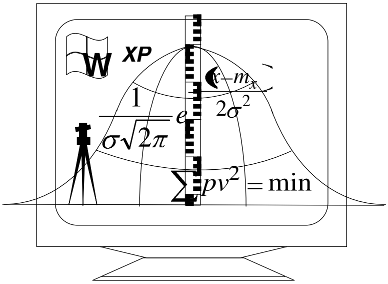
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВОДНОГО ГОСПОДАРСТВА ТА ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ

Інститут агроекології та землеустрою

Кафедра геодезії та геоінформатики



05-04-30

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання самостійних та практичних робіт з дисципліни
„МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ”
студентами напряму підготовки 0801 „Геодезія, картографія та землеустрій”
Розділ 1.
Елементи теорії ймовірностей

Рекомендовано
методичною комісією напряму підготовки 0801
„Геодезія, картографія та землеустрій”.
Протокол № 2 від 22 жовтня 2013р.

РІВНЕ – 2014

Методичні вказівки до виконання самостійних та практичних робіт з дисципліни „Математична обробка геодезичних вимірів” студентами напряму підготовки 0801 „Геодезія, картографія та землеустрій” Розділ 1. Елементи теорії ймовірностей / О.А.Тадєєв, Т.І. Дець, Рівне: НУВГП, 2014. – 36 с.

Упорядники: О.А. Тадєєв, кандидат технічних наук, доцент кафедри геодезії та геоінформатики;
Т.І. Дець, асистент кафедри геодезії та геоінформатики.

ЗМІСТ

сторінка

ВСТУП

Теорія ймовірностей – математична наука, яка вивчає кількісні закономірності перебігу випадкових явищ. Всякі природні явища слід вважати випадковими лише з огляду на їх не повторюваність при багаторазовому відтворенні.

Класична теорія ймовірностей оперує такими базовими поняттями, як подія, ймовірність, відносна частота і на їх основі кількісно описує об'єктивні можливості перебігу природних випадкових явищ.

Сучасна теорія ймовірностей при розв'язуванні тих же завдань опирається, крім вже названих, ще й на поняття випадкової величини, законів розподілу випадкової величини, їх числових характеристик. Випадкова величина – одна із складових частин, якими описується випадкове явище.

Математичні закони теорії ймовірностей не є абстрактними і не позбавлені фізичного змісту. Вони є математичним відображенням реальних закономірностей і статистичних законів, які об'єктивно існують у масових явищах природи. До вивчення цих явищ теорія ймовірностей застосовує математичний підхід, тому за своїм змістом і методами вона є одним з розділів математики, який так само логічно точний і строгий, як і інші математичні науки.

1. БЕЗПОСЕРЕДНІЙ ПІДРАХУНОК ЙМОВІРНОСТЕЙ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ПОДІЙ

Основні теоретичні положення

Подією називають результат кожного окремого випробування (спостереження, дослідження, виміру) - всякий факт, який в результаті випробування може статись чи не статись. Елементарною подією називають такий результат випробування, який повністю описується однією і тільки однією подією. Сукупність умов, при яких виконуються випробування, називають комплексом умов.

Достовірною подією *U* називають таку подію, яка в результаті випробування неодмінно відбувається.

Неможливою подією *V* називають таку подію, яка при випробуванні не може відбутись.

Випадковою називають подію, яка при відтворенні одного і того ж випробування може відбутись, а може і не відбутись. Декілька випадкових подій називають сумісними, якщо при випробуванні вони можуть наступити одночасно. Випадкові події несумісні, якщо при одному випробуванні вони не можуть наступити одночасно, якщо поява однієї з них виключає можливість появи інших. Випадкові події рівно можливі, якщо ні одна з них не є об'єктивно можливою більше, ніж будь-яка інша.

Події утворюють повну групу подій, якщо при випробуванні одна з них обов'язково відбудеться.

Дві несумісні події, які складають повну групу подій, називають протилежними. Подія, протилежна події *A*, позначається $\overline{A}$.

Якщо декілька подій утворюють повну групу і є несумісні, то вони називаються випадками, а дослід зводиться до схеми випадків.

Ймовірність - числова характеристика ступені об'єктивної можливості появи події. Ймовірність появи події *A* позначають $p(A)$ або скорочено p.

Якщо елементарні події складають схему випадків, дослід зводиться до схеми випадків, то ймовірності цих подій можна визначити з умов самого досліду , не проводячи його, користуючись формулою:

$$p(A) = \frac{m}{n}, \qquad (1.1.1)$$

де n- загальне число випадків; m- число випадків, сприятливих появі події *A*. Випадок називають сприятливим появі події *A*, якщо поява даної події є наслідком цього випадку.

Завжди $0 \le p(A) \le 1$, причому $p(U)=1$, $p(V)=0$, а ймовірності випадкових подій завжди задовольняють умові $0< p(A)<1$. Це дає підстави вважати, що чим ближче ймовірність до одиниці, тим частіше відбувається подія (практично достовірна подія). Чим більше ймовірність події наближається до нуля, тим рідше відбувається подія (практично неможлива подія). Сума ймовірностей подій повної групи завжди дорівнює одиниці, оскільки одна з них обов'язково повинна відбутись при випробуванні.

Приведене визначення ймовірності називають класичним, а обчислення ймовірностей за формулою (1.1.1) – безпосереднім підрахунком ймовірностей подій. Однак не кожний дослід зводиться до схеми випадків. Тоді ймовірність знаходиться за результатами безпосередньо проведених випробувань, а для описування ступені можливості появи події використовується поняття відносної частоти (або статистичної ймовірності).

Відносною частотою Q появи події називають відношення числа появи цієї події M до числа всіх проведених випробувань N при виконанні певного комплексу умов:

$$Q = \frac{M}{N}. \tag{1.1.2}$$

Згідно з теоремою Бернуллі закону великих чисел, при необмежено великому числі випробувань з ймовірністю, як завгодно близькою до одиниці, відносна частота події як завгодно мало відрізняється від її ймовірності. Тому формулу (1.1.2) використовують при емпіричному визначенні ймовірності, якщо немає можливості використати формулу (1.1.1). В такому випадку за умови достатньо великого числа випробувань відносну частоту приймають приблизно рівною ймовірності і називають статистичною ймовірністю.

Порядок виконання роботи .

Під час виконання роботи розв'язуються найбільш типові задачі з обчислення ймовірностей елементарних подій. Розв'язування кожної задачі супроводжується поясненнями.

Задача 1.При двох киданнях монети можуть відбутись такі події: A_1 - поява герба при першому киданні; A_2 - поява герба при другому киданні; A_3 - поява цифри при першому киданні; A_4 - поява цифри при другому киданні. Які з цих подій будуть достовірними, неможливими, випадковими, сумісними, несумісними, рівно можливими та протилежними, які утворюють повну групу подій, схему випадків.

Розв'язування задачі.

1. Серед перерахованих подій достовірні відсутні, оскільки $p(U)=1$.
2. Серед перерахованих подій неможливі відсутні, оскільки $p(V)=0$.
3. Всі перераховані події є випадковими, оскільки для них $0< p <1$.
4. Сумісними будуть події A_1 та A_2, A_3 та A_4, A_1 та A_4, A_2 та A_3, оскільки при двох киданнях монети вони можуть наступити одночасно.
5. Несумісними будуть події A_1 та A_3, A_2 та A_4, оскільки при випробуванні вони не можуть наступити одночасно.
6. Рівноможливими є події A_1 та A_3, A_2 та A_4.

7. Події A_1 та A_3, A_2 та A_4 є протилежними.

8. Події A_1 та A_3, A_2 та A_4 утворюють попарно повну групу подій.

9. Події A_1 та A_3 (а також A_2 та A_4) є випадками. Вони попарно несумісні, рівно можливі, протилежні і утворюють повну групу подій.

Задача 2. Знайти ймовірність того, що при двох вимірах з'явиться одна позитивна помилка.

Розв'язування задачі.

Події появи позитивних чи негативних помилок в процесі вимірів зводяться до схеми випадків, тому при розв'язуванні задачі скористаємось формулою (1.1.1).

Число можливих випадків n=3: 1)дві позитивні помилки; 2)позитивна і негативна помилка; 3)дві негативні помилки. Число сприятливих випадків m=2. Отже, p=2/3.

Задача 3. Слово „геодезія" складено з окремих букв, написаних на окремих картках, які перевернуті і перемішані. Знайти ймовірність того, що, взявши одну з карток, на ній буде написано: 1)буква „е"; 2) голосна буква.

Розв'язування задачі.

Як і в попередній задачі, тут маємо схему випадків. Число всіх можливих випадків n=8, що відповідає числу карток з написаними буквами. Число сприятливих випадків появи букви „е" m=2, оскільки в слові „геодезія" дві букви „е" і тому дві відповідних картки. Згідно з формулою (1.1.1), ймовірність появи букви „е" p=2/8=1/4. Число випадків, сприятливих появі голосної букви, m=5, оскільки в слові „геодезія" п'ять голосних букв і п'ять відповідних карток. Тому ймовірність появи голосної букви p=5/8.

Задача 4. Цифри 1,2,3 написані на окремих картках, які перевернуті і перемішані. Знайти ймовірність того, що, беручи послідовно картки і складаючи їх в порядку виймання, буде отримано число 123.

Розв'язування задачі.

При послідовному вийманні та складанні карток можуть мати місце наступні випадки - різні варіанти отримання чисел: 123; 132; 213; 231; 312; 321.Число всіх можливих випадків n=6. Число сприятливих випадків m=1. Тому ймовірність отримання числа 123 обчислюється за формулою (1.1.1) і складає p=1/6.

Задача 5. З 5000 виготовлених деталей виявилось 32 бракованих. Знайти ймовірність появи бракованих деталей в даній партії.

Розв'язування задачі.

В даному випадку безпосередньо проводяться випробування, тому для характеристики можливості появи події необхідно використовувати відносну частоту (статистичну ймовірність). Нехай A – подія появи бракованої деталі. Проведено N =5000 випробувань, в яких подія A наступила M =32 рази.

Необхідна статистична ймовірність появи бракованих деталей в партії, обчислена за формулою (1.1.2), $p(A) = Q = 32/5000 = 0.0064$.

Задача 6. Серед 1000 новонароджених виявилось 517 хлопчиків. Знайти ймовірності народження хлопчиків та дівчаток.

Розв'язування задачі.

