Міністерство освіти і науки України

Національний університет водного господарства
та природокористування

Я.І.Ярмуш, І.В.Самолюк

Вища математика

Практикум

Навчальний посібник

Рівне – 2015

УДК 517 (075.8)
ББК 22.11я7
Я75

Рекомендовано вченою радою Національного університету водного господарства та природокористування.
(Протокол № 7 від 4 червня 2015 р.)

Рецензенти:
Власюк А.П., доктор технічних наук, професор Міжнародного економіко-гуманітарного університету ім. С. Дем'янчука (м. Рівне);
Сяський В.О., кандидат фізико-математичних наук, доцент Національного університету водного господарства та природокористування (м. Рівне).

Ярмуш Я.І., Самолюк І.В.
Я75 Вища математика. Практикум: Навчальний посібник – Рівне: НУВГП, 2015. – 148 с.

У навчальному посібнику подано короткі теоретичні відомості, наведено приклади розв'язання типових задач. У практикумі вміщено завдання для самостійної роботи студентів та підготовки до практичних занять.

Практикум призначено для студентів 1-го курсу напрямів підготовки: 6.030505 "Управління персоналом та економіка праці", 6.030601 "Менеджмент", 6.030501 "Товарознавство і торговельне підприємництво".

УДК 517 (075.8)
ББК 22.11я7

ПЕРЕДМОВА

Запропонований навчальний посібник написаний на основі лекційних та практичних занять, проведених авторами для студентів напрямку підготовки "Управління персоналом та економіка праці" і відповідає програмі нормативної дисципліни "Математика для економістів" ("Вища математика").

Навчальний посібник буде корисним для усіх неінженерних спеціальностей, де курс вищої математики складає невелику кількість годин (економічні спеціальності, тощо), а також студентам заочної форми навчання.

Весь програмний матеріал розбитий на окремі параграфи у яких викладені короткі теоретичні відомості, приведено розв'язання багатьох типових прикладів та містяться завдання для самостійної роботи студентів. Ці завдання можна використовувати як збірник задач для поточних домашніх завдань для студентів.

Метою навчального посібника є надання методичної допомоги студентам у самостійній роботі при вивченні вищої математики, при підготовці до практичних занять, у розвитку уміння логічно правильно викласти розв'язання задачі, супроводжуючи його необхідними формулами та міркуваннями.

Розділ 1

ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ ТА ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ І АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Тема 1. Елементи лінійної і векторної алгебри

§1. Визначники другого і третього порядків, їх властивості та обчислення. Мінори та алгебраїчні доповнення елементів визначника. Розклад визначника за елементами його рядка чи стовпця. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь за формулами Крамера

Визначники другого і третього порядків визначаються рівностями:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \,,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

Числа a_{ij} ($i,j = 1,2,3$) називаються елементами визначника. Мінором будь-якого елемента a_{ij} називається визначник M_{ij}, одержаний з даного визначника, що не містить рядка і стовпця на перетині яких знаходиться цей елемент. Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} визначника є число $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їх відповідні алгебраїчні доповнення. Це можна використовувати як ще один метод обчислення визначників.

В багатьох випадках спрощує обчислення визначників використання властивостей визначника, зокрема, спільний множник всіх елементів деякого рядка або стовпця можна винести за знак визначника, якщо відповідні елементи двох рядків чи стовпців пропорційні, то визначник дорівнює нулю; якщо всі елементи деякого рядка або стовпця визначника задані у вигляді суми двох елементів, то визначник можна представити у вигляді суми двох визначників, в одному з яких елементи відповідного рядка чи стовпця є першими доданками, а в другому – другими доданками; якщо до елементів будь-якого рядка чи стовпця додати відповідні елементи іншого рядка або стовпця, помножені на одне і те ж число, то визначник не змінить своєї величини.

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Якщо визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

То дана система має єдиний розв'язок $\{(x_1, x_2, x_3)\}$, який знаходиться за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Приклад 1. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. $\Delta = (-3)\cdot 4 - 2\cdot 5 = -22$.

Приклад 2. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4\sin\frac{\pi}{12} \\ \cos\frac{\pi}{12} & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. $\Delta = 2 + 4\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} = 2 + 2\sin\frac{\pi}{6} = 3$.

Приклад 3. Обчислити мінор M_{12} і алгебраїчне доповнення A_{12} визначника третього порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 7 & 2 & -5 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = -10 - 42 = -52,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 M_{12} = -1 \cdot (-52) = 52.$$

Приклад 4. Обчислити визначник третього порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 6 & -3 & 8 \end{vmatrix}$$

безпосередньо та розкладом за елементами першого рядка.

Розв'язання.

$$\Delta = 3 \cdot 2 \cdot 8 + 4 \cdot 5 \cdot 6 + (-1) \cdot (-3) \cdot 2 - 6 \cdot 2 \cdot 2 - 4 \cdot (-1) \cdot 8 - (-3) \cdot 5 \cdot 3 = 227.$$

Той самий результат отримаємо якщо розкласти даний визначник за елементами першого рядка:

$$\Delta = 3 \cdot A_{11} + 4 \cdot A_{12} + 2 \cdot A_{13} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} +$$

$$+ 2 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 31 - 4 \cdot (-38) + 2 \cdot (-9) = 227.$$

Метод розкладу визначника за елементами деякого рядка або стовпця особливо ефективний тоді, коли у визначнику всі елементи будь-якого рядка (стовпця), крім одного, дорівнюють нулю. Тоді при обчисленні такого визначника його потрібно розкласти за елементами цього рядка (стовпця).

Приклад 5. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Розкладаючи цей визначник за елементами першого рядка, маємо:

$$\Delta = 3 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (35 - 24) = 33 .$$

Користуючись властивістю незмінності визначника при додаванні до елементів деякого рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця) помножених на одне і те ж число, можна заданий визначник звести до визначника у якому всі елементи будь-якого рядка (стовпця), крім одного, будуть рівні нулю.

Приклад 6. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} .$$

Розв'язання. До елементів другого і третього стовпців додамо відповідні елементи першого стовпця помножені відповідно для другого стовпця на -2, а для третього – на 3, одержимо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 11 \\ -2 & 5 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 11 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = 25 - 55 = -30 .$$

Зауважимо, що цей метод можна використовувати для визначників вищих порядків.

Приклад 7. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 981 & 982 & 983 \\ 984 & 985 & 986 \\ 987 & 988 & 989 \end{vmatrix} .$$

Розв'язання. Елементи першого стовпця помножимо на (-1) і додамо до відповідних елементів другого та третього стовпців, будемо мати:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 981 & 1 & 2 \\ 984 & 1 & 2 \\ 987 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 ,$$

оскільки елементи другого та третього рядків пропорційні.

Приклад 8. Розв’язати систему рівнянь за формулами Крамера

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 8, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Розв’язання. Знайдемо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -12 - 8 + 3 - 8 - 2 - 18 = -45 \neq 0,$$

отже, система має єдиний розв’язок.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -96 + 3 - 4 - 4 - 16 - 18 = -135;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 32 + 3 - 6 - 2 + 72 = 90;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 12 + 24 - 64 - 3 + 6 = -45.$$

За формулами Крамера: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-135}{-45} = 3;$ $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{90}{-45} = -2;$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-45}{-45} = 1.$$

Розв’язок системи: $\{(3; -2; 1)\}$.

Приклад 9. Розв’язати систему рівнянь за формулами Крамера

$$\begin{cases} x + 2z = -3, \\ 2x + 3y = 5, \\ 3y + z = 1. \end{cases}$$

Розв’язання. Знайдемо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 12 = 15 \neq 0,$$

отже, система має єдиний розв'язок.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -9 + 30 - 6 = 15;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 4 + 6 = 15;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 18 - 15 = -30.$$

За формулами Крамера: $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 1;\ \ y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 1;\ \ z = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = -2.$

Розв'язок системи: $\{(1; 1; -2)\}$.

Завдання для самостійного розв'язування

10. Обчислити визначники другого порядку:

1) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} \cos 8x & -\sin 5x \\ \sin 8x & \cos 5x \end{vmatrix}$.

11. Розв'язати рівняння $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0$.

12. Обчислити визначники третього порядку:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$;

$$4)\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}; \quad 5)\begin{vmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 \end{vmatrix}; \quad 6)\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

13. Розв'язати системи рівнянь за формулами Крамера:

$$1)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases} \quad 2)\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 9x_3 = 28, \\ 7x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -1, \\ 7x_1 + 9x_2 - 9x_3 = 5. \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x - y + 2z = -5, \\ 4x + y + 4z = -2. \end{cases} \quad 4)\begin{cases} 3x + 2y + z = 0, \\ 2x + 5y + 3z = 0, \\ 3x + 4y + 2z = 0. \end{cases}$$

§2. Матриці і дії над ними. Обернена матриця. Матричний метод розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Впорядкована таблиця чисел, що містить m рядків і n стовпців називається матрицею і записується у вигляді:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \; a_{12} \ldots \; a_{1n} \\ a_{21} \; a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots \; \ldots \; \ldots \; \ldots \\ a_{m1} \; a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пара чисел (m, n) визначає розмір матриці. Якщо $m \neq n$, то матриця називається прямокутною. Якщо $m = n$, то матриця називається квадратною, а число $m = n$ називається порядком цієї матриці.

Сумою двох матриць однакового розміру є матриця, елементи якої дорівнюють сумі відповідних елементів цих матриць. При множенні матриці на число потрібно всі її елементи помножити на це число.

Помножити матрицю A на матрицю B можна якщо число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B. Елемент C_{ik} матриці $C = A \cdot B$ дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи k-го стовпця матриці B. В цьому випадку, якщо (m, n) – розмір матриці A, а (n, p) – розмір матриці B, то (m, p) – розмір матриці C.

Матриця A', одержана з матриці A шляхом заміни рядків відповідними стовпцями і навпаки, називається транспонованою по відношенні до матриці A.

Матриця A^{-1} називається оберненою до квадратної матриці A, якщо $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, де Е – одинична матриця (всі елементи, які лежать на головній діагоналі рівні одиниці, а всі інші – нулі). Для існування оберненої матриці A^{-1} необхідно і достатньо, щоб визначник матриці A не дорівнював нулю. Такі матриці називаються неособливими.

Щоб знайти матрицю A^{-1}, обернену до неособливої матриці A, потрібно:

1. Обчислити визначник $\det A = \Delta$;
2. Знайти алгебраїчні доповнення A_{ik} елементів a_{ik} визначника Δ;
3. Скласти із чисел A_{ik} матрицю A^*;
4. Транспонувати матрицю A^*, утворивши матрицю $\widetilde{A} = (A^*)'$.

Матриця $\widetilde{A}$ називається приєднаною до матриці А;

5. Скласти обернену матрицю A^{-1}: $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta}\widetilde{A}$.

Матричний метод розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Нехай задана система рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Складемо матриці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ – матриця системи;

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$ – матриця-стовпець з вільних членів;

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$ – матриця-стовпець з невідомих.

Дану систему рівнянь записуємо в матричній формі – матричним рівнянням $AX=B$.

Якщо матриця А неособлива $(\det A=\Delta\neq 0)$, то отримуємо розв'язок системи рівнянь в матричній формі: $X=A^{-1}B$.

Приклад 14. Знайти $3A+2B$, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$3A+2B=3\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & -3 & 6 \\ 15 & 6 & -9 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 10 & 4 & 2 \\ 6 & -8 & 4 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 19 & 1 & 8 \\ 21 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Приклад 15. Знайти $A\cdot B$, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Число стовпців матриці А дорівнює числу рядків матиці В, тому матриці можна перемножувати:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5\cdot 2+(-2)\cdot(-1)+3\cdot 3 & 5\cdot 3+(-2)\cdot 5+3\cdot 4 \\ 2\cdot 2+1(-1)+4\cdot 3 & 2\cdot 3+1\cdot 5+4\cdot 4 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 21 & 17 \\ 15 & 27 \end{pmatrix}.$$

Приклад 16. Знайти $A \cdot B$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+1+15 & 4+2+6 & 8+3+3 \\ 12-2+5 & 8-4+2 & 16-6+1 \\ 9+5-10 & 6+10-4 & 12+15-2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 22 & 12 & 14 \\ 15 & 6 & 11 \\ 4 & 12 & 25 \end{pmatrix}.$$

Приклад 17. Знайти $A \cdot B$ і $B \cdot A$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 10 & 30 \\ -6 & -4 & -12 \\ 9 & 6 & 18 \end{pmatrix};$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 - 4 + 18 \end{pmatrix} = (29).$$

Приклад 18. Знайти $A \cdot B$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}3&2&1\\-2&3&5\\1&4&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6+10+3\\-4+15+15\\2+20+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19\\26\\28\end{pmatrix}.$$

Приклад 19. Знайти матрицю A^{-1}, обернену до матриці

$$A=\begin{pmatrix}-3&-1&2\\4&-1&3\\2&1&4\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Обчислюємо визначник матриці:

$$\Delta=\begin{vmatrix}-3&-1&2\\4&-1&3\\2&1&4\end{vmatrix}=12-6+8+4+9+16=43\neq 0.$$

Знаходимо алгебраїчні доповнення елементів цього визначника:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-1&3\\1&4\end{vmatrix}=7;\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}4&3\\2&4\end{vmatrix}=-10;\quad A_{13}=\begin{vmatrix}4&-1\\2&1\end{vmatrix}=6;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}-1&2\\1&4\end{vmatrix}=6;\quad A_{22}=\begin{vmatrix}-3&2\\2&4\end{vmatrix}=-16;\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}-3&-1\\2&1\end{vmatrix}=1;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-1&2\\-1&3\end{vmatrix}=-1;\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}-3&2\\4&3\end{vmatrix}=17;\quad A_{33}=\begin{vmatrix}-3&-1\\4&-1\end{vmatrix}=7.$$

Складаємо матрицю:

$$A^*=\begin{pmatrix}-7&-10&6\\6&-16&1\\-1&17&7\end{pmatrix}$$ і транспонуємо її: $$\widetilde{A}=(A^*)'=\begin{pmatrix}-7&6&-1\\-10&-16&17\\6&1&7\end{pmatrix}.$$

Знаходимо матрицю A^{-1}, обернену до матриці А:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\widetilde{A}=\frac{1}{43}\begin{pmatrix}-7&6&-1\\-10&-16&17\\6&1&7\end{pmatrix}.$$

Приклад 20. Знайти матрицю A^{-1}, обернену до матриці

$$A=\begin{pmatrix}-3&5\\2&-4\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Обчислюємо визначник матриці:

$$\Delta=\begin{vmatrix}-3 & 5\\ 2 & -4\end{vmatrix}=12-10=2\neq 0\,.$$

Знаходимо алгебраїчні доповнення елементів визначника:

$A_{11}=-4;\quad A_{12}=-2;\quad A_{21}=-5;\quad A_{22}=-3.$

Складаємо матрицю

$A^{*}=\begin{pmatrix}-4 & -2\\ -5 & -3\end{pmatrix}$ і транспонуємо її: $\widetilde{A}=\begin{pmatrix}-4 & -5\\ -2 & -3\end{pmatrix}$.

Шукана обернена матриця: $A^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-4 & -5\\ -2 & -3\end{pmatrix}$.

Приклад 21. Розв'язати систему рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=6,\\ 3x_1-x_2+2x_3=5,\\ x_1+2x_2-3x_3=-1.\end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо систему рівнянь в матричній формі – матричним рівнянням $AX=B$, де

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 3 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}6\\ 5\\ -1\end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}.$$

Визначник матриці А – коефіцієнтів при невідомих системи:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ 3 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -3\end{vmatrix}=24\neq 0\,.$$

Розв'язок системи рівнянь в матричній формі: $X=A^{-1}\cdot B$. Знайдемо обернену матрицю A^{-1}, для цього обчислимо алгебраїчні доповнення визначника заданої системи:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-1;\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & -3\end{vmatrix}=11;\quad A_{13}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=7;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & -3\end{vmatrix}=7;\quad A_{22}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-5;\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 11.$$

Складаємо матриці:

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & 11 & 7 \\ 7 & -5 & -1 \\ 5 & -7 & -11 \end{pmatrix} \text{ і } \widetilde{A} = (A^*)' = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 \\ 11 & -5 & -7 \\ 7 & -1 & -11 \end{pmatrix}.$$

Обернена матриця: $A^{-1} = \dfrac{1}{24}\begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 \\ 11 & -5 & -7 \\ 7 & -1 & -11 \end{pmatrix}$.

Шуканий розв'язок: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{24}\begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 \\ 11 & -5 & -7 \\ 7 & -1 & -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} =$

.

$$= \frac{1}{24}\begin{pmatrix} -6+35-5 \\ 66-25+7 \\ 42-5+11 \end{pmatrix} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 24 \\ 48 \\ 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\{(1;2;2)\}$.

