, то для різниць $B_2 - B_1 = b$, $L_2 - L_1 = \lambda$ та $A_{21} - A_{12} \pm 180^{\circ} = t$ отримаємо систему рівнянь

$$\left.\begin{aligned} b &= \left(\frac{dB}{ds}\right)_1 s + \left(\frac{d^2B}{ds^2}\right)_1 \frac{s^2}{2} + \left(\frac{d^3B}{ds^3}\right)_1 \frac{s^3}{6} + \ldots \\ \lambda &= \left(\frac{dL}{ds}\right)_1 s + \left(\frac{d^2L}{ds^2}\right)_1 \frac{s^2}{2} + \left(\frac{d^3L}{ds^3}\right)_1 \frac{s^3}{6} + \ldots \\ t &= \left(\frac{dA}{ds}\right)_1 s + \left(\frac{d^2A}{ds^2}\right)_1 \frac{s^2}{2} + \left(\frac{d^3A}{ds^3}\right)_1 \frac{s^3}{6} + \ldots \end{aligned}\right\}. \qquad (26)$$

Індекс „1” вказує, що значення похідних обчислюються за аргументами B_1, L_1, A_{12}. Всі потрібні похідні можна визначити із системи вихідних диференційних рівнянь поверхні еліпсоїду. Якщо значення похідних виразити аргументами середньої широти $B_m = \frac{B_1 + B_2}{2}$ та середнього азимуту $A_m = \frac{A_{12} \pm 180^{\circ} + A_{21}}{2}$, то в рядах (26) будуть відсутні парні похідні і ряди будуть краще сходитись. При розв’язуванні геодезичних задач це дає можливість обмежуватись меншим числом членів розкладу, забезпечуючи при цьому потрібну точність результатів. Для забезпечення точності розрахунку координат і азимутів у тріангуляції 1 класу у формулах розрахунку різниць широт, довгот і азимутів достатньо зберігати члени рядів з малими величинами у третій степені. З такою точністю формули мають вигляд:

$$b = \rho \frac{V_m^3}{c} s \cos A_m (1 + \frac{\lambda^2}{12\rho^2} + \frac{\lambda^2}{24\rho^2} \sin^2 B_m); \qquad (27)$$

$$\lambda = \rho \frac{V_m}{c} s \frac{\sin A_m}{\cos B_m} (1 - \frac{b^2}{24\rho^2} + \frac{\lambda^2}{24\rho^2} \sin^2 B_m); \qquad (28)$$

$$t = \rho \frac{V_m}{c} s \sin A_m tg B_m (1 + \frac{\lambda^2}{12\rho^2} - \frac{\lambda^2}{24\rho^2} \sin^2 B_m + \frac{b^2}{12\rho^2}). \qquad (29)$$

Тепер $B_2 = B_1 + b$, $L_2 = L_1 + \lambda$, $A_{21} = A_{12} \pm 180^{\circ} + t$.

В отриманих формулах різниці координат і азимутів виражаються функціями B_m та A_m, а також b та λ, які невідомі. Тому завдання розв’язують послідовними наближеннями. У першому наближенні $b^{(1)} = \rho \frac{V_1^3}{c} s \cos A_{12}$; $\lambda^{(1)} = \rho \frac{V_1}{c} s \frac{\sin A_{12}}{\cos B_1}$; $t^{(1)} = \rho \frac{V_1}{c} s \sin A_{12} \; tg B_1$ і $B_m^{(1)} = B_1 + \frac{b^{(1)}}{2}$, $A_m^{(1)} = A_{12} + \frac{t^{(1)}}{2}$. За значеннями $B_m^{(1)}$, $A_m^{(1)}$, $b^{(1)}$, $\lambda^{(1)}$, користуючись формулами (27) – (29), у другому наближенні розраховують $B_m^{(2)}$, $A_m^{(2)}$, $b^{(2)}$, $\lambda^{(2)}$. Наближення повторюють, доки результати розрахунків у двох суміжних наближеннях не будуть рівні між собою.

Завдання і вихідні дані наведено у § 6.

Приклад.

Сталі величини.

a	6378245 *м*	e'^2	0.00673853	ρ°	57°,29577951

Наближення (1)			
Позначення дій	Результати	Позначення дій	Результати
$c = a\sqrt{1+e'^2}$	6399698,916	$V_1 = \sqrt{1+e'^2\cos^2 B_1}$	1,00150641
$b^{(1)} = \rho\frac{V_1^3}{c}s\cos A_{12}$	0,53951948	$t^{(1)} = \rho\frac{V_1}{c}s\sin A_{12}\ tgB_1$	0,01061095
$\lambda^{(1)} = \rho\frac{V_1}{c}s\frac{\sin A_{12}}{\cos B_1}$	0,01427464		
$B_m^{(1)} = B_1 + \frac{b^{(1)}}{2}$	48,28673504	$A_m^{(1)} = A_{12} + \frac{t^{(1)}}{2}$	1,02228075