Розглянемо дві події: подія A - народження хлопчика; подія B - народження дівчинки. Подія A відбулась M =517 разів із загального числа N = =1000 разів. Тому згідно формули (1.1.2) статистична ймовірність народження хлопчиків $p(A)$ =517/1000= 0.517. Події A та B несумісні та утворюють повну групу подій. Сума ймовірностей подій повної групи завжди дорівнює одиниці, оскільки одна з подій повної групи обов'язково повинна відбутись. Тому $p(A)+p(B) = 1$. Звідси $p(B) = 1 - p(A) = 0.483$.

Задача 7. Проведено 5000 вимірів . Число позитивних помилок виявилось рівним 1000. Чи можна зробити попереднє заключення про наявність у вимірах систематичних помилок ?

Розв'язування задачі.

Розглянемо дві події: подія C - поява позитивної помилки при одному вимірі; подія $D = \overline{C}$ - поява негативної помилки. Статистичну ймовірність появи події C, враховуючи, що число її появи m = 1000 разів при загальному числі n = 5000 вимірів, можна обчислити за формулою (1.1.2): $p(C) = 1000/5000 = 0.2$.

Події C і D є при одному вимірі несумісними, протилежними і утворюють повну групу подій. Сума ймовірностей появи подій повної групи завжди дорівнює одиниці. Тому $p(C) + p(D) = 1$, а статистична ймовірність появи події $D = \overline{C}$ $p(D) = 1 - p(C) = 0.8$.

Ймовірності обох подій задовольняють умовам: $\left.\begin{matrix} 0 < p(C) < 1 \\ 0 < p(D) < 1 \end{matrix}\right\}$,

тому події є випадковими. Отже, незважаючи на те, що число появи негативних помилок більше і їх статистична ймовірність більша, немає підстав робити заключення, виходячи з умов задачі, про наявність у вимірах систематичних помилок. Допущені при таких вимірах помилки носять випадковий характер. Для того, щоб помилки вважати систематичними, ймовірність їх появи повинна дорівнювати одиниці, а подія повинна бути достовірною.

Питання для самостійної роботи

1. Що в теорії ймовірностей називається подією? Які події вважають елементарними?
2. Які події називаються достовірними, неможливими, випадковими? Навести приклади.
3. Які події називаються сумісними, несумісними? Навести приклади.

4. Які події називаються рівно можливими та протилежними? Навести приклади.
5. Навести приклади подій, які утворюють повну групу.
6. Що таке ймовірність події? Як визначити ймовірність події?
7. Що називають відносною частотою (або статистичною ймовірністю) події? Як її визначити? В якому випадку і на яких підставах відносну частоту можна прийняти рівною ймовірності?

2. ОБЧИСЛЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ СКЛАДНИХ ПОДІЙ

Основні теоретичні положення

Складною називається подія, яка утворюється двома і більше елементарними подіями. Складні події розрізняють двох видів: сума і добуток подій.

Сумою кількох елементарних подій A_i $(i = 1,2,...,n)$ називається складна подія *B*, яка включає появу хоча б однієї з подій A_i. Це означає, що *B* = або A_1, або A_2, ..., або A_n, або A_1 та A_2,..., або A_1 та A_n, і т.д. Умовно пишуть:

$$B = A_1 + A_2 + ... + A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i . \qquad (1.2.1)$$

Добутком кількох елементарних подій A_i $(i = 1,2,...,n)$ називається складна подія *C*, яка включає сумісну появу всіх подій A_i. Умовно пишуть:

$$C = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i . \qquad (1.2.2)$$

Теорема додавання ймовірностей. Ймовірність суми кількох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$p(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i) . \qquad (1.2.3)$$

Наслідки теореми додавання ймовірностей.

1. Якщо події A_i утворюють повну групу, то

$$p(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i) = p(U) = 1. \qquad (1.2.4)$$

2. Ймовірність суми двох протилежних подій дорівнює одиниці:

$$p(A + \overline{A}) = p(A) + p(\overline{A}) = p + q = 1 . \qquad (1.2.5)$$

Ймовірність суми кількох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій мінус ймовірність їх сумісної появи:

$$p\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} p(A_i)-p(A_1\,A_2)-\ldots-p(A_1\,A_n)-\ldots-p(A_2\,A_n)-\ldots-p(A_{n-1}\,A_n). \quad (1.2.6)$$

Події називаються незалежними, якщо ймовірність появи будь-якої з них не залежить від того, з'явилась чи ні інша подія. Події називаються залежними, якщо ймовірність появи хоча б однієї з них залежить від появи інших подій.

Умовною ймовірністю $p(A/B)$ події A називають ймовірність її появи за умови, що вже відбулась подія B.

Подія A залежна від події B , якщо $p(A) \neq p(A/B)$.

Подія A незалежна від події B , якщо $p(A) = p(A/B)$.

Теорема множення ймовірностей. Ймовірність добутку двох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої, обчислену за умови, що перша відбулась:

$$P(AB) = p(A)\times p(B/A) = p(B)\times p(A/B). \quad (1.2.7)$$

Наслідки теореми множення ймовірностей.

1. Якщо подія A не залежить від події B, то й подія B не залежить від події A, тобто події A та B взаємно незалежні: $p(A)=p(A/B)$; $p(B)= p(B/A)$.
2. Ймовірність добутку двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій: $p(AB) = p(A)\times p(B)$.

Ймовірність добутку кількох подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій, причому ймовірність кожної наступної по порядку події обчислюється за умови, що всі попередні відбулись:

$$p(A_1\,A_2\,\ldots\,A_n) = p(A_1)\times p(A_2/A_1)\times p(A_3/A_1\,A_2)\times\ldots\times p(A_n/A_1\ldots A_{n-1}). \quad (1.2.8)$$

Ймовірність добутку незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$p(A_1\,A_2\,\ldots\,A_n) = p(A_1)\times p(A_2)\times\ldots\times p(A_n). \quad (1.2.9)$$

Наслідком узагальнення теорем додавання та множення ймовірностей є формула повної ймовірності.

Якщо подія A може появитись сумісно з однією із подій $H_1,\ H_2,\ \ldots,\ H_n$, які є несумісними і складають повну групу подій (такі події часто називають гіпотезами), то ймовірність події A обчислюється за формулою

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(H_i)\times p(A/H_i), \quad (1.2.10)$$

тобто ймовірність події A дорівнює сумі добутків ймовірностей гіпотез на ймовірності події A при відповідних гіпотезах. Формула (1.2.10) називається формулою повної ймовірності.

Порядок виконання роботи

Під час виконання роботи розв’язуються типові задачі з обчислення ймовірностей складних подій із застосуванням теорем додавання та множення ймовірностей і формули повної ймовірності.

Задача 1.Яка ймовірність випадання грані з парною цифрою при одному киданні грального кубика ?

Розв’язування задачі.

Ймовірність випадання довільної грані при одному киданні грального кубика *p(A)* = 1/6, оскільки число випадків, сприятливих випаданню грані з довільною цифрою від 1 до 6, $m = 1$, а число всіх можливих випадків $n = 6$.

Деяка складна подія *B* випадання грані з парною цифрою наступає тоді, коли відбувається хоча б одна з елементарних подій, що полягають у випаданні граней з цифрами або 2, або 4, або 6. Такі події є несумісними при одному киданні кубика. Ймовірність появи події *B*, згідно з теоремою додавання ймовірностей несумісних подій, може бути обчислена як сума ймовірностей випадання граней з цифрами або 2, або 4, або 6, тобто $p(B) = 1/6+1/6+1/6 = 1/2$.

Задача 2. В урні знаходиться 4 білих і 6 чорних куль. Знайти ймовірність того, що дві вийнятих послідовно кулі будуть білими.

Розв’язування задачі .

Розглянемо дві події: A_1 - поява білої кулі при першому вийманні; A_2 - поява білої кулі при другому вийманні. Ймовірність першої події можна обчислити як відношення числа білих куль $M = 4$ до загального числа куль $N = 10$: $p(A_1) = M/N = 2/5$. Подія A_2 залежна від події A_1, тому що одна куля вже вийнята і в урні залишилось $M - 1 = 3$ білих кулі при загальному числі $N – 1 = 9$ куль, тому умовна ймовірність другої події $p(A_2/A_1) = =3/9=1/3$.

Подія *B* появи двох куль одночасно при послідовному їх вийманні виразиться як добуток подій A_1 та A_2: $B = A_1 \times A_2$.

Тому $p(B)= =p(A_1)\times p(A_2/A_1) = 2/5\times 1/3 = 0.13$.

Задача 3. Є дві урни. В першій поміщено 5 білих і 10 чорних куль, в другій 5 білих і 15 чорних куль. Знайти ймовірність виймання по одній білій кулі з кожної урни.

Розв’язування задачі.

Розглянемо події: A_1 - виймання білої кулі з першої урни; A_2 - виймання білої кулі з другої урни; *B* - виймання двох білих куль з обох урн одночасно.

Очевидно, що $p(A_1) = m/n = 5/15 = 1/3$; $p(A_2) = m/n = 5/20 =1/4$.

Подія *B* наступить при сумісній появі подій A_1 та A_2, тобто $B = A_1 \times A_2$. Події A_1 та A_2 незалежні, тому $p(B) = p(A_1) \times p(A_2) = 0.08$.

Задача 4. Знайти ймовірність того, що довільно взяте двозначне число буде кратним 2; кратним 5; кратним 2 і 5 одночасно. Яка ймовірність того, що таке число буде кратним або 2, або 5; кратним або 2, або 5, або 2 і 5 одночасно?

Розв’язування задачі.

Розглянемо події: A_1 - поява числа, кратного 2; A_2 - поява числа, кратного 5; A_3 - поява числа, кратного 2 і 5 одночасно.

Двозначні числа – це 10, 11,...,98,99. Всіх їх 90. 45 з них кратні 2. Тому число випадків, сприятливих появі події A_1, m = 45 і $p(A_1)$ = =45/90=0.5. 18 чисел кратні 5, тому $p(A_2)$ =18/90=0.2. Із всіх двозначних чисел кратними 2 і 5 одночасно є 9, тому $p(A_3)$ =9/90=0.1. З іншого боку, подія A_3 наступить лише при сумісній появі незалежних подій A_1 та A_2: $A_3 = A_1 \times A_2$.

Тому $p(A_3) = p(A_1) \times p(A_2)$ = 0.5×0.2=0.1.

Ймовірність того, що довільно взяте двозначне число буде кратним або 2, або 5 виразиться сумою $p(A_1 + A_2) = p(A_1) + p(A_2)$ =0.7, оскільки A_1 та A_2 в такому випадку виступають як несумісні події.

Ймовірність того, що довільно взяте двозначне число буде кратним або 2, або 5, або 2 і 5 одночасно, виразиться: $p(A_1 + A_2) = p(A_1)+p(A_2)- p(A_3)$ =0.6, оскільки в такому випадку A_1 та A_2 виступають вже як сумісні події.