Приклад 22. Розв'язати систему рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9, \\ 2x - y + 3z = 5, \\ 4x + 3y - 5z = 3. \end{cases}$$

Розв'язання. Відповідне матричне рівняння для даної системи: $AX = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Визначник матриці А, складений з коефіцієнтів при невідомих системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 50 \neq 0 .$$

Розв'язок системи рівнянь в матричній формі: $X = A^{-1} \cdot B$. Після знаходження оберненої матриці A^{-1}, одержимо:

$$A^{-1} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} -4 & 13 & 7 \\ 22 & -9 & -1 \\ 10 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Тому шуканий розв'язок даної системи:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} -4 & 13 & 7 \\ 22 & -9 & -1 \\ 10 & 5 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\{(1;3;2)\}$.

Завдання для самостійного розв'язування

23. Знайти добутки матриць:

1) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

24. Знайти обернену матрицю A^{-1}, якщо:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

25. Розв'язати систему рівнянь матричним методом:

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x - y + 2z = -5, \\ 4x + y + 4z = -2. \end{cases}$

§3. Основні поняття про вектори. Лінійні операції над векторами. Скалярний добуток двох векторів. Кут між двома векторами, проекція вектора на вектор

Вектор $\overrightarrow{AB}$ – це напрямний відрізок прямої, довжина якого називається модулем вектора; записують $|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}|$.

Вектор $\vec{a}$ заданий координатами a_x, a_y, a_z записують у вигляді: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ або $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори, напрями яких співпадають з додатними напрямками осей координат (орти).

Якщо початок вектора міститься в точці $A(x_1; y_1; z_1)$, а кінець – в точці $B(x_2; y_2; z_2)$, то $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$. При додаванні (відніманні) векторів їх відповідні координати додаються (віднімаються), при множенні вектора на число всі його координати множаться на це число.

Якщо вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ колінеарні, то: $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$.

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$. Число $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2$ – скалярний квадрат вектора $\vec{a}$. Тоді $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$. Якщо вектори задані координатами $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ і $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$. Кут $\varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ знаходиться за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}},$$

проекція вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ знаходиться за формулою:

$$np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}}.$$

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Приклад 26. Дано точки: $A(3;\ -1;\ 2)$, $B(4;\ 3;\ 1)$, $C(5;\ 2;\ 3)$. Знайти вектор $\vec{a} = 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{BC}$.

Розв'язання.

$\overrightarrow{AB}$ = (4-3; 3+1; 1-2) = (1; 4; -1), $\overrightarrow{BC}$ = (5-4; 2-3; 3-1) = (1; -1; 2),

3 $\overrightarrow{AB}$ = (3; 12; -3), $4\overrightarrow{BC}$ = (4; -4; 8), $\vec{a}$ = (3+4; 12-4; -3+8) = (7; 8; 5).

Приклад 27. Знайти: $\left(4\vec{a} + 3\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a} - 2\vec{b}\right)$, якщо $\left|\vec{a}\right| = 2$, $\left|\vec{b}\right| = 3$,

$\varphi = \dfrac{2}{3}\pi$ (кут між $\vec{a}$ і $\vec{b}$).

Розв'язання.

$$\left(4\vec{a} + 3\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a} - 2\vec{b}\right) = 4\vec{a}^{\,2} + 3\vec{b}\cdot\vec{a} - 8\vec{a}\cdot\vec{b} - 6\vec{b}^{\,2} = 4\left|\vec{a}\right|^2 - 5\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi - 6\left|\vec{b}\right|^2 =$$

$$= 4\cdot 4 - 5\cdot 2\cdot 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 6\cdot 9 = -23.$$

Приклад 28. Знайти: $\left|2\vec{a} - 3\vec{b}\right|$, якщо $\left|\vec{a}\right| = 4$, $\left|\vec{b}\right| = 2$, кут між векторами $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

Розв'язання.

$$\left|2\vec{a} - 3\vec{b}\right| = \sqrt{(2\vec{a} - 3\vec{b})^2} = \sqrt{4\vec{a}^{\,2} - 12\vec{a}\cdot\vec{b} + 9\vec{b}^{\,2}} = \sqrt{4\left|\vec{a}\right|^2 - 12\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi + 9\left|\vec{b}\right|^2} =$$

$$= \sqrt{4\cdot 16 - 12\cdot 4\cdot\frac{1}{2} - 9\cdot 4} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}.$$

Приклад 29. Дано трикутник з вершинами в точках: $A(1;\ 1;\ -2)$, $B(3;\ 2;\ 1)$, $C(2;\ 4;\ -1)$. Знайти внутрішній кут φ при вершині B і проекцію вектора $\overrightarrow{BA}$ на вектор $\overrightarrow{BC}$.

Розв'язання. Шуканий кут φ – це кут між векторами $\overrightarrow{BA}$ та $\overrightarrow{BC}$. В даному випадку, маємо $\overrightarrow{BA}$ = (-2; -1; -3) і $\overrightarrow{BC}$ = (-1; 2; -2). Тому

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{(-2)(-1)+(-1)2+(-3)(-2)}{\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{6}{3\sqrt{14}}=\frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$\varphi=\arccos\frac{2}{\sqrt{14}}\ .$$

$$np_{\overrightarrow{BA}}\overrightarrow{BC}=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{6}{3}=2\ .$$

Завдання для самостійного розв'язування

30. Дано $\left|\vec{a}\right|=11$, $\left|\vec{b}\right|=23$, $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=30$. Визначити $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$.

31. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=60°$, $\left|\vec{a}\right|=5$, $\left|\vec{b}\right|=8$. Знайти $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ і $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$.

32. Дано $\left|\vec{a}\right|=3$, $\left|\vec{b}\right|=4$, кут між векторами $\varphi=120°$. Знайти $\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)$.

33. Дано вершини трикутника *A*(-1; -2; 4), *B*(-4; -2; 0), *C*(3; -2; 1). Знайти внутрішній кут при вершині А.

34. Дано *A*(4; 1; 0), *B*(2; 2; 1), *C*(6; 3; 1). Знайти $np_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB}$.

Тема 2. Елементи аналітичної геометрії

§1. Найпростіші задачі аналітичної геометрії. Пряма лінія на площині. Різні види рівнянь прямої лінії. Кут між двома прямими. Відстань від точки до прямої

Віддаль між двома точками.

Якщо в прямокутній декартовій системі координат задані дві точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$, то віддаль між двома точками знаходиться за формулою:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

Поділ відрізка у заданому відношенні.

Нехай $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$ – дві точки, які є кінцями відрізка AB. Координати точки $C(x_c; y_c; z_c)$, яка ділить цей відрізок у відношенні $\lambda = \dfrac{AC}{CB}$ знаходяться за формулами:

$$x_c = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda};\quad y_c = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda};\quad z_c = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}\ .$$

Якщо точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ ділить відрізок навпіл, то

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2};\quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2};\quad z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}\ .$$

Найпростішою лінією на площині є пряма лінія. Основні види рівнянь прямої лінії на площині в прямокутній системі координат XOY :

1. Рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{N}(A; B)$ (вектор $\overrightarrow{N} \neq \vec{0}$ називається нормальним вектором) задається у вигляді:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0\ .$$

2. Будь-яке рівняння першого степеня відносно *x* і *y*, тобто

$$Ax + By + C = 0\ ,$$

де A, B, C – сталі коефіцієнти і $A^2 + B^2 \neq 0$ визначає на площині пряму лінію. Це рівняння називається загальним рівнянням прямої.

3. Рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0;y_0)$ паралельно вектору $\vec{S}(m;n)$ (вектор $\vec{S}\neq\vec{0}$ напрямний вектор) задається у вигляді:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}.$$

Це рівняння називається канонічним рівнянням прямої.

4. Пряма лінія, яка проходить через дві точки $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$ визначається рівнянням:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

5. Рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0;y_0)$ з заданим кутовим коефіцієнтом k ($k=tg\,\alpha$, де α – кут нахилу прямої з додатнім напрямком осі Ox):

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

Гострий кут між двома прямими, що мають кутові коефіцієнти k_1 і k_2, визначається за формулою:

$$tg\,\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|.$$

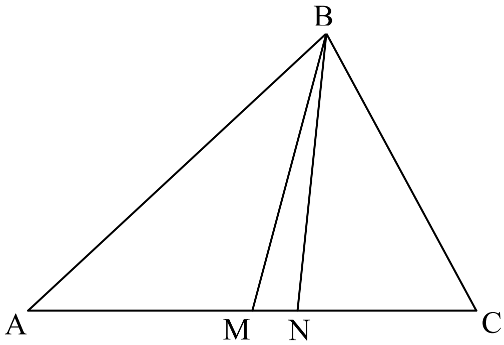
Умова паралельності двох прямих: $k_1=k_2$. Умова перпендикулярності двох прямих: $k_1\cdot k_2=-1$.

Відстань від точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямої $Ax+By+C=0$:

$$d=\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Приклад 35. Дано трикутник з вершинами в точках *A*(-2;-2), *B*(4;6), *C*(1;2). Знайти довжину бісектриси внутрішнього кута при вершині *B* і медіани проведених з цієї вершини до сторони *AC*.

Розв'язання.



Нехай M і N – відповідно середина сторони AC і точка перетину даної бісектриси з цією стороною. Знаходимо координати точки M. Згідно з формулами поділу відрізка AC навпіл, маємо: $x_M=\dfrac{x_A+x_c}{2}=\dfrac{-2+1}{2}=-\dfrac{1}{2}$; $y_M=\dfrac{y_A+y_c}{2}=\dfrac{-2+2}{2}=0$.

Точка $M\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$. Тому $MB=\sqrt{\left(4+\dfrac{1}{2}\right)^2+6^2}=\dfrac{15}{2}$.

Координати точки N знайдемо, використовуючи формули поділу відрізка АС в заданому відношенні λ, де

$$\lambda=\frac{AN}{NC}=\frac{AB}{BC},\quad AB=\sqrt{(4+2)^2+(6+2)^2}=10,$$

$BC=\sqrt{(1-4)^2+(2-6)^2}=5$. Отже, $\lambda=\dfrac{10}{5}=2$,

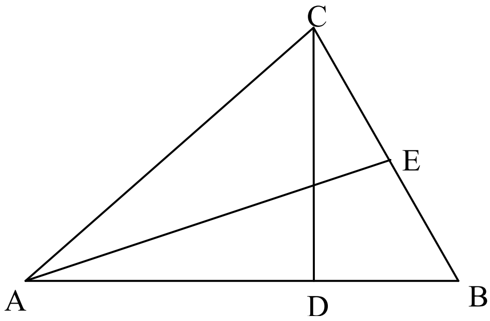
$$x_N=\frac{x_A+\lambda x_c}{1+\lambda}=\frac{-2+2\cdot 1}{3}=0;\quad y_N=\frac{y_A+\lambda y_c}{1+\lambda}=\frac{-2+2\cdot 2}{3}=\frac{2}{3}.$$

Точка $N\left(0;\dfrac{2}{3}\right)$. Тому $NB=\sqrt{(4-0)^2+\left(6-\dfrac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{16+\dfrac{16^2}{9}}=$

$$=4\cdot\frac{5}{3}=\frac{20}{3}.$$

Приклад 36. Дано трикутник з вершинами в точках A(-8;-3), B(4;-12), C(8;10). Знайти: 1) рівняння сторони AB; 2) рівняння висоти CD і її довжину; 3) рівняння медіани CE.

Розв'язання.



1. Рівняння лінії *AB*, згідно з рівнянням лінії, що проходить через дві точки, має вигляд:

$$\frac{x+8}{4+8}=\frac{y+3}{-12+3};\quad \frac{x+8}{12}=\frac{y+3}{-9};\quad \frac{x+8}{4}=\frac{y+3}{-3};$$

$$-3x-24=4y+12;\quad 3x+4y+36=0.$$

2. Оскільки нормальний вектор прямої лінії *AB* – $\vec{N}=(3;4)$ є напрямним вектором для висоти *CD*, то для знаходження її рівняння використаємо канонічне рівняння прямої з заданою точкою $C(8;10)$ і напрямним вектором $\vec{S}=\vec{N}=(3;4)$:

$$\frac{x-8}{3}=\frac{y-10}{4};\quad 4x-3y-2=0.$$

Для знаходження довжини висоти *CD* використаємо формулу віддалі точки $C(8;10)$ від прямої *AB*:

$$d=\frac{|3\cdot 8+4\cdot 10+36|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{100}{5}=20.$$

3. Точка E середина сторони *BC*, тому

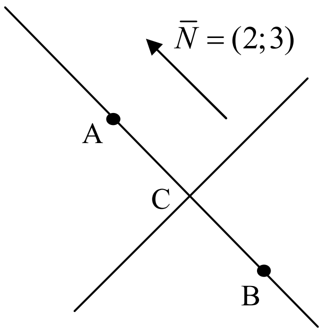
$$x_E=\frac{4+8}{2}=6;\quad y_E=\frac{-12+10}{2}=-1;\quad E(6;-1).$$

Застосувавши рівняння прямої, що проходить через дві точки *A* і *E*, знаходимо рівняння медіани *AE*:

$$\frac{x-(-8)}{6-(-8)}=\frac{y-(-3)}{-1-(-3)};\quad \frac{x+8}{14}=\frac{y+3}{2},\text{ звідки } x-7y-13=0.$$

Приклад 37. Знайти координати точки B симетричної до точки $A(6;7)$ відносно прямої лінії $2x+3y-7=0$.

Розв'язання.



Точка B лежить на перпендикулярі до даної прямої, проведеному з точки A. Тому напишемо рівняння прямої AB, що проходить через точку $A(6;7)$ з напрямним вектором $\vec{S}=\vec{N}(2;3)$, де $\vec{N}$ – нормальний вектор даної прямої:

$$\frac{x-6}{2}=\frac{y-7}{3};\quad 3x-2y-4=0.$$

Знаходимо точку C – перетину даної прямої зі знайденим перпендикуляром. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases}2x+3y-7=0;\\ 3x-2y-4=0.\end{cases}\quad \begin{cases}2x+3y-7=0 \ \times 2\\ 3x-2y-4=0 \ \times 3\end{cases};\quad 13x-26=0,$$

$$\begin{cases}x=2,\\ y=1.\end{cases}\quad C(2;1).$$

Оскільки точка C є серединою відрізка AB, то маємо:

$$x_C=\frac{x_A+x_B}{2},\quad y_C=\frac{y_A+y_B}{2},\text{ або:}$$

$$2=\frac{6+x_B}{2},\quad x_B=-2;\quad 1=\frac{7+y_B}{2},\quad y_B=-5.$$ Точка B(-2;-5).

Приклад 38. Знайти гострий кут між двома прямими $x+y-4=0$ і $6x-2y+3=0$.

Розв'язання. Знаходимо кутові коефіцієнти даних прямих:

$x+y-4=0, \quad y=-x+4, \quad k_1=-1;$

$6x-2y+3=0, \quad y=3x+\dfrac{3}{2}, \quad k_2=3.$

Шуканий кут φ визначаємо за формулою:

$$tg\,\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1\,k_2}\right|=\left|\frac{3+1}{1-3}\right|=\left|-2\right|=2; \quad \varphi=arctg\,2=63°30'.$$

Задачі для самостійного розв'язування

39. Дано дві суміжні вершини паралелограма *A*(-3;5), *B*(1;7) і точка перетину діагоналей *M*(1;1). Знайти дві інші вершини.

40. Дано вершини трикутника *A*(1;4), *B*(3;-9), *C*(-5;2). Знайти довжину медіани проведеної з вершини *B*.

41. Дано вершини трикутника *A*(2;-5), *B*(1;-2), *C*(4;7). Знайти точку перетину зі стороною *AC* бісектриси проведеної з внутрішнього кута *B*.

42. Дано рівняння двох суміжних сторін прямокутника $2x-3y+5=0$, $3x+2y-7=0$ і одна з його вершин *A*(2;-3). Знайти рівняння двох інших сторін прямокутника.

43. Знайти проекцію точки P(-6;4) на пряму $4x-5y+3=0$.

44. Написати рівняння сторін трикутника, якщо відома одна вершина *B*(-4;-5) і рівняння двох висот $5x+3y-4=0$ і $3x+8y+13=0$.

§2. Лінії другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола

Коло. Колом називається множина точок площини, віддаль яких від фіксованої точки, яка називається центром кола, є величина стала, яка називається радіусом.

Рівняння кола з центром $O_1(x_0;y_0)$ і радіусом *R* в прямокутній системі координат має вигляд:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2.$$

Зокрема якщо центр кола лежить в початку координат, то одержуємо канонічне рівняння кола:

$$x^2 + y^2 = R^2 .$$

Еліпс. Еліпсом називається множина точок площини, сума віддалей яких до двох заданих точок, які називаються фокусами, є величина стала (її позначають $2a$), при умові, що ця стала більша за віддаль між фокусами (яку позначають $2c$).