Позначення дій	Результати в наближеннях			
	(2)	(3)	(4)	(5)
$V_m = \sqrt{1+e'^2\cos^2 B_m}$	1.00149067	1.00149067	1.00149067	1.00149067
$\frac{\lambda^2}{12\rho^2}$	0.00000005	0.00000005	0.00000005	0.00000005
$\frac{\lambda^2}{24\rho^2}\sin^2 B_m$	0.00000001	0.00000001	0.00000001	0.00000001
$\frac{b^2}{24\rho^2}$	0.00000369	0.00000369	0.00000369	0.00000369
$\rho\frac{V_m^3}{c}s\cos A_m$	0.53949315	0.53949313	0.53949313	0.53949313
$\rho\frac{V_m}{c}s\frac{\sin A_m}{\cos B_m}$	0.01442450	0.01442561	0.01442561	0.01442561
$\rho\frac{V_m}{c}s\sin A_m tgB_m$	0.01076766	0.01076848	0.01076849	0.01076849
b	0.53949315	0.53949314	0.53949314	0.53949314
λ	0.01442445	0.01442555	0.01442556	0.01442556
t	0.01076774	0.01076856	0.01076857	0.01076857
$B_m = B_1 + \frac{b}{2}$	48.28672188	48.28672187	48.28672187	-
$A_m = A_{12} + \frac{t}{2}$	1.02235915	1.02235956	1.02235956	-

Кінцеві результати.

Позначення дій	Результати	
$B_2 = B_1 + b$	48°,55646844	48° 33′ 23,2864″
$L_2 = L_1 + \lambda$	22°,20084531	22° 12′ 03,0431″
$A_{21} = A_{12} \pm 180^{\circ} + t$	181°,02774385	181° 01′ 39,878″

8. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОБЕРНЕНОЇ ГЕОДЕЗИЧНОЇ ЗАДАЧІ ЗА ФОРМУЛАМИ ГАУССА ІЗ СЕРЕДНІМИ АРГУМЕНТАМИ

Для розв'язування оберненої геодезичної задачі, в якій за геодезичними координатами B_1, L_1 та B_2, L_2 пунктів *A* та *B* розраховують азимути A_{12}, A_{21} та довжину *s* геодезичної лінії *AB*, найбільш оптимально використовувати обернений алгоритм розв'язування за формулами Гаусса із середніми аргументами (27)–(29).

Черговість дій при розв'язуванні оберненої задачі за формулами Гаусса:

1. Обчислення різниць координат $B_2 - B_1 = b$, $L_2 - L_1 = \lambda$ та середньої широти $B_m = \dfrac{B_1 + B_2}{2}$.

2. Обчислення сум поправочних коефіцієнтів у формулах (27) та (28)

$$\Delta_b = 1 + \frac{\lambda^2}{12\rho^2} + \frac{\lambda^2}{24\rho^2}\sin^2 B_m; \qquad \Delta_\lambda = 1 - \frac{b^2}{24\rho^2} + \frac{\lambda^2}{24\rho^2}\sin^2 B_m.$$

3. Обчислення середнього азимуту A_m.

Оскільки $b = \rho\dfrac{V_m^3}{c} s\cos A_m \Delta_b$ та $\lambda = \rho\dfrac{V_m}{c} s\dfrac{\sin A_m}{\cos B_m}\Delta_\lambda$, то звідси виражаємо допоміжні величини *P* та *Q*:

$$s\cos A_m = \frac{bc}{\rho\, V_m^3\ \Delta_b} = \pm Q; \qquad s\sin A_m = \frac{\lambda c\cos B_m}{\rho\ V_m\ \Delta_\lambda} = \pm P.$$

З останніх двох рівнянь маємо: $\dfrac{P}{Q} = tgA_m$. Тому $A_m = arctg\dfrac{P}{Q}$, а за знаками величин *P* та *Q* визначаємо четверть, в якій розташований напрям A_m.

4. Обчислення довжини геодезичної лінії $s = \dfrac{P}{\sin A_m}$ або $s = \dfrac{Q}{\cos A_m}$.

5. Обчислення зближення меридіанів t за формулою (29)

$$t = \rho\frac{V_m}{c} s\sin A_m\ \ tgB_m(1 + \frac{\lambda^2}{12\rho^2} - \frac{\lambda^2}{24\rho^2}\sin^2 B_m + \frac{b^2}{12\rho^2}).$$

6. Обчислення азимутів $A_{12} = A_m - \dfrac{t}{2}$ та $A_{21} = A_m \pm 180^\circ + \dfrac{t}{2}$.

У порівнянні з іншими способами розв'язування оберненої геодезичної задачі спосіб Гаусса виділяється простотою робочих формул, тому розглядається як найбільш оптимальний. Оскільки за умовою задачі один із середніх аргументів B_m можна розрахувати завчасно, то незручність, яка має місце у прямій задачі (застосування послідовних наближень), у оберненій задачі відсутня.

Завдання. Розв'язати обернену геодезичну задачу, якщо геодезичні координати пункту A $B_1 = 48^{\circ}01'01.1111'' + 7' \times N$, $L_1 = 22^{\circ}11'11.1111'' + 30' \times N$. N – номер варіанту. Геодезичні координати пункту B вибрати із завдання №7: $B_2 = 48^{\circ}33'23.2864''$, $L_2 = 22^{\circ}12'03.0431''$.

Приклад.

