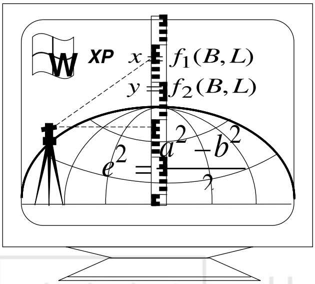
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВОДНОГО ГОСПОДАРСТВА ТА ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ

Інститут агроекології та землеустрою

Кафедра геодезії та геоінформатики



05-04-33

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання самостійних та практичних робіт з дисципліни
„МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ”
студентами напряму 0801 „Геодезія, картографія та землеустрій”
Розділ 3. Метод найменших квадратів.
Зрівноважування результатів вимірів корелатним способом.

Рекомендовано
методичною комісією напряму підготовки 0801
„Геодезія, картографія та землеустрій”.
Протокол № 2 від 22 жовтня 2013р.

РІВНЕ – 2014

Методичні вказівки до виконання самостійних та практичних робіт з дисципліни „Математична обробка геодезичних вимірів” студентами напряму 0801 „Геодезія, картографія та землеустрій” Розділ 3. Метод найменших квадратів. Зрівноважування результатів вимірів корелатним способом. / О.А.Тадєєв, Т.І.Дець, Рівне: НУВГП, 2014. – 46 с.

Упорядники: О.А.Тадєєв, кандидат технічних наук, доцент кафедри геодезії та геоінформатики;
Т.І. Дець, асистент кафедри геодезії та геоінформатики.

ЗМІСТ

сторінка

Вступ..3

1. Зрівноважування результатів вимірів корелатним способом……………..3
   1.1. Формування системи умовних рівнянь поправок……………………..5
   1.2. Формування системи нормальних рівнянь корелат……………………11
   1.3. Розв’язування системи нормальних рівнянь корелат…………….…14
   1.4. Обчислення зрівноважених значень результатів вимірів…………..…18
   1.5. Оцінка точності за результатами зрівноважування…………………....19
   1.6. Приклади зрівноважування результатів вимірів корелатним способом……………………………………………………..27

2. Розподіл балів, що присвоюються студентам за виконання практичних робіт..45

Перелік рекомендованої літератури……………………………...……46

Додатки..46

ВСТУП

В даних методичних вказівках нами буде викладено черговість дій та рекомендації під час зрівноважування результатів вимірів у геодезичних мережах, опираючись на загальну теорію корелатного способу.

1. ЗРІВНОВАЖУВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРІВ КОРЕЛАТНИМ СПОСОБОМ

Корелатним способом зрівноважування за принципом найменших квадратів називають спосіб знаходження мінімуму функції $[pv^2]$ методом Лагранжа із застосуванням допоміжних множників незалежних умовних рівнянь.

1.1. Формування системи умовних рівнянь поправок

Нехай проведено виміри n величин X_i ($i=\overrightarrow{1,n}$) і одержано результати вимірів x_i з вагами p_i. Допустимо, величини зв'язані між собою незалежними умовними рівняннями загального вигляду

$$\varphi_j(X_1,\ldots,X_n)=0\,. \qquad (3.3.1)$$

Число умовних рівнянь $j=\overrightarrow{1,r}$; $r-$число надлишкових виміряних величин.

Результати вимірів містять певні помилки. Умови рівнянь (3.3.1), складених за результатами вимірів x_i, не будуть дотримані:

$$\varphi_j(x_1,\ldots,x_n)=W_j\,. \qquad (3.3.2)$$

Величини W_j називаються нев'язками умовних рівнянь. Нев'язки W_j виражають істинні помилки умовних рівнянь і є наслідком впливу на результати помилок вимірів. Потрібно позбутись нев'язок і виправити результати вимірів x_i відповідними поправками v_i таким чином, щоб зрівноважені значення $\tilde{x}_i=x_i+v_i$ задовольняли рівнянням (3.3.1):

$$\varphi_j(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_n)=0\,. \qquad (3.3.3)$$

В геодезичних задачах умовні рівняння можуть мати нелінійний вигляд. Лінеаризацію нелінійних умов можна здійснити шляхом розкладу функцій (3.3.3) в ряд Тейлора. Отже,

$$\varphi_j(x_1+v_1,\cdots,x_n+v_n)=\varphi_j(x_1,\cdots,x_n)+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right)_{\circ}v_i \qquad (3.3.4)$$

або

$$a_{j1}v_1+\cdots+a_{jn}v_n+W_j=0\,; \qquad (3.3.5)$$

$$[a_jv]+W_j=0\,, \qquad (3.3.6)$$

де

$$a_{ji}=\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right)_{\circ}. \qquad (3.3.7)$$

Однорідні лінійні рівняння (3.3.5) чи (3.3.6) називаються умовними рівняннями поправок. Система r умовних рівнянь поправок у матричній формі має вигляд:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \cdots \\ W_r \end{pmatrix} = 0 \tag{3.3.8}$$

$$\underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{V} + \underset{r\times 1}{W} = 0. \tag{3.3.9}$$

Якщо початкові математичні умови (3.3.3) виражаються лінійними рівняннями, то диференціювання (3.3.7) забезпечує значення коефіцієнтів a_{ji}, які дорівнюють ±1. Це свідчить про те, що лінеаризацію таких рівнянь виконувати немає потреби.

Умовні рівняння поправок – однорідні лінійні рівняння, які навіть для різних за фізичним змістом виміряних величин різняться лише числом та значеннями коефіцієнтів a_{ji} та вільних членів W_j. Останні ж повністю визначаються умовними рівняннями (3.3.1). Класифікація видів умовних рівнянь поправок залежно від фізичного змісту вимірюваних величин у геодезичних мережах та виду зв'язку між ними показана на малюнку 1.1.

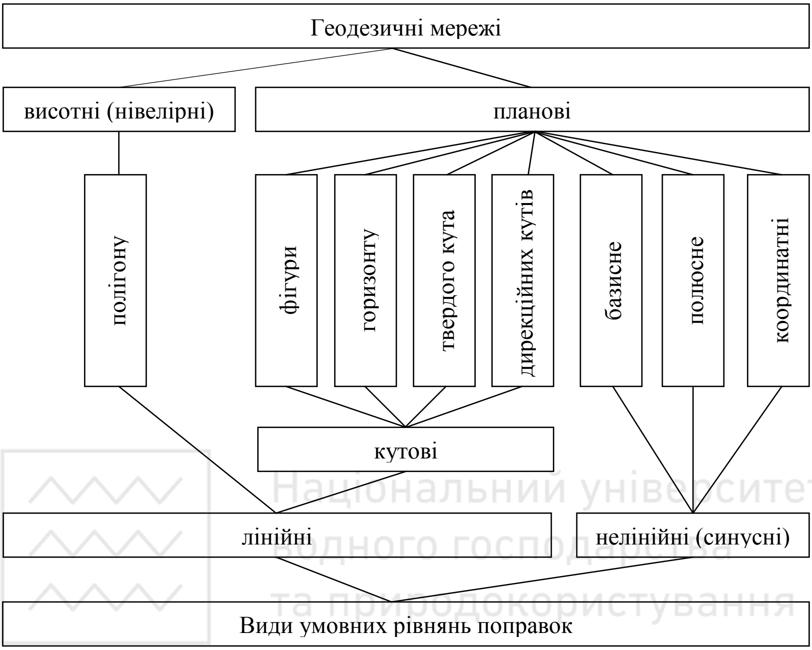
При встановленні загального числа r умовних рівнянь у планових геодезичних мережах потрібно приймати до уваги таку їх систематизацію залежно від чисельності вихідних даних: 1) вільні мережі – це мережі, для визначення положення яких задано тільки необхідну і достатню кількість вихідних даних (координати одного пункту, довжина і напрям вихідної сторони або координати двох пунктів). Для таких мереж $r=n-2(m-2)$, де n – число всіх виміряних кутів, а m – число всіх пунктів; 2) невільні мережі – це мережі, в яких понад необхідні задано ще надлишкові вихідні дані. Тут $r=n-2(m-2)+q$, де q – число надлишкових вихідних даних.

З приводу видів рівнянь, які складають у планових мережах, необхідно зауважити наступне: 1) у мережах тріангуляції виникають лінійні кутові та нелінійні умовні рівняння усіх видів; 2) у мережах полігонометрії виникають умовні рівняння дирекційних кутів та координатні (абсцис та ординат). Рівняння можна складати як для окремих ходів, так і для замкнених чи розімкнених полігонів, які утворені цими ходами. На практиці переважно складають рівняння для окремих ходів;

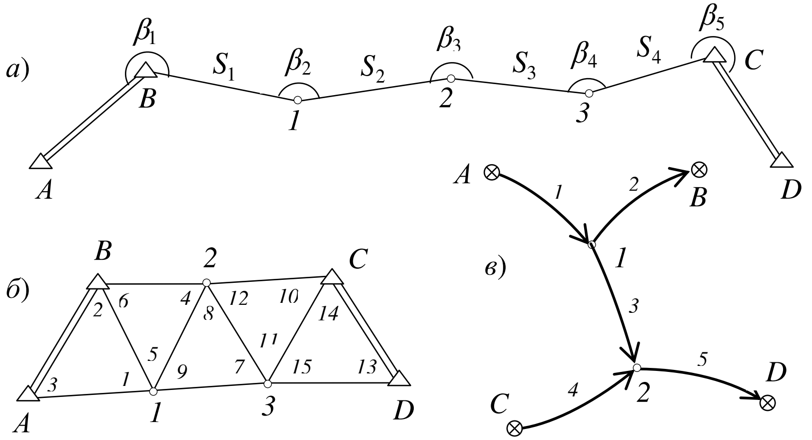
3) умовні рівняння у мережах трилатерації мають складний аналітичний вигляд. Тож зважаючи на можливі утруднення при їх диференціюванні, рівняння поправок для цих мереж не складають і тому, як правило, корелатним способом трилатерацію не зрівноважують;

4) число лінійних кутових умовних рівнянь поправок $r_1=n-l$, де n – число усіх виміряних кутів мережі; l - число невідомих сторін. Наприклад, для полігонометричного ходу, зображеного на малюнку 1.2.а, $r_1=1$ (рівняння

дирекційних кутів); для мережі тріангуляції (малюнок 1.2.б) r_1=6 , зокрема п'ять рівнянь фігур та рівняння дирекційних кутів;



Малюнок 1.1. Види умовних рівнянь поправок у геодезичних мережах



Малюнок 1.2. Схеми геодезичних мереж

5) число нелінійних умовних рівнянь поправок загалом $r_2=r - r_1$або, крім того, для тріангуляції $r_2=l - k$, де k – число необхідних виміряних величин. Наприклад, для зазначеного вище полігонометричного ходу r_2=2 (два координатні рівняння абсцис та ординат) і для тріангуляції r_2=3 (базисне та два координатні рівняння);

6) при формуванні системи трапляються випадки взаємозамінних видів початкових умов. У таких ситуаціях потрібно вибирати комбінації найбільш простих умовних рівнянь, які б містили мінімальне число спільних виміряних величин.

Види умовних рівнянь поправок

1. Умовні рівняння полігонів. Рівняння полігонів складають у нівелірних мережах для вибраних r незалежних замкнених чи розімкнених полігонів. Незалежними вважають такі полігони, серед яких жоден не був би комбінацією інших. Умовне рівняння полігону має загальний вигляд

$$\sum_{i \in j} \pm v_i + W_j = 0,$$

де $\sum_{i \in j} v_i$ - сума поправок до перевищень h_i вздовж тих ходів мережі, які утворюють полігон за номером j. Знак "+" перед поправкою ставлять тоді, коли напрями ходу і полігону співпадають; знак "–" – якщо їх напрями протилежні. Нев'язка $W_j = \sum_{i \in j} \pm h_i - (H_{кінц} - H_{поч})$,

де $H_{поч}$ та $H_{кінц}$ - відмітки початкового та кінцевого реперів полігону. Для замкнених полігонів $H_{поч}$=$H_{кінц}$. Наприклад, для нівелірної мережі, яка зображена на малюнку 1.2.в, рівняння поправок мають такий вигляд:

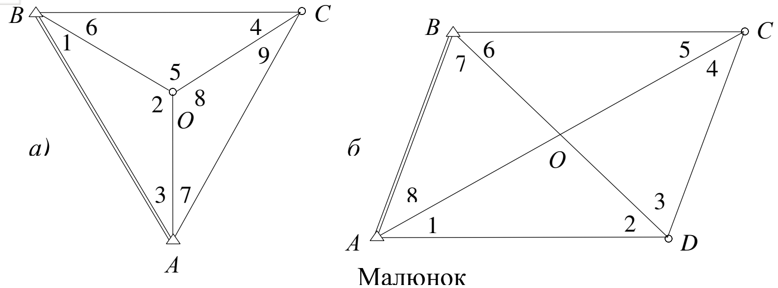
$$v_1 + v_2 + W_1 = 0; \qquad W_1 = h_1 + h_2 - (H_B - H_A);$$
$$v_4 + v_5 + W_2 = 0; \qquad W_2 = h_4 + h_5 - (H_D - H_C);$$
$$v_1 + v_3 + v_5 + W_3 = 0; \qquad W_3 = h_1 + h_3 + h_5 - (H_D - H_A).$$

2. Умовні рівняння фігур. Істинні значення виміряних кутів плоского трикутника повинні задовольняти початковому умовному рівнянню зв'язку

$$X_1 + X_2 + X_3 - 180^\circ = 0.$$

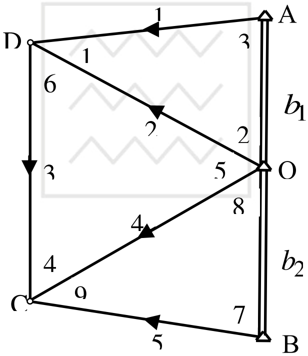
Йому відповідає рівняння: $v_1 + v_2 + v_3 + W = 0$, яке називається умовним рівнянням фігури. Нев'язка $W = x_1 + x_2 + x_3 - 180^\circ$; x_1,x_2,x_3 – результати вимірів кутів трикутника. Число умовних рівнянь фігур для мережі $r_{фігур} = l - m + 1$, де l – число усіх сторін, m – число усіх пунктів.

3. Умовні рівняння горизонту. Якщо в окремому пункті вимірювались усі кути, які мають спільні прилеглі сторони (точка O на малюнку 1.3.а), то виникає умова $X_2 + X_5 + X_8 - 360^\circ = 0$.



Малюнок

Відповідне рівняння має вигляд $v_2+v_5+v_8+W=0$, де нев'язка $W=x_2+x_5+x_8-360^\circ$. Таке рівняння називають умовним рівнянням горизонту. Число рівнянь горизонту дорівнює числу пунктів, у кожному з яких виміряні кути з спільними прилеглими сторонами.



Малюнок 1.4

4. Умовні рівняння твердого кута. В мережах тріангуляції з відомими сторонами, які мають спільні пункти (наприклад, мережа на малюнку 1.4), виникає умовне рівняння зв'язку: $X_2+X_5+X_8-\angle AOB=0$.

Відповідне рівняння поправок має вигляд:

$$v_2+v_5+v_8+W=0$$

і називається умовним рівнянням твердого кута, де нев'язка рівняння $W=x_2+x_5+x_8-\angle AOB$.

5. Умовні рівняння дирекційних кутів. Якщо в мережах відомі дирекційні кути твердих сторін, які не мають спільних пунктів, то для них можна сформулювати таку умову: дирекційний кут кінцевої сторони $\alpha_{кінц}$, обчислений за дирекційним кутом початкової сторони $\alpha_{поч}$ та кутами мережі вздовж вибраного напряму ходової лінії, повинен дорівнювати його заданому значенню. Такій умові відповідає рівняння, яке називають умовним рівнянням дирекційних кутів.

Наприклад, для ланцюжка трикутників, зображеного на малюнку 1.2.б, вздовж ходової лінії (*D-C-2-B-A*) рівняння має вигляд

$$v_2+v_4+v_6+v_8+v_{10}+v_{12}+v_{14}+W=0;$$

$$W=\alpha_{CD}-\alpha_{BA}+x_2+x_4+x_6+x_8+x_{10}+x_{12}+x_{14}-180^\circ\cdot k,$$

де $k=2$ – число невідомих сторін ходової лінії.

Вздовж ходової лінії (*D-C-3-2-1-B-A*) : $v_2+v_8+v_{14}-v_5-v_{11}+W=0$.