Якщо систему координат вибрати так, щоб фокуси еліпса лежали на осі Ox симетрично відносно початку координат, то отримується канонічне рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

де $b^2 = a^2 - c^2$, $a > b$, a – велика піввісь, b – мала піввісь еліпса. Величина $\varepsilon = \dfrac{c}{a} < 1$ називається ексцентриситетом.

Еліпс, центр якого знаходиться в точці $(x_0; y_0)$ а осі паралельні осям координат, описується рівнянням:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Гіпербола. Гіперболою називається множина точок площини, абсолютна величина різниці віддалей яких до двох заданих точок, які називаються фокусами, є величина стала (її позначають $2a$), при умові, що ця стала менша за віддаль між фокусами (яку позначають $2c$).

Якщо систему координат вибрати так, щоб фокуси гіперболи лежали на осі Ox симетрично відносно початку координат, то одержимо канонічне рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

де $b^2 = c^2 - a^2$, a – дійсна піввісь, b – уявна піввісь. Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = \dfrac{c}{a} > 1$. Прямі $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ називається асимптотами гіперболи.

Рівняння $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ є рівнянням гіперболи, центр якої лежить в точці $(x_0; y_0)$, а осі гіперболи паралельні осям координат.

Парабола. Параболою називається множина точок площини рівновіддалених від даної точки, яка називається фокусом і даної прямої, яка називається директрисою.

Якщо директриса параболи є пряма $x=-\frac{p}{2}$ або $x=\frac{p}{2}$, а фокусом – точка $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ або $F\left(-\frac{p}{2};0\right)$, де $p>0$, то маємо канонічні рівняння параболи: $y^2=2px$ або $y^2=-2px$.

У випадку, якщо директриса параболи є пряма $y=-\frac{p}{2}$ або $y=\frac{p}{2}$, а фокусом – точка $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$ або $F\left(0;-\frac{p}{2}\right)$, де $p>0$, то маємо ще два канонічних рівняння: $x^2=2py$ або $x^2=-2py$.

Також: $(y-y_0)^2=\pm 2p(x-x_0)$, $(x-x_0)^2=\pm 2p(y-y_0)$ – рівняння парабол з вершинами в точці $(x_0;y_0)$ і віссю паралельною одній з осей координат.

Нехай задане загальне рівняння другого степеня, яке не містить добутку змінних $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$.

Якщо цьому рівнянню відповідає лінія на площині, то в результаті виділення повних квадратів, відносно кожної змінної, вихідне рівняння може набути одного з розглянутих нижче ліній другого порядку з осями симетрії паралельними до осей координат.

Приклад 45. Скласти рівняння кола, якщо точки A(2;-1) і B(4;5) є кінцями одного з діаметрів.

Розв'язання. Знаходимо центр і радіус кола. Центром кола є середина діаметра AB, тому маємо:

$$x_0=\frac{2+4}{2}=3;\quad y_0=\frac{-1+5}{2}=2:\quad O_1(3;2).$$

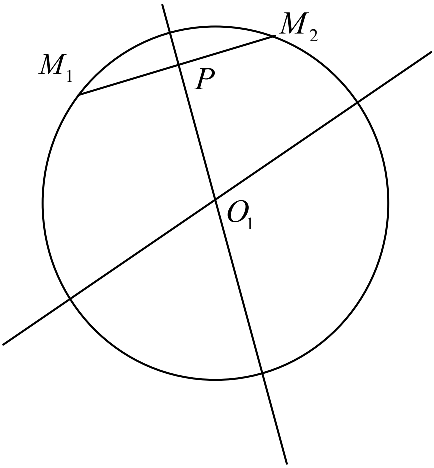
Радіус кола $R=O_1A=\sqrt{(2-3)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{10}$.

Використаємо рівняння $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.

$$(x-3)^2+(y-2)^2=10,\quad x^2+y^2-6x-4y+3=0.$$

Приклад 46. Скласти рівняння кола, якщо воно проходить через точки M_1(2;3) і M_2(4;1), а центр лежить на прямій $x+y+3=0$.

Розв'язання.



Центр кола лежить на перетині серединного перпендикуляра до хорди M_1M_2 і даної прямої. Для знаходження рівняння серединного перпендикуляра використаємо точку $P(3;2)$ – середину хорди M_1M_2, вектор $\overrightarrow{N}=\overrightarrow{M_1M_2}=(2;-2)$ – нормальний вектор для цього перпендикуляра та рівняння прямої лінії $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$.

Тому маємо: $2(x-3)-2(y-2)=0, \quad x-y-1=0$.

Центр кола O_1 знайдемо, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} x+y+3=0; \\ x-y-1=0. \end{cases} \quad 2x+2=0, \quad x=-1, \quad y=-2; \quad O_1(-1;-2).$$

Радіус кола $R=O_1M_1=\sqrt{(2+1)^2+(3+2)^2}=\sqrt{34}$.

Використавши рівняння $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$,

одержимо шукане рівняння кола:

$(x+1)^2+(y+2)^2=34$, або $x^2+y^2+2x+4y-29=0$.

Приклад 47. Знайти координати центра і радіус кола:

$x^2+y^2-4x+6y-3=0$.

Розв'язання. Групуючи члени, що містять x та y і доповнюючи їх до повного квадрату, отримаємо:

$(x^2-4x+4)-4+(y^2+6y+9)-9-3=0$, або $(x-2)^2+(y+3)^2=16$, звідки (2;-3) – центр кола, R=4 – радіус кола.

Приклад 48. Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі Ox, якщо велика вісь $2a = 20$, а віддаль між фокусами $2c = 16$.

Розв'язання. Канонічне рівняння еліпса: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

За умовою задачі $2a = 20$, $a = 10$; $2c = 16$, $c = 8$.

Оскільки $b^2=a^2-c^2$, то $b=\sqrt{100-64}=6$.

Шукане рівняння еліпса має вигляд: $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{36}=1$.

Приклад 49. Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі Ox, якщо віддаль між фокусами $2c = 16$, а ексцентриситет $\varepsilon=\dfrac{2}{3}$.

Розв'язання. За умовою задачі маємо: $2c = 16$, $c = 8$.

Оскільки $\varepsilon=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{3}$, то $\dfrac{8}{a}=\dfrac{2}{3}$, $a=12$.

Тому $b^2=a^2-c^2=144-64=80$, $\dfrac{x^2}{144}+\dfrac{y^2}{80}=1$ – шукане рівняння еліпса.

Приклад 50. Скласти канонічне рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі Ox, якщо рівняння асимптот гіперболи $y=\pm\dfrac{3}{4}x$, а віддаль між фокусами $2c = 30$.

Розв'язання. Канонічне рівняння гіперболи: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Рівняння асимптот гіперболи $y=\pm\dfrac{b}{a}x$.

Відповідно умови задачі, маємо:

$\dfrac{b}{a}=\dfrac{3}{4}$, $b=\dfrac{3}{4}a$, $2c=30$, $c=15$. Оскільки $b^2=c^2-a^2$,

то $a^2+b^2=c^2$, $a^2+\dfrac{9}{16}a^2=225$, $\dfrac{25}{16}a^2=225$, $a^2=144$, $a=12$,

$b=\frac{3}{4}a=\frac{3}{4}\cdot 12=9$. Отже, шукане рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{81}=1$.

Приклад 51. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, якщо вона симетрична відносно осі Ox і проходить через точку A(-2;4).

Розв'язання. Рівняння шуканої параболи – канонічне і має вигляд $y^2=-2px$ (знак "–", тому, що точка A знаходиться в другій чверті). Параметр p знаходиться з умови, що точка A лежить на параболі і її координати задовольняють рівняння параболи. Підставивши координати точки A у рівняння $y^2=-2px$, маємо:

$4^2=-2p(-2),\quad 16=4p,\quad p=4$.

Шукане рівняння параболи має вигляд: $y^2=-8x$.

Приклад 52. Спростити рівняння лінії другого прядку $9x^2-4y^2-18x-16y-43=0$.

Розв'язання. Виділимо повні квадрати відносно змінних x та y, одержимо: $9(x^2-2x)-4(y^2+4y)-43=0$,

$9(x^2-2x+1-1)-4(y^2+4y+4-4)-43=0$,

$9(x-1)^2-9-4(y+2)^2+16-43=0,\quad 9(x-1)^2-4(y+2)^2=36$,

$\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y+2)^2}{9}=1$ – це рівняння гіперболи з центром в точці C(1;-2) та півосями $a=2,\ b=3$.

Приклад 53. Скласти рівняння прямої, яка проходить через лівий фокус еліпса $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{11}=1$ паралельно до прямої $5x+4y-2=0$.

Розв'язання. З рівняння еліпса, маємо: $a^2=20,\ b^2=11$.

Лівий фокус еліпса – $F_1(-c;0)$, $c^2=a^2-b^2=20-11=9$, $c=3$, тому $F_1(-3;0)$. Нормальний вектор даної прямої $\overrightarrow{N}=(5;4)$ є також нормальним вектором до шуканої прямої, тому її рівняння має вигляд: $5(x+3)+4(y-0)$, або $5x+4x+15=0$.

Приклад 54. Скласти рівняння кола з центром у фокусі параболи $x^2=20y$ і яке дотикається до прямої $3x-4y-1=0$.

Розв'язання. Для параболи, заданої канонічним рівнянням $x^2 = 2py$, її фокусом є точка $F\left(0;\dfrac{p}{2}\right)$. Згідно даного рівняння параболи, маємо $2p = 20$, $p = 10$ і $F(0;5)$ – фокус цієї параболи який, згідно умови, є центром кола. Оскільки дана пряма дотикається до кола, то його радіус R дорівнює віддалі від точки F до цієї прямої. Тому, маємо:

$$R = \left|\frac{3\cdot 0 - 4\cdot 5}{\sqrt{3^2+4^2}}\right| = \left|\frac{-20}{5}\right| = 4 .$$

Шукане рівняння має вигляд:

$x^2 + (y-5)^2 = 16$ або $x^2 + y^2 - 10y + 9 = 0$.

Задачі для самостійного розв'язування

55. Скласти рівняння кола якщо:
1) центр кола співпадає з точкою C(1;-1), а пряма $5x - 12y + 9 = 0$ є дотичною до кола;
2) коло проходить через точки A(3;1) і B(-1;3), а центр лежить на прямій $3x - y - 2 = 0$.

56. Скласти рівняння кола, яке проходить через три точки $M_1(-1;5)$, $M_2(-2;-2)$, $M_3(5;5)$.

57. Знайти центр і радіус кола $x^2 + y^2 - 10x + 8y - 1 = 0$.

58. Скласти рівняння прямої, яка проходить через центр кола $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 2 = 0$ перпендикулярно до прямої $2x + 3y - 1 = 0$.

59. Скласти рівняння прямої, яка проходить через правий фокус еліпса $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{8} = 1$ паралельно до прямої $3x + 6y - 1 = 0$.

60. Дано рівняння гіперболи $16x^2 - 9y^2 = 144$. Знайти: 1) півосі a і b; 2) фокуси; 3) ексцентриситет; 3) рівняння асимптот.

61. Спростити рівняння ліній другого порядку:
1) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0;$ 2) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$.

Розділ 2

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ. ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

Тема 3. Вступ до математичного аналізу

§1. Знаходження області визначення функцій. Числова послідовність і її границя. Знаходження границі функції. Невизначені вирази. Розкриття невизначеностей

Нехай задані дві множини дійсних чисел X і Y. Функцією називається правило, за яким кожному елементу $x \in X$ відповідає єдиний елемент $y \in Y$, при умові, що кожному елементу $y \in Y$ відповідає хоча б один елемент $x \in X$.

Множина X називається областю визначення, а множина Y називається множиною значень функції.

Якщо функція $y = f(x)$ задана аналітично (у вигляді формули), то областю визначення є множина значень аргументна при яких вона існує, тобто приймає певне дійсне значення.

При знаходженні області визначення функції потрібно пам'ятати, що: корінь парного степеня існує лише для невід'ємних чисел; знаменник дробу має бути відмінним від нуля; логарифм існує тільки для додатних чисел; вирази, що стоять під знаком функцій $\arcsin U$ та $\arccos U$, за модулем не перевищують одиниці.

Приклад 62. Знайти область визначення функції
$y = \sqrt[4]{x^2 - 5x + 6}$.

Розв'язання. Область визначення являє собою розв'язок нерівності $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ або $(x-2)(x+3) \geq 0$, методом інтервалів, знаходимо $x \in \left(-\infty;2\right] \cup \left[3;+\infty\right)$.

Приклад 63. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{\dfrac{x+3}{1-x}}$.

Розв'язання. Область визначення знаходимо з системи нерівностей:

$$\begin{cases} \dfrac{x+3}{1-x} \ge 0, \\ 1-x \ne 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \dfrac{x+3}{x-1} \le 0, \\ x \ne 1, \end{cases} \qquad x \in [-3;1).$$

Приклад 64. Знайти область визначення функції

$$y = \sqrt[6]{x+3} + \frac{1}{x^2-4}.$$

Розв'язання. Область визначення являє собою розв'язок системи нерівностей:

$$\begin{cases} x+3 \ge 0, \\ x^2-4 \ne 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x \ge -3, \\ x \ne -2, \\ x \ne 2; \end{cases} \quad x \in [-3;-2) \cup (-2;2) \cup (2;+\infty).$$

Приклад 65. Знайти область визначення функції

$$y = \arccos\frac{2x-3}{5}.$$

Розв'язання. Область визначення знаходимо з умови:

$$\left|\frac{2x-3}{5}\right| \le 1 \quad \text{або} \quad -1 \le \frac{2x-3}{5} \le 1; \quad -5 \le 2x-3 \le 5;$$

$$-2 \le 2x \le 8; \quad -1 \le x \le 4; \quad x \in [-1;4].$$

Числова послідовність і її границя

Поставимо у відповідність, за деяким законом, кожному натуральному числу n дійсне число x_n. Множина чисел $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ називається числовою послідовністю і позначається $\{x_n\}$. Отже, числова послідовність – це числова функція, визначена на множині натуральних чисел. Числа $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ називаються елементами послідовності, а число x_n – загальним елементом послідовності.

Число a називають границею числової послідовності $\{x_n\}$, якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер N, що для всіх $n > N$ виконується нерівність: $|x_n - a| < \varepsilon$, і записують $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Послідовність, яка має границю, називають збіжною.

Приклад 66. Довести, користуючись означенням границі числової послідовності, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+3}{2n+1}=\frac{1}{2}$.

Розв'язання. Нехай $\varepsilon>0$ – довільне як завгодно мале число. Потрібно показати, що знайдеться таке натуральне число N, що для всіх $n>N$ буде виконуватись нерівність $|x_n-a|<\varepsilon$, тобто:

$$\left|\frac{n+3}{2n+1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon; \quad \left|\frac{2n+6-2n-1}{2(2n+1)}\right|<\varepsilon; \quad \left|\frac{5}{2(2n+1)}\right|<\varepsilon .$$

Оскільки n – натуральне число, то останню нерівність можна знайти так: $\frac{5}{2(2n+1)}<\varepsilon$.

Розв'язавши одержану нерівність, маємо: $n>\frac{5}{4\varepsilon}-\frac{1}{2}$.

Отже, для будь-якого $\varepsilon>0$ існує шуканий номер $N=\left[\frac{5}{4\varepsilon}-\frac{1}{2}\right]$ – ціла частина числа $\frac{5}{4\varepsilon}-\frac{1}{2}$. Це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+3}{2n+1}=\frac{1}{2}$.

Послідовність $\{x_n\}$ називається нескінченно малою, якщо $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

Послідовність $\{x_n\}$ називається нескінченно великою, якщо для будь-якого додатного числа A існує такий номер N, що для всіх $n>N$ виконується нерівність $|x_n|>A$ і записують $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$.

Якщо для всіх $n>n_0$ елементи нескінченно великої послідовності $\{x_n\}$ додатні, то $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$, якщо від'ємні, то $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$.

Застосування означення для обчислення границі числової послідовності зумовлює у багатьох випадках великі труднощі. Тому, на практиці для обчислення границі числової послідовності використовують теореми про арифметичні властивості границі.

Якщо послідовність $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ збіжні, то

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n\,;$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n\,.$$

Якщо, крім того $y_n \neq 0$ для будь-якого n і $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} \neq \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}\,.$$

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ і $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ або $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ і $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, то вираз $\dfrac{x_n}{y_n}$ є невизначеність типу $\dfrac{0}{0}$ або $\dfrac{\infty}{\infty}$. Дослідження таких невизначеностей називають розкриттям невизначеності.

Приклад 67. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^4 - 2n^2 + 4n - 1}{5n^4 + 3n^2 - 2n + 3}$.