$B_1 = 48^{\circ}01'01.1111'' + 7' \times N$	48° 01′ 01,1111″	48°,01697531
$L_1 = 22^{\circ}11'11.1111'' + 30' \times N$	22° 11′ 11,1111″	22°,18641975
B_2	48° 33′ 23,2864″	48°,55646844
L_2	22° 12′ 03,0431″	22°,20084531

Сталі величини.

a	6378245 *м*	e'^2	0.00673853	$\rho°$	57°,29577951

Позначення дій	Результати	Позначення дій	Результати
1. Обчислення різниць координат і середньої широти			
$B_2 - B_1 = b$	0°,53949314	$B_m = \dfrac{B_1 + B_2}{2}$	48°,28672187
$L_2 - L_1 = \lambda$	0°,01442556		
2. Обчислення сум поправочних коефіцієнтів у формулах (27) та (28)			
$\dfrac{\lambda^2}{12\rho^2}$	0,00000001	Δ_b	1,00000001
$\dfrac{b^2}{24\rho^2}$	0,00000369		
$\dfrac{\lambda^2}{24\rho^2}\sin^2 B_m$	0,00000000	Δ_λ	0,99999631
3. Обчислення середнього азимуту A_m.			
$c = a\sqrt{1+e'^2}$	6399698,916	$P = \dfrac{\lambda c \cos B_m}{\rho V_m \Delta_\lambda}$	1070,556
$V_m = \sqrt{1+e'^2 \cos^2 B_m}$	1,00149067	$A_m = arctg\dfrac{P}{Q}$	1°,02235956
$Q = \dfrac{bc}{\rho V_m^3 \Delta_b}$	59990,448	A_m	1°01′20,494″
4. Обчислення довжини геодезичної лінії s			
$s = \dfrac{P}{\sin A_m}$	60 000,000 *м*	$s = \dfrac{Q}{\cos A_m}$	60 000,000 *м*

5. Обчислення зближення меридіанів t			
$\rho\frac{V_m}{c}s\sin A_m tgB_m$	0,01076849	$1+\frac{\lambda^2}{12\rho^2}-\frac{\lambda^2}{24\rho^2}\sin^2 B_m+\frac{b^2}{12\rho^2}$	1,00000739
$t=\rho\frac{V_m}{c}s\sin A_m tgB_m(1+\frac{\lambda^2}{12\rho^2}-\frac{\lambda^2}{24\rho^2}\sin^2 B_m+\frac{b^2}{12\rho^2})$			0°,01076857
6. Обчислення азимутів			
$A_{12}=A_m-\frac{t}{2}$	1°,01697528	$A_{21}=A_m\pm180^{\circ}+\frac{t}{2}$	181°,02774385
	1°01′01,111″		181°01′39,878″

9. ПЕРЕХІД З ПОВЕРХНІ ЕЛІПСОЇДУ НА ПЛОЩИНУ (проекція Гаусса-Крюгера)

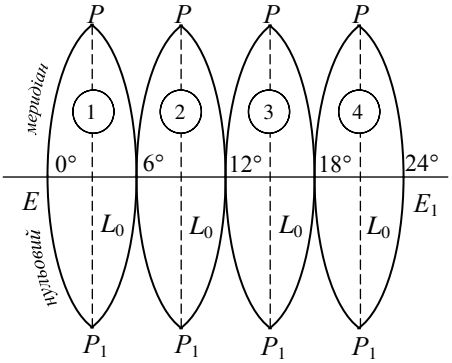
Система геодезичних координат є основною при розв’язуванні наукових задач та при створенні державної опорної геодезичної мережі. Але вона непридатна для практичного користування при розв’язуванні різних інженерних задач, наприклад, при картографуванні місцевості, проектуванні та перенесенні в натуру споруд тощо. Для розв’язування такого роду завдань найбільш зручно користуватись системою плоских прямокутних координат x, y. Поверхню еліпсоїду неможливо розгорнути на площину без спотворень, тому неможливо запровадити єдину систему плоских координат, в якій би відображалось без спотворень взаємне положення точок земної поверхні. Поверхня еліпсоїду має зображатись на площині за певним законом, який математично можна виразити рівняннями загального вигляду

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(B, L) \\ y &= f_2(B, L) \end{aligned}\right\}.$$

Якщо за певних умов встановити закон зображення, то отримані рівняння забезпечать перехід від елементів поверхні еліпсоїду до таких же на площині. Вибраний закон повинен забезпечити єдину державну систему прямокутних координат і має задовольняти таким вимогам: 1) найменші спотворення зображених на площині елементів поверхні еліпсоїду; 2) можливість врахування та вираження спотворень; 3) простота проекції поверхні еліпсоїду на площину. Таким вимогам задовольняє конформна проекція – зображення, при якому безмежно малий контур на поверхні еліпсоїду відображується подібним йому контуром на площині. В конформній проекції кутові спотворення відсутні, а масштаб лінійних зображень постійний вздовж головних напрямів. Така проекція не може мати єдиної точки відліку, оскільки це привело б до значних спотворень при віддаленні від такої точки.