Знак “+” приписано перед поправками до кутів, які розташовані ліворуч напряму ходової лінії; знак “–” - для розташованих праворуч того ж напряму.

$$W = \alpha_{CD} - \alpha_{BA} + x_2 + x_8 + x_{14} - x_5 - x_{11} - 180^\circ \cdot k,$$

де k =4 – число невідомих сторін ходової лінії.

Для окремої мережі можна вибрати кілька напрямів ходової лінії і скласти відповідні умовні рівняння. З метою зменшення обсягу роботи на чергових етапах зрівноважування, належить вибрати такий варіант рівняння, до якого залучено найменше число кутів.

Загальне число рівнянь дирекційних кутів мережі дорівнює числу її твердих дирекційних кутів, зменшеному на одиницю. За умови, що тверді сторони мають спільні пункти, замість умов дирекційних кутів для кожного з таких пунктів складають умовне рівняння твердого кута.

При зрівноважуванні мереж полігонометрії умовні рівняння дирекційних кутів можна складати як для окремих ходів, так і для замкнених чи розімкнених полігонів, які утворені цими ходами. Як правило, віддають перевагу рівнянням для окремих ходів. Якщо кути вздовж ходу вимірювались ліворуч, то рівняння дирекційних кутів має вигляд

$$\delta\alpha_{поч} - \delta\alpha_{кінц} + \sum_{i=1}^{n'} v_i + W = 0,$$

де $\delta\alpha_{поч}$ та $\delta\alpha_{кінц}$ - поправки до приблизних значень дирекційних кутів початкової та кінцевої сторін ходу між вузловими точками мережі; n' - число виміряних кутів ходу; нев’язка

$$W = \alpha_{поч} - \alpha_{кінц} + \sum_{i=1}^{n'} x_i - 180^\circ \cdot k.$$

За умови, що дирекційні кути $\alpha_{поч}$ чи $\alpha_{кінц}$ відносяться до твердих сторін і відомі безпомилково, відповідні поправки до них не обчислюють і у рівнянні вони відсутні. Останнє стосується також рівнянь, які складені для замкнених чи розімкнених полігонів між твердими сторонами.

Умовні рівняння фігури, горизонту, та твердого кута є окремими випадками рівняння дирекційних кутів. Початкові умови усіх цих рівнянь виражаються лінійними формами. Тому їх називають лінійними кутовими рівняннями.

6. Базисні умовні рівняння. Якщо в мережі тріангуляції визначені довжини двох твердих сторін (базисів), то для неї можна сформулювати таку умову: довжина кінцевої сторони b_2, обчислена за довжиною початкової сторони b_1 та кутами мережі вздовж вибраного напряму ходової лінії, має дорівнювати її заданому значенню. Такій умові відповідає рівняння, яке називають базисним умовним рівнянням. Число базисних рівнянь для окремої мережі дорівнює числу базисів, зменшеному на одиницю. Напрям ходової лінії встановлюють від вибраного початкового базису вздовж суміжних сторін ланцюжка трикутників до кінцевого базису. Вздовж лінії почергово, розпочинаючи з першого трикутника, за теоремою синусів виражають довжини усіх суміжних сторін, завершуючи кінцевим базисом у останньому трикутнику.

Наприклад, у мережі, яка зображена на малюнку 1.4, ходова лінія має напрям b_1-OD-OC- b_2. Сторони трикутників у цьому напрямі виражаються співвідношеннями

$$S_{OD}=b_1\frac{\sin X_3}{\sin X_1};\quad S_{OC}=S_{OD}\frac{\sin X_6}{\sin X_4};\qquad b_2=S_{OC}\frac{\sin X_9}{\sin X_7}.$$

Об'єднавши всі співвідношення, отримаємо рівняння

$$b_2=b_1\frac{\sin X_3\cdot\sin X_6\cdot\sin X_9}{\sin X_1\cdot\sin X_4\cdot\sin X_7}.$$

Воно зв'язує вимірювані кути умовою

$$\varphi(X_1,\ldots,X_9)=\frac{b_1}{b_2}\cdot\frac{\sin X_3\cdot\sin X_6\cdot\sin X_9}{\sin X_1\cdot\sin X_4\cdot\sin X_7}-1=0$$

і називається базисним умовним рівнянням. Відповідне йому рівняння поправок має загальну форму $\sum_{i=1}^{9}a_i\cdot v_i+W=0$, де коефіцієнти $a_i=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)_\circ$.

Остаточно $$\sum_{i=3,6,9}ctgx_i\cdot v_i-\sum_{i=1,4,7}ctgx_i\cdot v_i+W=0.$$

Тут x_i – результати вимірів кутів; нев'язка $W=\frac{b_1}{b_2}\cdot\frac{\sin x_3\cdot\sin x_6\cdot\sin x_9}{\sin x_1\cdot\sin x_4\cdot\sin x_7}-1$.

Щоб одержати величини нев'язки та поправок v_i в одиницях виміру кутів,

$$W''=W\cdot\rho'',\qquad \text{де } \rho''=206\,265''.$$

Тепер, опираючись на отримані результати, можна сформулювати правило складання базисного умовного рівняння поправок для будь-якої мережі тріангуляції: 1) установлюємо напрям ходової лінії від початкового базису b_1 до кінцевого b_2; 2) почергово у кожному трикутнику помічаємо кути, які містяться навпроти передньої та задньої сторони вздовж вибраного напряму ходової лінії. У рівнянні будуть присутні поправки тільки до цих кутів; 3) пишемо рівняння поправок у загальній формі. Знак "+" пишемо перед коефіцієнтами $a_i=ctgx_i$ при відповідних поправках v_i до тих кутів, які є передніми вздовж напряму ходової лінії; знак "–" – так само для задніх кутів; 4) нев'язку рівняння обчислюємо за відповідною формулою, беручи до уваги, що у чисельнику мають міститись синуси кутів, які є передніми вздовж напряму ходової лінії, а у знаменнику – синуси задніх кутів.

7. Полюсні умовні рівняння. Такого виду умовні рівняння складають для мереж тріангуляції у вигляді замкненого ланцюжка трикутників навколо однієї вершини, яку називають полюсом (малюнок 1.3.а), а також у вигляді геодезичного чотирикутника (малюнок 1.3.б).

Полюсне рівняння виражає таку ж умову, як і базисне умовне рівняння. Особливість мереж, у яких складають полюсне рівняння, полягає у тому, що у них може не фігурувати жодного базису. Умова складається вздовж ходової лінії, яка бере початок від однієї із суміжних сторін замкненого ланцюжка трикутників і закінчується тією ж стороною. Така сторона опирається на точку полюсу. Так от, якщо вибрану сторону умовно вважати базисом, то зв'язок вздовж ходової лінії виразиться рівнянням такої ж форми, що й базисне рівняння. Одержане внаслідок рівняння поправок із зрозумілих причин називають полюсним. Незначну відмінність мають тільки нев'язки обох рівнянь: оскільки умовний базис ходової лінії є водночас і початковим і кінцевим, то у відповідній формулі він скорочується і на величину нев'язки не впливає. Наприклад, для мережі, яка показана на малюнку 1.3.а, вздовж ходової лінії *OA-OB-OC-OA* рівняння поправок має вигляд

$$\sum_{i=3,6,9} ctgx_i \cdot v_i - \sum_{i=1,4,7} ctgx_i \cdot v_i + W = 0,$$

де нев'язка $$W = \frac{\sin x_3 \cdot \sin x_6 \cdot \sin x_9}{\sin x_1 \cdot \sin x_4 \cdot \sin x_7} - 1.$$

Необхідно звернути увагу, що у рівнянні відсутні поправки до кутів, які вимірювались у полюсі.

У геодезичному чотирикутнику (малюнок 1.3.б) неіснуючу насправді точку *O* умовно можна вважати полюсом. Якщо тут установити напрям ходової лінії *OA-OB-OC-OD-OA*, то полюсне рівняння поправок набуде вигляду $$\sum_{i=2,4,6,8} ctgx_i \cdot v_i - \sum_{i=1,3,5,7} ctgx_i \cdot v_i + W = 0;$$

$$W = \frac{\sin x_2 \cdot \sin x_4 \cdot \sin x_6 \cdot \sin x_8}{\sin x_1 \cdot \sin x_3 \cdot \sin x_5 \cdot \sin x_7} - 1.$$

Загальне число полюсних умовних рівнянь мережі виражає рівність $r_{полюс}=l-2m+3$, де l – число усіх сторін, m – число усіх пунктів мережі.

8. Координатні умовні рівняння. Координатні умовні рівняння виникають у мережах тріангуляції та полігонометрії.

Координатні рівняння складають для мереж тріангуляції у формі ланцюжків трикутників, які опираються на ізольовані групи вихідних пунктів. Групу утворюють не менше двох вихідних пунктів мережі, які з'єднані між собою твердими сторонами. Якщо число груп дорівнює t, то число координатних рівнянь $r_{коорд}=2(t-1)$. Помітивши початкову та кінцеву групи пунктів, координатні умови (абсцис та ординат) можна розкрити наступним чином: координати X та Y одного з пунктів кінцевої групи, обчислені за відповідними координатами одного із пунктів початкової групи та кутами ланцюжка трикутників вздовж вибраного напряму ходової лінії, повинні дорівнювати їх заданим значенням. Ходову лінію встановлюють у напрямі від пункту початкової групи через вершини проміжних кутів вздовж суміжних сторін ланцюжка трикутників до пункту кінцевої групи. Як виняток, кінцева група може містити один пункт.

Зв'язок між вимірюваними кутами згідно умови координатних рівнянь виражається на основі теореми синусів вздовж виділеного ланцюжка трикутників. Усі суміжні сторони трикутників ланцюжка називають зв’язуючими. Відповідно зв’язуючими називають кути трикутників, які розміщені навпроти цих сторін. Якщо зв’язуючий кут у окремому трикутнику знаходиться навпроти сторони, яка є передньою у напрямі ходової лінії, то його називають переднім зв’язуючим кутом. Заднім зв’язуючим кутом того ж трикутника є кут, який розміщений навпроти задньої по ходу сторони. Кути, які розміщені навпроти бічних сторін ланцюжка трикутників, називають проміжними. Ходова лінія повинна проходити тільки через вершини проміжних кутів.

Базисне, полюсне та координатні умовні рівняння в мережах тріангуляції виражаються нелінійними формами, які утворюються на основі теореми синусів. Тому ці рівняння називають синусними умовними рівняннями.

1.2. Формування системи нормальних рівнянь корелат

Система умовних рівнянь поправок $\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times 1}{V}+\underset{r\times 1}{W}=0$ містить r однорідних лінійних рівнянь з n невідомими поправками v_i, які підпорядковані умовам (3.3.1). Завжди $r<n$. Тому така система за жодних умов не може мати прямого рішення. Однозначне приблизне рішення можна досягти, якщо невідомі v_i задовольняють умові принципу найменших квадратів $\Phi(v_1,\cdots,v_n)=[pv^2]=\underset{1\times n}{V^T}\cdot\underset{n\times n}{P}\cdot\underset{n\times 1}{V}=\min$ і відповідні частинні похідні $\dfrac{\partial\Phi}{\partial v_i}=0$,

зокрема
$$d[pv^2]=[2pv\,dv]=0 \tag{3.3.10}$$

Або
$$d(\underset{1\times n}{V^T}\cdot\underset{n\times n}{P}\cdot\underset{n\times 1}{V})=2\cdot\underset{1\times n}{V^T}\cdot\underset{n\times n}{P}\cdot d\underset{n\times 1}{V}=0, \tag{3.3.11}$$

де $d\underset{n\times 1}{V}$ – диференціал вектора $\underset{n\times 1}{V}$.

Необхідні вимоги екстремуму можна виразити методом Лагранжа.

Опираючись на умову принципу найменших квадратів, у відповідності з методом Лагранжа складемо функцію
$$2\Phi(v_1,\cdots,v_n)=\underset{1\times n}{V^T}\cdot\underset{n\times n}{P}\cdot\underset{n\times 1}{V}-2\cdot\underset{1\times r}{K^T}(\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times 1}{V}+\underset{r\times 1}{W})=\min, \tag{3.3.12}$$

де $\underset{1\times r}{K^T}=(k_1\quad k_2\quad\cdots\quad k_r)$ – вектор невідомих множників Лагранжа, які називають корелатами. Згідно вимоги (3.3.11) отримаємо
$$d\Phi=\underset{1\times n}{V^T}\cdot\underset{n\times n}{P}\cdot d\underset{n\times 1}{V}-\underset{1\times r}{K^T}\cdot\underset{r\times n}{A}\cdot d\underset{n\times 1}{V}=(\underset{1\times n}{V^T}\cdot\underset{n\times n}{P}-\underset{1\times r}{K^T}\cdot\underset{r\times n}{A})\cdot d\underset{n\times 1}{V}=0.$$

Звідси слідує: $\underset{1\times n}{V^T}\cdot\underset{n\times n}{P}-\underset{1\times r}{K^T}\cdot\underset{r\times n}{A}=0;\qquad \underset{1\times n}{V^T}\cdot\underset{n\times n}{P}=\underset{1\times r}{K^T}\cdot\underset{r\times n}{A}$.

Останнє співвідношення у транспонованій формі має вигляд: $\underset{n\times n}{P}\cdot\underset{n\times 1}{V}=\underset{n\times r}{A^T}\cdot\underset{r\times 1}{K}$,

звідки вектор невідомих поправок $\underset{n\times 1}{V}$ виразиться формулою $\underset{n\times 1}{V}=\underset{n\times n}{P^{-1}}\cdot\underset{n\times r}{A^T}\cdot\underset{r\times 1}{K}$.

Тут $\underset{n\times n}{P^{-1}}$ – діагональна матриця обернених ваг результатів вимірів. Якщо позначити $1/p_i=q$ та відповідно $\underset{n\times n}{P^{-1}}=\underset{n\times n}{q}$, то одержимо рівняння

$$\underset{n\times 1}{V}=\underset{n\times n}{q}\cdot\underset{n\times r}{A^T}\cdot\underset{r\times 1}{K}\cdot \tag{3.3.13}$$

У розгорнутому вигляді маємо систему рівнянь

$$\left.\begin{aligned} v_1&=q_1(a_{11}k_1+a_{21}k_2+\cdots+a_{r1}k_r)\\ v_2&=q_2(a_{12}k_1+a_{22}k_2+\cdots+a_{r2}k_r)\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ v_n&=q_n(a_{1n}k_1+a_{2n}k_2+\cdots+a_{rn}k_r)\end{aligned}\right\}. \tag{3.3.14}$$

Для окремого рівняння системи (3.3.14), зокрема, можна написати:

$$v_i=q_i(a_{1i}k_1+a_{2i}k_2+\cdots+a_{ri}k_r). \tag{3.3.15}$$

Рівняння (3.3.13) – (3.3.15) називають корелатними рівняннями поправок. Система корелатних рівнянь поправок виражає лінійне перетворення сукупності величин k_j $(j=\overrightarrow{1,r})$ у сукупність величин v_i $(i=\overrightarrow{1,n})$. Для здійснення перетворення передусім належить визначити вектор корелат $\underset{r\times 1}{K}$.

Помістимо вектор поправок (3.3.13) до умовного рівняння (3.3.9):

$$\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times n}{q}\cdot\underset{n\times r}{A^T}\cdot\underset{r\times 1}{K}+\underset{r\times 1}{W}=0\cdot \tag{3.3.16}$$

Рівняння (3.3.16) називають нормальним рівнянням корелат. У розгорнутому вигляді систему нормальних рівнянь корелат можна розкрити таким чином:

$$\left.\begin{aligned} [qa_1a_1]k_1+[qa_1a_2]k_2+\cdots+[qa_1a_r]k_r+W_1&=0\\ [qa_2a_1]k_1+[qa_2a_2]k_2+\cdots+[qa_2a_r]k_r+W_2&=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ [qa_ra_1]k_1+[qa_ra_2]k_2+\cdots+[qa_ra_r]k_r+W_r&=0\end{aligned}\right\}. \tag{3.3.17}$$

Система містить r лінійних рівнянь з r невідомими корелатами k_j. Добуток $\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times n}{q}\cdot\underset{n\times r}{A^T}$ дає квадратну симетричну матрицю $\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times n}{q}\cdot\underset{n\times r}{A^T}=\underset{r\times r}{N}$ порядку r з коефіцієнтами $N_{js}=[qa_ja_s]=q_1a_{j1}a_{s1}+q_2a_{j2}a_{s2}+\cdots+q_na_{jn}a_{sn}$. Вільними членами нормальних рівнянь корелат є нев'язки умовних рівнянь W_j, які вже виражені на попередньому етапі рішення задачі зрівноважування. Тож у підсумку одержимо нормальне рівняння корелат

$$\underset{r\times r}{N}\cdot\underset{r\times 1}{K}+\underset{r\times 1}{W}=0. \qquad (3.3.18)$$

Або

$$\left.\begin{array}{l} N_{11}k_1+N_{12}k_2+\cdots+N_{1r}k_r+W_1=0 \\ N_{21}k_1+N_{22}k_2+\cdots+N_{2r}k_r+W_2=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ N_{r1}k_1+N_{r2}k_2+\cdots+N_{rr}k_r+W_r=0 \end{array}\right\}. \qquad (3.3.19)$$

Важливо звернути увагу на те, що коефіцієнтам системи таких рівнянь властива ознака симетричності $N_{js}=N_{sj}$.