Розв'язання. У цьому випадку маємо невизначеність типу $\dfrac{\infty}{\infty}$, тому не можна відразу застосувати теорему про границю частки двох послідовностей. Поділимо чисельник та знаменник на найбільший степінь, який є у знаменнику, тобто на n^4 і після цього застосуємо теореми про границю частки і суми послідовностей:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^4 - 2n^2 + 4n - 1}{5n^4 + 3n^2 - 2n + 3} = \lim_{n\to\infty}\frac{3 - \frac{2}{n^2} + \frac{4}{n^3} - \frac{1}{n^4}}{5 + \frac{3}{n^2} - \frac{2}{n^3} + \frac{3}{n^4}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3 - \frac{2}{n^2} + \frac{4}{n^3} - \frac{1}{n^4}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5 + \frac{3}{n^2} - \frac{2}{n^3} + \frac{3}{n^4}\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2} + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n^3} - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}}{\lim\limits_{n\to\infty} 5 + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2} - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^3} + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^4}} = \frac{3 - 0 + 0 - 0}{5 + 0 - 0 + 0} = \frac{3}{5}\,.$$

Знаходження границі функції. Невизначені вирази. Розкриття невизначеностей

Розглянемо функцію $y = f(x)$, визначену у деякому околі точки $x = a$, крім можливо самої точки. З цього околу виберемо довільну послідовність значень аргументу x :

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots, \quad x_n \neq a,$$

яка збігається до a.

Нехай вибраній послідовності відповідає послідовність значень функції $y = f(x)$:

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n), \ldots,$$

яка збігається до числа *A*, тоді число *A* називають границею функції $y = f(x)$ в точці a і записують $\lim\limits_{n \to a} f(x) = A$.

Якщо $A = 0$, то функція $y = f(x)$ називається нескінченно малою при $x \to a$, якщо A – один із символів $\infty, +\infty, -\infty$, то функція $y = f(x)$ називається нескінченно великою при $x \to a$.

Зазначимо, що в усіх розглянутих означеннях a може бути $\infty, +\infty$ або $-\infty$.

Нескінченно малі і нескінченно великі функції пов'язані між собою, а саме:

Якщо $f(x)$ – нескінченно мала функція в точці a і в деякому околі цієї точки $f(x) \neq 0$, то функція $\dfrac{1}{f(x)}$ нескінченно велика в точці a. Якщо $f(x)$ – нескінченно велика в точці a, то функція $\dfrac{1}{f(x)}$ нескінченно мала в цій точці.

У випадку коли при $x \to a$ функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ мають скінченні границі, то:

$$\lim_{x \to a} \left[f_1(x) \pm f_2(x) \right] = \lim_{x \to a} f_1(x) \pm \lim_{x \to a} f_2(x);$$

$$\lim_{x \to a} \left(f_1(x) \cdot f_2(x) \right) = \lim_{x \to a} f_1(x) \cdot \lim_{x \to a} f_2(x);$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x \to a} f_2(x)}, \text{ при умові що } \lim_{x \to a} f_2(x) \neq 0.$$

Якщо функція $f(x)$ елементарна і визначена в точці a, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ при $x \to a$ одночасно або нескінченно малі або нескінченно великі, то при знаходженні

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ маємо невизначеність типу $\dfrac{0}{0}$ або $\dfrac{\infty}{\infty}$. Розглянемо приклади на розкриття цих невизначеностей.

Приклад 68. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+7}{4x^3+x^2-3}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+x-3}{5x^3-3x^2+2}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5+3x-4}{5x^4-2x^2+5}$.

Розв'язання. У всіх трьох випадках маємо невизначеності типу $\dfrac{\infty}{\infty}$. Поділимо чисельники і знаменники дробів на найбільший степінь полінома в кожному знаменнику, тобто в першому і другому випадку на x^3, а в третьому – на x^4. Отримаємо:

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x+7}{4x^3+x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{7}{x^3}}{4+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{7}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}\right)}=\frac{0}{4}=0;$$

$$2)\ \lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+x-3}{5x^3-3x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}}{5-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^3}\right)}=\frac{4}{5};$$

$$3)\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x^5+3x-4}{5x^4-2x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\frac{3}{x^3}-\frac{4}{x^4}}{5-\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x^4}}=\infty.$$

Приклад 69. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{3x^2+2x-16}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\dfrac{0}{0}$. Розкладемо поліноми, які є в чисельнику і знаменнику, на множники. Відомо, що $ax^2+by^2+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, де x_1, x_2 – корені рівняння $ax^2+by^2+c=0$, а також $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$.

Отримуємо: для чисельника $x_1 = 2,\ 2x_2 = 6,\ x_2 = 3$, тому $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$; для знаменника $x_1 = 2,\ 2x_2 = -\frac{16}{3}$, $x_2 = -\frac{8}{3}$, тому $3x^2 + 2x - 16 = 3(x-2)(x+\frac{8}{3}) = (x-2)(3x+8)$.

Отже, $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{3x^2+2x-16} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(3x+8)} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{x-3}{3x+8} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{2-3}{6+8} = -\frac{1}{14}$. Зауважимо, що скорочення на $x-2$ можливе, оскільки $x \to 2$, але $x \neq 2$.

Границі такого типу можна знаходити іншим способом. Досить поділити поліноми чисельника і знаменника на $x-a$, не розкладаючи їх на множники. Цей метод особливо зручний для поліномів вищих степенів.

Приклад 70. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-3x-9}{3x^2-5x-12}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\frac{0}{0}$. Поділимо чисельник і знаменник на $x-3$:

$$\begin{array}{r|l} 2x^2-3x-9 & \underline{x-3} \\ \underline{2x^2-6x} & 2x+3; \\ 3x-9 & \\ \underline{3x-9} & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3x^2-5x-12 & \underline{x-3} \\ \underline{3x^2-9x} & 3x+4. \\ 4x-12 & \\ \underline{4x-12} & \\ 0 & \end{array}$$

Отримаємо: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-3x-9}{3x^2-5x-12} = \lim\limits_{x\to 3}\frac{2x+3}{3x+4} = \frac{9}{13}$.

Приклад 71. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^2-1}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\frac{0}{0}$. Поділимо чисельник і знаменник дробу на $x-1$.

Отримаємо: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x+1} = \frac{0}{2} = 0$.

Приклад 72. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}$.

Розв'язання. В цьому випадку маємо невизначеність $\dfrac{0}{0}$. Помножимо і поділимо дріб, який є під знаком границі, на вираз $\sqrt{2x+1}+3$, спряжений чисельнику. У результаті отримаємо:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{2x+1}-3\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{2x+1-9}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{2}{\sqrt{2x+1}+3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Приклад 73. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{x+1}-3}{\sqrt{x-7}-1}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\dfrac{0}{0}$. Помножимо чисельник і знаменник на вирази $\sqrt{x+1}+3$ та $\sqrt{x-7}+1$, спряжені відповідно чисельнику і знаменнику. Отримаємо:

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{x+1}-3}{\sqrt{x-7}-1}=\lim_{x\to 8}\frac{\left(\sqrt{x+1}-3\right)\left(\sqrt{x+1}+3\right)\left(\sqrt{x-7}+1\right)}{\left(\sqrt{x-7}-1\right)\left(\sqrt{x-7}+1\right)\left(\sqrt{x+1}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{(x+1-9)\left(\sqrt{x-7}+1\right)}{(x-7-1)\left(\sqrt{x+1}+3\right)}=\lim_{x\to 8}\frac{(x-8)\left(\sqrt{x-7}+1\right)}{(x-8)\left(\sqrt{x+1}+3\right)}=\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{x-7}+1}{\sqrt{x+1}+3}=\frac{1}{3}.$$

Завдання для самостійного розв'язування

74. Знайти область визначення функцій:

1) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$; 2) $y=\sqrt{1-x^2}$; 3) $y=\dfrac{x}{x^2-3x-4}$;

4) $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{x-2}}-\lg(2x-3)$; 5) $y=\arccos\dfrac{2x-1}{3}$.

75. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x^3-x+1}{5x^4-x^3-x^2-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-x+2}{x^7-x^5-x-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5-x^3+2}{x^4-x+1}$; .

4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-x-3}{5x^2-x-6}$; 5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+4x-12}{x^2-3x+2}$; 6) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-3x-9}{5x^2-x-42}$;

7) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$; 8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-2x^2+x-1}{x^3-x^2+3x-3}$; 9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$;

10) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{3x+10}-4}$; 11) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+6}-\sqrt{2x+3}}{x^2-9}$; 12) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{1+2x}-3}$.

§2. Перша і друга важливі границі. Неперервність і точки розриву функції

При знаходженні границь часто доводиться використовувати дві важливі границі. Зокрема, при розкритті невизначеностей $\dfrac{0}{0}$, що містять тригонометричні функції використовують границю $\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, яка називається першою важливою границею.

Приклад 76. Довести, що:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\, x}{x}=1$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$; 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\, x}{x}=1$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\dfrac{0}{0}$. Виконаємо такі перетворення:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{\sin x}{x}}=1$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\, x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=1$;

3) Замінимо $z=\arcsin x$, $x=\sin z$, тоді $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z}{\sin z}=1$;

4) Замінимо $z=arctg\, x$, $x=tg\, z$, тоді $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\, x}{x}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z}{tg\, z}=1$.

Приклад 77. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{tg\,6x}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\frac{0}{0}$. Виконаємо такі перетворення:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x}{tg\,6x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot 6x\cos 6x}{6\sin 6x}=\frac{5}{6}\lim_{x\to 0}\frac{6x}{\sin 6x}\lim_{x\to 0}\cos 6x=\frac{5}{6}.$$

Приклад 78. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{x^2}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\frac{0}{0}$.

Оскільки $1-\cos 8x=2\sin^2 4x$, то:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 4x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{x}\right)^2=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{4\sin 4x}{4x}\right)^2=$$

$$=32\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{4x}\right)^2=32.$$

Приклад 79. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^4 x}{x\sin 3x}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\frac{0}{0}$. Виконаємо такі перетворення:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^4 x}{x\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos^2 x)(1+\cos^2 x)}{x\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\cos^2 x)\sin^2 x}{x\sin 3x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{\sin x}{x}\frac{3x}{3\sin 3x}(1+\cos^2 x)=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{3x}{3\sin 3x}(1+\cos^2 x)=\frac{2}{3}.$$

В багатьох випадках знаходження таких границь спрощується при використанні еквівалентних нескінченно малих функцій.

Нехай $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ – нескінченно малі функції при $x\to a$. Якщо $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються еквівалентними нескінченно малими і їх записують $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

З використанням результатів прикладу 76 маємо, що при $x \to 0$: $\sin x \sim x$, $tg\, x \sim x$, $\arcsin x \sim x$, $arctg\, x \sim x$.

Справедлива теорема. Якщо при $x \to a$ $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ і $\beta(x) \sim \beta_1(x)$, то виконується рівність:

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Це означає, що при знаходженні границі відношення нескінченно малих функцій їх можна замінити еквівалентними нескінченно малими.

Приклад 80. Обчислити границю $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 8x}{tg\, 3x \cdot \sin x}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\dfrac{0}{0}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 8x}{tg\, 3x \cdot \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 4x}{tg\, 3x \cdot \sin x} = \left| \begin{array}{l} \sin x \sim x \\ \sin 4x \sim 4x \\ \mathrm{tg} 3x \sim 3x \end{array} \right| = \lim_{x \to 0} \frac{2(4x)^2}{3x \cdot x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{32x^2}{3x^2} = \frac{32}{3}.$$

Приклад 81. Обчислити границю $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arctg^2 3x}{\cos 3x \cdot \cos x}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\dfrac{0}{0}$.

Оскільки $\cos 3x - \cos x = -2\sin 2x \sin x$, то

$$\lim_{x \to 0} \frac{arctg^2 3x}{\cos 3x \cdot \cos x} = -\frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{arctg^2 3x}{\sin 2x \cdot \sin x} = \left| \begin{array}{l} arctg 3x \sim 3x \\ \sin 2x \sim 2x \\ \sin x \sim x \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{(3x)^2}{2x \cdot x} =$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{9x^2}{2x^2} = -\frac{9}{4}.$$

Приклад 82. Обчислити границю $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\, x - \sin x}{\sin^3 x}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\frac{0}{0}$. Виконаємо такі перетворення:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\,x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x\cdot\sin^2 x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x\cdot\sin^2 x}=\left|\begin{array}{l}\sin\frac{x}{2}\sim\frac{x}{2}\\ \sin x\sim x\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2\cdot\cos x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{2}.$$

Для розкриття невизначеності виду 1^∞ використовується друга важлива границя

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\text{, або }\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,$$

та як наслідок

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k\text{ і }\lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}=e^k,$$

де e – число Ейлера, k – будь-яке дійсне число.

Приклад 83. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+2}{5x-8}\right)^x$.

Розв'язання. Оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x+2}{5x-8}=1$, то маємо невизначеність виду 1^∞. Виконуючи наступні перетворення, отримаємо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+2}{5x-8}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{5x}}{1-\frac{8}{5x}}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{\frac{2}{5}}{x}}{1+\frac{-\frac{8}{5}}{x}}\right)^x=\frac{e^{\frac{2}{5}}}{e^{-\frac{8}{5}}}=e^2.$$

Приклад 84. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6x-11}{6x+7}\right)^{2x+4}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду 1^∞. Виконуємо такі перетворення:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x-11}{6x+7}\right)^{2x+4}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x-11}{6x+7}\right)^{2x}\cdot\left(\frac{6x-11}{6x+7}\right)^{4}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(\frac{6x-11}{6x+7}\right)^{x}\right)^{2}=$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{11}{6x}}{1+\frac{7}{6x}}\right)^{x}\right)^{2}=\left(\frac{e^{-\frac{11}{6}}}{e^{\frac{7}{6}}}\right)^{2}=\left(e^{-3}\right)^{2}=e^{-6}.$$

Приклад 85. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to-1}(3x+4)^{\frac{2}{x+1}}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність 1^{∞}. Замінимо $x+1=t$. Звідси $x=t-1$, $t\to 0$ якщо $x\to --1$.

Отже, $\lim\limits_{x\to-1}(3x+4)^{\frac{2}{x+1}}=\lim\limits_{t\to0}(3t-3+4)^{\frac{2}{t}}=\lim\limits_{t\to0}(1+3t)^{\frac{2}{t}}=\left(e^{3}\right)^{2}=e^{6}$.

Неперервність і точки розриву функції

Функція $y=f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо вона визначена в околі цієї точки і в самій точці, і якщо $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

Елементарна функція неперервна в точках, у яких вона визначена.

Якщо функція не є неперервною в точці x_0, то ця точка називається точкою розриву.

Якщо x_0 – точка розриву, але існують границі $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$ і $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$, то вона називається точкою розриву першого роду. Зокрема, якщо ці границі рівні то точка x_0 називається точкою усувного розриву. Якщо ж хоча б одна з границь $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$ і $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$ нескінченна або не існує, то x_0 називається точкою розриву другого роду.

Приклад 86. Дослідити на неперервність функцію $y=\frac{x+4}{x^2+2}$.

Розв'язання. Задана функція елементарна і визначена на всій числовій осі. Тому функція неперервна на всій числовій осі.

Приклад 87. Дослідити на неперервність функцію $y=\dfrac{x^2+5}{x-2}$.

Розв'язання. Область визначення функції $x\epsilon(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$. В усіх точках області визначення функція неперервна. В точці $x=2$ функція невизначена, тому точка $x=2$ є точкою розриву. Знаходимо односторонні границі: $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{x^2+5}{x-2}=-\infty;\ \lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{x^2+5}{x-2}=+\infty.$

Отже, $x=2$ – точка розриву другого роду.

Приклад 88. Дослідити на неперервність функцію $y=arctg\dfrac{1}{x-3}$.

Розв'язання. Область визначення функції $x\epsilon(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$. Функція є неперервною для $x\neq 3$ як елементарна функція. Точка $x=3$ є точкою розриву. Знаходимо односторонні границі:

оскільки $\lim\limits_{x\to 3-0}\dfrac{1}{x-3}=-\infty$ і $\lim\limits_{x\to 3+0}\dfrac{1}{x-3}=+\infty$, то маємо

$$\lim_{x\to 3-0} arctg\frac{1}{x-3}=-\frac{\pi}{2};\quad \lim_{x\to 3+0} arctg\frac{1}{x-3}=\frac{\pi}{2}.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to 3-0}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 3+0}f(x)$, тому точка $x=3$ є точкою розриву першого роду.

Приклад 89. Дослідити на неперервність функцію $y=\dfrac{x^2-9}{x-3}$.

Розв'язання. Область визначення $x\epsilon(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$. Функція є неперервною для $x\neq 3$. Точка $x=3$ – точка розриву. Знаходимо односторонні границі:

$$\lim_{x\to 3-0}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3-0}(x+3)=6;\quad \lim_{x\to 3+0}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3+0}(x+3)=6.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to 3-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 3+0}f(x)$, тому точка $x=3$ є точкою усувного розриву. Щоб усунути розрив треба покласти, що $y(3)=6$, тобто доозначити дану функцію, тобто ввести нову функцію:

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3}{x-3}; & x\neq 3;\\ 6; & x=3.\end{cases}$$

Функція $f_1(x)$ неперервна на всій числовій осі.