Окресленим вимогам найкраще задовольняє конформна проекція Гаусса – Крюгера. В ній еліпсоїд розділений меридіанами на зони з постійною різницею довгот; кожна зона є сфероїдним двокутником з вершинами у

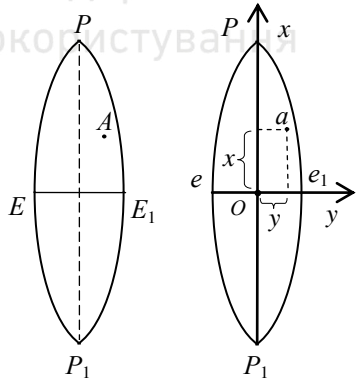
полюсах. Середній меридіан зони називають осьовим меридіаном з довготою L_0. Протяжність зони по довготі складає 6° (або 3° в районах проведення крупномасштабних знімань). Східний та західний меридіани шестиградусної зони співпадають з правою та лівою рамками листа карти масштабу 1:1000000. Довгота осьового меридіану такої зони



$$L_0 = 6n - 3, \qquad (30)$$

де n – порядковий номер зони, розпочинаючи від нульового меридіану. Номер N листа карти масштабу 1:1000000 виражається формулою $N = n + 30$. Територія України розташована в межах зон №№ 4,5,6,7. Якщо положення точки A на поверхні еліпсоїду описується геодезичними широтою B та довготою L, то в зоні – широтою B та довготою $\lambda = L - L_0$. Номер зони обчислюється за довготою L як ціла частина відношення $\frac{L^\circ}{6^\circ}$, збільшена на 1, або за номером N листа карти мільйонного масштабу: $n = N - 30$.

В кожній зоні зображення осьового меридіану прийнято за вісь абсцис x, а зображення екватору – за вісь ординат y. Ці криві в проекції Гаусса – Крюгера на площині зображуються прямими лініями. Вздовж осьового меридіану еліпсоїд зображується на площині без спотворень. Перетин осей абсцис і ординат є початком координат x_0, y_0 кожної зони. Зображення a точки A в проекції зони на площину описується прямокутними координатами x, y. В межах України абсциси x додатні; ординати y додатні східніше та від'ємні західніше осьового меридіану зони. Щоб уникнути від'ємних ординат, точкам осьового меридіану зони умовно присвоюють значення ординати $y_0 =$ 500 000 м і спереду записують номер зони.



Хід дій при переході з еліпсоїду на площину в проекції Гаусса – Крюгера, якщо вихідними даними є геодезичні координати B,L початкового пункту A, довжина геодезичної лінії s та азимут A_{AB} вихідної сторони AB мережі геодезичних пунктів:

1. Розрахунок номера зони n, довготи її осьового меридіану L_0 та геодезичних координат B_A, λ для початкового пункту A.

2. Розрахунок прямокутних координат x, y початкового пункту A за його геодезичними координатами в зоні B_A, λ:

$$x_A = X + \frac{\lambda^2}{2\rho^2} N \sin B_A \cos B_A \ (1 + \frac{\lambda^2 \cos^2 B_A}{12\rho^2}(5 - tg^2 B_A + 9e'^2 \cos^2 B_A + 4e'^4 \cos^4 B_A)) \quad (31)$$

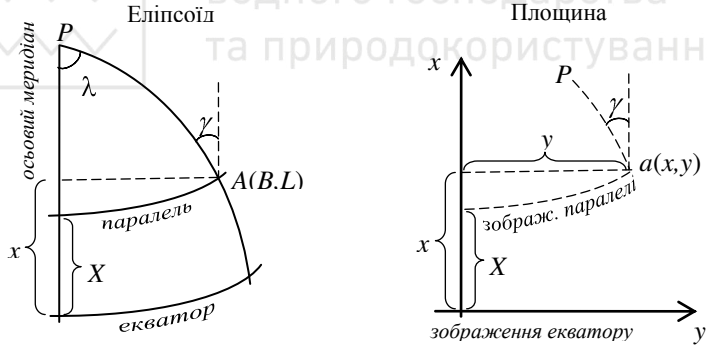
$$y_A = \frac{\lambda}{\rho} N \cos B_A (1 + \frac{\lambda^2 \cos^2 B_A}{6\rho^2}(1 - tg^2 B_A + e'^2 \cos^2 B_A)), \quad (32)$$

де $N = \frac{c}{V_A}$; $V_A = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B_A}$; $c = a\sqrt{1 + e'^2}$ - радіус кривини меридіанного перерізу в полюсі; X – довжина дуги осьового меридіану від екватора до паралелі з широтою B_A. Величину X можна розрахувати за формулою (5):

$$X = a(1 - e^2)(A\frac{B_A}{\rho} - \frac{B}{2}\sin 2B_A + \frac{C}{4}\sin 4B_A - \frac{D}{6}\sin 6B_A). \quad (33)$$

3. Розрахунок зближення меридіанів γ на площині у пункті A:

$$\gamma = \lambda \sin B_A + \frac{\lambda^3}{3\rho^2} \sin B_A \cos^2 B_A \ (1 + 3e'^2 \cos^2 B_A + 2e'^4 \cos^4 B_A). \quad (34)$$



Тепер можна виразити наближене значення дирекційного кута α'_{AB}:

$$\alpha'_{AB} = A_{AB} - \gamma. \quad (35)$$

4. Розрахунок масштабу зображення m в пункті A на площині.

Масштабом зображення (або спотворенням) $m = dS / ds$ називають відношення довжини елементарного відрізку dS на площині до відповідної елементарної довжини геодезичної лінії ds на поверхні еліпсоїду.

$$m = 1 + \frac{\lambda^2 \cos^2 B_A}{2\rho^2} \ (1 + e'^2 \cos^2 B_A). \quad (36)$$

5. Розрахунок наближених довжин сторін мережі на площині за виміряними сферичними кутами і довжиною геодезичної лінії *s* вихідної сторони з розв'язування трикутників за теоремою Лежандра чи способом аддитаментів (див. вихідні дані та результати розрахунків завдань №№ 4,5).