Якщо зрівноважують рівноточні виміри, то p_i=q_i=1. Тоді: $\underset{n\times n}{P}=\underset{n\times n}{q}=\underset{n\times n}{E}$ і

$$\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times r}{A^T}\cdot\underset{r\times 1}{K}+\underset{r\times 1}{W}=0 \qquad (3.3.20)$$

або

$$\left.\begin{array}{l} [a_1a_1]k_1+[a_1a_2]k_2+\cdots+[a_1a_r]k_r+W_1=0 \\ [a_2a_1]k_1+[a_2a_2]k_2+\cdots+[a_2a_r]k_r+W_2=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ [a_ra_1]k_1+[a_ra_2]k_2+\cdots+[a_ra_r]k_r+W_r=0 \end{array}\right\}. \qquad (3.3.21)$$

У кінцевому вигляді система нормальних рівнянь зберігає позначення (3.3.18) або (3.3.19).

Контроль обчислення коефіцієнтів системи нормальних рівнянь корелат можна здійснити шляхом порівняння суми їх обчислених значень з контрольними числами (такий метод перевірки називають методом сум). Для цього завчасно обчислюють суми коефіцієнтів корелатних рівнянь поправок (3.3.15): $a_{1i}+a_{2i}+\cdots+a_{ri}=s_i$.

Склавши розширену матрицю $\underset{(r+1)\times n}{A}$, з добутку $\underset{(r+1)\times n}{A}\cdot\underset{n\times n}{q}\cdot\underset{n\times(r+1)}{A^T}$ отримаємо:

$$\left.\begin{array}{r} [qa_1a_1]+[qa_1a_2]+\cdots+[qa_1a_r]=[qa_1s] \\ [qa_2a_1]+[qa_2a_2]+\cdots+[qa_2a_r]=[qa_2s] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ [qa_ra_1]+[qa_ra_2]+\cdots+[qa_ra_r]=[qa_rs] \\ [qa_1s]+[qa_2s]+\cdots+[qa_rs]=[qss] \end{array}\right\}$$

або

$$\left.\begin{array}{r} N_{11}+N_{12}+\cdots+N_{1r}=\Sigma_1 \\ N_{21}+N_{22}+\cdots+N_{2r}=\Sigma_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ N_{r1}+N_{r2}+\cdots+N_{rr}=\Sigma_r \\ \Sigma_1+\Sigma_2+\cdots+\Sigma_r=\Sigma_{r+1} \end{array}\right\}. \qquad (3.3.22)$$

Величини $[qa_1s]=\Sigma_1$, $[qa_2s]=\Sigma_2$, … , $[qa_rs]=\Sigma_r$ - це контрольні числа, яким повинні дорівнювати суми коефіцієнтів нормальних рівнянь корелат. За величиною $[qss]=\Sigma_{r+1}$ такою ж дією можна перевірити усі попередні контрольні числа.

За умови обчислення коефіцієнтів нормальних рівнянь корелат вручну доцільно скористатись типовою таблицею, яку називають схемою обчислення коефіцієнтів нормальних рівнянь. Загальну форму схеми представлено у додатку 1.

1.3. Розв'язування системи нормальних рівнянь корелат

Матрична форма.

Розв'язування системи нормальних рівнянь корелат (3.3.18) полягає у визначенні вектора $\underset{r\times1}{K}$, елементами якого є корені рівнянь k_j ($j=\overrightarrow{1,r}$). Розв'язок матричного рівняння (3.3.18) має вигляд

$$\underset{r\times1}{K}=-\underset{r\times r}{Q}\cdot\underset{r\times1}{W}, \qquad (3.3.23)$$

де $\underset{r\times r}{Q}=\underset{r\times r}{N^{-1}}$– обернена матриця до матриці коефіцієнтів $\underset{r\times r}{N}=\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times n}{q}\cdot\underset{n\times r}{A^T}$. Матриця $\underset{r\times r}{Q}$ має такі ж властивості, як і матриця коефіцієнтів $\underset{r\times r}{N}$. Серед них визначальною є властивість симетричності не квадратичних коефіцієнтів відносно головної діагоналі: $\underset{r\times r}{Q}=\underset{r\times r}{Q^T}$. Завдання побудови оберненої матриці полягає у розв'язуванні рівняння:

$$\underset{r\times r}{N}\cdot\underset{r\times r}{Q}=\underset{r\times r}{E} \qquad (3.3.24)$$

відносно $\underset{r\times r}{Q}$, де $\underset{r\times r}{E}$ - одинична матриця. Рівняння (3.3.24) застосовують для перевірки побудови оберненої матриці. Рівняння (3.3.23) виражає розв'язок системи нормальних рівнянь корелат у матричній формі. Перевірку рішення можна здійснити шляхом підстановки отриманих коренів нормальних рівнянь корелат k_j у рівняння (3.3.18): умови цих рівнянь повинні задовольнятись.

Спосіб послідовного виключення невідомих Гаусса.

Згідно з алгоритмом Гаусса, на основі вихідної системи рівнянь (3.3.19) передусім потрібно сформувати систему еквівалентних рівнянь. Загалом вона матиме вигляд

$$\left.\begin{aligned} N_{11}k_1+N_{12}k_2+\cdots+N_{1r}k_r+W_1=0\\ N_{22}^{(1)}k_2+\cdots+N_{2r}^{(1)}k_r+W_2^{(1)}=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ N_{rr}^{(r-1)}k_r+W_r^{(r-1)}=0 \end{aligned}\right\}. \qquad (3.3.25)$$

Коефіцієнти рівнянь еквівалентної системи можна розкрити за правилом, яке виражає рівність: $$N_{ij}^{(s)} = N_{ij}^{(s-1)} - \frac{N_{si}^{(s-1)} N_{sj}^{(s-1)}}{N_{ss}^{(s-1)}} .$$

Вільні члени еквівалентних рівнянь з урахуванням позначень у корелатному способі набувають вигляду $$W_i^{(s)} = W_i^{(s-1)} - \frac{N_{si}^{(s-1)} W_s^{(s-1)}}{N_{ss}^{(s-1)}} .$$

Окреме рівняння еквівалентної системи:

$$N_{ii}^{(i-1)} k_i + N_{i(i+1)}^{(i-1)} k_{i+1} + \cdots + N_{ir}^{(i-1)} k_r + W_i^{(i-1)} = 0 . \qquad (3.3.26)$$

Невідомі корелати k_i тепер можна виразити елімінаційними рівняннями

$$k_i = -\frac{N_{i(i+1)}^{(i-1)}}{N_{ii}^{(i-1)}} k_{i+1} - \frac{N_{i(i+2)}^{(i-1)}}{N_{ii}^{(i-1)}} k_{i+2} - \ldots - \frac{N_{ir}^{(i-1)}}{N_{ii}^{(i-1)}} k_r - \frac{W_i^{(i-1)}}{N_{ii}^{(i-1)}} \qquad (3.3.27)$$

або з врахуванням позначень коефіцієнтів та вільних членів елімінаційних рівнянь $$k_i = E_{i(i+1)} k_{i+1} + E_{i(i+2)} k_{i+2} + \ldots + E_{ir} k_r + E_{iW} . \qquad (3.3.28)$$

Для останнього невідомого $$k_r = -\frac{W_r^{(r-1)}}{N_{rr}^{(r-1)}} . \qquad (3.3.29)$$

Коефіцієнти та вільні члени елімінаційних рівнянь розраховують за коефіцієнтами та вільними членами рівнянь еквівалентної системи. Отже, для розв'язування системи нормальних рівнянь корелат потрібно скласти еквівалентні та елімінаційні рівняння, число яких дорівнює числу надлишкових виміряних величин *r*.

Упродовж розв'язування вручну висока ймовірність появи помилок результатів проміжних розрахунків та кінцевих значень корелат. Щоб відвернути можливі помилки, обов'язково потрібно виконувати перевірку усіх отриманих проміжних та кінцевих результатів розв'язку. Упродовж розв'язування системи нормальних рівнянь корелат застосовують такі способи контролю.

1. Контроль за допоміжними невідомими. Допоміжними невідомими у корелатному способі є величини: $$u_i = k_i - 1 , \qquad (3.3.30)$$

де $i = \overrightarrow{1,r}$. Оскільки $k_i = u_i + 1$, то нормальне рівняння набуває вигляду

$$N_{j1}(u_1 + 1) + \cdots + N_{jr}(u_r + 1) + W_j = N_{j1} u_1 + \cdots + N_{jr} u_r + \Sigma'_j = 0 ,$$

де контрольне число $\Sigma'_j = \Sigma_j + W_j$ - це сума коефіцієнтів та вільного члена рівняння. Загалом отримаємо систему рівнянь з вільними членами Σ'_j :

$$\left.\begin{array}{l} N_{11} u_1 + N_{12} u_2 + \cdots + N_{1r} u_r + \Sigma'_1 = 0 \\ N_{21} u_1 + N_{22} u_2 + \cdots + N_{2r} u_r + \Sigma'_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ N_{r1} u_1 + N_{r2} u_2 + \cdots + N_{rr} u_r + \Sigma'_r = 0 \end{array}\right\} . \qquad (3.3.31)$$

Розв'язок рівнянь утвореної системи дає допоміжні контрольні невідомі, котрі різняться з основними невідомими k_j на 1.

Цей контроль забезпечує перевірку результатів обчислень коефіцієнтів та вільних членів еквівалентних і елімінаційних рівнянь шляхом порівняння їх сум з відповідними перетвореними значеннями контрольних чисел Σ'_j. Практично його реалізують виконанням наступних двох способів контролю.

2. Контроль коефіцієнтів та вільних членів рівнянь еквівалентної системи. Підставивши у рівняння еквівалентної системи (3.3.26) допоміжні невідомі (3.3.30), одержимо: $N_{ii}^{(i-1)}u_i + N_{i(i+1)}^{(i-1)}u_{i+1} + \cdots + N_{ir}^{(i-1)}u_r + \Sigma_i'^{(i-1)} = 0$.

Тут $\Sigma_i'^{(i-1)}$ - результат перетворення контрольного числа Σ'_i за правилом, яке виражає формула (3.2.24). Різниця утвореного і початкового еквівалентного рівнянь дає рівність

$$N_{ii}^{(i-1)} + N_{i(i+1)}^{(i-1)} + \cdots + N_{ir}^{(i-1)} + W_i^{(i-1)} = \Sigma_i'^{(i-1)} . \qquad (3.3.32)$$

Формулою (3.3.32) можна користуватись для контролю обчислення коефіцієнтів та вільного члену окремого рівняння еквівалентної системи.

3. Контроль коефіцієнтів та вільних членів елімінаційних рівнянь. Загалом коефіцієнти та вільний член окремого елімінаційного рівняння (3.3.27) отримують діленням коефіцієнтів та вільного члена відповідного еквівалентного рівняння на його діагональний коефіцієнт. Для системи (3.3.31) з невідомими (3.3.30), наслідуючи логіку вираження контролю (3.3.32), одержимо рівність такого вигляду:

$$-1 - \frac{N_{i(i+1)}^{(i-1)}}{N_{ii}^{(i-1)}} - \frac{N_{i(i+2)}^{(i-1)}}{N_{ii}^{(i-1)}} - \ldots - \frac{N_{ir}^{(i-1)}}{N_{ii}^{(i-1)}} - \frac{W_i^{(i-1)}}{N_{ii}^{(i-1)}} = -\frac{\Sigma_i'^{(i-1)}}{N_{ii}^{(i-1)}} \qquad (3.3.33)$$

або
$$-1 + E_{i(i+1)} + E_{i(i+2)} + \ldots + E_{ir} + E_{iW} = E_{i\Sigma'} . \qquad (3.3.34)$$

За допомогою останньої формули здійснюють контроль перед початком кожного чергового перетворення системи нормальних рівнянь.

4. Контроль за $[pv^2]$. Величина $[pv^2]$ є визначальною при оцінці точності за результатами зрівноважування і, разом з тим, відіграє контрольну функцію в процесі рішення задачі зрівноважування загалом і, у тому числі, при розв'язуванні нормальних рівнянь. ЇЇ можна виразити на різних етапах рішення задачі. Порівняння отриманих чисельних значень величини забезпечує контроль відповідних результатів проміжних обчислень. Виділимо основні алгоритми обчислення $[pv^2]$:

1). На завершальному етапі зрівноважування після обчислення поправок v_i значення $[pv^2]$ виражається з добутку
$$[pv^2] = \underset{1\times n}{V^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times 1}{V} \qquad (3.3.35)$$

або
$$[pv^2] = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \cdots + p_n v_n^2 . \qquad (3.3.36)$$

Інші алгоритми обчислення $[pv^2]$ пов'язані з розв'язуванням системи нормальних рівнянь корелат.

2). Загальновідомо, що: $\underset{1\times n}{V^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times 1}{V} = -\underset{1\times r}{W^T} \cdot \underset{r\times 1}{K}$. (3.3.37)

Рівностями (3.3.35) та (3.3.37) можна скористатись для контролю обчислення поправок до результатів вимірів на завершальному етапі зрівноважування шляхом співставлення величини $[pv^2]$ з її значенням, яке обчислене за корелатами після розв'язування системи нормальних рівнянь.

3). При виконанні зрівноважування вручну поправку v_i до окремого виміру виражає корелатне рівняння (3.3.15): $v_i = q_i(a_{1i}k_1 + a_{2i}k_2 + \cdots + a_{ri}k_r)$.

З нього слідує: $[pv^2] = -W_1k_1 - W_2k_2 - \cdots - W_rk_r$ або $-[pv^2] = \sum_{i=1}^{r} W_ik_i$. (3.3.38)

Приєднаємо рівність (3.3.38) до основної системи нормальних рівнянь корелат (3.3.19). В підсумку одержимо розширену систему рівнянь вигляду

$$\left.\begin{aligned} N_{11}k_1 + N_{12}k_2 + \cdots + N_{1r}k_r + \quad W_1 &= 0 \\ \ldots\ldots \\ N_{r1}k_1 + N_{r2}k_2 + \cdots + N_{rr}k_r + \quad W_r &= 0 \\ W_1k_1 + W_2k_2 + \cdots + W_rk_r + N_{(r+1)(r+1)} &= -[pv^2] \end{aligned}\right\}, \quad (3.3.39)$$

де вільний член $N_{(r+1)(r+1)} = 0$. Система (3.3.39) містить r +1 рівнянь з r +1 невідомими - r невідомих корелат і невідома величина $[pv^2]$. Оскільки утворена система зберігає властивості основної системи нормальних рівнянь (3.3.19), то виразивши всі невідомі згідно алгоритму Гаусса, для останнього невідомого отримаємо:

$$-[pv^2] = N^{(r)}_{(r+1)(r+1)} = N_{(r+1)(r+1)} + E_{1W}W_1 + E_{2W}W_2^{(1)} + \cdots + E_{rW}W_r^{(r-1)} \quad (3.3.40)$$

або
$$-[pv^2] = \sum_{i=1}^{r} E_{iW}W_i^{(i-1)}. \quad (3.3.41)$$

Рівностями (3.3.38) та (3.3.41) можна скористатись для контролю розв'язування системи нормальних рівнянь корелат. Разом із співвідношенням (3.3.36) за ними можна перевірити обчислення поправок v_i та величини $[pv^2]$.

5. Контроль невідомих. Розв'язування системи нормальних рівнянь забезпечує відповідні значення невідомих корелат k_j ($j = \overrightarrow{1,r}$). Їх контроль можна реалізувати двома способами:

а) за системою нормальних рівнянь шляхом підстановки невідомих корелат у рівняння (3.3.18) або (3.3.19).