Завдання для самостійного розв’язування

90. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x\cdot\sin 2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 2x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\, 2x\cdot\arcsin 3x}{x\cdot\sin 5x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^4 x}{tg^2 3x}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+8}{3x-1}\right)^{2x+3}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+1}{5x-4}\right)^{3x-2}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+5}{4x-3}\right)^{4x+2}$; 9) $\lim\limits_{x\to 3}(7-2x)^{\frac{2}{x-3}}$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty}x(\ln(2x-1)-\ln(2x+3))$.

91. Дослідити на неперервність функції:

1) $y=\dfrac{\sin x}{x^4+1}$; 2) $y=\dfrac{x^2-16}{x-4}$; 3) $y=\dfrac{2}{x-5}$;

4) $y=5^{\frac{1}{x-3}}$; 5) $y=\dfrac{2}{x^2-4}$.

Тема 4. Диференціальне числення функції однієї змінної

§1. Знаходження похідної за означенням. Правила знаходження похідних. Похідна складної, неявної та параметрично заданої функції. Геометричний зміст похідної. Диференціал функції. Похідні вищих порядків

Похідною функції $y = f(x)$ в точці x називається границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. Похідна позначається символами $f'(x)$, y', y'_x, $\dfrac{dy}{dx}$. Якщо $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ нескінченна або не існує, то будемо говорити, що похідна в точці x не існує. Функція називається диференційованою в точці, якщо вона в ній має похідну.

Щоб знайти похідну функції $y = f(x)$ за означенням, потрібно знайти в такій послідовності: 1) $f(x+\Delta x)$; 2) $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$; 3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$; 4) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Фізичний зміст похідної: якщо деякий процес описується функцією $f(x)$, то похідна $f'(x)$ є швидкість зміни цього процесу.

Геометричний зміст: похідна функції $f(x)$ в точці x_0 – кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції в точці $(x_0; f(x_0))$. Тому дотична і нормаль до графіка функції $y = f(x)$ в точці $(x_0; f(x_0))$ задаються відповідно рівняннями:

$$y - f(x_0) = y'(x_0)(x - x_0) \ \text{ і } \ y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Розглянемо складну функцію $y = f(u)$, де $u = u(x)$. Якщо функція $u = u(x)$ диференційована в точці x, а функція $y = f(u)$ диференційована у відповідній точці $u = u(x)$, то складна функція $y = f(u(x))$ диференційована в точці x, причому $y' = f'(u)u'(x)$.

Нехай C, α, $a \in R$ $(a \neq 1,\ a > 0)$; $u = u(x)$, $v = v(x)$ – диференційовані функції.

Правила диференціювання:

1) $C'=0$; 2) $(CU)'=CU'$; 3) $(U\pm V)'=U'\pm V'$;

4) $(U\cdot V)'=U'\cdot V+U\cdot V'$; 5) $\left(\dfrac{U}{V}\right)'=\dfrac{U'\cdot V-U\cdot V'}{V^2}, V\neq 0.$

Формули диференціювання:

1. $(u^{\alpha})'=\alpha\cdot u^{\alpha-1}\cdot u'$;
2. $(\sqrt{u})'=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$;
3. $(a^u)'=a^u\cdot\ln a\cdot u'$;
4. $(e^u)'=e^u\cdot u'$;
5. $(\log_a u)'=\dfrac{1}{u\cdot\ln a}\cdot u'$;
6. $(\ln u)'=\dfrac{1}{u}\cdot u'$;
7. $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$;
8. $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$;
9. $(tgu)'=\dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$;
10. $(ctgu)'=-\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$;
11. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$;
12. $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$;
13. $(arctgx)'=\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$;
14. $(arcctgx)'=-\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$.

Похідна $f''(x)=(f'(x))'$ називається похідною другого порядку, і взагалі, похідною *n*-го порядку називається: $f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'$.

Нехай функція $y=f(x)$ задана параметрично рівняннями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, де t – деякий параметр і в деякій області зміни параметра t функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ диференційовані і $\varphi'(t)\neq 0$. Для похідних цієї функції по змінній x справедливі формули:

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t};\quad y''_{x^2}=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t};\quad y'''_{x^3}=\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{(y''_{x^2})'_t}{x'_t},\ \text{і т.д.}$$

З означення похідної $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ випливає, що $\Delta y=y'\Delta x+\alpha\Delta x$, де α – нескінченно мала функція при $\Delta x\to 0$. Доданок $y'\Delta x$ називається диференціалом функції $y=f(x)$ і позначається dy.

Таким чином $dy = y'\Delta x$ або $dy = y'(x)\Delta x$. Якщо $y = x$, то $dy = \Delta x$ і вираз для диференціала можна записати у вигляді: $dy = y'(x)dx$.

При розкритті невизначеностей виду $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$ часто використовується правило Лопіталя:

Якщо дві функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ нескінченно малі або нескінченно великі при $x \to a$, диференційовані в околі точки $x = a$, крім, можливо самої точки a і існує скінченна або нескінченна границя $\lim\limits_{x\to a}\frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$.

Це правило розповсюджується також на випадок, коли $x \to \infty$.

Приклад 92. Знайти похідну функції $y = tg4x$, виходячи з її означення.

Розв'язання. Надаємо x деякого приросту Δx і знаходимо:

1) $f(x+\Delta x) = tg(4x+4\Delta x)$;

2) $\Delta y == tg(4x+4\Delta x) - tg4x = \dfrac{\sin 4\Delta x}{\cos(4x+4\Delta x)\cdot\cos 4x}$;

3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sin 4\Delta x}{\Delta x\cdot\cos(4x+4\Delta x)\cdot\cos 4x}$;

4) $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin 4\Delta x}{\Delta x}\cdot\dfrac{1}{\cos(4+4\Delta x)\cdot\cos 4x} = \dfrac{4}{\cos^2 4x}$.

Приклад 93. Знайти похідну функції:

1) $y = 3x^3 - 4x^2 + 5x - 3$; 2) $y = \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{5}{x^4}$; 3) $y = 6\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x}$;

4) $y = 3^{\sin^3 4x}$; 5) $y = \sin^4 3x$; 6) $y = x^3\cos x$;

7) $y = \dfrac{\cos x}{1-\sin x}$; 8) $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$; 9) $y = x^{\cos x}$.

Розв'язання.

1) $y' = \left(3x^3 - 4x^2 + 5x - 3\right)' = 9x^2 - 8x + 5$;

2) Ввівши від'ємні показники, перетворимо дану функцію:

$y = 2x^{-1} + 3x^{-2} - 5x^{-4}$, тоді $y' = -2x^{-2} - 6x^{-3} + 20x^{-5} = -\dfrac{2}{x^2} - \dfrac{6}{x^3} + \dfrac{20}{x^5}$;

3) Ввівши дробові показники, одержимо $y = 6x^{\frac{1}{3}} - 4x^{\frac{1}{4}}$, тоді

$$y' = 2x^{-\frac{2}{3}} - x^{\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}};$$

4) Використавши формулу для обчислення похідної складної функції маємо: $y' = 3^{\sin^3 4x} \ln 3 \cdot 3\sin^2 4x \cdot \cos 4x \cdot 4 =$

$$= 12 \cdot 3^{\sin^3 4x} \ln 3 \cdot \sin^2 4x \cdot \cos 4x;$$

5) $y' = 4\sin^3 3x \cdot \cos 3x \cdot 3 = 12\sin^3 3x \cdot \cos 3x;$

6) Для знаходження похідної функції $y = x^3 \cos x$, використаємо формулу похідної добутку:

$$y' = 3x^2 \cos x + x^3(-\sin x) = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x;$$

7) Користуючись правилом диференціювання частки, маємо:

$$y' = \frac{-\sin x(1-\sin x) + \cos^2 x}{(1-\sin x)^2} = \frac{-\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{(1-\sin x)^2} =$$

$$= \frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2} = \frac{1}{1-\sin x};$$

8) Використаємо правило логарифмування кореня і частки для спрощення даної функції: $y = \frac{1}{2}\left(\ln(1+2x) - \ln(1-2x)\right)$.

Тому, $y' = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{1+2x} + \frac{2}{1-2x}\right) = \frac{1}{1+2x} + \frac{1}{1-2x} = \frac{2}{(1-2x)^2};$

9) Використаємо метод логарифмічного диференціювання. Для цього про логарифмуємо обидві частини рівності $y = x^{\cos x}$:
$\ln y = \cos x \cdot \ln x$. Знайдемо похідну обох частин цієї рівності:

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = (\cos x \cdot \ln x)' = -\sin x \cdot \ln x + \frac{\cos x}{x}.$$

Отже, $y' = x^{\cos x}\left(\frac{\cos x}{x} - \sin x \cdot \ln x\right)$.

Приклад 94. Написати рівняння дотичної і нормалі до графіка функції $y = e^{1-x^2}$ в точці з абсцисою $x_0 = -1$.

Розв'язання. Знаходимо $f(x_0) = f(-1) = e^{1-1} = e^0 = 1$. Точка $M_0(-1;1)$ є точкою дотику. Далі $y' = -2xe^{1-x^2}$; $f'(x_0) = f'(-1) = = 2e^0 = 2$. Складаємо рівняння дотичної $y-1 = 2(x+1)$, звідки $y = 2x+3$, і нормалі $y-1 = -\dfrac{1}{2}(x+1)$, звідки $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.

Приклад 95. Знайти диференціал функції $y = x^2e^{4x}$.

Розв'язання. Знаходимо похідну даної функції і помножимо її на диференціал незалежної змінної, одержимо диференціал даної функції: $dy = y'dx = (x^2e^{4x})'dx = (2xe^{4x} + 4x^2e^{4x})dx = 2xe^{4x}(1+2x)dx$.

Приклад 96. Знайти похідні другого порядку функцій:

1) $y = arctg\, x^2$; 2) $y = \begin{cases} x = t^2; \\ y = t + t^3. \end{cases}$

Розв'язання.

1) Знаходимо послідовно $y' = \dfrac{2x}{1+x^4}$; $y'' = \dfrac{2(1+x^4) - 8x^4}{(1+x^4)^2} = \dfrac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}$.

2) Маємо параметрично задану функцію. Знайдемо спочатку похідну першого порядку. Для цього знаходимо $x'_t = 2t$, $y'_t = 3t^2 + 1$.

Тоді $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{3t^2+1}{2t} = \dfrac{3}{2}t + \dfrac{1}{2t}$. Для знаходження похідної другого порядку шукаємо: $(y'_x)'_t = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2t^2} = \dfrac{3t^2-1}{2t^2}$.

Тоді, $y''_{x^2} = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \dfrac{3t^2-1}{4t^3}$.

Приклад 97. За правилом Лопіталя обчислити такі границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x}{e^{3x}-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

Розв'язання.

1) Маємо невизначеність типу $\dfrac{0}{0}$. Для знаходження цієї границі знайдемо границю відношення похідних чисельника і знаменника:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x}{e^{3x}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x}{3e^{3x}} = \frac{1}{3}.$$

2) Маємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$. Для розкриття цієї невизначеності застосуємо правило Лопіталя три рази:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2.$$

Завдання для самостійного розв'язування

98. З використанням означення знайти похідні функцій:
1) $y = x^2 - 6x$; 2) $y = \cos 5x$.

99. Знайти похідні функцій:

1) $y = \frac{8}{\sqrt[4]{x}} - \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$; 2) $y = \sqrt[4]{1 + \cos^2 x}$; 3) $y = \ln(1 + \cos x)$;

4) $y = x^3 \cdot 3^{-x}$; 5) $y = \ln\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$; 6) $y = (\ln x)^{x^2}$.

100. Написати рівняння дотичної і нормалі до графіка функції $y = \sqrt{x}$ в точці з абсцисою $x_0 = 4$.

101. Знайти диференціал функції $y = arctg\frac{1}{x}$.

102. Знайти похідні другого порядку:

1) $y = e^{-x^2}$; 2) $y = \begin{cases} x = arctg\, t; \\ y = \ln(1 + t^2). \end{cases}$

103. За правилом Лопіталя обчислити такі границі:

1) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x}$; 2) $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x^3}$.

§2. Монотонність і екстремуми функції. Опуклість і вгнутість графіка функції. Асимптоти. Загальна схема дослідження і побудова графіка функції. Найбільше та найменше значення функції на відрізку

Нехай $y = f(x)$ диференційована функція на інтервалі $(a; b)$.

Зростання і спадання функції $y = f(x)$ характеризується значенням її похідної y': якщо в деякому інтервалі $y' > 0$, то функція зростає, а якщо $y' < 0$, то функція спадає в цьому інтервалі.

Функція може мати екстремум лише в точках, які лежать в області визначення функції і у яких похідна рівна нулю або не існує. Такі точки називаються критичними. Екстремум буде лише в тих критичних точках, при переході через які похідна змінює свій знак.

Тому при знаходженні інтервалів монотонності і точок екстремуму функції $y = f(x)$, потрібно:

1) знайти область визначення функції;
2) знайти похідну y' і критичні точки;
3) область визначення поділити критичними точками на інтервали;
4) визначити знаки похідної y' в кожному інтервалі;
5) в інтервалах у яких $y' > 0$ – функція зростає, а у яких $y' < 0$ – функція спадає;
6) якщо при переході зліва на право через критичну точку x_0 похідна змінює знак з "+" на "–", то x_0 – точка максимуму, якщо з "–" на "+", то x_0 є точкою мінімуму.

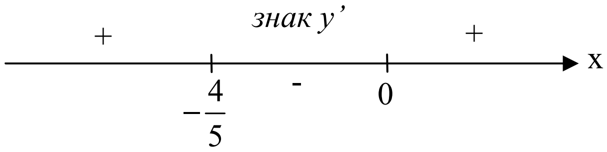
Приклад 104. Знайти інтервали монотонності та екстремуми функції $y = (x+2)\sqrt[3]{x^2}$.

Розв'язання. Функція визначена на всій числовій осі. Знаходимо похідну та критичні точки функції:

$$y = x^{\frac{5}{3}} + 2x^{\frac{2}{3}}; \quad y' = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} + \frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{5x+4}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Похідна дорівнює нулю, якщо $x=-\frac{4}{5}$ і не існує, якщо $x=0$. Отже, $x=-\frac{4}{5}$, $x=0$ – критичні точки функції. Ці точки розбивають область визначення на три інтервали $\left(-\infty;-\frac{4}{5}\right)\cup\left(-\frac{4}{5};0\right)\cup(0;+\infty)$

Знаходимо знаки похідної y' в цих інтервалах і відзначимо їх на числовій прямій



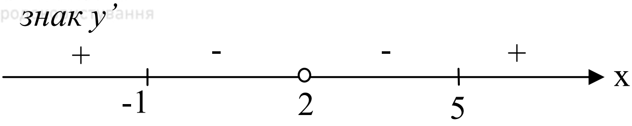
Функція зростає для $x\in\left(-\infty;-\frac{4}{5}\right)\cup(0;+\infty)$ і спадає для $x\in\left(-\frac{4}{5};0\right)$. Точка $x-\frac{4}{5}$ є точкою максимуму, а точка $x=0$ є точкою мінімуму функції. $y_{\max}=y(-\frac{4}{5})=\frac{6}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{2/3}$; $y_{\min}=y(0)=0$.

Приклад 105. Знайти інтервали монотонності та екстремуми функції $y=\frac{(x+1)^2}{x-2}$.

Розв’язання. Функція визначена для $x\in(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$. Обчислюємо похідну цієї функції:

$$y'=\frac{2(x+1)(x-2)-(x+1)^2}{(x-2)^2}=\frac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2}.$$

З умови $y'=0$, $(x+1)(x-5)=0$ отримаємо критичні точки $x=-1$ і $x=5$. Похідна y' не існує в точці $x=2$, але вона не належить області визначення тому не є критичною. Область визначення критичними точками розіб’ється на інтервали: $(-\infty;-1)\cup(-1;2)\cup(2;5)\cup(5;+\infty)$. Відзначимо на числовій прямій знаки похідної y' на цих інтервалах.



Враховуючи одержані знаки похідної y' в інтервалах, маємо: функція зростає для $x \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$ і спадає для $x \in (-1; 2) \cup (2; 5)$. Точка $x = -1$ є точкою максимуму, а точка $x = 5$ є точкою мінімуму функції. Обчисливши значення функції в точках $x = -1$ і $x = 5$, одержимо екстремуми функції: $y_{\max} = y(-1) = 0$ і $y_{\min} = y(5) = 12$.

Зауважимо, якщо потрібно знайти екстремуми функції, яка має лише критичні в яких $y' = 0$ (такі точки називаються стаціонарними), то можна скористатись другим правилом дослідження функції на екстремум. Для цього треба:
1) знайти стаціонарні точки функції;
2) знайти похідну другого порядку функції. Якщо в стаціонарній точці $y''(x_0) > 0$, то x_0 є точкою мінімуму, якщо $y''(x_0) < 0$, то x_0 – точка максимуму функції $y = f(x)$.