6. Розрахунок наближених значень x', y' прямокутних координат пунктів мережі за координатами початкового пункту x_A, y_A, наближеним значенням дирекційного кута α'_{AB}, виправленими кутами та наближеними довжинами сторін трикутників на площині.

Для мережі двох трикутників (див. завдання) можна записати:

а) дирекційні кути сторін: $\alpha'_{AC} = \alpha'_{AB} + A'_1$; $\alpha'_{CD} = \alpha'_{AC} \pm 180^{\circ} + (C'_1 + C'_2)$;

$$\alpha'_{DB} = \alpha'_{CD} + A'_2;\ \alpha'_{BA} = \alpha'_{DB} \pm 180^{\circ} + (B'_1 + B'_2).$$

б) прямокутні координати вершин трикутників:

$$x'_{i+1} = x'_i + S'_{i,i+1}\cos\alpha'_{i,i+1}; \qquad y'_{i+1} = y'_i + S'_{i,i+1}\sin\alpha'_{i,i+1}.$$

7. Редукція довжини геодезичної лінії *s* вихідної сторони *AB* на площину.

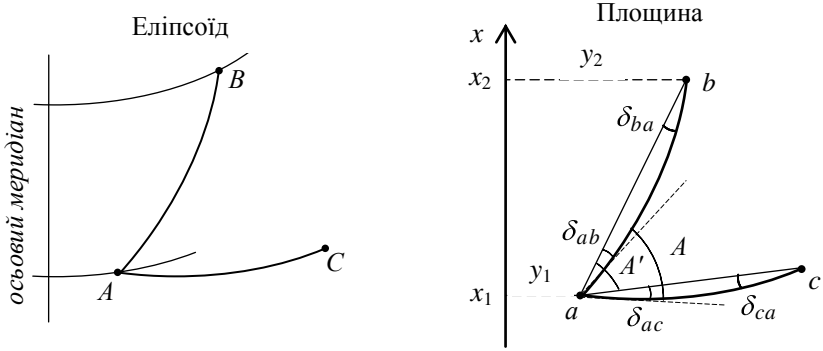
Якщо на еліпсоїді віддаль між пунктами $AB = s$, то внаслідок спотворень проекції на площині відповідна віддаль $ab = S$. При обчисленні довжини *S* вихідної сторони на площині в довжину геодезичної лінії *s* вводять поправку за редукцію віддалей:

$$S = s\ \left(1 + \frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{(\Delta y)^2}{24R_m^2} - \frac{y_m^4}{12R_m^4}\right), \tag{37}$$

де $y_m = \dfrac{y_A + y'_B}{2}$; $\Delta y = y'_B - y_A$; $R_m = \dfrac{c}{1 + e'^2\cos^2 B_m}$. В межах точності лінійних елементів тріангуляції 1 класу R_m достатньо обчислювати за широтою $B_m = B_A$ початкового пункту.

8. Редукція напрямів з еліпсоїду на площину.

AB, AC – геодезичні лінії. Криві *ab, ac* – їх зображення на площині.



Кут δ_{ab} між хордою *ab* і дотичною до кривої *ab* у точці *a* називають поправкою до напряму *AB* за кривизну зображення геодезичної лінії *AB* на площині (або поправкою за редукцію напряму *AB* на площину). Поправки δ до прямого та зворотного напрямів геодезичної лінії різняться між собою за абсолютним значенням і протилежні за знаком. Поправку δ завжди віднімають від виміряного напряму. Наприклад, остаточне значення дирекційного кута α_{AB} вихідної сторони *AB* на площині

$$\alpha_{AB} = \alpha'_{AB} - \delta_{ab} = A_{AB} - \gamma - \delta_{ab}. \qquad (38)$$

Поправки за редукцію прямого та зворотного напрямів геодезичної лінії:

$$\delta_{12} = \rho \frac{x'_2 - x'_1}{2R_m^2}(y'_m - \frac{y'_2 - y'_1}{6}) - \rho \frac{x'_2 - x'_1}{6R_m^4} y'^3_m + \rho \frac{y'_2 - y'_1}{R_m^3} y'^2_m e'^2 \cos^2 B_m tgB_m; \qquad (39)$$

$$\delta_{21} = -\rho \frac{x'_2 - x'_1}{2R_m^2}(y'_m + \frac{y'_2 - y'_1}{6}) + \rho \frac{x'_2 - x'_1}{6R_m^4} y'^3_m - \rho \frac{y'_2 - y'_1}{R_m^3} y'^2_m e'^2 \cos^2 B_m tgB_m, \qquad (40)$$

де x'_1, y'_1 та x'_2, y'_2 - приблизні прямокутні координати початкової та кінцевої точок напряму; $y'_m = \frac{y'_1 + y'_2}{2}$; середній радіус R_m обчислюють за середньою широтою B_m пунктів мережі або широтою початкового пункту.

За поправками δ і виміряними сферичними кутами можна розрахувати виміряні кути у вершинах трикутників, редуковані на площину. Наприклад, для пункту *A* поправка δ_A до виміряного сферичного кута $\delta_A = \delta_{ac} - \delta_{ab}$, а відповідний кут на площині $A' = A - \delta_A$. Перевіркою правильності розрахунку поправок за редукцію напрямів на площину в межах трикутника є рівність $\delta_A + \delta_B + \delta_C = \varepsilon$, де ε - сферичний надлишок трикутника *ABC*.

9. Зрівноважування мережі на площині і розрахунок остаточних значень x, y прямокутних координат усіх пунктів.