б) за сумою рівнянь (цей спосіб доцільно застосовувати при зрівноважуванні вручну). Якщо додати всі нормальні рівняння та згрупувати результати відносно невідомих k_j, то одержимо рівняння наступного вигляду:

$$\Sigma_1 \cdot k_1 + \Sigma_2 \cdot k_2 + \cdots + \Sigma_r \cdot k_r + [W] = 0, \quad (3.3.42)$$

де контрольні числа Σ_j виражають суми коефіцієнтів нормальних рівнянь за тим же порядковим числом, який має корелата. Рівняння (3.3.42) забезпечує одночасний контроль усіх невідомих системи нормальних рівнянь корелат.

Розв'язування системи нормальних рівнянь корелат способом послідовного виключення невідомих Гаусса разом із розглянутими вище способами контролю розрахунків реалізуються у схемі Гаусса-Дулітля. Використання схеми Гаусса-Дулітля у корелатному способі, порівняно з параметричним, не має жодних принципових розбіжностей. Тут потрібно звернути увагу лише на відмінності у позначеннях і особливість обчислення та контролю за величиною $[pv^2]$. Зокрема, значення $[pv^2]$ у корелатному способі вираховують за формулами (3.3.38) та (3.3.41). Якщо, наприклад, їх помістити у схемі двома окремими рядками, то вони замінять рядки 12 – 16 повної схеми Гаусса-Дулітля, котрі призначені для розрахунку величини $[pv^2]$ у параметричному способі. Оскільки формула (3.3.38) передбачає розрахунок величини $[pv^2]$ за корелатами k_j, то зазначені рядки потрібно розмістити нижче рядків обчислення корелат. Тим самим за величиною $[pv^2]$ можна здійснити контроль невідомих k_j.

1.4. Обчислення зрівноважених значень результатів вимірів

Зрівноважені значення результатів вимірів $\tilde{x}_i$ виражаються рівностями $\tilde{x}_i = x_i + v_i \quad (i = \overrightarrow{1,n})$ або у загальному вигляді: $\underset{n\times1}{\tilde{x}} = \underset{n\times1}{x} + \underset{n\times1}{V}$. Тут $\tilde{x}_i$ - зрівноважені значення результатів вимірів; $\underset{n\times1}{x}$ - результати вимірів величин; $\underset{n\times1}{V}$ - поправки до результатів вимірів. Невідомі поправки v_i виражаються корелатними рівняннями поправок (3.3.13) – (3.3.15). Їх чисельні значення визначають корелати k_j. Контроль обчислення поправок v_i здійснюється способом за $[pv^2]$: величина $[pv^2]$, розрахована безпосередньо за значеннями поправок v_i із співвідношення (3.3.35), повинна дорівнювати тій же величині, розрахованій за формулою (3.3.37). За умови проведення розрахунків вручну контроль виконується зіставленням значень величини $[pv^2]$, обчислених за формулами (3.3.36), (3.3.38) та (3.3.41). Далі за поправками v_i виражаємо зрівноважені значення результатів вимірів $\tilde{x}_i$.

Розкриттям чисельних значень $\tilde{x}_i \quad (i = \overrightarrow{1,n})$ завершується етап зрівноважувальних обчислень. Для остаточного контролю результатів зрівноважування потрібно перевірити істинність умов, які виражають рівняння (3.3.3): умовні рівняння, складені із зрівноваженими результатами вимірів, дорівнюють нулю. Логічним наслідком зазначеної вимоги є ще наступна: нев'язки умовних рівнянь, обчислені за зрівноваженими результатами вимірів, повинні дорівнювати нулю.

1.5. Оцінка точності за результатами зрівноважування

Під оцінкою точності за результатами зрівноважування корелатним способом розуміють розрахунок середніх квадратичних похибок зрівноважених результатів вимірів та їх функцій. У розрізі вирішення завдання оцінки точності однією з переваг корелатного способу є, поміж іншого, можливість оцінки допустимості нев'язок умовних рівнянь з метою виявлення грубих та систематичних похибок вимірів.

Оцінка точності потрібної величини - незмінна задача, рішення якої полягає у розрахунку середньої квадратичної похибки величини *M* за формулами (3.2.46) або (3.2.47). Характеристика точності величини таким критерієм зводиться до вираження середньої квадратичної похибки одиниці ваги μ (або середньої квадратичної похибки m рівноточних вимірів) і ваги оцінюваної величини *P*.

Оцінюючи точність величини за результатами зрівноважування корелатним способом, зручно користуватись формулою

$$\mu = \sqrt{\frac{[P_W W^2]}{r}}. \qquad (3.3.43)$$

Тут W_j – нев'язки умовних рівнянь; P_{W_j} – ваги нев'язок; $j = \overrightarrow{1, r}$; r – число надлишкових виміряних величин. Де обернені ваги нев'язок:

$$\frac{1}{P_{W_j}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right)_{\circ}^{2} \frac{1}{p_i} = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}^{2} \frac{1}{p_i}. \qquad (3.3.44)$$

Вагу P оцінюваної величини F встановлюють або емпірично з аналізу умов проведення її прямих вимірів, або посереднім шляхом, виражаючи її функцією $F = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ результатів x_i непрямих вимірів інших величин. При рішенні задачі зрівноважування корелатним способом оцінюванню підлягають зрівноважені результати вимірів або їх функції, але не безпосередні результати вимірів. Тому для вираження ваги оцінюваної величини F передусім потрібно встановити її зв'язок з результатами безпосередніх вимірів. Хід дій з обчислення ваги оцінюваної величини залежить від вигляду функції, яка виражає її через виміряні величини.

Обчислення граничних значень нев'язок умовних рівнянь.

Рішення задачі оцінки точності з поставленими вище умовами, як і взагалі рішення завдання зрівноважування, формально може бути досягнуте. Однак результат рішення буде певною мірою суб'єктивним, якщо зрівноважуванню підлягають результати вимірів, котрі містять грубі та систематичні похибки. Результати вимірів з грубими похибками необхідно забракувати, а систематичні похибки мають бути максимально враховані. Такі виміри можна виявити шляхом обчислення граничних значень нев'язок умовних рівнянь. Загалом оцінка допустимості нев'язок повинна виконуватись на стадії формування систем умовних та нормальних рівнянь.

Згідно закону великих чисел, гранично при числі вимірів $n \to \infty$ середня квадратична похибка m_i, як критерій точності вимірів, прямує до істинної похибки θ_i $(i = \overrightarrow{1,n})$. Якщо похибки вимірів величин містять лише випадкову складову частину і підпорядковані нормальному законові розподілу, то рішення завдання зрівноважування за умовою принципу найменших квадратів передбачає, що істинні похибки вимірів θ_i повинні бути ліквідовані поправками v_i до результатів вимірів: $v_i = -\theta_i$. Якщо значеннями істинних похибок сформувати матрицю-стовпець $\underset{n\times 1}{\theta}$, то $\underset{n\times 1}{V} = -\underset{n\times 1}{\theta}$. В такому разі умовні рівняння поправок (3.3.9) набувають вигляду $\underset{r\times n}{A} \cdot (-\underset{n\times 1}{\theta}) + \underset{r\times 1}{W} = 0$, звідки

$$\underset{r\times 1}{W} = \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{\theta}. \tag{3.3.45}$$

Точність виміру окремої величини x_i виражає середня квадратична похибка $m_i = \mu\sqrt{\dfrac{1}{p_i}}$, де μ - середня квадратична похибка одиниці ваги; p_i - вага виміру. Точність вимірів системи n величин характеризує кореляційна матриця

$$\underset{n\times n}{K_\theta} = \mu^2 \cdot \underset{n\times n}{q}. \tag{3.3.46}$$

Тут μ^2 – дисперсія одиниці ваги; $\underset{n\times n}{q} = \underset{n\times n}{P^{-1}}$ – матриця обернених ваг вимірів величин. Вздовж головної діагоналі матриці $\underset{n\times n}{K_\theta}$ містяться дисперсії m_i^2 вимірів окремих величин системи.

З іншого боку, відповідно до рівності (3.3.2), нев'язка окремого умовного рівняння є функцією результатів вимірів x_i: $W_j = \varphi_j(x_1, \ldots, x_n)$. Дисперсію m_j^2 такої функції загалом можна виразити з формули:

$$m_j^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}^2 m_i^2 + 2\sum_{i<s} a_{ji} a_{js} K_{is}; \tag{3.3.47}$$

або при незалежних вимірах:

$$m_j^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}^2 m_i^2. \tag{3.3.48}$$

Тут $a_{ji} = \left(\dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right)_0$; $K_{is} = r_{is} m_i m_s$; K_{is} та r_{is} – відповідно кореляційний момент і коефіцієнт кореляції, які виражають залежність пари вимірів у комбінації i та s; $s = \overrightarrow{2,n}$. Узагальнюючи отриманий результат на систему r функцій (3.3.2), можна одержати кореляційну матрицю нев'язок:

$$\underset{r\times r}{K_W} = \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{K_\theta} \cdot \underset{n\times r}{A^T}, \tag{3.3.49}$$

де матриця $\underset{r\times n}{A}$ утворена частинними похідними $a_{ji_\circ}$; $\underset{n\times n}{K_\theta}$ – кореляційна матриця системи n виміряних величин x_i. Враховуючи (3.3.46),

$$\underset{r\times r}{K_W} = \mu^2 \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T}. \tag{3.3.50}$$

Одержана формула виражає точність функції (3.3.45). Оскільки добуток $\underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} = \underset{r\times r}{N}$, то маємо рівняння: $\underset{r\times r}{K_W} = \mu^2 \cdot \underset{n\times n}{N}$. (3.3.51)

Отже, кореляційна матриця нев'язок дорівнює добутку дисперсії одиниці ваги та матриці коефіцієнтів нормальних рівнянь. При рівноточних вимірах величин x_i їх ваги p_i=1, тому в такому випадку величиною μ^2 потрібно приймати дисперсію рівноточних результатів вимірів m^2. З властивостей матриці $\underset{r\times r}{K_W}$ слідує, що її діагональні елементи: $m_{W_j}^2 = \mu^2 N_{jj}$ (3.3.52)

- це дисперсії нев'язок умовних рівнянь, які є мірами їх точності.

Оскільки виміри підпорядковані нормальному законові розподілу, то можна побудувати довірчі інтервали для математичних сподівань нев'язок

$$M_{W_j} : W_j - t \cdot m_{W_j} \le M_{W_j} \le W_j + t \cdot m_{W_j}. \tag{3.3.53}$$

За умови відсутності у вимірах систематичних похибок величини $M_{W_j} = 0$.

Тому з формули (3.3.53) слідує: $|W_j| \le t \cdot m_{W_j}$; (3.3.54)

$$(W_j)_{гран} = \pm t \cdot m_{W_j}. \tag{3.3.55}$$

Коефіцієнт t, згідно розподілу Стьюдента, встановлюється рівним 2; 2,5 або 3, що відповідає довірчим ймовірностям 0,95; 0,987; 0,997. Величини m_{W_j} виражаються рівностями (3.3.52), а середню квадратичну похибку одиниці ваги μ (чи m для рівноточних вимірів) визначають з попередньої обробки вимірів або спеціальними дослідженнями.

У практиці зрівноважування планових мереж при визначенні допустимості нев'язок деяких видів рівнянь часто використовують умови, які є наслідком розкритого тут загального підходу. Зокрема:

1) для полюсних рівнянь у геодезичних чотирикутниках і центральних системах: $W_j \le \pm 2.5\mu\sqrt{\sum \Delta^2}$; (3.3.56)

2) для базисних рівнянь: $W_j \le \pm 2.5\sqrt{\mu^2 \sum \Delta^2 + 2m_S^2}$; (3.3.57)

3) для рівнянь дирекційних кутів: $W_j \le \pm 2.5\sqrt{\mu^2 n + 2m_\alpha^2}$; (3.3.58)

4) для рівнянь фігур і горизонту: $W_j \le \pm 2.5\mu\sqrt{n}$. (3.3.59)

Тут μ– нормативна середня квадратична похибка виміру кута встановленого класу точності; n – число кутів; m_S і m_α – середні квадратичні похибки довжини базису S і дирекційного кута α вихідної сторони мережі; $\sum\Delta^2$ – сума квадратів різниць Δ_i логарифмів синусів кутів вздовж ходової лінії, які утворюють базисне чи полюсне рівняння, при зміні цих кутів на 1″.

$\Delta_i = \pm\left(\frac{\partial \lg\sin X_i}{\partial X_i}\right)_{X_i=x_i} = \lg\sin(x_i + 1'') - \lg\sin x_i = \pm\frac{M}{\rho} ctgx_i$ .M=0,4343 $\rho'' = 206\,265''$.

Різниці Δ_i еквівалентні коефіцієнтам $a_i = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)_\circ = ctgx_i$ цих умовних рівнянь.

Оцінка точності зрівноважених результатів вимірів.

Зрівноважені значення $\tilde{x}_i$ виражаються функціями результатів вимірів x_i вигляду $\tilde{x}_i = F_i(x_i) = x_i + v_i$ ($i = \overline{1,n}$) або $\underset{n\times1}{\tilde{x}} = \underset{n\times1}{x} + \underset{n\times1}{V}$. Сукупність поправок

$$\underset{n\times1}{V} = \underset{n\times1}{\tilde{x}} - \underset{n\times1}{x}, \tag{3.3.60}$$

за умовою завдання зрівноважування, повинна враховувати істинні похибки вимірів і ліквідовувати нев'язки. Якщо в рівняння поправок (3.3.9) помістити рівняння (3.3.60), у підсумку одержимо:

$$\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times1}{x} = \underset{r\times1}{W}, \tag{3.3.61}$$

оскільки за умовою (3.3.3) $\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times1}{\tilde{x}} = 0$. В ході рішення завдання поправки $\underset{n\times1}{V}$ виражаються рівняннями (3.3.13) через корелати $\underset{r\times1}{K}$: $\underset{n\times1}{V} = \underset{n\times n}{q}\cdot\underset{n\times r}{A^T}\cdot\underset{r\times1}{K}$; масив $\underset{r\times1}{K}$ формується розв'язком (3.3.23) системи нормальних рівнянь (3.3.18). Для сукупності поправок $\underset{n\times1}{V}$ отримаємо:

$$\underset{n\times1}{V} = \underset{n\times n}{q}\cdot\underset{n\times r}{A^T}\cdot\underset{r\times1}{K} = \underset{n\times n}{q}\cdot\underset{n\times r}{A^T}\cdot\left(-\underset{r\times r}{Q}\cdot\underset{r\times1}{W}\right) = -\underset{n\times n}{q}\cdot\underset{n\times r}{A^T}\cdot\underset{r\times r}{Q}\cdot\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times1}{x}. \tag{3.3.62}$$

Звідки:

$$\underset{n\times1}{\tilde{x}} = \underset{n\times1}{x} - \underset{n\times n}{q}\cdot\underset{n\times r}{A^T}\cdot\underset{r\times r}{Q}\cdot\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times1}{x}. \tag{3.3.63}$$

Оцінюючи точність масиву корелат $\underset{r\times1}{K} = -\underset{r\times r}{Q}\cdot\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times1}{x}$, отримаємо:

$$\underset{r\times r}{M_K^2} = \underset{r\times r}{Q}\cdot\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times n}{M^2}\cdot\underset{n\times r}{A^T}\cdot\underset{r\times r}{Q}; \tag{3.3.64}$$

$$\underset{r\times r}{Q_K} = \underset{r\times r}{Q}\cdot\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times n}{q}\cdot\underset{n\times r}{A^T}\cdot\underset{r\times r}{Q} = \underset{r\times r}{Q}\cdot\underset{r\times r}{N}\cdot\underset{r\times r}{Q} = \underset{r\times r}{Q}\cdot\underset{r\times r}{E} = \underset{r\times r}{Q}, \tag{3.3.65}$$

де $\underset{n\times n}{M^2}$ – діагональна матриця квадратів середніх квадратичних похибок результатів вимірів; $\underset{r\times r}{M_K^2}$ і $\underset{r\times r}{Q_K}$ - кореляційна і вагова матриці. Приймаючи до уваги (3.3.64) і (3.3.65), для масиву поправок $\underset{n\times1}{V} = \underset{n\times n}{q}\cdot\underset{n\times r}{A^T}\cdot\underset{r\times1}{K}$ одержимо формули оцінки точності

$$\underset{n\times n}{M_V^2} = \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{M_K^2} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q}\ , \tag{3.3.66}$$

$$\underset{n\times n}{Q_V} = \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q}\ . \tag{3.3.67}$$

Насамкінець, виходячи з формули (3.3.63), виразимо кореляційну $\underset{n\times n}{M_{\tilde{x}}^2}$ та вагову $\underset{n\times n}{Q_{\tilde{x}}}$ матриці зрівноважених результатів вимірів $\tilde{x}_i$:

$$\underset{n\times n}{M_{\tilde{x}}^2} = \underset{n\times n}{M^2} - \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{M^2} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q}\ ; \tag{3.3.68}$$

$$\underset{n\times n}{Q_{\tilde{x}}} = \underset{n\times n}{q} - \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q}\ . \tag{3.3.69}$$

Для матриці результатів вимірів $\underset{n\times n}{M^2}$: $$\underset{n\times n}{M^2} = \mu^2 \underset{n\times n}{q}\ , \tag{3.3.70}$$

де μ - середня квадратична похибка одиниці ваги. Підстановка (3.3.70) до (3.3.68) показує наступне: $$\underset{n\times n}{M_{\tilde{x}}^2} = \mu^2 \underset{n\times n}{Q_{\tilde{x}}}\ . \tag{3.3.71}$$

За умови зрівноважування рівноточних результатів вимірів, обтяжених помилкою m, приймаємо $\underset{n\times n}{q} = \underset{n\times n}{E}$. Тоді формули оцінки точності кінцевих значень $\tilde{x}_i$ набувають вигляду: $$\underset{n\times n}{M_{\tilde{x}}^2} = m^2\left(\underset{n\times n}{E} - \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A}\right); \tag{3.3.72}$$

$$\underset{n\times n}{Q_{\tilde{x}}} = \underset{n\times n}{E} - \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A}\ ; \tag{3.3.73}$$ та $$\underset{n\times n}{M_{\tilde{x}}^2} = m^2 \underset{n\times n}{Q_{\tilde{x}}}\ . \tag{3.3.74}$$

Головна діагональ вагової матриці $\underset{n\times n}{Q_{\tilde{x}}}$ містить обернені ваги $\frac{1}{P_{\tilde{x}_i}}$ зрівноважених результатів вимірів $\tilde{x}_i$: $\underset{n\times n}{Q_{\tilde{x}}}$. Тому, крім формул (3.3.71) чи (3.3.74), оцінити точність потрібних кінцевих результатів їх середніми квадратичними помилками $M_{\tilde{x}_i}$ можна за відповідними вагами $\frac{1}{P_{\tilde{x}_i}}$.