Задача 5. Є три однакових урни з різнокольоровими кулями. В першій урні знаходиться 6 червоних і 2 білих кулі, в другій - 4 червоних і 4 білих кулі, в третій - 2 червоних і 6 білих. Навмання вибирається урна і виймається з неї куля. Обчислити ймовірність виймання білої кулі.

Розв’язування задачі.

Розглянемо три гіпотези: H_1 - вибір першої урни, H_2 - вибір другої урни, H_3 - вибір третьої урни, а також подію *А* - появу білої кулі.

Оскільки гіпотези H_1, H_2, H_3 рівно можливі, то:$p(H_1)=p(H_2)=p(H_3)$ =1/3.

Умовні ймовірності події *А* при цих гіпотезах відповідно дорівнюють:

$p(A/H_1)$ =2/8=1/4; $p(A/H_2)$ =4/8=1/2; $p(A/H_3)$ =6/8=3/4.

Подія *А* може появитись тільки сумісно з одною із гіпотез H_1, H_2, H_3, які несумісні і складають повну групу подій. Тому, застосовуючи формулу повної ймовірності (1.2.10), отримаємо: $P(A) = p(H_1) \times p(A/H_1) + p(H_2) \times p(A/H_2) + p(H_3) \times p(A/H_3)$ = 1/3×1/4+1/3×1/2+1/3×3/4=1/2.

Питання для самостійної роботи

1. Яка подія називається складною?
2. Що називається сумою подій? Що називається добутком подій?

3. Розкрити теорему додавання ймовірностей подій і наслідки, які випливають з неї.
4. Які події називаються залежними; незалежними?
5. Що називається умовною ймовірністю події?
6. Розкрити теорему множення ймовірностей подій і наслідки, які випливають з неї.

4. ЗАКОН РОЗПОДІЛУ ТА ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЕРЕРВНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Основні теоретичні положення

Випадковою величиною називається величина, яка в результаті випробувань набуває тих чи інших невідомих наперед значень залежно від випадкового перебігу подій. Випадкові величини розрізняють перервні (дискретні) або неперервні. Перервна випадкова величина – це така величина, яка в результаті випробувань набуває окремих ізольованих значень, які можна передбачити і перерахувати. Неперервною випадковою величиною називається така величина, яка набуває незчисленну кількість значень, які неможливо наперед передбачити та перерахувати.

Якщо в результаті випробування перервна випадкова величина набуває одного із значень, які можливі, але не достовірні, то відбувається одна з повної групи несумісних подій. Кожному значенню відповідає певна ймовірність. Якщо несумісні події утворюють повну групу, то сума їх ймовірностей дорівнює одиниці. Сума ймовірностей можливих значень випадкової величини також дорівнює одиниці. Оскільки ця сумарна ймовірність певним чином розподілена між окремими можливими значеннями величини, то має місце розподіл ймовірностей значень величини між собою.

Якщо потрібно визначити розподіл ймовірностей між можливими значеннями чисел появи події A в серії незалежних випробувань, які проводяться в однакових умовах, то розв’язок такої задачі дає часткова теорема про повторення випробувань, а ймовірність обчислюється за формулою Бернуллі

$$P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}, \qquad (1.4.1)$$

тобто, якщо проводиться n незалежних випробувань, в кожному з яких подія з’являється з ймовірністю p, то ймовірність P_n^m того, що подія з’явиться m разів дорівнює добутку числа комбінацій C_n^m із n елементів по m на ймовірність p появи події m разів і на ймовірність $q = 1 - p$ не появи події n-m разів, де

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}\,. \qquad (1.4.2)$$

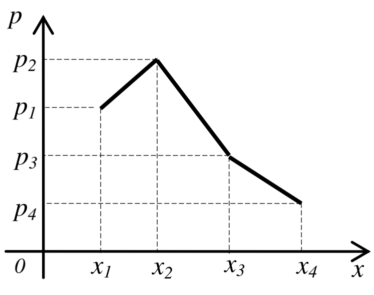
$C_n^0 = C_n^n = 1$, $C_n^1 = n$. $\sum_{m=0}^{n} P_n^m$ є ймовірність того, що подія з'явиться або 0, або 1, або 2, ... , або n разів. Якщо враховуються всі можливі значення m, то має місце повна група подій. Їх сума, як складна подія, дорівнює одиниці: $\sum_{m=0}^{n} P_n^m = 1$. В зв'язку з тим, що ймовірності P_n^m по формі являють собою члени розкладу біному $(q+p)^n$, розподіл ймовірностей вигляду (1.4.1) між собою називається біноміальним розподілом.

Випадкова величина вважається повністю описаною з імовірнісної точки зору, якщо описаний закон розподілу ймовірностей можливих значень величини.

Законом розподілу перервної випадкової величини X називається всяке співвідношення, яке описує зв'язок між можливими значеннями x_i випадкової величини X та відповідними ймовірностями p_i появи цих значень (i = 1,2,...,n; n - число можливих значень величини). Випадкова величина в такому випадку підпорядкована цьому законові розподілу. Закон розподілу можна показати у числовій, графічній та аналітичній формах.

Числовою формою закону розподілу перервної випадкової величини є ряд розподілу – таблиця, в якій показано можливі значення x_i випадкової величини X та відповідні цим значенням ймовірності p_i:

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	...	p_n



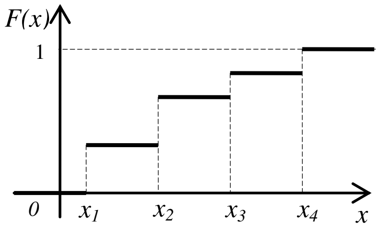
Малюнок 1.4.1.

Графічне зображення ряду розподілу називають многокутником розподілу випадкової величини X. Для побудови многокутника розподілу по осі абсцис позначують можливі значення величини, по осі ординат – відповідні цим значенням ймовірності, а точки їх перетину з'єднують відрізками прямих (див. малюнок 1.4.1). Ряд розподілу та многокутник розподілу використовують для описування закону розподілу тільки перервних випадкових величин.

Аналітичною формою описування закону розподілу як перервних, так і неперервних випадкових величин є функція розподілу. Функція розподілу *F(x)* перервної випадкової величини *X* - це ймовірність того, що величина набуде значень, які менші від певного її фіксованого значення *x*, тобто

$$F(x) = P(X<x). \tag{1.4.3}$$

Основні властивості функції розподілу: 1) $F(x_2) \geq F(x_1)$ при $x_2 > x_1$; 2) $F(-\infty)=0$; 3) $F(+\infty)=1$.



Малюнок 1.4.2.

Графік функції розподілу *F(x)* в загальному являє собою графік не спадаючої функції, значення якої лежать в межах від 0 до 1. Графік функції для перервної величини при проходженні змінної *x* через те чи інше можливе значення x_i має розриви. Величина розриву дорівнює ймовірності цього значення (див. малюнок 1.4.2).

Для неперервної випадкової величини графік функції розподілу являє собою плавну не спадаючу криву.

Знаючи ряд розподілу перервної випадкової величини, значення функції розподілу цієї величини можна визначити, користуючись співвідношенням

$$F(x) = \sum_{x_i<x} P(X=x_i), \tag{1.4.4}$$

де $x_i < x$ означає, що до суми включено ймовірності всіх значень x_i, які менші від вибраного *x*. При розв'язуванні практичних задач часто виникає потреба обчислення ймовірності того, що випадкова величина набуде певних значень, які знаходяться в межах вибраного інтервалу. Ймовірність попадання випадкової величини *X* в межі інтервалу $[\alpha;\beta)$ можна обчислити на основі значень функції розподілу:

$$P(\alpha \leq x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha), \tag{1.4.5}$$

де $F(\alpha)$ та $F(\beta)$ - значення функції розподілу *F(x)* на границях цього інтервалу. Якщо зменшувати довжину інтервалу, то гранично при $\beta \to \alpha$ замість ймовірності попадання величини в інтервал отримаємо ймовірність того, що вона набуде сталого ізольованого значення: $P(X=\alpha) = \lim\limits_{\beta\to\alpha}[F(\beta)-F(\alpha)] = 0$, тобто попадання випадкової величини в ізольовану точку є подією практично неможливою.

Випадкова величина вважається повністю описаною з імовірнісної точки зору, якщо встановлено та описано її закон розподілу. На практиці доводиться розв'язувати задачі, в яких немає потреби описувати закон розподілу випадкової величини в цілому, а необхідно знати тільки деякі ознаки розподілу. Для цього використовують числові характеристики розподілу - параметри, які в стислій формі на основі їх числових значень характеризують відповідні їм типові ознаки чи найбільш суттєві особливості закону розподілу випадкової величини.

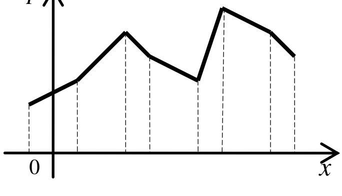
Розрізняють числові характеристики положення випадкової величини X на числовій осі (математичне сподівання, мода, медіана) та характеристики розсіювання значень величини (дисперсія, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт асиметрії, ексцес, середнє арифметичне відхилення та інші).

Найважливішою з характеристик положення є математичне сподівання випадкової величини. Математичним сподіванням перервної випадкової величини X при скінченому числі n її можливих значень x_i $(i=1,2,...,n)$ називають суму добутків цих значень на відповідні їм ймовірності p_i. Позначається математичне сподівання $M[X]$ або m_x :

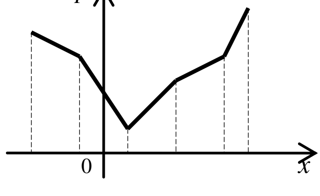
$$M[X] = m_x = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \,. \tag{1.4.6}$$

Математичне сподівання вказує положення на числовій осі центру розподілу значень величини з врахуванням відповідних цим значенням ймовірностей. З механічної точки зору m_x є абсцисою центру тяжіння системи випадкових матеріальних точок з відповідними їм масами. Відповідно до закону великих чисел при достатньо великому числі випробувань середнє арифметичне спостережених значень випадкової величини наближається до її математичного сподівання, тому часто математичне сподівання називають просто середнім значенням.

Модою M перервної випадкової величини X називається її найбільш ймовірне значення. Таке визначення моди строго застосовується лише для перервних випадкових величин. На малюнку 1.4.1 $M = x_2$. Розподіл, показаний на цьому малюнку, називається модальним. Якщо многокутник розподілу має більше одного максимуму, то такий розподіл називається полі модальним (див. малюнок 1.4.3). Розподіл називається антимодальним, якщо посередині замість максимуму він має мінімум (див. малюнок 1.4.4).