Завдання. Здійснити перехід з еліпсоїду на площину у межах мережі з вихідними даними завдання §4, якщо геодезичні координати початкового пункту $B_A = 48^o01'01.1111'' + 7' \times N$, $L_A = 22^o11'11.1111'' + 30' \times N$, азимут вихідної сторони $A_{AB} = 1^o01'01.111'' + 3^o \times N$, довжина геодезичної лінії $AB = c_1 = (60000 - 500 \times N)$ *метрів*; N – номер варіанту.

Приклад.

$B_A = 48^o01'01.1111'' + 7' \times N$	48° 01′ 01,1111″	48°,01697531
$L_A = 22^o11'11.1111'' + 30' \times N$	22° 11′ 11,1111″	22°,18641975
$A_{AB} = 1^o01'01.111'' + 3^o \times N$	1° 01′ 01,111″	1°,01697528
$c_1 = (60000 - 500 \times N)$	60 000 *метрів*	

Сталі величини.

a	6378245 *м*	b	6356863,019*м*	e^2	0,00669342	e'^2	0.00673853
A	1,00505177	B	0,00506238	C	0,00001062	D	0,00000002
$\rho°$	57°,29577951					ρ''	206264,8062

1. Обчислення номера зони і
довгот осьового меридіану та початкового пункту A в зоні.

Позначення дій	Результати	Позначення дій	Результати
$n = 1 + цілачастина \frac{L^o}{6^o}$	4	$\lambda = L - L_0$	1° 11′ 11,1111″
$L_0 = 6n - 3$	21°		1°,18641975

2. Обчислення прямокутних координат початкового пункту,
масштабу зображень та зближення меридіанів за геодезичними координатами
пункту в зоні і наближеного дирекційного кута вихідної сторони:

Позначення дій	Результати	Позначення дій	Результати
$a(1-e^2)$	6335552,717	$\frac{\lambda}{\rho} N \cos B_A$	88509,41952
$A\frac{B_A}{\rho}$	0,84228798	$\frac{\lambda^2}{2\rho^2} N \sin B_A \cos B_A$	681,1841142
$\frac{B}{2}\sin 2B_A$	0,00251717	$\frac{\lambda^2 \cos^2 B_A}{\rho^2}$	0,00019185
$\frac{C}{4}\sin 4B_A$	-0,00000056	$\lambda \sin B_A$	0,88191686
$\frac{D}{6}\sin 6B_A$	0	$\frac{\lambda^3}{3\rho^2}\sin B_A \cos^2 B_A$	0,00005640
X	5320408,749(*м*)	m	1,00009622
$c = a\sqrt{1+e'^2}$	6399698,916	x_A	5321089,974(*м*)
$V_A = \sqrt{1+e'^2 \cos^2 B_A}$	1,00150641	y_A	4588508,763(*м*)
$N = \frac{c}{V_A}$	6390072,827	γ	0°,88197377
$tg^2 B_A$	1,23493091		0° 52′ 55,106″
$e'^2 \cos^2 B_A$	0,00301510	$\alpha'_{AB} = A_{AB} - \gamma$	0°,13500150
$e'^4 \cos^4 B_A$	0,00000909		0° 08′ 06,005″

3. Обчислення наближених довжин сторін трикутників на площині
(результати в завданнях § 4 або §5).

4. Відомість обчислення наближених прямокутних координат вершин.

Вершини	Випр. плоскі кути	α'_i	S'_i	x'_i	y'_i
B		180°08′06.005″			
A	78°27′08.217″			5321089,974	4588508,,763
		78°35′14.222″	61342,671		
C	118°47′43.917″			5333228,149	4648638,523
		17°22′58.139″	70030,424		
D	59°25′18.450″			5400060,282	4669560,434
		256°48′16.589″	83104,483		
B	103°19′49.417″			5381089,808	4588650,136
		180°08′06.005″	60000,000		
A				5321089,974	4588508,763

5. Редукція довжини вихідної сторони з еліпсоїду на площину.

Дії	Результати	Дії	Результати	Дії	Результати
$R_m = \frac{c}{V_A^2}$	6380461,217	$y_m = \frac{y_A + y'_B}{2}$	88579,450	$\frac{(\Delta y)^2}{24R_m^2}$	0,00000000
$\Delta y = y'_B - y_A$	141,373	$\frac{y_m^2}{2R_m^2}$	0,00009637	$\frac{y_m^4}{12R_m^4}$	0,00000000
Довжина вихідної сторони на площині				S (м)	60005,782

6. Редукція напрямів з еліпсоїду на площину.

Відомість обчислення поправок за кривину зображення геодезичних ліній.