Інші елементи матриці $\underset{n\times n}{Q_{\tilde{x}}}$ називаються кореляційними моментами. Вони мають властивість симетричності $Q_{\tilde{x}_{ij}} = Q_{\tilde{x}_{ji}}$. Кореляційні моменти виражають залежності між зрівноваженими вимірами. Тіснота залежності розкривається коефіцієнтами кореляції

$$r_{\tilde{x}_i\tilde{x}_j} = \frac{Q_{\tilde{x}_{ij}}}{\sqrt{\frac{1}{P_{\tilde{x}_i}} \cdot \frac{1}{P_{\tilde{x}_j}}}}\ . \tag{3.3.75}$$

Матриці $\underset{n\times n}{q}$ або $\underset{n\times n}{M^2}$ є критеріями точності вимірів, а інші члени цих формул від'ємні. Тож завжди дійсна нерівність:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{P_{\tilde{x}_i}} &\le q_i \\ M_{\tilde{x}_i} &\le m_i \end{aligned}\right\}. \qquad (3.3.76)$$

Це є ще одним свідченням ефективності принципу найменших квадратів.

Оцінка точності функцій зрівноважених вимірів.

Нехай за результатами зрівноважування потрібно оцінити точність величини F, яка виражається функцією $F = F(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$, (3.3.77)

де $\tilde{x}_i = x_i + v_i$ - зрівноважені результати вимірів. Функції (3.3.77) можуть мати нелінійний вигляд. Тому традиційно з метою уніфікації алгоритму рішення їх лінеаризують шляхом розкладу в ряд Тейлора

$$F = F(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)_{\circ} v_i + R \cdot \qquad (3.3.78)$$

Сумою нелінійних членів розкладу R можна нехтувати. Позначимо

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)_{\circ} = F_i \cdot \qquad (3.3.79)$$

Тоді $F = F(x) + \sum_{i=1}^{n} F_i v_i$ (3.3.80) або $F = F(x) + \underset{1\times n}{F} \cdot \underset{n\times 1}{V}$, (3.3.81)

де матриця $\underset{1\times n}{F} = (F_1 \quad F_2 \quad \cdots \quad F_n)$ формується частинними похідними (3.3.79). Лінеаризовану форму (3.3.80) або (3.3.81) функції (3.3.77) прийнято називати ваговою функцією.

Залежність масивів поправок $\underset{n\times 1}{V}$ і результатів вимірів $\underset{n\times 1}{x}$ виражає рівняння (3.3.62). Підстановка його до вагової функції (3.3.81) зумовлює формулу

$$F = F(x) - \underset{1\times n}{F} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{x}, \qquad (3.3.82)$$

яка виражає оцінювану величину F як функцію результатів вимірів x_i.

Оцінимо точність функції (3.3.82):

$$M_F^2 = \underset{1\times n}{F} \cdot \underset{n\times n}{M^2} \cdot \underset{n\times 1}{F^T} - \underset{1\times n}{F} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{M^2} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times 1}{F^T}; \qquad (3.3.83)$$

$$\frac{1}{P_F} = \underset{1\times n}{F} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times 1}{F^T} - \underset{1\times n}{F} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times 1}{F^T} \cdot \qquad (3.3.84)$$

Тут $\underset{n\times n}{M^2}$ – кореляційна матриця середніх квадратичних похибок m_i результатів вимірів x_i. Величини M_F^2 та $1/P_F$ виражають дисперсію (квадрат середньої квадратичної похибки) та обернену вагу оцінюваної величини F за результатами зрівноважування корелатним способом. Якщо врахувати зв'язок середніх квадратичних похибок m_i та обернених ваг q_i результатів вимірів і помістити відповідну йому формулу (3.3.70) до формули оцінки точності (3.3.83), то після спрощення виразу в підсумку одержимо:

$$M_F^2 = \mu^2 \frac{1}{P_F} \cdot \tag{3.3.85}$$

Формула (3.3.85) виражає залежність критеріїв (3.3.83) і (3.3.84).

Якщо оцінюється відразу декілька, наприклад s, функцій, то матриця $\underset{1\times n}{F}$ містить s рядків. Рядки формуються окремо для кожної функції елементами

$$F_{ji} = \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\right)_\circ \cdot \tag{3.3.86}$$

$j = \overrightarrow{1,s}$; $i = \overrightarrow{1,n}$. Матриця має вигляд $\underset{s\times n}{F}$, а формули оцінки точності (3.3.83) – (3.3.85) узагальнюються:

$$\underset{s\times s}{M_F^2} = \underset{s\times n}{F} \cdot \underset{n\times n}{M^2} \cdot \underset{n\times s}{F^T} - \underset{s\times n}{F} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{M^2} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times s}{F^T}; \tag{3.3.87}$$

$$\underset{s\times s}{Q_F} = \underset{s\times n}{F} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times s}{F^T} - \underset{s\times n}{F} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times s}{F^T}; \tag{3.3.88}$$

$$\underset{s\times s}{M_F^2} = \mu^2 \cdot \underset{s\times s}{Q_F} \cdot \tag{3.3.89}$$

Кореляційна $\underset{s\times s}{M_F^2}$ і вагова $\underset{s\times s}{Q_F}$ матриці на головних діагоналях містять дисперсії $M_{F_j}^2$ і обернені ваги $\frac{1}{P_{F_j}}$ оцінюваних функції. Недіагональні елементи $Q_{F_{ij}}$ симетричної матриці $\underset{s\times s}{Q_F}$ називаються кореляційними моментами і виражають залежності між оцінюваними функціями.

За умови зрівноважування рівноточних вимірів з середньою квадратичною похибкою m приймаємо $\underset{n\times n}{q} = \underset{n\times n}{E}$. Замість формул (3.3.88) та (3.3.89) одержимо:

$$\underset{s\times s}{Q_F} = \underset{s\times n}{F} \cdot \underset{n\times s}{F^T} - \underset{s\times n}{F} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times s}{F^T}; \tag{3.3.90}$$

$$\underset{s\times s}{M_F^2} = m^2 \cdot \underset{s\times s}{Q_F} \cdot \tag{3.3.91}$$

Оцінка точності у схемі Гаусса-Дулітля.

Розкриємо добутки матриць у формулі оберненої ваги (3.3.84):

$$\frac{1}{P_F} = \underset{1\times n}{F} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times 1}{F^T} - \underset{1\times n}{F} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times 1}{F^T} =$$

$$= [qFF] - [qa_1F]\rho_1 - [qa_2F]\rho_2 - \ldots - [qa_rF]\rho_r, \qquad (3.3.92)$$

де

$$\rho_j = [qa_1F]Q_{j,1} + [qa_2F]Q_{j,2} + \ldots + [qa_rF]Q_{j,r} \qquad (3.3.93)$$

є невідомими величинами.

Коефіцієнти $[qa_jF]$ за структурою і чисельністю тотожні коефіцієнтам системи нормальних рівнянь корелат (3.3.17).Тож логічним є таке рішення. З урахуванням коефіцієнтів $[qa_jF]$ та $[qFF]$, які обчислюються разом з коефіцієнтами нормальних рівнянь, можна побудувати розширену систему нормальних рівнянь. До основної системи долучається рівняння (3.3.92). Тим самим, крім основних невідомих ρ_j у такій системі виникає додаткове невідоме $-1/P_F$:

$$\left.\begin{array}{l} [qa_1a_1]\rho_1 + [qa_1a_2]\rho_2 + \cdots + [qa_1a_r]\rho_r + [qa_1F] = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ [qa_ra_1]\rho_1 + [qa_ra_2]\rho_2 + \cdots + [qa_ra_r]\rho_r + [qa_rF] = 0 \\ [qa_1F_1]\rho_1 + [qa_2F]\rho_2 + \cdots + [qa_rF]\rho_r + [qFF] = \dfrac{1}{P_F} \end{array}\right\}. \qquad (3.3.94)$$

Отримано систему $r+1$ рівнянь з $r+1$ невідомими. Така система має всі властивості системи нормальних рівнянь, які використовуються при перетвореннях в алгоритмі Гаусса. Виключивши з системи (3.3.94) усі невідомі, для останнього невідомого $1/P_F$ одержимо:

$$\frac{1}{P_F} = [qFF\cdot(r+1)]_{(r+1)} = [qFF] + \sum_{j=1}^{r}\left(-\frac{[qa_jF\cdot(j-1)]}{[qa_ja_j\cdot(j-1)]}[qa_jF\cdot(j-1)]\right). \qquad (3.3.95)$$

З врахуванням позначень елімінаційних коефіцієнтів

$$\frac{1}{P_F} = [qFF] + \sum_{j=1}^{r}\left(E_{jF}\cdot[qa_jF\cdot(j-1)]\right). \qquad (3.3.96)$$

Черговість дій розв'язування задачі оцінки точності зрівноважених вимірів та їх функцій можна окреслити таким чином.

1. Для окремої оцінюваної величини до схеми обчислення коефіцієнтів нормальних рівнянь (таблиця додатку 1) приєднують додатковий стовпчик "*F*". До нього вписують значення частинних похідних функції у рядках з відповідними індексами *i*. Разом з обчисленням коефіцієнтів нормальних рівнянь тут вираховують значення $[qa_jF]$ та $[qFF]$.

Рівності $$[qa_ja_1] + [qa_ja_2] + \cdots + [qa_ja_r] + [qa_jF] = [qa_js]$$

та $$[qa_1F] + [qa_2F] + \cdots + [qa_rF] + [qFF] = [qFs]$$

забезпечують перевірку результатів обчислень на даному етапі рішення задачі. Контрольні числа $[qa_js] = \Sigma_j$ та $[qFs] = \Sigma_{r+1}$ є наслідком побудови розширеної системи нормальних рівнянь та контролю її розв'язування за правилом (3.3.22). Система контролю проміжних обчислень за величинами $\sum_j$ підтримується й надалі.

2. Додатковий стовпчик “F” з обчисленими там значеннями $[a_j F]$ тепер приєднують до схеми Гаусса-Дулітля. У ньому виконують такі ж перетворення, як і у стовпчику вільних членів “W”.

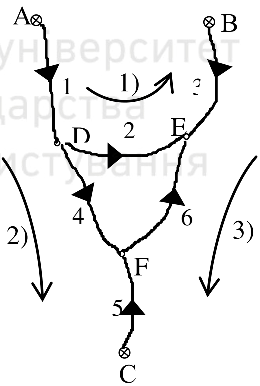
3. Після завершення перетворень у схемі обернену вагу оцінюваної величини розраховують як алгебраїчну суму значення $[FF]$ та добутків чисел, які містяться на перетині елімінаційних рядків E_j із стовпчиком “F” та чисел цього ж стовпчика, розташованих рядком вище, тобто за формулою

$$\frac{1}{P_F} = [FF] - \sum_{j=1}^{r} \left(E_{jF} \cdot [a_j F]^{(j-1)} \right).$$

4. Число додаткових стовпців дорівнює числу s оцінюваних величин F_j.

1.6. Приклади зрівноважування результатів вимірів корелатним способом

Завдання 1. У нівелірній мережі з трьома вузловими реперами виміряні перевищення у шести ходах різної довжини. Мережа опирається на три вихідних репери з відомими відмітками. Схема мережі зображена на малюнку 1.5. Визначити зрівноважені значення виміряних перевищень, оцінити точність зрівноваженого перевищення та відмітки вузлового репера.



Малюнок 1.5

Загальне число вимірів у мережі $n=6$, число необхідних вимірів $k=3$, число надлишкових вимірів $r=3$.

Відмітки вихідних реперів: $H_A = 183{,}496$ *м*; $H_B = 192{,}353$ *м*; $H_C = 191{,}890$ *м*.

Вихідні дані для виконання завдання студентами денної та заочної форм навчання наведено в додатку 3 методичних вказівок 05-04-32.

Результати вимірів перевищень та довжини ходів:

№ ходу	1	2	3	4	5	6
Перевищення *h* (*м*)	6,125	8,320	5,580	1,368	-0,905	6,944
Довжина *S* (*км*)	12,6	16,4	14,1	10,0	12,0	13,2

Послідовність та результати зрівноважування мережі вручну

1. Формування системи умовних рівнянь поправок

Число умовних рівнянь поправок дорівнює числу надлишкових вимірів r=3. В нівелірних мережах виникають полігонні умовні рівняння. Їх складають для вибраних у мережі r незалежних розімкнених чи замкнених полігонів. Незалежними вважають такі полігони із числа всіх можливих варіантів, серед яких ні один не був би комбінацією інших. Полігонне умовне рівняння має загальний вигляд $\sum_{i\in j} \pm v_i + W_j = 0$. Додаються поправки v_i до перевищень h_i тих ходів, які входять до полігону за номером j. Знак "+" перед поправкою ставлять тоді, коли напрями ходу і полігону співпадають; знак "-" - якщо їх напрями протилежні. Нев'язка W_j умовного рівняння обчислюється за формулою $W_j = \sum_{i\in j} \pm h_i - (H_{кінц} - H_{поч})$, де $H_{поч}$ та $H_{кінц}$ - відмітки початкового та кінцевого реперів полігону. За такими правилами складаємо умовні рівняння в трьох розімкнених полігонах, які показані на схемі.

1) Полігон *ADEB*:

$W_1 = h_1 + h_2 - h_3 - (H_B - H_A) = 8(мм)$; $\qquad v_1 + v_2 - v_3 + 8 = 0$.

2) Полігон *ADFC*:

$W_2 = h_1 + h_4 - h_5 - (H_C - H_A) = 4(мм)$; $\qquad v_1 + v_4 - v_5 + 4 = 0$.

3) Полігон *BEFC*:

$W_3 = h_3 - h_5 - h_6 - (H_C - H_B) = 4(мм)$; $\qquad v_3 - v_5 - v_6 + 4 = 0$.

2. Складання вагових функцій

Ваговою функцією називають функцію зрівноважених результатів вимірів, яка виражає за ними потрібну оцінювану величину: $F = F(\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_n)$. Для кожної оцінюваної величини складають відповідну їй вагову функцію, виражають значення F_i частинних похідних функції за кожним із n аргументів і на їх основі далі одночасно з основними зрівноважувальними обчисленнями визначають обернену вагу оцінюваної величини. Оцінимо точність двох величин.