Малюнок 1.4.3.



Малюнок 1.4.4.

Якщо розподіл симетричний і модальний та існує математичне сподівання, то воно співпадає з модою і є центром симетрії цього розподілу.

Медіаною M_e випадкової величини X називається таке її значення, для якого однаково ймовірно, чи виявиться випадкова величина меншою чи більшою значення M_e, тобто $P(X<M_e)=P(X>M_e)$. Геометрично медіана – це абсциса точки, в якій площа, обмежена многокутником розподілу, ділиться наполовину. Цією характеристикою користуються, як правило, для описування неперервних випадкових величин, хоча формально її можна визначити і для перервних величин. Для симетричного модального розподілу медіана співпадає з математичним сподіванням та модою.

Для визначення характеристик розсіювання вводять поняття початкових та центральних моментів, оскільки всі характеристики цієї групи так чи інакше виражаються через відповідні моменти.

Початковим моментом s-го порядку перервної випадкової величини X називається математичне сподівання s-го степеню цієї величини, тобто сума добутків окремих значень величини в s-ій степені на відповідні цим значенням ймовірності:

$$\alpha_s = \alpha_s[X] = M[X^s] = \sum_{i=1}^{n} x_i^s p_i \,. \qquad (1.4.7)$$

Початковим моментом першого порядку є математичне сподівання випадкової величини: $\alpha_1 = M[X]$.

Центрованою випадковою величиною $\overset{\circ}{X}$ називається відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання: $\overset{\circ}{X} = X - M[X]$.

Центральним моментом s-го порядку перервної випадкової величини X називається математичне сподівання s-го степеню відповідної центрованої величини $\overset{\circ}{X}$, тобто сума добутків окремих значень центрованої величини в s-ій степені на відповідні цим значенням ймовірності:

$$\mu_s = \mu_s[X] = M\left[\overset{\circ}{X}{}^s\right] = M\left[(X - m_x)^s\right] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^s p_i \,. \qquad (1.4.8)$$

Центральний момент нульового порядку випадкової величини X завжди дорівнює одиниці: $\mu_0 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^0 p_i = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Центральний момент першого порядку завжди дорівнює нулю, оскільки математичне сподівання відповідної центрованої випадкової величини дорівнює нулю:

$$\mu_1 = M\left[\overset{\circ}{X}\right] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x) p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i - m_x \sum_{i=1}^{n} p_i = m_x - m_x = 0 \,.$$

Існують співвідношення, які зв'язують початкові та центральні моменти різних порядків, наприклад:

$$\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 \quad ; \tag{1.4.9}$$

$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3 \quad . \tag{1.4.10}$$

Такі співвідношення можуть використовуватись для контролю правильності обчислення відповідних центральних моментів.

Початкові моменти розглядають положення випадкової величини на числовій осі відносно початку координат, тоді як центральні моменти – відносно математичного сподівання, яке вказує положення на числовій осі центру розподілу значень величини з врахуванням ймовірностей цих значень. З цієї точки зору математичне сподівання є початком координат при описуванні розсіювання значень випадкової величини. Тому прийнято вважати, що на основі центральних моментів визначаються числові характеристики розсіювання значень випадкової величини відносно центру розподілу. Для визначення таких характеристик найчастіше використовують центральні моменти другого, третього та четвертого порядків.

Центральний момент другого порядку як математичне сподівання квадрату центрованої випадкової величини X визначає дисперсію величини - параметр, який описує ступінь розсіювання (або розкиданості) значень відносно центру розподілу:

$$\mu_2 = D[X] = D_x = M\left[\overset{\circ}{X}{}^2\right] = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^2 p_i \ . \tag{1.4.11}$$

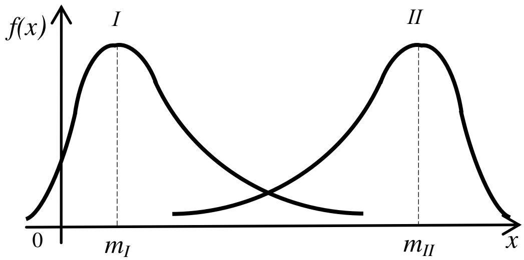
Дисперсія має розмірність квадрату випадкової величини. На практиці зручніше використовувати характеристику ступеню розсіювання, розмірність якої зівпадає з розмірністю випадкової величини, а саме середнє квадратичне відхилення (або стандарт) випадкової величини X:

$$\sigma[X] = \sigma = \sqrt{D_x} \ . \tag{1.4.12}$$

Якщо розподіл симетричний відносно математичного сподівання, то всі центральні моменти непарного порядку дорівнюють нулю, оскільки в сумі $\mu_s = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^s p_i$ при симетричному відносно m_x розподілі та непарному s кожній додатній складовій відповідає рівна їй за абсолютною величиною від'ємна складова, а вся сума дорівнює нулю. Тому третій центральний момент μ_3, як найпростіший момент непарного порядку, використовується для описування несиметричності розташування значень випадкової величини відносно центру розподілу. Якщо μ_3 розділити на куб середнього квадратичного відхилення σ, то отримаємо безрозмірну числову характеристику несиметричності розподілу, яка називається коефіцієнтом асиметрії (або просто асиметрією) розподілу випадкової величини:

$$S_k = \frac{\mu_3}{\sigma^3}. \qquad (1.4.13)$$

S_k характеризує асиметрію розподілу відносно математичного сподівання, скошеність многокутника розподілу перервної чи кривої розподілу неперервної випадкових величин. Якщо розподіл симетричний відносно m_x, то $S_k = 0$. На малюнку 1.4.5 показано криві двох асиметричних розподілів неперервної випадкової величини *X*. Перший розподіл має додатну асиметрію $(S_k > 0)$, другий - від'ємну $(S_k < 0)$.

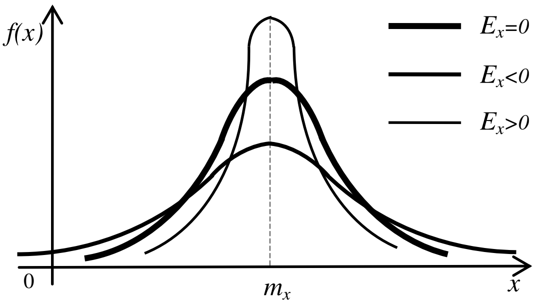


Малюнок 1.4.5.

Четвертий центральний момент використовується для описування гостровершинності або плосковершинності розподілу. Ці ознаки розподілу характеризуються параметром, який називається ексцес. Ексцес E_x випадкової величини *X* - це безрозмірна величина

$$E_x = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3, \qquad (1.4.14)$$

яка характеризує гостровершинність чи плосковершинність розподілу досліджуваної випадкової величини порівняно з найважливішим та найбільш розповсюдженим у природі нормальним законом розподілу. Число 3 віднімається від μ_4 / σ^4 тому, що для нормального закону розподілу $\mu_4 / \sigma^4 = 3$. Отже, для нормального закону ексцес $E_x = 0$. Розподіли, які є більш гостро вершинні порівняно з нормальним, мають додатній ексцес $(E_x > 0)$. Розподіли більш плоско вершинні порівняно з нормальним, мають від'ємний ексцес $(E_x < 0)$. На малюнку 1.4.6 графічно зображено нормальний закон розподілу



Малюнок 1.4.6.

($E_x = 0$), а також гостро вершинний $(E_x > 0)$ та плоско вершинний $(E_x < 0)$ розподіли.

При розв'язуванні деяких практичних задач виникає потреба визначення числової характеристики розсіювання, яка називається середнім арифметичним відхиленням. Середнє арифметичне відхилення ν_1 випадкової величини X - це перший абсолютний центральний момент цієї величини:

$$\nu_1 = M\left[\left|\overset{\circ}{X}\right|\right] = M\left[|X - m_x|\right] = \sum_{i=1}^{n} |x_i - m_x| p_i . \qquad (1.4.15)$$

ν_1 разом з дисперсією та стандартом характеризує розсіювання значень випадкової величини навколо математичного сподівання.

Порядок виконання роботи

Завдання 4. В однакових умовах проводиться *n* незалежних повторних випробувань, в кожному з яких подія з'являється з ймовірністю *p*, і не з'являється з ймовірністю *q*, причому *p*+*q*=1. Розглядаючи число *m* (*m*=0,1,2,...,*n*) появи події в серії даних випробувань як перервну випадкову величину X з відповідними ймовірностями P_n^m, яка підпорядковується біноміальному законові розподілу, необхідно: 1) скласти ряд розподілу; 2) побудувати многокутник розподілу; 3) обчислити значення функції розподілу та побудувати її графік; 4) визначити ймовірність попадання випадкової величини в інтервал [$\alpha; \beta$); 5) обчислити числові характеристики розподілу випадкової величини. Вихідні дані для виконання завдання наведені в дод.3.

Приклад. Нехай $n = 6$, $p = 0.2$, $\alpha = 3$, $\beta = 5$.

1.Оскільки розподіл ймовірностей числа появи події в серії випробувань підпорядковується біноміальному законові, то значення ймовірностей можна обчислити за формулою (1.4.1). Кожна з таких ймовірностей відповідає значенню $x_i\ (i = 1,2,\ldots,n+1)$ перервної випадкової величини X - числу m_i появи події в серії незалежних повторних випробувань. Отже, при *n*=6, *p*=0.2, *q*=0.8, отримаємо: $P_6^0 = 0.2621$; $P_6^1 = 0.3932$; $P_6^2 = 0.2458$; $P_6^3 = 0.0819$; $P_6^4 = 0.0154$; $P_6^5 = 0.0015$; $P_6^6 = 0.0001$. Контроль: $\sum_{m=0}^{6} P_6^m = 1.0000$.

Ряд розподілу перервної випадкової величини X має вигляд:

$x_i = m_i$	0	1	2	3	4	5	6
p_i	0.2621	0.3932	0.2458	0.0819	0.0154	0.0015	0.0001

2. Вибравши плоску прямокутну систему координат і відклавши по осі абсцис можливі значення випадкової величини *X*, а по осі ординат –

Малюнок 1.4.7.

відповідні їм ймовірності з ряду розподілу, побудуємо многокутник розподілу (див. малюнок 1.4.7).