Напрями / Дії	1: A 2: B	1: A 2: C	1: C 2: B	1: C 2: D	1: B 2: D
R_m	6380461.217	6380461.217	6380461.217	6380461.217	6380461.217
x'_1	5321089.974	5321089.974	5333228.149	5333228.149	5381089.808
x'_2	5381089.808	5333228.149	5381089.808	5400060.282	5400060.282
y'_1	88508.763	88508.763	148638.523	148638.523	88650.136
y'_2	88650.136	148638.523	88650.136	169560.434	169560.434
y'_m	88579.450	118573.643	118644.330	159099.479	129105.285
$y_m - \frac{y'_2 - y'_1}{6}$	88555.888	108552..017	128642.394	155612.494	115620.236
$y_m + \frac{y'_2 - y'_1}{6}$	88603.012	128595.270	108646.265	162586.464	142590.335
$\rho\frac{x'_2 - x'_1}{2R_m^2}$	0.00015200	0.00003075	0.00012125	0.00016931	0.00004806
$\rho\frac{x'_2 - x'_1}{6R_m^4} y'^3_m$	0.001	0.000	0.002	0.006	0.001
$\rho\frac{y'_2 - y'_1}{R_m^3} y'^2_m e'^2 \cos^2 B_m tg B_m$	0.000	0.002	-0.002	0.001	0.004
δ''_{12}	13.460″	3.340″	15.594″	26.342″	5.559″
δ''_{21}	-13.467″	-3.956″	-13.169″	-27.523″	-6.855″

Дирекційний кут вихідної сторони $\alpha_{AB} = \alpha'_{AB} - \delta_{ab} = 0°\ 07'\ \ 52.546''$.

Відомість обчислення поправок до виміряних сферичних кутів за кривину зображення геодезичних ліній їх сторін на площині.

№ тр.	Вершини	Поправки до напрямів у вершинах кутів		Поправки до кутів	№ тр.	Вершини	Поправки до напрямів у вершинах кутів		Поправки до кутів
		$\delta_{прав}$	$\delta_{лів}$				$\delta_{прав}$	$\delta_{лів}$	
1	*A*	3.340″	13.460″	-10.120″	2	*C*	26.342″	15.594″	10.748″
	B	-13.467″	-13.169″	-0.297″		*D*	-6.855″	-27.523″	20.668″
	C	15.594″	-3.956″	19.550″		*B*	-13.169″	5.559″	-18.729″
	Контроль:	$\varepsilon_1 = 9.135''$		9.133″		Контроль:	$\varepsilon_2 = 12.693''$		12.687″

7. Відомість зрівноважування трикутників та обчислення довжин сторін.

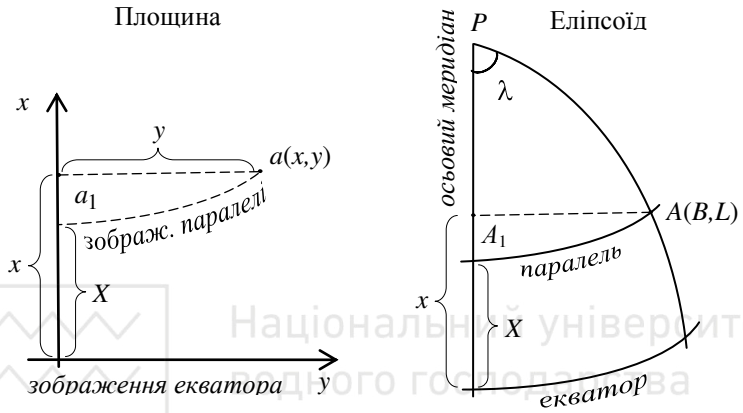
№ тр.	Верш.	Виміряні сферичні кути	- δ	Виміряні плоскі кути	- $w/3$	Зрівноважені плоскі кути	Синуси кутів	Довжини сторін
1	*C*	49°59′51,20″	-19,550	49°59'31,650″	2,081	49°59′33,731″	0,76596257	60005,782
	B	51°33′02,51″	0,297	51°33′02,807″	2,081	51°33′04,888″	0,78316584	61353,492
	A	78°27′09,18″	10,120	78°27′19,300″	2,081	78°27′21,381″	0,97977110	76755,618
	Σ_1	180°00′02,89″	-9,133″	179°59'53,757″	6,243″	180°00′00,000″		
	ε_1	9,135″						
	w_1	-6,243″						
2	*D*	59°25′19,10″	-20,668	59°24′58,432″	3,579	59°25′02,012″	0,86089503	76755,618
	B	51°46′48,52″	18,729	51°47′07,249″	3,579	51°47′10,828″	0,78570945	70052,227
	C	68°47′54,33″	-10,748	68°47′43,582″	3,579	68°47′47,161″	0,93230129	83122,053
	Σ_2	180°00′01,95″	-12,687″	179°59′49,263″	10,737″	180°00′00,000″		
	ε_2	12,693″						
	w_2	-10,737″						

8. Відомість обчислення остаточних прямокутних координат вершин.

Вершини	Зрівноважені плоскі кути	α_i	S_i	x_i	y_i
B		180°07′52.546″			
A	78°27′21,381″			5321089,974	4588508,763
		78°35′13.927″	61353,492		
C	118°47′20,892″			5333230,376	4648649,113
		17°22′34.818″	70052,227		
D	59°25′02,012″			5400085,682	4669569,979
		256°47′36.830″	83122,053		
B	103°20′15.716″			5381095,599	4588646,234
		180°07′52.546″	60005,782		
A				5321089,974	4588508,763

10. РОЗРАХУНОК ГЕОДЕЗИЧНИХ КООРДИНАТ ПУНКТУ ЗА ПРЯМОКУТНИМИ КООРДИНАТАМИ

Абсциса x точки a на площині виражається відрізком, який відповідає довжині дуги осьового меридіану від екватора до точки a_1 з широтою B_1. За умови $y \to 0$ та $\lambda \to 0$ точка $a \to a_1$ і відповідна точка на поверхні еліпсоїду $A \to A_1$ гранично матиме широту $B = B_1$.