1) відмітка вузлового репера D: $H_D = F_H = F(\tilde{h}_1,\dots,\tilde{h}_6) = H_A + \tilde{h}_1$;

$$\left(\frac{\partial F_H}{\partial \tilde{h}_1}\right)_0 = F_1 = 1; \quad \left(\frac{\partial F_H}{\partial \tilde{h}_2}\right)_0 = F_2 = \quad \left(\frac{\partial F_H}{\partial \tilde{h}_3}\right)_0 = F_3 = \quad \left(\frac{\partial F_H}{\partial \tilde{h}_4}\right)_0 = F_4 =$$

$$= \left(\frac{\partial F_H}{\partial \tilde{h}_5}\right)_0 = F_5 = \quad \left(\frac{\partial F_H}{\partial \tilde{h}_6}\right)_0 = F_6 = 0 \cdot$$

2) зрівноважене перевищення $\tilde{h}_{DE}$: $\quad F_h = F(\tilde{h}_1,\dots,\tilde{h}_6) = \tilde{h}_2$;

$$\left(\frac{\partial F_h}{\partial \tilde{h}_1}\right)_0 = F_1 = 0; \quad \left(\frac{\partial F_h}{\partial \tilde{h}_2}\right)_0 = F_2 = 1; \qquad \left(\frac{\partial F_h}{\partial \tilde{h}_3}\right)_0 = F_3 = \left(\frac{\partial F_h}{\partial \tilde{h}_4}\right)_0 = F_4 =$$

$$\left(\frac{\partial F_h}{\partial \tilde{h}_5}\right)_0 = F_5 = \left(\frac{\partial F_h}{\partial \tilde{h}_6}\right)_0 = F_6 = 0 \cdot$$

3. Формування системи нормальних рівнянь корелат

Для заданої мережі система нормальних рівнянь корелат має вигляд:

$$\left.\begin{aligned} N_{11}k_1 + N_{12}k_2 + N_{13}k_3 + W_1 = 0 \\ N_{21}k_1 + N_{22}k_2 + N_{23}k_3 + W_2 = 0 \\ N_{31}k_1 + N_{32}k_2 + N_{33}k_3 + W_3 = 0 \end{aligned}\right\}$$

Вільними членами рівнянь такої системи є нев’язки умовних рівнянь поправок. Коефіцієнти обчислюємо у схемі (див. таблицю додатку 1):

№ вимірів	$q_i = \frac{S_i}{10}$	a_{1i}	a_{2i}	a_{3i}	F_H	F_h	s_i	v_i	$p_i v_i^2$
1	1,3	1	1		1		3	-2,8	5,8921
2	1,6	1				1	2	-4,5	12,3907
3	1,4	-1		1			0	0,8	0,4344
4	1,0		1				1	0,7	0,4276
5	1,2		-1	-1			-2	1,9	2,9651
6	1,3			-1			-1	2,9	6,4405
Σ		1	1	-1	1	1	3	$[pv^2]$= 28,5504	
$[qa_1$		4,3	1,3	-1,4	1,3	1,6	7,1		
$[qa_2$			3,5	1,2	1,3	0,0	7,3		
$[qa_3$				3,9	0,0	0,0	3,7		
$[qF_H$					1,3	0,0	3,9		
$[qF_h$						1,6	3,2		
$[qs$							25,2		

Отже, маємо систему нормальних рівнянь корелат такого вигляду:

$$\left.\begin{aligned} 4.3 \cdot k_1 + 1.3 \cdot k_2 - 1.4 \cdot k_3 + 8 = 0 \\ 1.3 \cdot k_1 + 3.5 \cdot k_2 + 1.2 \cdot k_3 + 4 = 0 \\ -1.4 \cdot k_1 + 1.2 \cdot k_2 + 3.9 \cdot k_3 + 4 = 0 \end{aligned}\right\}$$

Разом з коефіцієнтами нормальних рівнянь у схемі обчислено значення $[qa_j F_H]$, $[qF_H F_H]$ і $[qa_j F_h]$, $[qF_h F_h]$; $j = 1,2,3$.

4. Розв'язування системи нормальних рівнянь корелат у схемі Гаусса-Дулітля

№	Познач. дій	k_1	k_2	k_3	F_H	F_h	W	Σ
		1	2	3				
1	N_{1i}	4,3	1,3	-1,4	1,3	1,6	8	15,1
2	E_1	-1	-0,3023	0,3256	-0,3023	-0,3721	-1,8605	-3,5116
3	N_{2i}		3,5	1,2	1,3	0,0	4	11,3
4	$N_{2i}^{(1)}$		3,1070	1,6233	0,9070	-0,4837	1,5814	6,7349
5	E_2		-1	-0,5225	-0,2919	0,1557	-0,5090	-2,1677
6	N_{3i}			3,9	0,0	0,0	4	7,7
7	$N_{3i}^{(2)}$			2,5961	-0,0506	0,7737	5,7784	9,0976
8	E_3			-1	0,0195	-0,2980	-2,2258	-3,5043
9	k_j	-2,7828	0,6539	-2,2258				
10	$-[pv^2]$						-28,5503	
11	$[kW]$						-28,5504	
12	$[qF]$				1,3	1,6		
13	$\dfrac{1}{P_F}$				0,6412	0,6988		

Контроль розв'язування системи за сумою рівнянь (3.3.42):

$$\Sigma_1 \cdot k_1 + \Sigma_2 \cdot k_2 + \Sigma_3 \cdot k_3 + [W] = \text{-0,00002}.$$

В 10 та 11 рядках схеми обчислено значення $[pv^2]$. В основу розрахунку покладено формули (3.3.38) та (3.3.41). В 12 та 13 рядках наведено результати обчислення обернених ваг оцінюваних величин за формулою (3.3.96).

5. Обчислення зрівноважених значень виміряних перевищень

5.1) обчислення поправок до виміряних перевищень. Невідомі поправки v_i до результатів вимірів виражаються корелатними рівняннями поправок $v_i = q_i(a_{1i}k_1 + a_{2i}k_2 + a_{3i}k_3)$ за корелатами k_j, які обчислені у схемі Гаусса-Дулітля. Оскільки обернені ваги вимірів і коефіцієнти корелатних рівнянь містяться у схемі обчислення коефіцієнтів нормальних рівнянь, то тут зручно провести розрахунок та контроль невідомих поправок v_i (див. два додаткових стовпці схеми). Контроль здійснюємо співвідношенням (3.3.36).

5.2) обчислення зрівноважених значень перевищень: $\tilde{h}_i = h_i + v_i$;

№ виміру	h_i *(мм)*	v_i *(мм)*	$\tilde{h}_i$ *(мм)*
1	6125	-2,8	6122,2
2	8320	-4,5	8315,5
3	5580	+0,8	5580,8
4	1368	+0,7	1368,7
5	-905	+1,9	-903,1
6	6944	+2,9	6946,9

5.3) контроль зрівноважування перевищень. За умовою завдання нев'язки умовних рівнянь, обчислені за зрівноваженими результатами вимірів, повинні дорівнювати нулю:

$$W_1 = \tilde{h}_1 + \tilde{h}_2 - \tilde{h}_3 - (H_B - H_A) = 0;$$

$$W_2 = \tilde{h}_1 + \tilde{h}_4 - \tilde{h}_5 - (H_C - H_A) = 0; \qquad W_3 = \tilde{h}_3 - \tilde{h}_5 - \tilde{h}_6 - (H_C - H_B) = 0.$$

Отже, завдання зрівноважування перевищень розв'язано.

6. Оцінка точності за результатами зрівноважування

6.1) обчислення середньої квадратичної похибки одиниці ваги за формулою Бесселя:

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-k}} = \sqrt{\frac{28.5504}{6-3}} = \pm 3{,}08 \text{ (мм)}.$$

6.2) обчислення середньої квадратичної похибки нівелювання на 1 *км* ходу:

$$m_{км} = \frac{\mu}{\sqrt{P_{км}}} = \pm 0{,}97 \text{ (мм)},$$

де $P_{км} = 10$ - вага ходу довжиною S = 1 *км*.

6.3) оцінка точності відмітки вузлового репера D і зрівноваженого перевищення $\tilde{h}_{DE}$. Середні квадратичні похибки означених величин виражаються співвідношенням $M_F = \mu\sqrt{\frac{1}{P_F}}$. Значення обернених ваг містяться у 13 рядку схеми Гаусса-Дулітля. Тож у підсумку для оцінюваних величин одержимо:

$$M_{H_D} = \mu\sqrt{\frac{1}{P_{F_H}}} = \pm 2{,}47 \text{ (мм)}, \quad H_D = H_A + \tilde{h}_1 = 189618{,}2 \pm 2{,}47 \text{ (мм)};$$

$$M_{\tilde{h}} = \mu\sqrt{\frac{1}{P_{F_h}}} = \pm 2{,}58 \text{ (мм)}, \qquad \tilde{h}_{DE} = 8315{,}5 \pm 2{,}58 \text{ (мм)}.$$

Послідовність та результати зрівноважування мережі у матричній формі

1. Формування системи умовних рівнянь поправок

Матрична форма запису системи умовних рівнянь поправок має вигляд (3.3.9). З урахуванням складених раніше трьох незалежних полігонних умовних рівнянь для заданої мережі систему пишемо у розгорнутому вигляді:

$$\left.\begin{aligned} v_1+v_2-v_3+8=0\\ v_1+v_4-v_5+4=0\\ v_3-v_5-v_6+4=0 \end{aligned}\right\} = \underset{3\times6}{A}\cdot\underset{6\times1}{V}+\underset{3\times1}{W}=\begin{pmatrix}1&1&-1&0&0&0\\1&0&0&1&-1&0\\0&0&1&0&-1&-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\\v_5\\v_6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\4\\4\end{pmatrix}=0.$$

2. Формування системи нормальних рівнянь корелат

Система нормальних рівнянь корелат має вигляд

$$\left.\begin{aligned} N_{11}k_1+N_{12}k_2+N_{13}k_3+W_1=0\\ N_{21}k_1+N_{22}k_2+N_{23}k_3+W_2=0\\ N_{31}k_1+N_{32}k_2+N_{33}k_3+W_3=0 \end{aligned}\right\} \quad \text{або} \quad \underset{3\times3}{N}\cdot\underset{3\times1}{K}+\underset{3\times1}{W}=0.$$

Матриця вільних членів $\underset{3\times1}{W}$ формується нев'язками умовних рівнянь. Матрицю коефіцієнтів рівнянь виражає добуток $\underset{3\times3}{N}=\underset{3\times6}{A}\cdot\underset{6\times6}{q}\cdot\underset{6\times3}{A^T}$, де $\underset{6\times6}{q}$ - матриця обернених ваг результатів вимірів $q_i=\frac{S_i}{10}$ (S_i – довжини ходів).

$$\underset{6\times6}{q}=\begin{pmatrix}1.3&0&0&0&0&0\\0&1.6&0&0&0&0\\0&0&1.4&0&0&0\\0&0&0&1.0&0&0\\0&0&0&0&1.2&0\\0&0&0&0&0&1.3\end{pmatrix}; \quad \underset{3\times3}{N}=\begin{pmatrix}4.3&1.3&-1.4\\1.3&3.5&1.2\\-1.4&1.2&3.9\end{pmatrix}.$$

Тож маємо систему нормальних рівнянь корелат

$$\begin{pmatrix}4.3&1.3&-1.4\\1.3&3.5&1.2\\-1.4&1.2&3.9\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\4\\4\end{pmatrix}=0.$$

3. Розв'язування системи нормальних рівнянь корелат

Розв'язування системи полягає у вираженні невідомих елементів матриці $\underset{3\times1}{K}$ за формулою $\underset{3\times1}{K}=-\underset{3\times3}{Q}\cdot\underset{3\times1}{W}$, де $\underset{3\times3}{Q}=\underset{3\times3}{N^{-1}}$ – обернена матриця до матриці коефіцієнтів $\underset{3\times3}{N}$. Отже,

$$\underset{3\times3}{Q} = \begin{pmatrix} 0.3520 & -0.1946 & 0.1863 \\ -0.1946 & 0.4270 & -0.2012 \\ 0.1863 & -0.2012 & 0.3852 \end{pmatrix};$$

$$\underset{3\times1}{K} = -\begin{pmatrix} 0.3520 & -0.1946 & 0.1863 \\ -0.1946 & 0.4270 & -0.2012 \\ 0.1863 & -0.2012 & 0.3852 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.7828 \\ 0.6539 \\ -2.2258 \end{pmatrix}.$$

Для перевірки правильності побудови оберненої матриці можна використати рівність $\underset{3\times3}{N} \cdot \underset{3\times3}{Q} = \underset{3\times3}{E}$, де $\underset{k\times k}{E}$ - одинична матриця:

$$\begin{pmatrix} 4.3 & 1.3 & -1.4 \\ 1.3 & 3.5 & 1.2 \\ -1.4 & 1.2 & 3.9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.3520 & -0.1946 & 0.1863 \\ -0.1946 & 0.4270 & -0.2012 \\ 0.1863 & -0.2012 & 0.3852 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Контроль розв’язування системи можна здійснити підстановкою обчислених корелат у рівняння $\underset{3\times3}{N} \cdot \underset{3\times1}{K} + \underset{3\times1}{W} = 0$.

4. Обчислення зрівноважених значень виміряних перевищень

4.1) обчислення поправок до виміряних перевищень. Невідомі поправки v_i виражаються корелатними рівняннями поправок $\underset{6\times1}{V} = \underset{6\times6}{q} \cdot \underset{6\times3}{A^T} \cdot \underset{3\times1}{K}$:

$$\underset{6\times1}{V} = \begin{pmatrix} 1.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2.7828 \\ 0.6539 \\ -2.2258 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.7646 \\ -4.4525 \\ 0.7798 \\ 0.6539 \\ 1.8863 \\ 2.8936 \end{pmatrix}.$$

4.2) обчислення зрівноважених значень виміряних перевищень. Зрівноважені результати вимірів $\tilde{h}_i$ виражаються рівнянням $\underset{6\times1}{\tilde{h}} = \underset{6\times1}{h} + \underset{6\times1}{V}$, де $\underset{6\times1}{h}$ - матриця результатів вимірів перевищень:

$$\underset{6\times1}{\tilde{h}} = \begin{pmatrix} 6125 \\ 8320 \\ 5580 \\ 1368 \\ -905 \\ 6944 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2.8 \\ -4.5 \\ 0.8 \\ 0.7 \\ 1.9 \\ 2.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6122.2 \\ 8315.5 \\ 5580.8 \\ 1368.7 \\ -903.1 \\ 6946.9 \end{pmatrix}.$$

4.3) контроль зрівноважування перевищень здійснюється за правилами, викладеними у попередньому прикладі: нев'язки умовних рівнянь, обчислені за зрівноваженими результатами вимірів, повинні дорівнювати нулю.