3.Для обчислення значень функції розподілу *F(x)* використаємо формулу (1.4.4). Припустимо, що змінна *x* приймає послідовно всі значення випадкової величини *X* від 0 до 6. Тоді отримаємо:

$$F(0)=\sum_{x_i<0}P(X=x_i)=0;\qquad F(1)=\sum_{x_i<1}P(X=x_i)=p_1=0.2621;$$

$$F(2)=\sum_{x_i<2}P(X=x_i)=p_1+p_2=0.6553;$$

$$F(3)=\sum_{x_i<3}P(X=x_i)=p_1+p_2+p_3=0.9011;$$

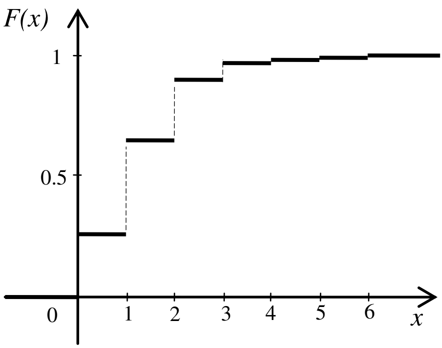
$$F(4)=\sum_{x_i<4}P(X=x_i)=p_1+\ldots+p_4=0.9830;$$

$$F(5)=\sum_{x_i<5}P(X=x_i)=p_1+\ldots+p_5=0.9984;$$

$$F(6)=\sum_{x_i<6}P(X=x_i)=p_1+\ldots+p_6=0.9999;$$

для всіх значень $x>6$ *F(x)*= $\sum_{x<+\infty}P(X=x_i)=p_1+\ldots+p_7=1.0000.$

Графік функції розподілу *F(x)* зображено на малюнку 1.4.8.



Малюнок 1.4.8.

4. Для знаходження ймовірності попадання перервної випадкової величини *X* в інтервал [3;5) використаємо формулу (1.4.5):

$$P(3\le x<5)=F(5)-F(3)=$$
$$=0.9984-0.9011=0.0973,$$

що рівносильне сумі ймовірностей значень величини, які знаходяться в цьому інтервалі, тобто

$$P(X=3)+P(X=4)=$$
$$=0.0819+0.0154=0.0973.$$

5. Користуючись рядом розподілу випадкової величини X, обчислимо основні числові характеристики розподілу цієї величини.

5.1. Характеристики положення випадкової величини на числовій осі:

а) математичне сподівання $m_x = \sum_{i=1}^{7} x_i p_i$ = 0+0.3932+0.4916+0.2457+0.0616+ +0.0075+0.0006 = 1.2;

б) мода M = 1, оскільки $P(X=1)$ =0.3932=max.

5.2. Характеристики розсіювання випадкової величини навколо центру розподілу - математичного сподівання:

а) дисперсія $D_x = \sum_{i=1}^{7}(x_i - m_x)^2 p_i$ = 0.3774+0.0157+0.1573+0.2654+0.1207+ +0.0217+0.0023 = 0.96 або за формулою (1.4.7) $D_x = \alpha_2 - \alpha_1^2 =$ $= \sum_{i=1}^{7} x_i^2 p_i - m_x^2 =$ 0+0.3932+0.9832+0.7371+0.2464+0.0375+0.0036-1.44=0.96;

б) середнє квадратичне відхилення (стандарт): $\sigma = \sqrt{D_x}$ =0.98;

в) коефіцієнт асиметрії $S_k = \mu_3 / \sigma^3 = (\sum_{i=1}^{7}(x_i - m_x)^3 p_i)/\sigma^3$ =(-0.4529-0.0031+ +0.1258+0.4776+0.3381+0.0823+0.0111)/0.94=0.62 або за формулою (1.4.10) $S_k = (\alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3)/\sigma^3 = (\sum_{i=1}^{7} x_i^3 p_i - 3\alpha_2 m_x + 2m_x^3)/\sigma^3$ =(0+0.3932+ +1.9664+2.2113+0.9856+0.1875+0.0216-3×2.4×1.2+2×1.728)/0.94=0.62;

г) ексцес $E_x = \mu_4 / \sigma^4 - 3 = (\sum_{i=1}^{7}(x_i - m_x)^4 p_i)/\sigma^4 - 3 =$ (0.5435+0.0006+ +0.1007+0.8598+0.9466+0.3128+0.0531)/0.92-3=0.06;

д) середнє арифметичне відхилення $\nu_1 = \sum_{i=1}^{7}|x_i - m_x| p_i$ = 0.3145+0.0786+ +0.1966+0.1474+0.0431+0.0057+0.0005=0.79.

Отже, розподіл описуваної випадкової величини X (числа появи події в серії повторних випробувань) – це модальний розподіл з центром в точці 1.2 на числовій осі. Мода M=1 не співпадає з центром розподілу, оскільки розподіл асиметричний. Асиметричність розподілу додатна, хоча й невелика за абсолютною величиною. Це свідчить про незначне зміщення значень величини (з врахуванням їх ймовірностей) вправо відносно центру розподілу.

За своєю крутизною розподіл практично не відрізняється від нормального – ексцес свідчить про незначну його гостровершинність.

Питання для самостійної роботи

1. Які величини називають випадковими?
2. Які випадкові величини називають перервними, неперервними?
3. Як обчислити ймовірності чисел появи події в серії повторних незалежних випробувань, які проводять в однакових умовах?
4. Що називають біноміальним розподілом ймовірностей при повторних випробуваннях?
5. Що називають законом розподілу випадкової величини?
6. Що називають рядом розподілу та многокутником розподілу?
7. Що називають функцією розподілу випадкової величини?
8. Як визначити ймовірність попадання випадкової величини в заданий інтервал?
9. Які є числові характеристики розподілу випадкової величини?
10. Як обчислюється і що характеризує математичне сподівання та мода?
11. Що таке дисперсія і стандарт випадкової величини? Як обчислюються і що характеризують ці параметри?
12. Як обчислюються і що характеризують коефіцієнт асиметрії, ексцес?
13. Що називають середнім арифметичним відхиленням?

5. НОРМАЛЬНИЙ ЗАКОН РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ

Основні теоретичні положення

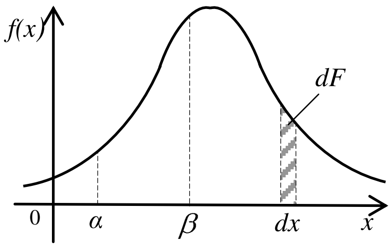
Нормальний закон розподілу має фундаментальне значення в теорії математичної обробки геодезичних вимірів, оскільки, по-перше, реально існуючі випадкові помилки вимірів найчастіше підпорядковуються саме цьому законові, по-друге, нормальний закон є граничним для закону розподілу випадкової величини, яка є результатом сумісного прояву інших випадкових незалежних величин, кожна з яких підпорядковується будь-якому іншому законові розподілу, і, по-третє, він є граничним законом, до якого за певних умов наближаються інші закони розподілу випадкових величин.

Нормальний закон описує неперервні випадкові величини. З ймовірнісної точки зору для повного описування неперервної випадкової величини необхідно показати аналітичну форму закону розподілу величини. Аналітичними формами закону розподілу неперервної величини є функція розподілу та функція щільності розподілу.

Ймовірність попадання неперервної випадкової величини X з функцією розподілу $F(x)$ на елементарний відрізок Δx, відповідно до формули (1.4.5), визначається як приріст функції розподілу на цьому відрізку: $P(x < X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x)$. Відношення цієї ймовірності до довжини відрізка Δx характеризує середню ймовірність на одиницю довжини на цьому відрізку. При $\Delta x \to 0$ гранично отримаємо похідну від функції розподілу:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = F'(x) = f(x). \qquad (1.5.1)$$

Функція *f(x)* характеризує щільність (густоту), з якою розподіляються значення випадкової величини в точці. Така функція називається щільністю розподілу (або щільністю ймовірностей) випадкової величини *X*. Функція щільності розподілу існує тільки для неперервних випадкових величин. Крива, яка зображує функцію *f(x)*, називається кривою розподілу. Вона є графічною формою описування закону розподілу неперервної випадкової величини. Величина *f(x)dx=dF* називається елементом ймовірності і геометрично являє собою площу елементарного прямокутника, який опирається на елементарний відрізок *dx* (див. малюнок 1.5.1).



Малюнок 1.5.1.

Ймовірність попадання випадкової величини в інтервал (α, β) дорівнює сумі елементів ймовірності в цьому інтервалі, тобто інтегралу

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx. \qquad (1.5.2)$$

Геометрично це буде площа фігури під кривою розподілу, що опирається на відрізок (α, β) (див. малюнок 1.5.1).

Формула (1.5.1) виражає щільність розподілу через функцію розподілу. Згідно формули (1.4.3) $F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x)$. Тому для неперервної величини функція розподілу *F(x)* буде дорівнювати сумі елементів ймовірності в інтервалі $(-\infty; x)$ і виразиться через щільність розподілу *f(x)* інтегралом

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \qquad (1.5.3)$$

Геометрично *F(x)* - це площа під кривою розподілу, розташована лівіше точки *x*.

Основні властивості функції щільності розподілу:

1. Функція *f(x)* є невід'ємною: $f(x) \geq 0$. Це слідує з того, що *F(x)* є не спадаючою функцією свого аргументу і геометрично означає, що крива розподілу завжди знаходиться не нижче осі абсцис.

2. Інтеграл в безмежних границях від $f(x)$ дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1, \qquad (1.5.4)$$

тобто загальна площа між кривою розподілу та віссю абсцис дорівнює одиниці.

Основні числові характеристики розподілу неперервної випадкової величини *X* можна отримати на основі відповідних їм формул для перервної величини, якщо в них окремі значення величини x_i замінити змінною *x*, ймовірності окремих значень p_i - елементом ймовірності *f(x)dx,* а кінцеву суму - інтегралом в безмежних границях. Переважна більшість числових характеристик розподілу виражається через початкові α_s або центральні μ_s моменти s-го порядку, вирази яких для неперервної випадкової величини *X* мають вигляд:

$$\alpha_s = \int_{-\infty}^{+\infty} x^s f(x)dx; \qquad (1.5.5)$$

$$\mu_s = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^s f(x)dx. \qquad (1.5.6)$$

Модою неперервної випадкової величини називають таке її значення, в якому щільність розподілу максимальна. *M=x*, якщо *f(x)=max*.

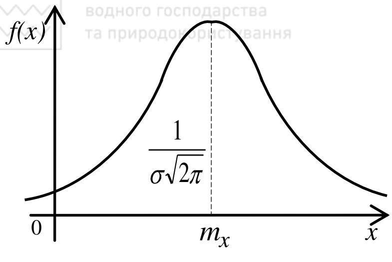
Нормальним законом розподілу неперервної випадкової величини *X* називається закон розподілу, для якого щільність описується функцією виду

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (1.5.7)$$

де m_x та σ - відповідно математичне сподівання та стандарт величини *X*. Щільність нормального розподілу можна визначити безпосередньо за формулою (1.5.7) або за таблицею (див. таблицю додатку 1). При користуванні таблицею кінцеве значення $f(x) = \frac{f(t)}{\sigma}$, де $t = \frac{x - m_x}{\sigma}$.