Приклад 106. Дослідити на екстремум функцію $y = x^2 e^{-2x}$.

Розв'язання. Функція визначена на всій числовій прямій. Знайдемо першу похідну цієї функції:
$y' = 2x e^{-2x} - 2x^2 e^{-2x} = 2x e^{-2x}(1 - x)$.
З умови $y' = 0$, $x(1 - x) = 0$, $x = 0$, $x = 1$. Отже, маємо дві стаціонарні точки. Знаходимо похідну другого порядку:
$y'' = 2e^{-2x} - 4x e^{-2x} - 4x e^{-2x} + 4x^2 e^{-2x} = 2e^{-2x}(1 - 4x + 2x^2)$.
Визначаємо знаки похідної y'' в стаціонарних точках $y''(0) = 2 > 0$, $y''(1) = -\dfrac{2}{e^2} < 0$. Отже в точці $x = 0$ функція має мінімум, а в точці $x = 1$ – максимум, причому $y_{\min} = f(0) = 0$; $y_{\max} = f(1) = e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}$.

Знаходження інтервалів опуклості, вгнутості та точок перегину графіка функції

Опуклість і вгнутість графіка функції $y = f(x)$ характеризується знаком її похідної другого порядку. Якщо функція $y = f(x)$ має в інтервалі $(a; b)$ похідну другого порядку і $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$), то крива $y = f(x)$ вгнута (опукла) на цьому інтервалі.

Точка $M_0(x_0; f(x_0))$ графіка функції $y = f(x)$, яка відокремлює його опуклу частину від вгнутої або навпаки, називається точкою перегину.

Для знаходження інтервалів опуклості, вгнутості і абсцис точок перегину графіка функції $y = f(x)$, треба:

1) знайти точки області визначення функції $y = f(x)$ в яких друга похідна $f''(x)$ рівна нулю або не існує (критичні точки другого роду);
2) область визначення функції $y = f(x)$ поділити знайденими критичними точками на інтервали;
3) визначити знаки похідної $f''(x)$ в кожному інтервалі;
4) в інтервалах у яких $f''(x) > 0$ – графік функції вгнутий, а у яких $f''(x) < 0$ – графік функції опуклий;
5) критичні точки другого роду при переході через які друга похідна $f''(x)$ змінює знак є абсцисами точок перегину.

Приклад 107. Знайти інтервали опуклості та вгнутості і точки перегину графіка функції $y = 2 - \sqrt[3]{x-3}$.

Розв'язання. Функція визначена на всій числовій прямій. Знаходимо похідну другого порядку та критичні точки другого роду: $y' = -\frac{1}{3}(x-3)^{-\frac{2}{3}}$; $\quad y'' = \frac{2}{9}(x-3)^{-\frac{5}{3}} = \frac{2}{9\sqrt[3]{(x-3)^5}}$.

Друга похідна $y'' \neq 0$, а при $x = 3$ вона не існує. Оскільки $x = 3$ належить області визначення функції, то $x = 3$ є критичною точкою другого роду. Область визначення заданої функції поділяється критичною точкою $x = 3$ на два інтервали $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

Для $x \in (-\infty; 3)$ виконується нерівність $f''(x) < 0$, тому на цьому інтервалі графік функції опуклий. Для $x \in (3; +\infty)$ виконується нерівність $f''(x) > 0$, тому на цьому інтервалі графік функції вгнутий. При переході через точку $x = 3$ похідна $f''(x)$ змінює знак, тому $x = 3 -$ абсциса точки перегину, а точка $(3; 2)$ є точкою перегину графіка функції.

Приклад 108. Знайти інтервали опуклості та вгнутості і точки перегину графіка функції $y = \dfrac{x+4}{x-2}$.

Розв'язання. Область визначення функції $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$. Знаходимо похідну y'': $y' = -\dfrac{6}{(x-2)^2}$; $y'' = \dfrac{12}{(x-2)^3}$. Похідна другого порядку в жодній точці області визначення не дорівнює нулю і не існує для $x = 2$, яка не входить в область визначення функції. Тому задана функція не має точок перегину.

Для $x \in (-\infty; 2)$ виконується нерівність $f''(x) < 0$, тому на цьому інтервалі графік функції опуклий. Для $x \in (2; +\infty)$ виконується нерівність $f''(x) > 0$, тому на цьому інтервалі графік функції вгнутий.

Приклад 109. Знайти інтервали опуклості та вгнутості і точки перегину графіка функції $y = x^3 - 3x^2$.

Розв'язання. Область визначення $x \in R$. Знаходимо $y'' = 6x - 6$. Похідна $y'' = 0$ при $x = 1$. Оскільки $y'' < 0$ при $x < 1$, то на інтервалі $(-\infty; 1)$ графік функції опуклий, а при $x > 1$ – похідна $y'' > 0$, то на інтервалі $(1; +\infty)$ графік функції вгнутий. Точка $(1; -2)$ є точкою перегину.

Знаходження асимптот графіка функції

Якщо при $x = a$ функція $y = f(x)$ має нескінченний розрив, тобто виконується хоча б одне зі співвідношень $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = +\infty$ або

$-\infty$; $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=+\infty$ або $-\infty$, то пряма $x=a$ є вертикальною асимптотою графіка функції $y=f(x)$.

Якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$ і $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=b$ (в обох формулах одночасно $x\to+\infty$ або $x\to-\infty$), то пряма $y=kx+b$ є невертикальною асимптотою графіка функції $y=f(x)$.

Приклад 110. Знайти асимптоти графіка функції $y=\dfrac{3x^2-x}{x-2}$.

Розв'язання. Функція визначена для $x\in\left(-\infty;2\right)\cup\left(2;+\infty\right)$. Точка $x=2$ є точкою розриву функції. Знаходимо односторонні границі: $\lim\limits_{x\to2-0}\dfrac{3x^2-x}{x-2}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to2+0}\dfrac{3x^2-x}{x-2}=+\infty$. Отже, пряма $x=2$ є вертикальною асимптотою графіка функції. Знайдемо невертикальну асимптоту. Оскільки $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-1}{x-2}=3$,

$b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x}{x-2}-3x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x}{x-2}=5$, то $y=3x+5$.

Зауважимо, що знайдені границі співпадають для $x\to+\infty$ і $x\to-\infty$. В таких випадках записують $x\to\infty$. Отже, графік заданої функції має невертикальну асимптоту $y=3x+5$.

Приклад 111. Знайти асимптоти кривої $y=xe^{-2x}$.

Розв'язання. Оскільки, функція неперервна для всіх $x\in R$, то її графік немає вертикальних асимптот. Знайдемо невертикальні асимптоти: $k=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-2x}=+\infty$, отже при $x\to-\infty$ невертикальної асимптоти не існує. $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-2x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{2x}}=0$; $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2e^{2x}}=0$.

(Використано правило Лопіталя).

Отже, при $x\to+\infty$ графік функції має невертикальну асимптоту $y=0$.

Загальна схема дослідження та побудови графіка функції

Для повного дослідження функції та побудови графіка потрібно:
1) знайти область визначення функції;
2) знайти (якщо це можна) точки перетину графіка з координатними осями;
3) дослідити функцію на періодичність, парність та непарність;
4) дослідити функцію на неперервність, знайти точки розриву та дослідити їх;
5) знайти асимптоти графіка функції;
6) знайти інтервали монотонності, точки екстремумів (якщо вони є) та значення функції в цих точках;
7) знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину (якщо вони є);
8) побудувати графік функції, враховуючи проведені дослідження.

Приклад 112. Дослідити функцію і побудувати її графік $y=\dfrac{x^3-4}{x^2}$.

Розв'язання.

1. Область визначення функції $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.
2. Графік перетинає вісь абсцис в точці $x=\sqrt[3]{4}=1{,}6$.
3. Функція неперіодична, ні парна ні непарна.
4. Функція неперервна в області визначення, а в точці $x=0$ має розрив. Обчислимо односторонні границі функції в точці $x=0$: $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{x^2-4}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0-0}\left(x-\dfrac{4}{x^2}\right)=-\infty;$ $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(x-\dfrac{4}{x^2}\right)=-\infty$. Отже, $x=0$ є точкою розриву другого роду.
5. Знайдемо асимптоти графіка функції. Оскільки $\lim\limits_{x\to 0\pm 0}f(x)=-\infty$, то пряма $x=0$ (вісь ординат) є вертикальна асимптота. Знайдемо невертикальну асимптоту. Оскільки $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4}{x^3}=1$ і $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3-4}{x^2}-x\right)=-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x^2}=0$, то $y=x$ – невертикальна асимптота.

6. Знайдемо похідну першого порядку функції:

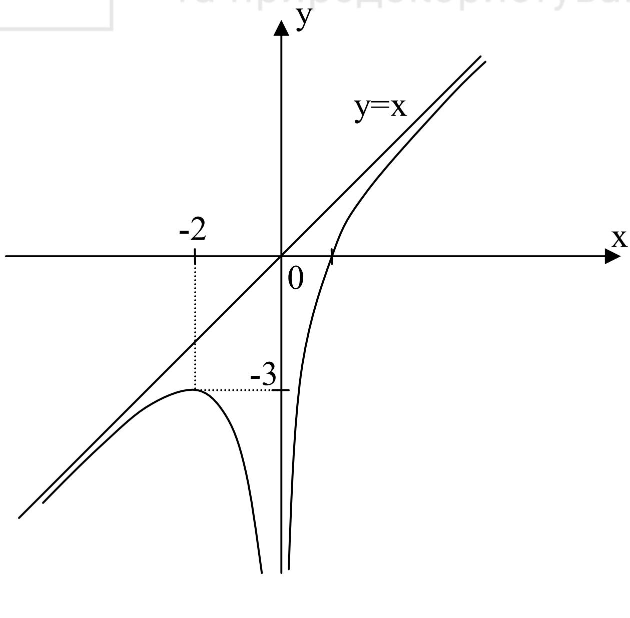
$$y' = \left(\frac{x^3 - 4}{x^2} \right)' = \left(x - \frac{4}{x^2} \right)' = 1 + \frac{8}{x^3} .$$

Похідна не існує для $x = 0$, та оскільки ця точка не входить в область визначення функції, то вона не є критичною. З рівняння $y' = 0$ отримаємо критичну точку $x = -2$. Вона розбиває область визначення функції на проміжки $(-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; +\infty)$. Визначимо знаки похідної на кожному проміжку. Результати досліджень зручно записувати у вигляді таблиці:

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; +\infty)$
y'	+	0	–	не існує	+
y	зростає	$y_{\max} = -3$	спадає	не існує	зростає

7. Друга похідна $y'' = -\frac{24}{x^4} < 0$ всюди, крім точки $x = 0$, де вона і функція не існує. Отже, графік функції опуклий і точок перегину не існує.

8. Будуємо графік:



Найбільше і найменше значення функції на відрізку

В багатьох задачах прикладного характеру виникає потреба у знаходженні найбільшого або найменшого значення деякої величини, зв'язаною функціональною залежністю з іншою величиною у вигляді функції $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$. Якщо ця функція неперервна на відрізку, то вона досягає на цьому відрізку найбільшого і найменшого значення. Для знаходження цих значень треба знайти критичні точки функції $y = f(x)$, які лежать на інтервалі $(a;b)$, обчислити значення функції $f(x)$ у знайдених критичних точках і в точках $x = a$ та $x = b$ і серед них вибрати найбільше та найменше. В прикладних задачах часто використовується простий випадок: якщо між кінцями відрізка a і b лежить лише одна критична точка x_0 і в цій точці функція має максимум (мінімум), то в цій точці функція має найбільше (найменше) значення. Це відноситься і до інтервалу $(a;b)$, а також до нескінченного проміжку.

Приклад 113. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = 2x^3 - 15x^2 + 24x - 10$ на відрізку $[0;3]$.

Розв'язання. Знаходимо критичні точки функції:
$y' = 6x^2 - 30x + 24 = 6(x^2 - 5x + 4)$, $y' = 0$, якщо $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. Беремо критичну точку $x_1 = 1$, яка належить інтервалу $(0;3)$. Обчислюємо $f(1) = 1$, $f(0) = -10$, $f(3) = -19$. Порівнюючи числа $1, -10, -19$, знаходимо $y_{найм.} = f(3) = -19$, $y_{найб.} = f(1) = 1$.

Приклад 114. Визначити розміри консервної банки циліндричної форми із заданим об'ємом V, за яких затрати матеріалу на її виготовлення будуть найменші.

Розв'язання. Якщо r – радіус основи, h – висота циліндра, то затрати матеріалу, тобто повну поверхню циліндра, можна визначити за формулою $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$. Банка має заданий об'єм $V = \pi r^2 h$, звідки $h = \dfrac{V}{\pi r^2}$. Тому, отримаємо $S(r) = 2\left(\dfrac{V}{r} + \pi r^2\right)$, $0 < r < +\infty$. Знаходимо похідну та критичні точки функції $S(r)$:

$S'(r) = 2\left(-\frac{V}{r^2} + 2\pi r\right)$, з умови $S'(r) = 0$, маємо $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ – критична точка. Оскільки $S''(r) = 2\left(\frac{2V}{r^3} + 2\pi\right)$ в критичній точці додатна, то в точці $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ функція $S(r)$ має мінімум, а тому і найменше значення. Підставимо знайдене значення r у формулу для h, будемо мати $h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$. Отже, якщо $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, $h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$, то при заданому об'ємі V на виготовлення банки потрібно найменше матеріалу. (В цьому випадку $h = 2r$).

Еластичність функції

Еластичністю функції $y = f(x)$ називається границя відношення відносного приросту функції до відносного приросту аргументу, якщо приріст аргументу прямує до нуля:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y} \cdot f'(x).$$

Еластичність функції відображає, приблизно, на скільки відсотків зміниться значення функції $y = f(x)$, якщо незалежна змінна x зміниться на 1%.

Приклад 113. Знайти еластичність функції $y = x e^{-x^2}$ та обчислити її значення в точках $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

Розв'язання. Знаходимо похідну функції:

$$y' = e^{-2x} - 2x^2 e^{-x^2} = e^{-x^2}(1 - 2x^2).$$

Тоді $E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot f'(x) = \frac{x}{x \cdot e^{-x^2}} \cdot e^{-x^2}(1 - 2x^2) = 1 - 2x^2.$

Для заданих значень аргументу, маємо: $E_1(y) = -1$; $E_2(y) = -7$.

Завдання для самостійного розв’язування

116. Знайти інтервали монотонності та екстремуми функції:

1) $y = 3 - 2x^2 - x^4$; 2) $y = x + 3\sqrt[3]{x^2}$; 3) $y = x^2 e^{-x^2}$.

117. Знайти інтервали опуклості та вгнутості і точки перегину графіка функції:

1) $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$; 2) $y = x^4 - 2x^3 + 48x^2 - 50$; 3) $y = \ln(1 + x^2)$.

118. Знайти найбільше і найменше значення функції на заданих проміжках:

1) $y = x^4 - 2x^2 + 5,\ [-2; 2]$; 2) $y = x + 2\sqrt{x},\ [0; 4]$.

119. Знайти асимптоти графіка функції:

1) $y = \dfrac{2x}{x+2}$; 2) $y = x + \dfrac{1}{x}$; 3) $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$.

120. Дослідити функцію $y = \dfrac{2 + x^3}{x^2}$ і побудувати її графік.

121. Знайти еластичність функції $y = x^3 + 1$ та обчислити її значення в точках $x_1 = 1$, $x_2 = 5$.

Тема 5. Функції декількох змінних

§1. Область визначення функції двох змінних та лінії рівня. Частинні похідні. Частинні похідні вищих порядків. Похідна в заданому напрямку і градієнт функції

Нехай задано множину D пар чисел $(x; y)$, якщо кожній парі чисел $(x; y) \in D$ за певним правилом відповідає єдине число z, то на множині D визначена функція z від двох змінних x і y і записується $z = f(x, y)$. Множина D в цьому випадку називається областю визначення функції. Аналогічно визначається функція трьох змінних. Оскільки кожній парі чисел $(x; y)$ відповідає єдина точка $M(x, y)$ площини Oxy, то замість $z = f(x, y)$ можна писати $z = f(M)$.

Функція двох змінних може бути задана в просторі у вигляді поверхні, що визначається рівнянням $z = f(x, y)$. Також функцію $z = f(x, y)$ можна задати лініями рівня, рівняння яких $f(x, y) = C$, де C – константа. Якщо константи $C_1, C_2, \ldots C_m, \ldots$ утворюють арифметичну прогресію, то отримаємо набір ліній рівня. Там, де лінії розміщені густіше, функція змінюється швидше.