Широту B_1 можна обчислити за довжиною дуги меридіану, що відповідає x. Тут можна скористатись формулою (5) обчислення довжини дуги меридіану і виразити з неї потрібну широту B_1, прийнявши $s = x$. Отже, B_1 - широта основи ординати точки $y = 0$:

$$B_1 = \frac{\rho}{A}\left(\frac{x}{a(1-e^2)} + \frac{B}{2}\sin 2B_1 - \frac{C}{4}\sin 4B_1 + \frac{D}{6}\sin 6B_1\right). \qquad (41)$$

З врахуванням значень сталих параметрів референц-еліпсоїду Красовського a, e^2, A,B,C,D та $\rho'' = 2062648062$, маємо:

$$B_1'' = 0.0323930760x + 519.4709177\sin 2B_1 - 0.5451113292\sin 4B_1 + 0.0007114572\sin 6B_1. \qquad (42)$$

У формулах (41) та (42) аргументами є x та невідома широта B_1. Тому розв'язок завдання можна досягти послідовними наближеннями. У першому наближенні $B_1 = \frac{\rho}{Aa(1-e^2)}x$; $B_1'' = 0.0323930760x$. Наближення повторюють, доки результати двох суміжних обчислень B_1 не будуть рівними між собою.

По мірі віддалення від осьового меридіану на величину ординати y для широти B точки A має місце нерівність $B < B_1$. Широті B відповідає довжина дуги X осьового меридіану від екватора до паралелі точки A. Остаточно

широта точки A залежатиме від B_1 та її ординати y в зоні проекції Гаусса – Крюгера:

$$B = B_1 - \rho \frac{y^2}{2M_1N_1} tgB_1 (1 - \frac{y^2}{12N_1^2}(5 + 3tg^2B_1 + e'^2\cos^2 B_1 - 9e'^2\cos^2 B_1 tg^2 B_1)), \quad (43)$$

де $M_1 = \frac{c}{V_1^3}$; $N_1 = \frac{c}{V_1}$; $c = a\sqrt{1+e'^2}$; $V_1 = \sqrt{1+e'^2\cos^2 B_1}$.

Довгота λ точки A в зоні проекції Гаусса - Крюгера

$$\lambda = \rho \frac{y}{N_1 \cos B_1}(1 - \frac{y^2}{6N_1^2}(1 + 2tg^2B_1 + e'^2\cos^2 B_1)). \quad (44)$$

Довгота точки на поверхні еліпсоїду

$$L = L_0 + \lambda, \quad (45)$$

де L_0 - довгота осьового меридіану зони.

Завдання. Обчислити геодезичні координати пункту *B*, якщо значення його прямокутних координат складають x_B = 5381095.599 *м*, y_B = 4588646.234 *м*.

Приклад.

Сталі величини.

a	6378245 *м*	e'^2	0.00673853	ρ''	206264,8062″

Відомість обчислення широти B_1.

Позначення дій	Результати в наближеннях				
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
$0.0007114572\sin 6B_1$		-0,0007	-0,0007	-0,0007	-0,0007
$0.5451113292\sin 4B_1$		-0,1289	-0,1342	-0,1342	-0,1342
$519.4709177\sin 2B_1$		515,7747	515,4588	515,4590	515,4590
$0.0323930760x$	174310,2387	174310,2387	174310,2387	174310,2387	174310,2387
B_1''	174310,2387	174826,1416	174825,8310	174825,8312	174825,8312
Широта B_1 = 48° 33′ 45,8312″					

Відомість обчислення геодезичних координат пункту *B*.

Позначення дій	Результати	Позначення дій	Результати
$c = a\sqrt{1+e'^2}$	6399698,916	$9e'^2 \cos^2 B_1 tg^2 B_1$	0,03408477
$V_1 = \sqrt{1+e'^2 \cos^2 B_1}$	1,00147458	$\rho \frac{y^2}{2M_1 N_1} tg B_1$	22,54790423
$N_1 = \frac{c}{V_1}$	6390275,947	B	174803,2865″
$M_1 = \frac{c}{V_1^3}$	6371471,612		48° 33′ 23,2865″
$\rho \frac{y}{N_1 \cos B_1}$	4323,537993	λ	4323,0430″
$\frac{y^2}{N_1^2}$	0,00019243		1° 12′ 03,0430″
$tg^2 B_1$	1,28321566	$L = L_0 + \lambda$	79923,0430″
$e'^2 \cos^2 B_1$	0,00295133		22° 12′ 03,0430″

РОЗПОДІЛ БАЛІВ ОЦІНЮВАННЯ ЗНАНЬ

№ теми	Бали	
	практичні завдання	теоретичні знання
1	2	2
2	2	2
3	2	3
4	2	3
5	2	3
6	2	3
7	2	3
8	2	3
9	8	9
10	2	3
Усього	**26**	**34**
	60	

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Закатов П.С. Курс высшей геодезии. М.: Недра, 1964. – 504 с.
2. Морозов Н.П. Курс сфероидической геодезии. М.: Недра, 1969. - 304 с.
3. Рабинович Б.Н. Практикум по высшей геодезии (Вычислительные работы). М.: Геодезиздат, 1961. – 339 с.
4. Савчук С.Г. Вища геодезія. Сфероїдна геодезія. Львів: 2000. – 248 с.
5. Савчук С.Г. Вища геодезія. Підручник – Житомир: ЖДТУ, 2005. – 315 с.