Крива розподілу має симетричний вершиноподібний вигляд. Максимальна ордината кривої відповідає точці $x = m_x$ та дорівнює $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$. В цій точці щільність розподілу найбільша. По мірі віддалення від точки m_x щільність спадає і при $x \to \pm\infty$ крива асимптотично наближається до осі абсцис (див. малюнок 1.5.2).

Математичне сподівання $m_x = \alpha_1$ характеризує положення нормально розподіленої випадкової величини на осі абсцис і є центром симетрії розподілу, оскільки при зміні знаку різниці $(x - m_x)$ на протилежний



Малюнок 1.5.2.

значення виразу (1.5.7) не змінюється. Зміна m_x приводить до зміщення кривої розподілу вздовж осі абсцис без зміни її форми.

Стандарт σ є характеристикою розсіювання випадкової величини відносно математичного сподівання і описує форму кривої розподілу.

При нормальному розподілі випадкової величини існує співвідношення, за яким можна обчислювати центральні моменти вищих порядків через відповідні моменти нижчих порядків:

$$\mu_s = (s-1)\sigma^2 \mu_{s-2}\,. \tag{1.5.8}$$

Враховуючи, що для всіх випадкових величин $\mu_0 = 1$, а також для центрованої випадкової величини $\mu_1 = 0$, можна визначити центральні моменти нормально розподіленої величини всіх наступних порядків. Оскільки $\mu_1 = 0$, то всі моменти непарних порядків також дорівнюють нулю. Таку властивість мають всі симетричні розподіли, в тому числі й нормальний розподіл, щільність якого описується формулою (1.5.7). Оскільки $\mu_3 = 0$, то коефіцієнт асиметрії нормального розподілу $S_k = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 0$. Це є ще одним доказом симетричності нормального закону розподілу.

Для центральних моментів парних порядків з формули (1.5.8) слідують вирази такого виду: $\mu_2 = \sigma^2$; $\mu_4 = 3\sigma^4$; $\mu_6 = 15\sigma^6$; ... . Звідси ексцес нормального розподілу дорівнює нулю:

$$E_x = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{3\sigma^4}{\sigma^4} - 3 = 0\,. \tag{1.5.9}$$

Це очевидно також з точки зору призначення ексцесу як числової характеристики розподілу - описувати крутизну розподілів порівняно з нормальним.

Враховуючи, що нормальний розподіл є симетричним модальним розподілом, його математичне сподівання, мода та медіана збігаються і в числовому вираженні дорівнюють одне одному.

Функція розподілу *F(x)* через функцію щільності розподілу *f(x)* нормального закону виражається формулою

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\,, \tag{1.5.10}$$

де $t=\dfrac{x-m_x}{\sigma}$ - нормований аргумент (нормоване значення випадкової величини). Оскільки інтеграли (1.5.10) не виражаються через елементарні функції, то при розв'язуванні практичних задач для знаходження значень функції розподілу *F(x)* випадкової величини з параметрами m_x та σ використовують спеціальну функцію, яку називають інтегралом ймовірностей:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \left(1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{8}-\frac{t^6}{48}+\ldots\right)dt. \qquad (1.5.11)$$

Для найпростішого нормального розподілу з параметрами m_x=0 та σ=1 на основі інтегралу ймовірностей з врахуванням так званої нормальної функції розподілу стандартного вигляду

$$\Phi^*(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \qquad (1.5.12)$$

складено таблицю (див. таблицю додатку 2). Нормальна функція розподілу $\Phi^*(t)$ має такі властивості: 1) $\Phi^*(-\infty)=0$; 2) $\Phi^*(+\infty)=1$; 3) $\Phi^*(t)$ - не спадаюча функція свого аргументу; 4) $\Phi^*(-t) = 1 - \Phi^*(t)$, що слідує з симетричності нормального розподілу при m_x=0 та σ=1 відносно початку координат. Отже, значення функції *F(x)* з довільними параметрами m_x та σ визначаються за таблицею додатку 2, враховуючи, що

$$F(x)=\Phi^*(t)=\Phi^*\left(\frac{x-m_x}{\sigma}\right). \qquad (1.5.13)$$

Визначивши значення функції нормального розподілу, легко знайти ймовірність попадання нормально розподіленої випадкової величини X в потрібний інтервал (α,β):

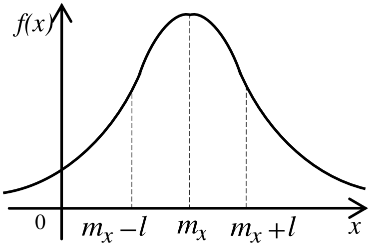
$$P(\alpha<X<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)=\Phi^*\left(\frac{\beta-m_x}{\sigma}\right)-\Phi^*\left(\frac{\alpha-m_x}{\sigma}\right), \qquad (1.5.14)$$

тобто ймовірність попадання нормально розподіленої випадкової величини X з параметрами m_x та σ в інтервал (α,β) дорівнює приростові нормальної функції розподілу $\Phi^*(t)$ з параметрами m_x=0 та σ=1 на границях цього інтервалу.

На практиці часто виникає потреба визначення ймовірності попадання нормально розподіленої випадкової величини на відрізок заданої довжини, який симетричний відносно центру розподілу m_x. Якщо такий відрізок має довжину $2l$ (див. малюнок 1.5.3), то потрібна ймовірність попадання величини в його межі виражається формулою

$$P\left(m_x - l < X < m_x + l\right) = \Phi^*\left(\frac{l}{\sigma}\right) - \Phi^*\left(-\frac{l}{\sigma}\right) = 2\Phi^*\left(\frac{l}{\sigma}\right) - 1 \qquad (1.5.15)$$

і дорівнює площі фігури під кривою нормального розподілу, яка опирається на цей відрізок.



Малюнок 1.5.3.

Якщо ймовірність (1.5.15) дорівнює $\frac{1}{2}$, то деяка величина $E=l$ називається ймовірним відхиленням нормально розподіленої величини. Ймовірне відхилення E нормально розподіленої випадкової величини X - це половина довжини відрізка, симетричного відносно математичного сподівання m_x, ймовірність попадання в який дорівнює 1/2:

$$P\left(m_x - E < X < m_x + E\right) = 2\Phi^*\left(\frac{E}{\sigma}\right) - 1 = \frac{1}{2}. \qquad (1.5.16)$$

Ймовірне відхилення – це половина довжини відрізку осі абсцис, який симетричний відносно математичного сподівання і на який опирається половина площі кривої розподілу. З останньої формули $\Phi^*\left(\frac{E}{\sigma}\right) = 0.75$. За таблицею нормальної функції розподілу значення аргументу, при якому функція дорівнює 0.75, наближено рівне 0.674. Тому остаточно

$$E = 0.674\,\sigma, \qquad (1.5.17)$$

тобто ймовірне відхилення E знаходиться в прямій залежності від середнього квадратичного відхилення (стандарту) σ.

Порядок виконання роботи

Під час виконання роботи в різних формах описується нормально розподілена випадкова величина, обчислюються числові характеристики її розподілу та розв'язуються деякі задачі з практичного використання нормально розподіленої випадкової величини.

Завдання 5. Задана нормально розподілена неперервна випадкова величина X з математичним сподіванням m_x та середнім квадратичним відхиленням σ. Необхідно: 1) використовуючи "правило трьох сигма", вибрати десять можливих значень величини; 2) за вибраними значеннями величини визначити числові значення функції розподілу *F(x)* і побудувати її графік; 3) обчислити значення щільності нормального розподілу і побудувати графік функції *f(x)*; 4) визначити ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $\left[\alpha, \beta\right]$; 5) знайти довжину відрізку, симетричного відносно m_x, ймовірність попадання в який дорівнює p; 6) визначити ймовірне відхилення заданого розподілу; 7) обчислити значення центральних моментів розподілу до десятого порядку включно.

Вихідні дані для виконання завдання наведено в додатку 4.

Приклад. Нехай $m_x = -209.0$; $\sigma = 24.2$; $\alpha = -230.0$; $\beta = -209.1$; $p = 0.58$.

1. Відповідно до "правила трьох сигма" практично всі можливі значення нормально розподіленої випадкової величини розташовуються в інтервалі $m_x \pm 3\sigma$. Тому з незчисленно великого числа можливих значень заданої неперервної випадкової величини, які зосереджуються в цьому інтервалі, можна вибрати, наприклад, наступні:

$x_1 = m_x - 3\sigma = -281.6$; $x_2 = m_x - 2\sigma = -257.4$;

$x_3 = m_x - \sigma = -233.2$; $x_4 = m_x - 0.7\sigma = -225.9$;

$x_5 = m_x - 0.5\sigma = -221.1$; $x_6 = m_x + 0.5\sigma = -196.9$;

$x_7 = m_x + 0.7\sigma = -192.1$; $x_8 = m_x + \sigma = -184.8$;

$x_9 = m_x + 2\sigma = -160.6$; $x_{10} = m_x + 3\sigma = -136.4$.

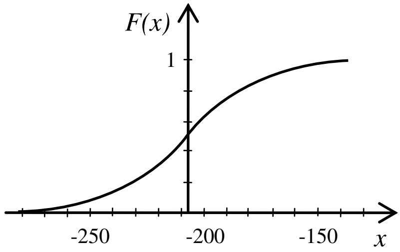
2. Функція розподілу *F(x)* нормального закону задається формулою (1.5.10). Однак тут маємо справу з інтегральною функцією, яка не виражається через елементарні функції, тому для практичного користування така формула не зручна. Для визначення значень *F(x)* використаємо формулу (1.5.13) і таблицю значень нормальної функції розподілу $\Phi^*(t)$, наведені в додатку 2. Значення функції розподілу нормально розподіленої випадкової величини *X* з параметрами $m_x = -209.0$ та $\sigma = 24.2$ виражаємо через нормальну функцію розподілу $\Phi^*(t)$ з параметрами $m_x = 0$ та $\sigma = 1$ з визначенням нормованого аргументу $t = (x - m_x)/\sigma$ для кожного вибраного значення випадкової величини та значення m_x. Результати визначення *F(x)* для наочності можна звести в таблицю:

x	-281.6	-257.4	-233.2	-225.9	-221.1	-209.0	-196.9	-192.1	-184.8	-160.6	-136.4
t	-3	-2	-1	-0.7	-0.5	0	0.5	0.7	1	2	3
F(x)	0.0014	0.0288	0.1587	0.2420	0.3085	0.5000	0.6915	0.7580	0.8413	0.9772	0.9986

Графік функції розподілу нормально розподіленої неперервної випадкової величини *X* будується нанесенням вздовж осі абсцис вибраних значень величини, а вздовж осі ординат – відповідних їм значень *F(x)*. Точки перетину сполучаються плавною кривою. Графік функції розподілу заданої нормально розподіленої випадкової величини показано на малюнку 1.5.5.