5. Оцінка точності за результатами зрівноважування

5.1) обчислення середньої квадратичної похибки одиниці ваги за формулою Бесселя $\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-k}}$, де $[pv^2] = \underset{1\times6}{V^T} \cdot \underset{6\times6}{P} \cdot \underset{6\times1}{V} = 28{,}5503$: $\mu = \pm 3{,}08$ *мм.*

5.2) оцінка точності відмітки вузлового репера D і зрівноваженого перевищення $\tilde{h}_{DE}$. Насамперед для кожної оцінюваної величини складають вагову функцію і виражають значення F_i частинних похідних функції за кожним із *n* її аргументів, як це показано у попередньому прикладі. Оскільки оцінюється дві функції (s=2), то значеннями їх частинних похідних тепер формуємо матрицю $\underset{2\times6}{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Перший рядок матриці містить значення частинних похідних функції, яка виражає відмітку $H_D = F_H = F(\tilde{h}_1,\ldots,\tilde{h}_6) = H_A + \tilde{h}_1$. У другому рядку – теж саме для перевищення $\tilde{h}_{DE} = F_h = F(\tilde{h}_1,\ldots,\tilde{h}_6) = \tilde{h}_2$. Вагову матрицю виражає формула (3.3.88):

$$\underset{2\times2}{Q_F} = \underset{2\times6}{F} \cdot \underset{6\times6}{q} \cdot \underset{6\times2}{F^T} - \underset{2\times6}{F} \cdot \underset{6\times6}{q} \cdot \underset{6\times3}{A^T} \cdot \underset{3\times3}{Q} \cdot \underset{3\times6}{A} \cdot \underset{6\times6}{q} \cdot \underset{6\times2}{F^T} = \begin{pmatrix} 0.6412 & -0.3274 \\ -0.3274 & 0.6988 \end{pmatrix}.$$

Відповідна кореляційна матриця $\underset{2\times2}{M_F^2} = \mu^2 \cdot \underset{2\times2}{Q_F} = \begin{pmatrix} 6.1024 & -3.1161 \\ -3.1161 & 6.6502 \end{pmatrix}$ на головній діагоналі містить дисперсії оцінюваних величин. Точність оцінюваних величин виражають середні квадратичні похибки

$$M_{H_D} = \pm 2{,}47 \text{ мм}, \quad M_{\tilde{h}} = \pm 2{,}58 \text{ мм}.$$

Розкритим тут способом зручно виконувати оцінку сукупності величин. Так, при оцінці зрівноважених перевищень матриця $\underset{6\times6}{F} = \underset{6\times6}{E}$, а формули оцінки точності набувають вигляду (3.3.69) і (3.3.71). Тоді

$$\underset{6\times6}{Q_{\tilde{h}}} = \underset{6\times6}{q} - \underset{6\times6}{q} \cdot \underset{6\times3}{A^T} \cdot \underset{3\times3}{Q} \cdot \underset{3\times6}{A} \cdot \underset{6\times6}{q} = \begin{pmatrix} 0.6412 & -0.3274 & 0.3138 & -0.3021 & 0.3391 & -0.0253 \\ -0.3274 & 0.6988 & 0.3714 & 0.3114 & -0.0161 & 0.3874 \\ 0.3138 & 0.3714 & 0.6851 & 0.0093 & 0.3231 & 0.3621 \\ -0.3021 & 0.3114 & 0.0093 & 0.5730 & 0.2709 & -0.2616 \\ 0.3391 & -0.0161 & 0.3231 & 0.2709 & 0.6100 & -0.2870 \\ -0.0253 & 0.3874 & 0.3621 & -0.2616 & -0.2870 & 0.6490 \end{pmatrix};$$

$$\underset{6\times 6}{M^2_{\tilde{h}}} = \mu^2 \underset{6\times 6}{Q_{\tilde{h}}} = \begin{pmatrix} 6.1024 & -3.1161 & 2.9863 & -2.8750 & 3.2274 & -0.2411 \\ -3.1161 & 6.6502 & 3.5341 & 2.9634 & -0.1528 & 3.6869 \\ 2.9863 & 3.5341 & 6.5204 & 0.0884 & 3.0747 & 3.4457 \\ -2.8750 & 2.9634 & 0.0884 & 5.4531 & 2.5781 & -2.4898 \\ 3.2274 & -0.1528 & 3.0747 & 2.5781 & 5.8056 & -2.7309 \\ -0.2411 & 3.6869 & 3.4457 & -2.4898 & -2.7309 & 6.1766 \end{pmatrix}.$$

На головній діагоналі вагової $\underset{6\times 6}{Q_{\tilde{h}}}$ та кореляційної $\underset{6\times 6}{M^2_{\tilde{h}}}$ матриць містяться обернені ваги та дисперсії зрівноважених значень перевищень заданої мережі. Недіагональні елементи матриці $\underset{6\times 6}{Q_{\tilde{h}}}$ забезпечують оцінку залежності зрівноважених перевищень. Залежність перевищень $\tilde{h}_1$ та $\tilde{h}_2$ виражається коефіцієнтом кореляції, який розкриває формула (3.3.75):

$$r_{\tilde{h}_1\tilde{h}_2} = \frac{Q_{\tilde{h}_{12}}}{\sqrt{\dfrac{1}{P_{\tilde{h}_1}} \cdot \dfrac{1}{P_{\tilde{h}_2}}}} = \frac{-0.3274}{\sqrt{0.6412 \times 0.6988}} = -0.49 \cdot$$

Завдання 2. В результаті рівноточних вимірів отримали n=9 кутів β_i мережі мікротріангуляції (малюнок 1.4). Обчислити зрівноважені значення виміряних кутів, оцінити точність довжини сторони *DC*. Координати вихідних пунктів *A, O, B*, приблизні значення координат пунктів *D* і *C*, а також результати вимірів кутів мережі задано в таблицях.

Координати пунктів:

Пункти	X (*м*)	Y (*м*)
A	1813,119	0
O	0	0
B	-1527,638	1492,213
	X° (*м*)	Y° (*м*)
D	623,360	-1393,272
C	-897,701	-1488,183

Результати вимірів кутів:

№	β_i	№	β_i	№	β_i
1	64°36′00,9″	4	55°19′45,2″	7	33°44′19,4″
2	65°53′45,2″	5	55°12′15,1″	8	103°13′43,4″
3	49°30′19,3″	6	69°27′52,6″	9	43°02′01,7″

Послідовність та результати зрівноважування мережі вручну

1. Формування системи умовних рівнянь поправок

У мережі проведено $n = 9$ вимірів кутів. Серед них число необхідних вимірів $k = 4$, число надлишкових вимірів $r = 5$. Тому тут потрібно складати п'ять умовних рівнянь, у тому числі чотири кутових (три рівняння фігур і рівняння твердого кута) і одне базисне умовне рівняння.

1.1) умовні рівняння фігур складаємо окремо для кожного трикутника мережі мікротріангуляції:

№ кутів	Результати вимірів кутів	Умовні рівняння поправок
1	64° 36′ 00.9″	
2	65° 53′ 45.2″	
3	49° 30′ 19.3″	$v_1 + v_2 + v_3 + 5.4'' = 0$
Σ	180° 00′ 05.4″	
W_1	5.4″	
4	55° 19′ 45.2″	
5	55° 12′ 15.1″	
6	69° 27′ 52.6″	$v_4 + v_5 + v_6 - 7.1'' = 0$
Σ	179° 59′ 52.9″	
W_2	-7.1″	
7	33° 44′ 19.4″	
8	103° 13′ 43.4″	
9	43° 02′ 01.7″	$v_7 + v_8 + v_9 + 4.5'' = 0$
Σ	180° 00′ 04.5″	
W_3	4.5″	

1.2) умовне рівняння твердого кута складаємо для суми кутів, вставлених між вихідними сторонами *OA* і *OB*. Значення твердого кута $\angle AOB$ виражається різницею дирекційних кутів вихідних сторін, обчислених з рішення оберненої геодезичної задачі за координатами вихідних пунктів.

№ кутів	Результати вимірів кутів	Умовне рівняння поправок
2	65° 53′ 45.2″	
5	55° 12′ 15.1″	
8	103° 13′ 43.4″	
Σ	224° 19′ 43.7″	$v_2 + v_5 + v_8 + 3.2'' = 0$
$\angle AOB$	224° 19′ 40.5″	
W_4	3.2″	

1.3) базисне умовне рівняння. Якщо встановити напрям ходової лінії b_1-*OD-OC*-b_2, то, згідно правила запису базисного рівняння (див. §3.3.1 п.6), одержимо: $a_3 v_3 + a_6 v_6 + a_9 v_9 - a_1 v_1 - a_4 v_4 - a_7 v_7 + W_5 = 0$,

де коефіцієнти $a_i = ctg\beta_i$, а нев'язка обчислюється за формулою

$$W_5 = \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{\sin\beta_3 \cdot \sin\beta_6 \cdot \sin\beta_9}{\sin\beta_1 \cdot \sin\beta_4 \cdot \sin\beta_7} - 1 \cdot$$

Довжини базисів b_1 і b_2 установлюються з рішення оберненої геодезичної задачі за координатами вихідних пунктів.

№ кутів	β_i	$\sin\beta_i$	a_i	№ кутів	β_i	$\sin\beta_i$	a_i
3	49°30′19.3″	0.76046673	0.85	1	64°36′00.9″	0.90333716	0.47
6	69°27′52.6″	0.93645570	0.37	4	55°19′45.2″	0.82243428	0.69
9	43°02′01.7″	0.68242975	1.07	7	33°44′19.4″	0.55540656	1.50
b_1		1813.119		b_2		2135.504	
$b_1 \sin\beta_3 \sin\beta_6 \sin\beta_9$		881.154		$b_2 \sin\beta_1 \sin\beta_4 \sin\beta_7$		881.176	
$W_5 \cdot \rho'' =$-5.1″							

Отже, базисне рівняння має вигляд

$$0.85 \cdot v_3 + 0.37 \cdot v_6 + 1.07 \cdot v_9 - 0.47 \cdot v_1 - 0.69 \cdot v_4 - 1.50 \cdot v_7 - 5.1'' = 0 .$$

2. Складання вагової функції

Оцінювана довжина сторони *DC* виражається через кути мережі функцією $F = s_{DC} = b_1 \dfrac{\sin\tilde\beta_3 \cdot \sin\tilde\beta_5}{\sin\tilde\beta_1 \cdot \sin\tilde\beta_4}$. Лінеаризована форма такої функції має вигляд $F = F_0 + F_3 v_3 + F_5 v_5 - F_1 v_1 - F_4 v_4$, де $F_0 = b_1 \dfrac{\sin\beta_3 \cdot \sin\beta_5}{\sin\beta_1 \cdot \sin\beta_4}$. Частинні похідні $F_i = \left(\dfrac{\partial F}{\partial \beta_i}\right)_{\circ}$ набувають таких значень:

$$F_1 = -F_0 \cdot ctg\beta_1 = \text{-720}\,м; \qquad F_3 = F_0 \cdot ctg\beta_3 = 1300\,м;$$

$$F_4 = -F_0 \cdot ctg\beta_4 = \text{-1050}\,м; \qquad F_5 = F_0 \cdot ctg\beta_5 = 1060\,м;$$

$$F_2 = F_6 = F_7 = F_8 = F_9 = 0.$$

Тож $F = F_0 + (1.30 \cdot v_3 + 1.06 \cdot v_5 - 0.72 \cdot v_1 - 1.05 \cdot v_4) \times 10^3$. Значення похідних F_i використаємо для оцінки точності вагової функції для величини s_{DC}.

3. Формування системи нормальних рівнянь корелат

Схема обчислення коефіцієнтів нормальних рівнянь корелат:

№	a_{1i}	a_{2i}	a_{3i}	a_{4i}	a_{5i}	F_i	s_i	v_i	v_i^2
1	1				-0.47	-0.72	-0.19	-2.1	4.60843
2	1			1			2.00	-2.8	7.65379
3	1				0.85	1.30	3.15	-0.5	0.23690
4		1			-0.69	-1.05	-0.74	2.0	4.14818
5		1		1		1.06	3.06	1.7	2.86812
6		1			0.37		1.37	3.4	11.35515
7			1		-1.50		-0.50	-2.8	7.85392
8			1	1			2.00	-2.1	4.52414
9			1		1.07		2.07	0.4	0.18446
Σ	3	3	3	3	-0.37	0.59	12.22	$[v^2] = 43.43310$	
$[a_1$	3	0	0	1	0.38	0.58	4.96		
$[a_2$		3	0	1	-0.32	0.01	3.69		
$[a_3$			3	1	-0.43	0	3.57		
$[a_4$				3	0	1.06	7.06		
$[a_5$					4.9513	2.1679	6.7492		
$[F$						4.4345	8.2524		
$[s$							34.2816		

Отже, маємо систему нормальних рівнянь корелат вигляду

$$\left.\begin{aligned}
3 \cdot k_1 \quad &+ k_4 + 0.38 \cdot k_5 + 5.4 = 0 \\
3 \cdot k_2 \quad &+ k_4 - 0.32 \cdot k_5 - 7.1 = 0 \\
3 \cdot k_3 \quad &+ k_4 - 0.43 \cdot k_5 + 4.5 = 0 \\
k_1 + k_2 + k_3 &+ 3 \cdot k_4 + 3.2 = 0 \\
0.38 \cdot k_1 - 0.32 \cdot k_2 - 0.43 \cdot k_3 &+ 4.9513 \cdot k_5 - 5.1 = 0
\end{aligned}\right\}$$

4. Розв'язування системи нормальних рівнянь корелат у схемі Гаусса-Дулітля

№	Познач. дій	k_1 1	k_2 2	k_3 3	k_4 4	k_5 5	F	W	Σ
1	N_{1i}	3	0	0	1	0.38	0.58	5.4	10.36
2	E_1	-1	0	0	-0.33333	-0.12667	-0.19333	-1.8	-3.45333
3	N_{2i}		3	0	1	-0.32	0.01	-7.1	-3.41
4	$N_{2i}^{(1)}$		3	0	1	-0.32	0.01	-7.1	-3.41
5	E_2		-1	0	-0,33333	0,10667	-0.00333	2.36667	1.13667
6	N_{3i}			3	1	-0.43	0	4.5	8.07
7	$N_{3i}^{(2)}$			3	1	-0.43	0	4.5	8.07
8	E_3			-1	-0.33333	0.14333	0	-1.5	-2.69
9	N_{4i}				3	0	1.06	3.2	10.26
10	$N_{4i}^{(3)}$				2	0.12333	0.86333	2.26667	5.25333
11	E_4				-1	-0.06167	-0.43167	-1.13333	-2.62667
12	N_{5i}					4.9513	2.1679	-5.1	1.6492
13	$N_{5i}^{(4)}$					4.79979	2.04226	-6.03611	0.80594
14	E_5					-1	-0.42549	1.25758	-0.16791
15	k_j	-1.55567	2.90444	-0.91612	-1.21088	1.25758			
16	$-[k^2]$							-43.43310	
17	$[kW]$							-43.43310	
18	$[F]$						4.4345		
19	$\frac{1}{P_F}$						3.08070		

Контроль розв'язування системи за сумою рівнянь:

$$\Sigma_1 \cdot k_1 + \Sigma_2 \cdot k_2 + \Sigma_3 \cdot k_3 + \Sigma_4 \cdot k_4 + \Sigma_5 \cdot k_5 + [W] = \text{-}0.00001.$$

5. Обчислення зрівноважених значень виміряних кутів

5.1) обчислення поправок до виміряних кутів: $v_i = a_{1i}k_1 + a_{2i}k_2 + a_{3i}k_3 + a_{4i}k_4 + a_{5i}k_5$. Розрахунок невідомих поправок v_i

та їх контроль за $[pv^2]$ здійснено у додаткових стовпцях схеми обчислення коефіцієнтів нормальних рівнянь корелат.