Значення функції щільності розподілу *f(x)* для нормально розподіленої випадкової величини *X* можна визначити за таблицею функції

$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$, наведеною в додатку 1.

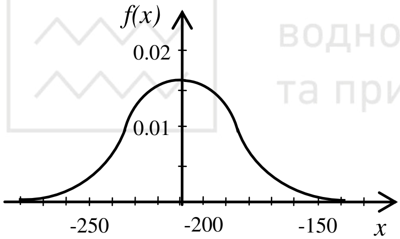


f(x)=

Малюнок 1.5.5.

При користуванні таблицею для кожного з потрібних значень величини X визначається його нормована величина $t = (x - m_x)/\sigma$ і за нею з таблиць вибирається відповідне значення функції *f(t)*. Кінцеве значення функції щільності $f(t)/\sigma$. Результати визначення щільності нормально розподіленої випадкової величини X для вибраних раніше можливих її значень зведено до таблиці:

x	-281.6	-257.4	-233.2	-225.9	-221.1	-209.0	-196.9	-192.1	-184.8	-160.6	-136.4
t	-3	-2	-1	-0.7	-0.5	0	0.5	0.7	1	2	3
f(t)	0.0044	0.0540	0.2420	0.3123	0.3521	0.3989	0.3521	0.3123	0.2420	0.0540	0.0044
f(x)	0.0002	0.0022	0.0100	0.0129	0.0145	0.0165	0.0145	0.0129	0.0100	0.0022	0.0002



Малюнок 1.5.6.

Графік функції щільності нормального розподілу показаний на малюнку 1.5.6.

4. Ймовірність попадання нормально розподіленої випадкової величини в інтервал [-230.0;-209.1] визначається за формулою (1.5.14) з використанням таблиць нормальної функції розподілу:

$$P(\alpha \le X \le \beta) = \Phi^*\left(\frac{\beta - m_x}{\sigma}\right) - \Phi^*\left(\frac{\alpha - m_x}{\sigma}\right) = \Phi^*(-0.004) - \Phi^*(-0.868) =$$

=0.4984-0.1927 = 0.3057.

5. Довжину відрізку, симетричного відносно m_x, ймовірність попадання в який p=0.58, можна визначити розв'язуванням оберненої задачі за формулою (1.5.15): $P(m_x - l < X < m_x + l) = 2\Phi^*\left(\frac{l}{\sigma}\right) - 1 = p$ = 0.58. Звідси $\Phi^*\left(\frac{l}{\sigma}\right)$ = 0.79.

Значення аргументу $\frac{l}{\sigma}$, при якому нормальна функція розподілу $\Phi^*\left(\frac{l}{\sigma}\right)$ = 0.79, у відповідності з таблицею додатку 2 дорівнює 0.806. Отже, $\frac{l}{\sigma} = 0.806$.

Тому $l = 0.806\times\sigma = 19.505$. Довжина відрізку, симетричного відносно m_x, ймовірність попадання в який p=0.58, $2l = 39.01$.

6. Значення ймовірного відхилення заданого розподілу випадкової величини X з параметрами m_x= -209.0 та σ = 24.2 можна отримати за формулою (1.5.17): $E = 0.674\times\sigma = 16.3108$.

7. Оскільки нормальний розподіл є симетричним, то всі центральні моменти непарних порядків дорівнюють нулю: $\mu_1 = \mu_3 = \mu_5 = \mu_7 = \mu_9 = 0$. Моменти парних порядків можна обчислити на основі рекурентного співвідношення (1.5.8), враховуючи, що $\mu_0 = 1$: $\mu_2 = \sigma^2 = 585.64$; $\mu_4 = 3\sigma^4 = 1028922.6$; $\mu_6 = 15\sigma^6 = 30.1268\times10^8$; $\mu_8 = 105\sigma^8 = 1235.127\times10^{10}$; $\mu_{10} = 945\sigma^{10} = 65100.57\times10^{12}$.

Питання для самостійної роботи

1. Що називають щільністю розподілу неперервної випадкової величини?
2. Як виражається ймовірність попадання випадкової величини в заданий інтервал через функцію щільності розподілу?
3. Поясніть властивості функції щільності розподілу неперервної випадкової величини.
4. Що називають нормальним законом розподілу випадкової величини?
5. Поясніть властивості кривої нормального закону розподілу.
6. Що характеризують математичне сподівання та стандарт при нормальному розподілі величини?
7. Що називають модою та медіаною неперервної випадкової величини? Як вони зв'язані з математичним сподіванням при нормальному розподілі величини?
8. Як обчислюються центральні моменти неперервної нормально розподіленої випадкової величини?
9. Як обчислити значення функції розподілу неперервної випадкової величини?
10. Які властивості має нормальна функція розподілу?
11. Як обчислити ймовірність попадання нормально розподіленої випадкової величини в заданий інтервал?
12. Як обчислити ймовірність попадання нормально розподіленої випадкової величини на відрізок заданої довжини, який симетричний відносно математичного сподівання?
13. Що називають ймовірним відхиленням? Як його обчислити?
14. Що називають нормованою випадковою величиною?
15. Як визначити значення функції щільності нормального розподілу випадкової величини?

РОЗПОДІЛ БАЛІВ,
що присвоюються студентам за виконання практичних робіт на тему:

№ з/п	Назви завдань	Кількість балів	
		Практичні заняття	Тести
1	Безпосередній підрахунок ймовірностей елементарних подій	1	1
2	Обчислення ймовірностей складних подій	1	1
3	Закон розподілу та числові характеристики перервних випадкових величин	1	1
4	Нормальний закон розподілу випадкової величини	1	1

ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Войтенко С.П. Математична обробка геодезичних вимірів. Теорія похибок вимірів: Навчальний посібник. – К.: КНУБА, 2003. – 216с.
2. Зазуляк П.М., Гавриш В.І., Євсєєва Е.М., Йосипчук М.Д. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірювань: Підручник. – Львів: Растр-7, 2007. – 408 с.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М., Наука, 1969. – 576 с.
4. Гайдаев П.А., Большаков В.Д. Теория математической обработки геодезических измерений. М., Недра, 1969. – 367с.
5. Видуев Н.Г., Григоренко А.Г. Математическая обработка геодезических измерений. Киев, Высшая школа, 1978.

ДОДАТКИ

Додаток 1

Значення функції $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	t
0.0	0.3989	0.3989	0.3989	0.3988	0.3986	0.3984	0.3982	0.3980	0.3977	0.3973	0.0
0.1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918	0.1
0.2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825	0.2
0.3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697	0.3
0.4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538	0.4
0.5	0.3521	0.3503	0.3485	0.3467	0.3448	0.3429	0.3410	0.3391	0.3372	0.3352	0.5
0.6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144	0.6
0.7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920	0.7
0.8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685	0.8
0.9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444	0.9
1.0	0.2420	0.2396	0.2371	0.2347	0.2323	0.2299	0.2275	0.2251	0.2227	0.2203	1.0
1.1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965	1.1
1.2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736	1.2
1.3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518	1.3
1.4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315	1.4
1.5	0.1295	0.1276	0.1257	0.1238	0.1219	0.1200	0.1182	0.1163	0.1145	0.1127	1.5
1.6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957	1.6
1.7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804	1.7
1.8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669	1.8
1.9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551	1.9
2.0	0.0540	0.0529	0.0519	0.0508	0.0498	0.0488	0.0478	0.0468	0.0459	0.0449	2.0
2.1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0388	0379	0371	0363	2.1
2.2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290	2.2
2.3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229	2.3
2.4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180	2.4
2.5	0.0175	0.0171	0.0167	0.0163	0.0158	0.0154	0.0151	0.0147	0.0143	0.0139	2.5
2.6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107	2.6
2.7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081	2.7
2.8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061	2.8
2.9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046	2.9
3.0	0.0044	0.0043	0.0042	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036	0.0035	0.0034	3.0
3.1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025	3.1
3.2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018	3.2
3.3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013	3.3
3.4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009	3.4
3.5	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007	0.0006	3.5
3.6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004	3.6
3.7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003	3.7
3.8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002	3.8
3.9	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	3.9
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	t

Додаток 2

Значення нормальної функції розподілу $\Phi^*(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$

t	$\Phi^*(t)$	t	$\Phi^*(t)$	t	$\Phi^*(t)$	t	$\Phi^*(t)$	t	$\Phi^*(t)$	t	$\Phi^*(t)$
0.00	0.5000	0.40	0.6554	0.80	0.7881	1.20	0.8849	1.60	0.9452	2.00	0.9772
0.01	5040	0.41	6591	0.81	7910	1.21	8869	1.61	9463	2.10	9821
0.02	5080	0.42	6628	0.82	7939	1.22	8888	1.62	9474	2.20	9861
0.03	5120	0.43	6664	0.83	7967	1.23	8907	1.63	9484	2.30	9893
0.04	5160	0.44	6700	0.84	7995	1.24	8925	1.64	9495	2.40	9918
0.05	5199	0.45	6736	0.85	8023	1.25	8944	1.65	9505	2.50	9938
0.06	5239	0.46	6772	0.86	8051	1.26	8962	1.66	9515	2.60	9953
0.07	5279	0.47	6808	0.87	8078	1.27	8980	1.67	9525	2.70	9965
0.08	5319	0.48	6844	0.88	8106	1.28	8997	1.68	9535	2.80	9974
0.09	5359	0.49	6879	0.89	8133	1.29	9015	1.69	9545	2.90	9981
0.10	0.5398	0.50	0.6915	0.90	0.8159	1.30	0.9032	1.70	0.9554	3.00	0.9986
0.11	5438	0.51	6950	0.91	8186	1.31	9049	1.71	9564	3.10	9990
0.12	5478	0.52	6985	0.92	8212	1.32	9066	1.72	9573	3.20	9993
0.13	5517	0.53	7019	0.93	8238	1.33	9082	1.73	9582	3.30	9995
0.14	5557	0.54	7054	0.94	8264	1.34	9099	1.74	9591	3.40	9997
0.15	5596	0.55	7088	0.95	8289	1.35	9115	1.75	9599	3.50	9998
0.16	5636	0.56	7123	0.96	8315	1.36	9131	1.76	9608	3.60	9998
0.17	5675	0.57	7157	0.97	8340	1.37	9147	1.77	9616	3.70	9999
0.18	5714	0.58	7190	0.98	8365	1.38	9162	1.78	9625	3.80	0.9999
0.19	5753	0.59	7224	0.99	8389	1.39	9177	1.79	9633	3.90	1.0000
0.20	0.5793	0.60	0.7257	1.00	0.8413	1.40	0.9192	1.80	0.9641		
0.21	5832	0.61	7291	1.01	8437	1.41	9207	1.81	9649		
0.22	5871	0.62	7324	1.02	8461	1.42	9222	1.82	9656		
0.23	5910	0.63	7357	1.03	8485	1.43	9236	1.83	9664		
0.24	5948	0.64	7389	1.04	8508	1.44	9251	1.84	9671		
0.25	5987	0.65	7422	1.05	8531	1.45	9265	1.85	9678		
0.26	6026	0.66	7454	1.06	8554	1.46	9279	1.86	9686		
0.27	6064	0.67	7486	1.07	8577	1.47	9292	1.87	9693		
0.28	6103	0.68	7517	1.08	8599	1.48	9306	1.88	9699		
0.29	6141	0.69	7549	1.09	8621	1.49	9319	1.89	9706		
0.30	0.6179	0.70	0.7580	1.10	0.8643	1.50	0.9332	1.90	0.9713		
0.31	6217	0.71	7611	1.11	8665	1.51	9345	1.91	9719		
0.32	6255	0.72	7642	1.12	8686	1.52	9357	1.92	9726		
0.33	6293	0.73	7673	1.13	8708	1.53	9370	1.93	9732		
0.34	6331	0.74	7703	1.14	8729	1.54	9382	1.94	9738		
0.35	6368	0.75	7734	1.15	8749	1.55	9394	1.95	9744		
0.36	6406	0.76	7764	1.16	8770	1.56	9406	1.96	9750		
0.37	6443	0.77	7794	1.17	8790	1.57	9418	1.97	9756		
0.38	6480	0.78	7823	1.18	8810	1.58	9429	1.98	9761		
0.39	0.6517	0.79	0.7852	1.19	0.8830	1.59	0.9441	1.99	0.9767		

Додаток 3

Вихідні дані до виконання завдання №4

N	n	p	α	β	N	n	p	α	β	N	n	p	α	β	N	n	p	α	β
1	6	0.88	0	5	24	8	0.65	0	6	47	7	0.34	3	6	70	6	0.92	4	5
2	7	0.08	4	6	25	6	0.41	3	6	48	8	0.76	4	8	71	7	0.25	0	4
3	8	0.10	3	7	26	7	0.53	1	2	49	6	0.32	4	6	72	8	0.87	0	3
4	6	0.68	3	5	27	8	0.75	1	7	50	7	0.44	4	6	73	6	0.13	5	6
5	7	0.29	1	5	28	6	0.51	0	4	51	8	0.86	2	3	74	7	0.35	0	2
6	8	0.30	0	5	29	7	0.63	1	4	52	6	0.42	0	5	75	8	0.28	0	1
7	6	0.47	2	4	30	8	0.16	1	5	53	7	0.54	3	5	76	6	0.42	1	4
8	7	0.39	2	4	31	6	0.61	1	5	54	8	0.27	0	5	77	7	0.79	1	5
9	8	0.70	5	7	32	7	0.73	1	6	55	6	0.52	2	6	78	8	0.33	1	5
10	6	0.25	0	5	33	8	0.26	1	3	56	7	0.64	2	6	79	6	0.91	1	6
11	7	0.56	4	6	34	6	0.71	2	6	57	8	0.37	4	7	80	7	0.34	2	6
12	8	0.90	3	6	35	7	0.83	2	3	58	6	0.62	0	1	81	8	0.48	2	3
13	6	0.04	1	4	36	8	0.36	6	8	59	7	0.74	2	4	82	6	0.22	6	8
14	7	0.81	0	6	37	6	0.81	0	2	60	8	0.47	3	7	83	7	0.18	5	8
15	8	0.80	2	7	38	7	0.93	2	5	61	6	0.62	1	2	84	8	0.39	2	4
16	6	0.11	0	3	39	8	0.46	5	8	62	7	0.84	1	5	85	6	0.87	3	4
17	7	0.23	0	1	40	6	0.91	1	3	63	8	0.57	4	8	86	7	0.55	6	8
18	8	0.45	0	2	41	7	0.14	2	7	64	6	0.72	2	3	87	8	0.17	3	5
19	6	0.21	1	4	42	8	0.56	5	8	65	7	0.94	1	3	88	6	0.41	0	3
20	7	0.33	0	3	43	6	0.12	2	4	66	8	0.67	1	4	89	7	0.19	0	4
21	8	0.55	0	4	44	7	0.24	3	4	67	6	0.82	3	4	90	8	0.77	2	5
22	6	0.31	2	5	45	8	0.66	6	8	68	7	0.15	0	5	91	6	0.25	0	6
23	7	0.43	0	6	46	6	0.22	3	5	69	8	0.77	1	6	92	7	0.66	5	6

Додаток 4

Вихідні дані до виконання завдання №5

N	m_x	σ	α	β	p	N	m_x	σ	α	β	p	N	m_x	σ	α	β	p	N	m_x	σ	α	β	p
1	2.6	4.7	-2.8	2.8	0.15	24	7.8	3.2	0.2	5.4	0.60	47	2.5	3.9	0.4	2.6	0.13	70	-4.4	3.3	-3.8	0	0.64
2	1.8	2.9	1.4	2.6	0.25	25	9.0	4.2	1.4	3.2	0.66	48	3.2	2.8	-1.6	0	0.16	71	-6.9	3.2	-5.8	1.1	0.67
3	1.6	6.4	0	6.4	0.35	26	-4.4	3.2	-2.1	3.8	0.72	49	4.1	4.8	-3.1	-0.6	0.19	72	-8.1	5.6	-8.8	4.3	0.72
4	2.2	3.1	-3.1	0	0.45	27	-5.8	6.7	0	6.4	0.78	50	5.8	6.9	-5.4	3.2	0.22	73	-7.6	4.2	-5.4	5.4	0.76
5	3.8	4.6	-5.8	0.6	0.55	28	-0.3	8.4	6.3	8.2	0.84	51	6.2	3.8	4.0	6.1	0.25	74	-5.5	1.3	-5.4	-3.2	0.83
6	0.5	3.2	-6.4	1.3	0.65	29	3.3	2.1	3.8	5.6	0.90	52	8.3	6.7	-2.2	1.4	0.28	75	-3.6	4.8	1.2	2.4	0.88
7	-1.4	2.8	-2.8	3.2	0.75	30	5.5	4.2	-1.2	2.0	0.96	53	-3.3	1.5	-4.2	-3.4	0.31	76	1.8	1.8	2.7	2.6	0.19
8	-2.2	6.5	-9.4	0.2	0.85	31	0.5	2.2	-0.5	0.6	0.05	54	-5.1	1.2	-4.8	-3.1	0.71	77	1.6	2.9	2.9	9.1	0.07
9	-1.8	4.1	-2.1	1.6	0.05	32	1.6	2.1	-1.8	0.9	0.13	55	-7.3	3.8	-7.0	3.1	0.74	78	2.2	3.1	4.6	1.1	0.09
10	-6.7	7.2	3.8	9.7	0.90	33	2.3	3.6	-2.3	-0.4	0.211	56	-8.7	4.1	-9.9	-8.6	0.77	79	0.9	4.5	4.3	3.2	0.24
11	-0.5	8.7	-8.1	-0.2	0.20	34	4.8	5.4	1.5	4.3	0.27	57	-6.6	5.5	-0.5	5.3	0.80	80	8.4	4.4	-6.8	4.6	0.40
12	-1.1	4.3	0.5	1.3	0.30	35	5.6	3.6	-0.1	4.8	0.34	58	-4.5	3.1	-3.4	-0.5	0.83	81	4.8	2.8	-9.1	5.2	0.44
13	-4.6	1.2	-5.5	-4.0	0.40	36	6.8	4.3	3.3	6.7	0.41	59	-2.4	9.8	0	2.8	0.86	82	5.6	7.2	-4.2	5.4	0.57
14	3.8	4.5	-3.3	0.6	0.60	37	7.9	6.5	-3.8	4.6	0.48	60	-1.8	4.3	1.2	3.4	0.89	83	6.8	5.0	-8.1	6.1	0.60
15	8.3	5.8	8.6	9.9	0.80	38	-3.1	3.4	-3.2	-0.8	0.55	61	0.7	3.4	0	0.8	0.11	84	-2.2	6.8	-8.2	-1.2	0.50
16	0.9	7.1	-3.2	6.3	0.12	39	-5.7	3.2	-6.9	-5.8	0.62	62	1.4	3.1	-3.6	-1.8	0.14	85	-1.8	4.9	0	9.9	0.18
17	8.4	4.2	-0.5	9.6	0.18	40	-8.5	4.8	-8.4	3.1	0.69	63	3.6	3.4	1.1	3.5	0.17	86	-6.7	1.9	0.2	8.4	0.15
18	-3.2	2.6	0.2	2.1	0.24	41	-7.4	5.1	-4.3	0.6	0.76	64	4.2	2.8	-2.1	0	0.27	87	-7.5	9.3	-8.4	5.1	0.72
19	-6.8	2.7	-8.4	-7.0	0.30	42	-6.3	8.4	0	6.8	0.83	65	5.1	4.8	0	4.3	0.35	88	-8.7	6.1	-6.3	0	0.70
20	-9.6	4.2	-6.3	0.2	0.36	43	-4.8	0.8	-6.9	-5.1	0.90	66	6.7	7.2	6.8	7.9	0.43	89	-6.3	8.0	-3.3	-3.3	0.90
21	2.3	6.1	3.1	7.8	0.42	44	-2.8	7.6	1.6	6.8	0.04	67	9.8	4.5	7.6	9.1	0.47	90	-4.5	0.9	-5.1	-3.1	0.95
22	0.7	9.8	-7.3	0.2	0.48	45	-1.6	3.2	0	4.2	0.07	68	-1.4	2.8	-6.2	-4.1	0.57	91	2.2	8.1	-7.3	6.2	0.93
23	-1.6	8.7	-9.3	3.6	0.54	46	0.6	2.8	0.1	0.7	0.10	69	-2.5	5.8	0	3.2	0.61	92	0.8	3.3	0	0.3	0.94