5.2) обчислення зрівноважених значень виміряних кутів: $\tilde{\beta}_i = \beta_i + v_i$;

№ виміру	β_i	v_i	$\tilde{\beta}_i$
1	64 ° 36 ′ 00,9 ″	-2,1 ″	64 ° 35 ′ 58,8 ″
2	65 ° 53 ′ 45,2 ″	-2,8 ″	65 ° 53 ′ 42,4 ″
3	49 ° 30 ′ 19,3 ″	-0,5 ″	49 ° 30 ′ 18,8 ″
4	55 ° 19 ′ 45,2 ″	2,0 ″	55 ° 19 ′ 47,2 ″
5	55 ° 12 ′ 15,1 ″	1,7 ″	55 ° 12 ′ 16,8 ″
6	69 ° 27 ′ 52,6 ″	3,4 ″	69 ° 27 ′ 56,0 ″
7	33 ° 44 ′ 19,4 ″	-2,8 ″	33 ° 44 ′ 16,6 ″
8	103 ° 13 ′ 43,4 ″	-2,1 ″	103 ° 13 ′ 41,3 ″
9	43 ° 02 ′ 01,7 ″	0,4 ″	43 ° 02 ′ 02,1 ″

5.3) контроль зрівноважування кутів мережі виконуємо обчисленням нев'язок умовних рівнянь. За умовою задачі, нев'язки рівнянь, обчислені за зрівноваженими кутами, повинні дорівнювати нулю:

$$W_1 = \tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2 + \tilde{\beta}_3 - 180^\circ = 0; \qquad W_2 = \tilde{\beta}_4 + \tilde{\beta}_5 + \tilde{\beta}_6 - 180^\circ = 0;$$

$$W_3 = \tilde{\beta}_7 + \tilde{\beta}_8 + \tilde{\beta}_9 - 180^\circ = 0; \qquad W_4 = \tilde{\beta}_2 + \tilde{\beta}_5 + \tilde{\beta}_8 - \angle AOB = 0;$$

$$W_5 = \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{\sin\tilde{\beta}_3 \cdot \sin\tilde{\beta}_6 \cdot \sin\tilde{\beta}_9}{\sin\tilde{\beta}_1 \cdot \sin\tilde{\beta}_4 \cdot \sin\tilde{\beta}_7} - 1 = 0.$$

6. Оцінка точності за результатами зрівноважування

6.1) обчислення середньої квадратичної похибки результату виміру кута за формулою Бесселя:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-k}} = \sqrt{\frac{43.4331}{9-4}} = \pm 2{,}9\,''.$$

6.2) середню квадратичну похибку оцінюваної довжини сторони $s_{DC} = b_1 \dfrac{\sin\tilde{\beta}_3 \cdot \sin\tilde{\beta}_5}{\sin\tilde{\beta}_1 \cdot \sin\tilde{\beta}_4}$ виражає формула $M_s = M_F = \dfrac{m}{\rho''}\sqrt{\dfrac{1}{P_F}} \times 10^3$. Обернену вагу обчислено в схемі Гаусса-Дулітля: $\dfrac{1}{P_F} = 3.0807$. Тож

$$M_s = \frac{2.9''}{206265''}\sqrt{3.0807} \cdot 10^3 = \pm 0.025\ (м) \quad \text{і} \quad s_{DC} = 1524.054 \pm 0.025\ (м).$$

Послідовність та результати зрівноважування мережі у матричній формі

1. Формування системи умовних рівнянь поправок

Враховуючи складені раніше п'ять умовних рівнянь поправок, які виникають у заданій мережі, згідно форми (3.3.9) можна записати:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 + v_2 + v_3 + 5.4 = 0 \\ v_4 + v_5 + v_6 - 7.1 = 0 \\ v_7 + v_8 + v_9 + 4.5 = 0 \\ v_2 + v_5 + v_8 + 3.2 = 0 \\ -0.47 \cdot v_1 + 0.85 \cdot v_3 - 0.69 \cdot v_4 + 0.37 \cdot v_6 - 1.5 \cdot v_7 + 1.07 \cdot v_9 - 5.1 = 0 \end{array}\right\} = \underset{5\times9}{A} \cdot \underset{9\times1}{V} + \underset{5\times1}{W} = 0.$$

Матриці $\underset{5\times9}{A}$ та $\underset{5\times1}{W}$ містять коефіцієнти та нев'язки умовних рівнянь:

$$\underset{5\times9}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.47 & 0 & 0.85 & -0.69 & 0 & 0.37 & -1.5 & 0 & 1.07 \end{pmatrix}; \quad \underset{5\times1}{W} = \begin{pmatrix} 5.4 \\ -7.1 \\ 4.5 \\ 3.2 \\ -5.1 \end{pmatrix}.$$

2. Формування системи нормальних рівнянь корелат

Система нормальних рівнянь корелат (3.3.18) при зрівноважуванні рівноточних вимірів має вигляд (3.3.20): $\underset{5\times5}{N} \cdot \underset{5\times1}{K} + \underset{5\times1}{W} = \underset{5\times9}{A} \cdot \underset{9\times5}{A^T} \cdot \underset{5\times1}{K} + \underset{5\times1}{W} = 0$.

Тож після перемноження матриць $\underset{5\times9}{A}$ та $\underset{9\times5}{A^T}$ одержимо

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & 0.38 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -0.32 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -0.43 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0.38 & -0.32 & -0.43 & 0 & 4.9513 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5.4 \\ -7.1 \\ 4.5 \\ 3.2 \\ -5.1 \end{pmatrix} = 0$$

Національний університет водного господарства та природокористування

або в розгорнутому вигляді

$$\left.\begin{array}{l} 3 \cdot k_1 + k_4 + 0.38 \cdot k_5 + 5.4 = 0 \\ 3 \cdot k_2 + k_4 - 0.32 \cdot k_5 - 7.1 = 0 \\ 3 \cdot k_3 + k_4 - 0.43 \cdot k_5 + 4.5 = 0 \\ k_1 + k_2 + k_3 + 3 \cdot k_4 + 3.2 = 0 \\ 0.38 \cdot k_1 - 0.32 \cdot k_2 - 0.43 \cdot k_3 + 4.9513 \cdot k_5 - 5.1 = 0 \end{array}\right\}.$$

3. Розв'язування системи нормальних рівнянь корелат

Невідомі корелати k_j виражає формула $\underset{5\times1}{K} = -\underset{5\times5}{Q} \cdot \underset{5\times1}{W}$.

Обернена матриця

$$\underset{5\times5}{Q} = \underset{5\times5}{N^{-1}} = \begin{pmatrix} 0.39123 & 0.05274 & 0.05193 & -0.16530 & -0.02211 \\ 0.05274 & 0.39226 & 0.05990 & -0.16830 & 0.02651 \\ 0.05193 & 0.05990 & 0.39448 & -0.16877 & 0.03414 \\ -0.16530 & -0.16830 & -0.16877 & 0.50079 & -0.01285 \\ -0.02211 & 0.02651 & 0.03414 & -0.01285 & 0.20834 \end{pmatrix}$$ забезпечує

результат розв'язку $\underset{5\times1}{K}=\begin{pmatrix}-1{,}55567\\2{,}90444\\-0{,}91612\\-1{,}21088\\1{,}25758\end{pmatrix}$.

Контроль розв'язку: 1) $\underset{5\times5}{N}\cdot\underset{5\times5}{Q}=\underset{5\times5}{E}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$; 2) $\underset{5\times5}{N}\cdot\underset{5\times1}{K}+\underset{5\times1}{W}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

4. Обчислення зрівноважених значень виміряних кутів

4.1) обчислення поправок до виміряних кутів за корелатними рівняннями поправок $\underset{9\times1}{V}=\underset{9\times5}{A^T}\cdot\underset{5\times1}{K}$:

$$\underset{9\times1}{V}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&-0.47\\1&0&0&1&0\\1&0&0&0&0.85\\0&1&0&0&-0.69\\0&1&0&1&0\\0&1&0&0&0.37\\0&0&1&0&-1.50\\0&0&1&1&0\\0&0&1&0&1.07\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1{,}55567\\2{,}90444\\-0{,}91612\\-1{,}21088\\1{,}25758\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2.1\\-2.8\\-0.5\\2.0\\1.7\\3.4\\-2.8\\-2.1\\0.4\end{pmatrix}.$$

4.2) обчислення зрівноважених значень виміряних кутів $\underset{9\times1}{\tilde{\beta}}=\underset{9\times1}{\beta}+\underset{9\times1}{V}$:

$$\underset{9\times1}{\tilde{\beta}}=\begin{pmatrix}64^\circ36'00.9''\\65^\circ53'45.2''\\49^\circ30'19.3''\\55^\circ19'45.2''\\55^\circ12'15.1''\\69^\circ27'52.6''\\33^\circ44'19.4''\\103^\circ13'43.4''\\43^\circ02'01.7''\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2.1''\\-2.8''\\-0.5''\\2.0''\\1.7''\\3.4''\\-2.8''\\-2.1''\\0.4''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}64^\circ35'58.8''\\65^\circ53'42.4''\\49^\circ30'18.8''\\55^\circ19'47.2''\\55^\circ12'16.8''\\69^\circ27'56.0''\\33^\circ44'16.6''\\103^\circ13'41.3''\\43^\circ02'02.1''\end{pmatrix}.$$

4.3) контроль зрівноважування виконується обчисленням нев'язок умовних рівнянь за зрівноваженими кутами (див. попередній приклад).

5. Оцінка точності за результатами зрівноважування

5.1) обчислення середньої квадратичної похибки результату виміру кута за формулою Бесселя: $$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-k}},$$

де $[v^2] = \underset{1\times 9}{V^T} \cdot \underset{9\times 1}{V} = 43{,}4331$: $m = \pm 2{,}9\,''$.

5.2) оцінимо точність зрівноважених кутів $\tilde{\beta}_i$ і довжини сторони DC. Значення частинних похідних $F_{ji} = \left(\frac{\partial F_j}{\partial \beta_i}\right)_{\circ}$ функцій $F_j(\tilde{\beta}_1, \ldots, \tilde{\beta}_n) = \tilde{\beta}_j$, які виражають зрівноважені кути, формують одиничну матрицю: $\underset{9\times 9}{F} = \underset{9\times 9}{E}$. Номер рядка j такої матриці дорівнює номеру оцінюваного кута. Зрівноважуванню підлягали рівноточні виміри, тому оцінка точності їх кінцевих значень повинна здійснюватись за формулами (3.3.73) і (3.3.74). Однак за поставленої умови задачі оцінку кутів $\tilde{\beta}_i$ зручно виконувати разом з оцінкою довжини s_{DC}. Задана довжина сторони виражається функцією зрівноважених кутів $s_{DC} = F(\tilde{\beta}_1, \ldots, \tilde{\beta}_n) = b_1 \dfrac{\sin\tilde{\beta}_3 \cdot \sin\tilde{\beta}_5}{\sin\tilde{\beta}_1 \cdot \sin\tilde{\beta}_4}$, а значення її частинних похідних $F_i = \left(\frac{\partial F}{\partial \beta_i}\right)_{\circ}$, які вже встановлені раніше, формують додатковий рядок одиничної матриці $\underset{9\times 9}{F} = \underset{9\times 9}{E}$. Тож у підсумку маємо матрицю частинних похідних усіх оцінюваних функцій:

$$\underset{10\times 9}{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -720 & 0 & 1300 & -1050 & 1060 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вагову матрицю сукупності оцінюваних величин виражає формула (3.3.90):

$$\underset{10\times 10}{Q_F} = \underset{10\times 9}{F} \cdot \underset{9\times 10}{F^T} - \underset{10\times 9}{F} \cdot \underset{9\times 5}{A^T} \cdot \underset{5\times 5}{Q} \cdot \underset{5\times 9}{A} \cdot \underset{9\times 10}{F^T} =$$

$$
=\begin{pmatrix}
0.542 & -0.242 & -0.300 & -0.123 & 0.119 & 0.004 & -0.216 & 0.123 & 0.093 & -524.315 \\
-0.242 & 0.439 & -0.196 & 0.091 & -0.220 & 0.128 & 0.064 & -0.219 & 0.154 & -409.723 \\
-0.300 & -0.196 & 0.496 & 0.032 & 0.101 & -0.133 & 0.152 & 0.095 & -0.247 & 934.039 \\
-0.123 & 0.091 & 0.032 & 0.545 & -0.215 & -0.331 & -0.212 & 0.123 & 0.089 & -669.989 \\
0.119 & -0.220 & 0.101 & -0.215 & 0.444 & -0.229 & 0.129 & -0.224 & 0.094 & 740.996 \\
0.004 & 0.128 & -0.133 & -0.331 & -0.229 & 0.560 & 0.083 & 0.101 & -0.183 & -71.007 \\
-0.216 & 0.064 & 0.152 & -0.212 & 0.129 & 0.083 & 0.239 & -0.194 & -0.045 & 712.390 \\
0.123 & -0.219 & 0.095 & 0.123 & -0.224 & 0.101 & -0.194 & 0.442 & -0.249 & -331.272 \\
0.093 & 0.154 & -0.247 & 0.089 & 0.094 & -0.183 & -0.045 & -0.249 & 0.294 & -381.118 \\
-524.315 & -409.723 & 934.039 & -669.989 & 740.996 & -71.007 & 712.390 & -331.272 & -381.118 & 3080700.889
\end{pmatrix}
$$

Точність оцінюваних величин визначає кореляційна матриця $\underset{10\times 10}{M_F^2} = m^2 \cdot \underset{10\times 10}{Q_F}$.

Приймаючи до уваги, що на головній діагоналі вагової матриці $\underset{10\times 10}{Q_F}$ містяться обернені ваги $\dfrac{1}{P_{F_j}}$, середні квадратичні помилки потрібних величин можна виражати окремо за формулою (3.2.47). Наприклад,

$$M_{\tilde{\beta}_1} = m\sqrt{\frac{1}{P_{F_1}}} = 2.9''\sqrt{0.542} = \pm 2.2'';$$

$$M_{\tilde{\beta}_2} = m\sqrt{\frac{1}{P_{F_2}}} = 2.9''\sqrt{0.439} = \pm 2.0'';$$

$$M_S = \frac{m}{\rho''}\sqrt{\frac{1}{P_{F_{10}}}} = \frac{2.9''}{206265''}\sqrt{3080700.889} = \pm 0.025 \ (\text{м}).$$

Тісноту залежності між оцінюваними величинами виражає коефіцієнт кореляції, значення якого встановлює формула (3.3.75).

Наприклад, для перших двох зрівноважених кутів

$$r_{\tilde{\beta}_1\tilde{\beta}_2} = \frac{Q_{F_{12}}}{\sqrt{\dfrac{1}{P_{F_1}} \cdot \dfrac{1}{P_{F_2}}}} = \frac{-0.242}{\sqrt{0.542 \times 0.439}} = -0.5. \cdot$$

Питання для самостійної роботи

1. Зміст завдання зрівноважування вимірів корелатним способом.
2. Що називають умовними рівняннями поправок?
3. Що називають нев'язкою умовного рівняння?
4. Загальна класифікація умовних рівнянь поправок.
5. Види і правила складання умовних рівнянь поправок у геодезичних мережах.
6. Що називають корелатами, корелатними рівняннями поправок?
7. Обчислення і контроль коефіцієнтів нормальних рівнянь корелат.
8. Схема обчислення коефіцієнтів нормальних рівнянь корелат.
9. Правила формування і властивості системи нормальних рівнянь корелат.
10. Розв'язування системи нормальних рівнянь корелат у матричній формі.
11. Розв'язування системи нормальних рівнянь корелат способом Гаусса.
12. Способи контролю розв'язування системи нормальних рівнянь корелат.
13. Розв'язування системи нормальних рівнянь корелат у схемі Гаусса-Дулітля.
14. Обчислення зрівноважених значень результатів вимірів.
15. Як виконати заключний контроль зрівноважування корелатним способом?
16. Зміст завдання оцінки точності за результатами зрівноважування корелатним способом.
17. Обчислення середніх квадратичних похибок одиниці ваги та результатів вимірів.
18. Загальний принцип вираження ваг оцінюваних величин за результатами зрівноважування корелатним способом.
19. Оцінка точності зрівноважених результатів вимірів.
20. Оцінка точності функцій зрівноважених вимірів.
21. Оцінка точності величин у схемі Гаусса-Дулітля.

2. РОЗПОДІЛ БАЛІВ, що присвоюються студентам за виконання практичних робіт на тему:

№ з/п	Назви завдань	Кількість балів	
		Практичні заняття	Тести
1	Формування системи умовних рівнянь поправок. Складання вагових функцій. Формування системи нормальних рівнянь корелат.	2	2
2	Розв'язування системи нормальних рівнянь корелат у схемі Гаусса-Дулітля	2	2
3	Обчислення зрівноважених значень виміряних величин	1	2
4	Оцінка точності за результатами зрівноважування	1	1

ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Войтенко С.П. Математична обробка геодезичних вимірів. Метод найменших квадратів: Навчальний посібник. – К.: КНУБА, 2005. – 236 с.
2. Зазуляк П.М., Гавриш В.І., Євсєєва Е.М., Йосипчук М.Д. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірювань: Підручник. – Львів: Растр-7, 2007. – 408 с.
3. Гайдаев П.А., Большаков В.Д. Теория математической обработки геодезических измерений. М., Недра, 1969. – 367с.
4. Видуев Н.Г., Григоренко А.Г. Математическая обработка геодезических измерений. Киев, Высшая школа, 1978.
5. Мазмишвили А.И. Способ наименьших квадратов, М., Недра, 1968. – 437 с.
6. Большаков В.Д., Маркузе Ю.И., Голубев В.В. Уравнивание геодезических построений. М., Недра, 1989. – 413 с.

ДОДАТКИ

Додаток 1

Схема обчислення коефіцієнтів нормальних рівнянь корелат у корелатному способі зрівноважування.

№ вимірів	$q_i = \frac{1}{p_i}$	a_{1i}	a_{2i}	…	a_{ri}	s_i
1	q_1	a_{11}	a_{21}	…	a_{r1}	s_1
2	q_2	a_{12}	a_{22}	…	a_{r2}	s_2
…	…	…	…	…	…	…
n	q_n	a_{1n}	a_{2n}	…	a_{rn}	s_n
$[qa_1$		$[qa_1a_1]$	$[qa_1a_2]$	…	$[qa_1a_r]$	$[qa_1s]$
$[qa_2$			$[qa_2a_2]$	…	$[qa_2a_r]$	$[qa_2s]$
…			…	…	…	…
$[qa_r$					$[qa_ra_r]$	$[qa_rs]$
$[qs$						$[qss]$