Областю визначення аналітично заданої функції $z = f(x, y)$ є множина пар чисел $(x; y)$, яким відповідають дійсні значення цієї функції. Геометрично, область визначення функції $z = f(x, y)$ є нескінченною або скінченною частиною координатної площини Oxy, обмеженої однією або декількома кривими.

Приклад 122. Знайти область визначення функції $z = \ln(9 - x^2 - y^2)$.

Розв'язання. Функція має дійсні значення, якщо $9 - x^2 - y^2 > 0$ або $x^2 + y^2 < 9$. Областю визначення даної функції є внутрішня частина круга радіуса $R = 3$ з центром в початку координат. Ця область є відкритою (не містить межі) і обмеженою.

Приклад 123. Знайти область визначення функції $z = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$.

Розв'язання. Перший доданок функції визначений при $4 - x^2 \geq 0$ або $-2 \leq x \leq 2$. Другий доданок має дійсні значення, якщо $1 - y^2 \geq 0$ або $-1 \leq y \leq 1$. Областю визначення функції є прямокутник $-2 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 1$, який включає в себе і межу області. Область замкнута і обмежена.

Приклад 124. Знайти лінії рівня функції $z = x^2 + y^2$.

Розв'язання. Лінії рівня цієї функції визначає рівняння $x^2 + y^2 = C$, $0 \leq C < +\infty$. Надамо C різних значень, отримаємо множину ліній рівня, які є концентричними колами з центром в початку координат і радіусами $R = \sqrt{C}$. Якщо $C = 0$, то коло вироджується в точку $O(0; 0)$.

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $M(x, y)$. Надамо змінній *x* приріст Δx, а змінній *y* приріст Δy так, щоб точки $M_1(x + \Delta x, y)$ і $M_2(x, y + \Delta y)$ належали даному околу. Величини $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x; y)$, $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x; y)$ називають частинними приростами функції $f(x, y)$ відповідно по *x* і *y*.

Частинні похідні по *x* і по *y* для функції $z = f(x, y)$ визначаються формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x; y) = z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} \quad (y = const);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x; y) = z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} \quad (x = const).$$

При обчисленні частинних похідних функції двох змінних використовуються вже відомі формули та правила диференціювання функції однієї змінної.

Частинними похідними другого порядку від функції $f(x, y)$ називають частинні похідні від її перших похідних:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f''_{xx}(x; y) = z''_{xx}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{yy}(x; y) = z''_{yy};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{xy}(x; y) = z''_{xy}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f''_{yx}(x; y) = z''_{yx}.$$

Частинні похідні z''_{xy} і z''_{yx} називаються мішаними частинними похідними другого порядку. В області неперервності ці похідні рівні між собою.

Приклад 125. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функцій:

1) $z = \arcsin(x^2 y)$; 2) $z = x^y + \sqrt{2x + 3y}$.

Розв'язання. За правилом знаходження похідної складної функції та формул диференціювання маємо:

1) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2 y)^2}}(x^2 y)'_x = \frac{2xy}{\sqrt{1-x^4 y^2}}$;

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2 y)^2}}(x^2 y)'_y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4 y^2}}.$$

2) $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1} + \frac{1}{\sqrt{2x+3y}}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x + \frac{3}{2\sqrt{2x+3y}}$.

Приклад 126. Знайти частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x}$; $\frac{\partial u}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial z}$ функції $u = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}$.

Розв'язання.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2\sin x \cos x}{2\sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}} = \frac{\sin 2x}{2\sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\sin 2y}{2\sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\sin 2z}{2\sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}}.$$

Приклад 127. Знайти частинні похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функції $z = x^2 y + \ln(2x + y)$.

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + \frac{2}{2x+y}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + \frac{1}{2x+y}.$$

Виходячи з означення, знаходимо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y - \frac{4}{(2x+y)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{(2x+y)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x - \frac{2}{(2x+y)^2}.$$

Приклад 128. Знайти $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, якщо $z = \sin(x \cdot y)$.

Розв'язання. Знаходимо послідовно $\frac{\partial z}{\partial x}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\cos(xy); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos(xy) - xy\sin(xy);$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -x\sin(xy) - x\sin(xy) - x^2 y\cos(xy) = -2x\sin(xy) - x^2 y\cos(xy).$$

Приклад 129. Показати що функція $u = e^{\frac{x}{y}}$ задовольняє рівняння: $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, та підставимо їх значення у ліву частину заданого рівняння:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{x}{y^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = e^{\frac{x}{y}}\left(-\frac{x}{y^3}\right) - \frac{1}{y^2}e^{\frac{x}{y}}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = e^{\frac{x}{y}}\left(\frac{1}{y} + \frac{x}{y^2} - \frac{x}{y^2} - \frac{1}{y}\right) = 0.$$

Одержуємо тотожність $0 = 0$.

Похідна за напрямком та градієнт функції

Нехай задана функція $u = f(x, y, z)$ разом з областю її визначення. Візьмемо в області визначення точку $M(x, y, z)$ і проведемо з цієї точки вектор $\vec{l}$, напрямні косинуси якого $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. На векторі $\vec{l}$ на відстані Δl від його початку візьмемо точку $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$. Обчислимо приріст $\Delta_l U$ функції $f(x, y, z)$ при переході від точки M до M_1 в напрямку вектора $\vec{l}$:

$\Delta_l U = f(M_1) - f(M)$. Якщо існує границя $\lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{\Delta_l U}{\Delta l}$, то її називають похідною функції $u = f(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$ за напрямком вектора $\vec{l}$ і позначають $\dfrac{\partial U}{\partial l}$.

Похідну за напрямком обчислюють за формулою:

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma.$$

Зауважимо, що частинні похідні $\dfrac{\partial U}{\partial x}, \dfrac{\partial U}{\partial y}, \dfrac{\partial U}{\partial z}$ обчислені в заданій точці $M(x, y, z)$.

Градієнтом функції $u = f(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$ називається вектор, координати якого є значення частинних похідних цієї функції в точці $M(x, y, z)$ і позначають $grad\,U$. Отже,

$$grad\,U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}.$$

Градієнт вказує напрям максимального зростання функції

$$\max \left.\frac{\partial U}{\partial l}\right|_M = \left|grad U\right|_M.$$

Приклад 130. Дано функцію $U = xy + yz + xz$ і точка $M(2, 1, 3)$. Знайти: 1) похідну в точці M в напрямку до точки $M_1(5, 5, 15)$;

2) градієнт функції в точці M;

3) найбільше значення похідної за напрямом в точці M.

Розв'язання.

1) Знаходимо частинні похідні функції в точці M:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + z; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = 1 + 3 = 4; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x + z; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = 2 + 3 = 5;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = y + x; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = 1 + 2 = 3.$$

Знаходимо вектор $\vec{l} = \overrightarrow{MM_1}$, та його напрямні косинуси:

$\vec{l} = \overrightarrow{MM_1} = (3, 4, 12); \quad \left|\vec{l}\right| = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13;$

$$\cos\alpha = \frac{3}{13}, \quad \cos\beta = \frac{4}{13}, \quad \cos\gamma = \frac{12}{13}.$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial l}\right|_M = \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_M \cos\alpha + \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_M \cos\beta + \left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_M \cos\gamma =$$

$$= 4\cdot\frac{3}{13} + 5\cdot\frac{4}{13} + 3\cdot\frac{12}{13} = \frac{68}{13}.$$

2) $grad\, U\big|_M = 4\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$.

3) $\max \left.\frac{\partial U}{\partial l}\right|_M = \left| grad\, U \right|_M = \sqrt{16+25+9} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

Приклад 131. Дано функцію $z = x^3 y + y^2 x$, точку $M(2,1)$ і вектор $\vec{l} = (3; 4)$. Знайти градієнт функції в точці M і похідну в цій точці за напрямком вектора $\vec{l}$.

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні функції в точці M:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y + y^2; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = 12 + 1 = 13; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + 2xy; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = 8 + 4 = 12.$$

$grad\, z\big|_M = (13; 12)$.

Знаходимо напрямні косинуси вектора $\vec{l}$:

$$\left|\vec{l}\right| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5; \quad \cos\alpha = \frac{3}{5}, \quad \cos\beta = \frac{4}{5}.$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_M = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M \cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M \cos\beta = 13\cdot\frac{3}{5} + 12\cdot\frac{4}{5} = \frac{87}{5}.$$

Завдання для самостійного розв'язування

132. Знайти область визначення функцій:

1) $z = 1 + \sqrt{-(x-y)^2}$; 2) $z = \ln(x+y)$; 3) $z = \ln(x^2 + y)$.

133. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$:

1) $z = arctg\,\frac{y}{x}$; 2) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$.

134. Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, якщо $z = \ln(x^2 + y)$.

135. Знайти похідну функції $z = x^2 + xy + 2y^2$ в точці $M(1; 2)$ в напрямку до точки $M_1(4, 6)$.

§2. Екстремуми функції двох змінних. Необхідні та достатні умови існування екстремуму функції двох змінних. Найбільше та найменше значення функції в замкнутій обмеженій області

Функція $z = f(x, y)$ має в точці $M_0(x_0, y_0)$ максимум (мінімум), якщо існує окіл точки M_0 для всіх точок якого, крім самої точки M_0, виконується нерівність $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ $\big(f(x_0, y_0) < f(x, y)\big)$.

Теорема (необхідні умови існування екстремуму). Якщо функція $f(x, y)$ в точці (x_0, y_0) має екстремум і існують частинні похідні $f'_x(x_0, y_0)$ і $f'_y(x_0, y_0)$, то вони дорівнюють нулю, тобто $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Точки, в яких частинні похідні функції дорівнюють нулю називаються стаціонарними. Але не кожна стаціонарна точка може бути точкою екстремуму. Тому для встановлення існування екстремуму в стаціонарній точці (x_0, y_0) потрібно використати достатні умови існування екстремуму. Для цього знаходимо:

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f''_{yy}(x_0, y_0).$$

Складаємо дискримінант $\Delta = AC - B^2$. Тоді:

1) якщо $\Delta > 0$ і $A < 0$ $(C < 0)$, то в точці (x_0, y_0) маємо максимум;

2) якщо $\Delta > 0$ і $A > 0$ $(C > 0)$, то в точці (x_0, y_0) маємо мінімум;

3) якщо $\Delta = 0$, то для розв'язання питання про існування екстремуму потрібно провести додаткові дослідження, наприклад за знаком приросту $\Delta f(x_0, y_0)$ поблизу точки (x_0, y_0).

4) якщо $\Delta < 0$, то в точці (x_0, y_0) екстремум не існує;

Приклад 136. Дослідити на екстремум функцію $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y + 4$.

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 12 .$$

Прирівнюючи задані похідні до нуля, одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0; \\ xy - 2 = 0, \end{cases}$$

з якої знайдемо стаціонарні точки заданої функції. Для цього з другого рівняння визначаємо $y = \frac{2}{x}$ і підставивши його в перше рівняння, одержимо $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$. Розв'язавши одержане біквадратне рівняння, отримаємо:

$x_1 = -1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -2, \quad x_4 = 2,$ а тоді

$y_1 = -2, \quad y_2 = 2, \quad y_3 = -1, \quad y_4 = 1.$

Отже, маємо чотири стаціонарні точки:

$M_1(-1; -2), \quad M_2(1; 2), \quad M_3(-2; -1), \quad M_4(2; 1).$

Перевіримо ці точки на екстремум з допомогою достатніх умов. Для цього знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x.$$

Знайдемо значення цих похідних та відповідні їм дискримінанти для кожної з чотирьох стаціонарних точок:

1) $M_1(-1; -2), \quad A_1 = f''_{xx}(-1; -2) = -6, \quad B_1 = f''_{xy}(-1; -2) = -12,$

$C_1 = f''_{yy}(-1; -2) = -6. \quad \Delta_1 = A_1 C_1 - B_1^2 = 36 - 144 = -108 < 0.$

Тому в цій точці функція не має екстремуму.

2) $M_2(1; 2), \quad A_2 = f''_{xx}(1; 2) = 6, \quad B_2 = f''_{xy}(1; 2) = 12,$

$C_2 = f''_{yy}(1; 2) = 6. \quad \Delta_2 = A_2 C_2 - B_2^2 = 36 - 144 = -108 < 0.$

Тому в цій точці функція не має екстремуму.

3) $M_3(-2; -1), \quad A_3 = f''_{xx}(-2; -1) = -12 < 0, \quad B_3 = f''_{xy}(-2; -1) = -6,$

$C_3 = f''_{yy}(-2; -1) = -12. \quad \Delta_3 = A_3 C_3 - B_3^2 = 144 - 36 = 108 > 0.$

Тому в цій точці функція має максимум:

$z_{\max} = f(-2; -1) = (-2)^3 + 3(-2)(-1)^2 - 15(-2) - 12(-1) + 4 = 32.$

4) $M_4(2; 1), \quad A_4 = f''_{xx}(2; 1) = 12 > 0, \quad B_4 = f''_{xy}(2; 1) = 6,$

$C_4 = f''_{yy}(2;1) = 12.$ $\Delta_4 = A_4C_4 - B_4^2 = 144 - 36 = 108 > 0.$

Тому в цій точці функція має мінімум:

$z_{\min} = f(2;1) = 2^3 + 3\cdot 2\cdot 1^2 - 15\cdot 2 - 12\cdot 1 + 4 = -24.$

Приклад 137. Дослідити на екстремум функцію $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$.

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 24y^2 - 6x.$$

Прирівнюючи задані похідні до нуля, одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 - 2y = 0; \\ 4y^2 - x = 0. \end{cases}$$

З якої цієї системи одержимо рівняння $x^4 - x = 0$ або $x(x^3 - 1) = 0$.

Корені рівняння $x_1 = 0,$ $x_2 = 1,$ а тоді $y_1 = 0,$ $y_2 = \frac{1}{2}.$

Отже, маємо дві стаціонарні точки: $M_1(0;0),$ $M_2(1;\frac{1}{2})$.

Знаходимо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -6, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 48y.$$

Перевіримо виконання достатніх умов існування екстремумів для обох стаціонарних точок.

Для точки $M_1(0;0)$ маємо:

$A_1 = f''_{xx}(0;0) = 0,$ $B_1 = f''_{xy}(0;0) = -6,$ $C_1 = f''_{yy}(0;0) = 0.$

$\Delta_1 = A_1C_1 - B_1^2 = 0 - 36 = -36 < 0.$

Тому в точці $M_1(0;0)$ функція не має екстремуму.

Для точки $M_2(1;\frac{1}{2})$ маємо:

$A_2 = f''_{xx}(1;\frac{1}{2}) = 6 > 0,$ $B_2 = f''_{xy}(1;\frac{1}{2}) = -6,$ $C_2 = f''_{yy}(1;\frac{1}{2}) = 24.$

$\Delta_2 = A_2C_2 - B_2^2 = 144 - 36 = 108 > 0.$

Тому в точці $M_2(1;\frac{1}{2})$ функція має мінімум:

$z_{\min} = f(1; \frac{1}{2}) = 1 + 1 - 3 + 1 = 0.$

Приклад 138. Дослідити на екстремум функцію $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y + 3$.

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 1.$$

Складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0; \\ x + 2y - 1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, одержимо одну стаціонарну точку $M(1; 0)$.

Знаходимо частинні похідні другого порядку та їх значення в стаціонарній точці:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2;$$

$$A = f''_{xx}(1; 0) = 2, \quad B = f''_{xy}(1; 0) = 1, \quad C = f''_{yy}(1; 0) = 2.$$

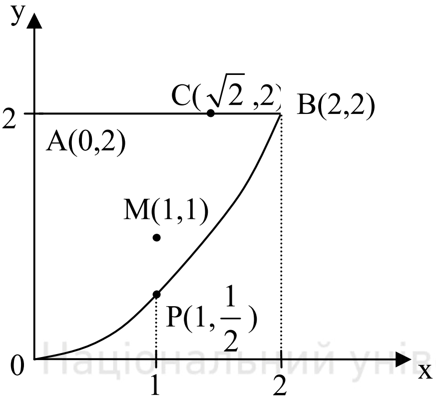
Перевіримо виконання достатніх умов існування екстремумів. Оскільки, $\Delta = AC - B^2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0$ і $A = 2 > 0$, то в точці $M(1; 0)$ функція має мінімум. При цьому $z_{\min} = f(1; 0) = 1 - 2 + 3 = 2.$

Найбільше та найменше значення функції

Якщо функція $z = f(x, y)$ неперервна в обмеженій замкнутій області D, то вона в цій області має найбільше та найменше значення. Ці значення функція досягає в точках екстремуму, які лежать всередині області D, або в точках контуру області. Тому, практично, потрібно знайти всі такі точки, знайти значення функції в цих точках, порівняти знайдені значення між собою та вибрати найбільше і найменше.

Приклад 139. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ в області обмеженій лініями: $y = \frac{1}{2}x^2$ при $x \ge 0$, $x = 0$, $y = 2$.

Розв'язання.



Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 - 6y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -6x + 6y.$$

Знаходимо стаціонарні точки:

$$\begin{cases} x^2 - y = 0; \\ -x + y = 0, \end{cases}$$ звідки маємо дві точки: $O(0;0)$, $M(1;1)$.

Функція може досягати найбільшого та найменшого значення на контурі області, зокрема в крайніх точках області $A(0;2)$, $B(2;2)$. На відрізку AB маємо, що $y = 2$, тому функція $z = 2x^3 - 12x + 12$. $z' = 6x^2 - 12$, $z' = 0$, якщо $x = \sqrt{2}, (x \ge 0)$ – критична точка. Отже, на контурі AB маємо ще одну точку $C(\sqrt{2};2)$. На відрізку OA, $x = 0$, тому функція $z = 3x^2$ і $z' = 6x$, $z' = 0$, $x = 0$. Це означає, що критична точка знаходиться в початку координат. На параболі $y = \frac{1}{2}x^2$ задана функція має вигляд: $z = 2x^3 - 3x^3 + \frac{3}{4}x^4$ або $z = \frac{3}{4}x^4 - x^3$ і $z' = 3x^3 - 3x^2 = 3x^2(x-1)$. $z' = 0$, якщо $x = 0$ і $x = 1$.

Тому $y=0$ і $y=\dfrac{1}{2}$. Це означає, що на контурі є ще одна критична точка $P(1;\dfrac{1}{2})$.

Знайдемо значення заданої функції в усіх знайдених точках:
$z(O)=z(0;0)=0;\quad z(A)=z(0;2)=12;\quad z(B)=z(2;2)=4;$

$z(P)=z(1;\dfrac{1}{2})=-\dfrac{1}{4};\quad z(C)=z(\sqrt{2};2)=12-8\sqrt{2}\approx 0,67;$

$z(M)=z(1;1)=-1.$

Співставляючи всі одержані значення z, маємо, що
$z_{найб.}=z(0;2)=12;\quad z_{найм.}=z(1;1)=-1.$

Приклад 140. Знайти розміри відкритого резервуара у формі прямокутного паралелепіпеда заданого об'єму V і з найменшою площею поверхні.

Розв'язання.

Позначимо сторони: основи паралелепіпеда x і y, а висоту z. Площа поверхні відкритого зверху паралелепіпеда $S=xy+2(x+y)z$.

Об'єм паралелепіпеда $V=xyz$. $z=\dfrac{V}{xy}$, то площа поверхні виразиться формулою: $S=xy+2V(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y})$, $x>0$, $y>0$.

Знайдемо частинні похідні і стаціонарні точки.

$$\frac{\partial S}{\partial x} = y - \frac{2V}{x^2}; \quad \frac{\partial S}{\partial y} = x - \frac{2V}{y^2}.$$

Розв'яжемо систему:

$\begin{cases} y - \dfrac{2V}{x^2} = 0; \\ x - \dfrac{2V}{y^2} = 0, \end{cases}$ $\quad x = \sqrt[3]{2V}, \quad y = \sqrt[3]{2V}$. $M(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V})$ – стаціонарна точка.

Покажемо, що в точці M функція S має мінімум.

$S''_{xx} = \dfrac{4V}{x^3}, \quad S''_{xy} = 1, \quad S''_{yy} = \dfrac{4V}{y^3}$. Знайдемо їх значення в точці M.

$A = S''_{xx}(M) = 2, \quad B = S''_{xy}(M) = 1, \quad C = S''_{yy}(M) = 2$.

$\Delta = AC - B^2 = 4 - 1 = 3$ і $A > 0$, отже функція S – площа поверхні має в точці $M(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V})$ мінімум. Можна показати, що цей мінімум і буде найменшим значенням. В цьому випадку висота паралелепіпеда

$$z = \frac{V}{xy} = \frac{V}{\left(\sqrt[3]{2V}\right)^2} = \frac{1}{2}\frac{2V}{\left(\sqrt[3]{2V}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}.$$

Отже, в основі резервуара лежить квадрат зі стороною $\sqrt[3]{2V}$, а висота резервуара рівна половині ребра основи.

Завдання для самостійного розв'язування

141. Дослідити на екстремум функції:

1) $z = x^2 + xy + y^2 - 6x + 9y$;

2) $z = x^3 + xy^2 + 6xy$;

3) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

142. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в області $0 \le x \le 2, \; -1 \le y \le 2$.

Розділ 3

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Тема 6. Невизначений інтеграл

§1. Первісна функція і невизначений інтеграл. Властивості невизначеного інтеграла. Табличне інтегрування та метод розкладу. Метод підведення під знак диференціала

Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на деякому проміжку, якщо $F'(x)=f(x)$ для всіх точок цього проміжку.

Якщо функція $f(x)$ має первісну $F(x)$, то вона має їх нескінченну множину і всі вони містяться у виразі $F(x)+C$, де C – довільна стала.

Множина усіх первісних функцій для функції $f(x)$ на деякому проміжку називається невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ на цьому проміжку і позначається символом:

$$\int f(x)dx = F(x)+C .$$

Властивості невизначеного інтеграла:

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$; 2) $d\int f(x)dx = f(x)dx$;

3) $\int df(x)dx = f(x)+C$; 4) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,\ k\in R$;

5) $\int \left(f_1(x)+f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$;

6) (властивість інваріантності). Якщо $\int f(x)dx = F(x)+C$ і $U=\varphi(x)$ – диференційована функція, то $\int f(U)dU = F(U)+C$.

Таблиця основних інтегралів

Нехай $U=\varphi(x)$ – деяка диференційована функція. Тоді:

1) $\int u^{\alpha}du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ \alpha\neq -1;$ 2) $\int du = u + C;$

3) $\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C;$ 4) $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C;$

5) $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C;$ 6) $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C;$

7) $\int e^u du = e^u + C;$ 8) $\int \sin u du = -\cos u + C;$

9) $\int \cos u du = \sin u + C;$ 10) $\int tg u du = -\ln|\cos u| + C;$

11) $\int ctg u du = \ln|\sin u| + C;$ 12) $\int \frac{du}{\cos^2 u} = tg u + C;$

13) $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctg u + C;$ 14) $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|tg\frac{u}{2}\right| + C;$

15) $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

16) $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + C = -\frac{1}{a} arcctg\frac{u}{a} + C;$

17) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C = -\arccos\frac{u}{a} + C;$

18) $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C;$ 19) $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C;$

20) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm k}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm k}\right| + C.$

Найпростішим методом інтегрування є метод безпосереднього інтегрування, який включає в себе: інтегрування за допомогою табличних формул інтегралів; тотожне перетворення і розклад підінтегральної функції на суму простіших функцій; властивості інтегралів; операцію підведення під знак диференціала.

Приклад 143. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{dx}{x^2 + 11};$ 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{7 - x^2}};$ 3) $\int \frac{dx}{x^2 - 25};$

4) $\int 4^x dx;$ 5) $\int x^4 dx;$ 6) $\int \left(7x^6 + 5 ctg\, x - \frac{4}{x}\right)dx.$

Розв'язання.

1) $\int \frac{dx}{x^2+11} = \frac{1}{\sqrt{11}} arctg \frac{x}{\sqrt{11}} + C$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{7-x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{7}} + C$;

3) $\int \frac{dx}{x^2-25} = \frac{1}{10} \ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right| + C$; 4) $\int 4^x dx = \frac{4^x}{\ln 4} + C$;

5) $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$; 6) $\int \left(7x^6 + 5\,ctg\,x - \frac{4}{x}\right)dx = x^7 + 5\ln|\sin x| - 4\ln|x| + C$.

Приклад 144. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{(x+2)^3}{x^2}dx$; 2) $\int \frac{x^2+\sqrt[3]{x}+5}{x}dx$; 3) $\int x\sqrt[5]{x}dx$; 4) $\int \frac{(\cos x+3)^2}{\cos x}dx$;

5) $\int \frac{2+\sin x}{\sin x}dx$; 6) $\int \frac{x^2+7x+5}{x(x^2+5)}dx$; 7) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

Розв'язання.

1) $\int \frac{(x+2)^3}{x^2}dx = \int \frac{x^3+6x^2+12x+8}{x^2}dx = \int\left(x+6+\frac{12}{x}+\frac{8}{x^2}\right)dx =$

$= \frac{x^2}{2} + 6x + 12\ln|x| - \frac{8}{x} + C$;

2) $\int \frac{x^2+\sqrt[3]{x}+5}{x}dx = \int\left(x + \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} + \frac{5}{x}\right)dx = \int\left(x + x^{-\frac{2}{3}} + \frac{5}{x}\right)dx =$

$= \frac{x^2}{2} + \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + 5\ln|x| + C = \frac{x^2}{2} + 3\sqrt[3]{x} + 5\ln|x| + C$;

3) $\int x\sqrt[5]{x}dx = \int x \cdot x^{\frac{1}{5}}dx = \int x^{\frac{6}{5}}dx = \frac{x^{\frac{11}{5}}}{\frac{11}{5}} + C = \frac{5}{11}\sqrt[5]{x^{11}} + C$;

4) $\int \frac{(\cos x+3)^2}{\cos x}dx = \int \frac{\cos^2 x + 6\cos x + 9}{\cos x}dx = \int\left(\cos x + 6 + \frac{9}{\cos x}\right)dx =$

$= \sin x + 6x + 9\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$;

5) $\int \frac{2+\sin x}{\sin x}dx = \int\left(\frac{2}{\sin x}+1\right)dx = 2\ln\left|tg\,\frac{x}{2}\right| + x + C;$

6) $\int \frac{x^2+7x+5}{x(x^2+5)}dx = \int \frac{(x^2+5)+7x}{x(x^2+5)}dx = \int\left(\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2+5}\right)dx =$

$= \ln|x| + \frac{7}{\sqrt{5}}\,arctg\,\frac{x}{\sqrt{5}};$

7) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx =$

$= tgx - ctgx + C$.

В деяких випадках інтеграл від заданої функції зводиться до простішого за допомогою операції підведення під знак диференціала, враховуючи відому рівність $U'(x)dx = dU(x)$.

При використанні цього методу є корисною наступна таблиця диференціалів деяких функцій:

1) $x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}d\left(x^{\alpha+1}+k\right);$ 2) $dx = \frac{1}{a}d\left(ax+b\right), k, a, b \in R;$

3) $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d\left(\sqrt{x}+k\right);$ 4) $\frac{dx}{x^2} = -d\left(\frac{1}{x}+k\right);$

5) $\frac{dx}{x} = d\left(\ln x+k\right);$ 6) $a^x dx = \frac{1}{\ln a}d\left(a^x+k\right);$

7) $e^x dx = d\left(e^x+k\right);$ 8) $\sin x dx = -d\left(\cos x+k\right);$

9) $\cos x dx = d\left(\sin x+k\right);$ 10) $\frac{dx}{\cos^2 x} = d\left(tgx+k\right);$

11) $\frac{dx}{\sin^2 x} = -d\left(ctgx+k\right);$ 12) $\frac{dx}{1+x^2} = d\left(arctgx+k\right);$

13) $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d\left(\arcsin x+k\right).$

Приклад 145. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{dx}{3x+5};$ 2) $\int (2x+3)^5 dx;$ 3) $\int \cos(5x+2)dx;$ 4) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin x+7};$

5) $\int \frac{\arcsin^4 x\,dx}{\sqrt{1-x^2}};$ 6) $\int \frac{(\ln x-2)^3}{x}dx;$ 7) $\int x\sqrt[3]{x^2+1}dx;$

8) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+4}}$; 9) $\int \sin^2 x \cos x\, dx$; 10) $\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{2+\cos x}}$.

Розв'язання. Для знаходження інтегралів використаємо метод підведення під знак диференціала:

1) $\int \frac{dx}{3x+5} = \left| dx = \frac{1}{3} d(3x+5) \right| = \frac{1}{3} \int \frac{d(3x+5)}{3x+5} = \frac{1}{3} \ln|3x+5| + C;$

2) $\int (2x+3)^5 dx; = \left| dx = \frac{1}{2} d(2x+3) \right| = \frac{1}{2} \int (2x+3)^5 d(2x+3) =$

$= \frac{(2x+3)^6}{12} + C;$

3) $\int \cos(5x+2) dx = \left| dx = \frac{1}{5} d(5x+2) \right| = \frac{1}{5} \int \cos(5x+2) d(5x+2) =$

$= \frac{1}{5} \sin(5x+2) + C;$

4) $\int \frac{\cos x\, dx}{\sin x + 7} = \left| \cos x\, dx = d(\sin x + 7) \right| = \int \frac{d(\sin x + 7)}{\sin x + 7} = \ln|\sin x + 7| + C;$

5) $\int \frac{\arcsin^4 x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x) \right| = \int \arcsin^4 x\, d(\arcsin x) =$

$= \frac{1}{5} \arcsin^5 x + C;$

6) $\int \frac{(\ln x - 2)^3}{x} dx = \left| \frac{dx}{x} = d(\ln x - 2) \right| = \int (\ln x - 2)^3 d(\ln x - 2) =$

$= \frac{1}{4} (\ln x - 2)^4 + C;$

7) $\int x \sqrt[3]{x^2+1}\, dx = \left| x\, dx = \frac{1}{2} d(x^2+1) \right| = \frac{3}{8} \sqrt[3]{(x^2+1)^4} + C;$

8) $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^3+4}} = \left| x^2\, dx = \frac{1}{3} d(x^3+4) \right| = \frac{1}{3} \int \frac{d(x^3+4)}{\sqrt{x^3+4}} = \frac{2}{3} \sqrt{x^3+4} + C;$

9) $\int \sin^2 x \cos x\, dx = \left| \cos x\, dx = d(\sin x) \right| = \int \sin^2 x\, d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C;$

10) $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{2+\cos x}} = \left|\sin x\,dx = -d(\cos x + 2)\right| = -\int \frac{d(\cos x + 2)}{\sqrt{\cos x + 2}} =$

$= -2\sqrt{\cos x + 2} + C.$

Завдання для самостійного розв'язування

146. Використовуючи тотожні перетворення, знайти інтеграли:

1) $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) dx$; 2) $\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$; 3) $\int ctg^2 x\,dx$; 4) $\int \frac{3-2ctg^2 x}{\cos^2 x} dx$;

5) $\int \frac{x^4}{1+x^2} dx$; 6) $\int e^x \left(1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right) dx$; 7) $\int \frac{x^2}{x^2+4} dx$; 8) $\int \frac{dx}{1-\cos 2x}$.

147. За допомогою підведення під знак диференціала, знайти інтеграли:

1) $\int \sqrt{4x-1}\,dx$; 2) $\int \frac{1}{\sqrt{3-2x}} dx$; 3) $\int \frac{4}{\cos^2 6x} dx$; 4) $\int e^{-7x} dx$;

5) $\int \frac{1}{2-9x} dx$; 6) $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x} dx$; 7) $\int \frac{1}{x(1+\ln x)} dx$; 8) $\int e^{x^3} x^2\,dx$;

9) $\int e^{\cos x} \sin x\,dx$; 10) $\int \sqrt[3]{x^3-8}\,x^2\,dx$; 11) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$; 12) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^8-1}}$;

13) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$; 14) $\int \sin^5 x \cos x\,dx$; 15) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$; 16) $\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+25}$.

§2. Методи заміни змінної та інтегрування частинами невизначеного інтеграла

Метод заміни змінної (підстановки) полягає в тому, що коли функція $f(x)$ неперервна, то поклавши $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ – неперервні, отримаємо $\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$. Цей метод в багатьох випадках дозволяє заданий (нетабличний) інтеграл відносно змінної x привести до простішого інтегралу відносно змінної t, відповідно підібраною, підстановкою $x = \varphi(t)$.

Після вибору підстановки $x=\varphi(t)$ доцільно, при розв'язуванні, скористатись такою схемою:

$$\int f(x)\,dx=\left|\begin{array}{l}x=\varphi(t)\\ dx=\varphi'(t)\,dt\end{array}\right|=\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt=\int \Phi(t)\,dt=F(t)+C=$$

$$=\left|\begin{array}{l}x=\varphi(t)\\ t=\varphi^{-1}(x)\end{array}\right|=F\left(\varphi^{-1}(x)\right)+C\,.$$

В ряді випадків замість підстановки $x=\varphi(t)$ зручно скористатись підстановкою $t=\psi(x)$, де $\psi(x)$ – деяка частина підінтегральної функції $f(x)$.

Приклад 148. Знайти інтеграли:

$$1)\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}+1};\quad 2)\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}};\quad 3)\int\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}};$$

$$4)\int\frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{1+e^x}}dx;\quad 5)\int\frac{dx}{(x+10)\sqrt{x+1}};\quad 6)\int\frac{\sqrt{4-\ln x}}{x\ln x}dx.$$

Розв'язання. Для знаходження інтегралів використаємо метод заміни змінної:

$$1)\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}+1}=\left|\begin{array}{l}x=t^3\\ dx=3t^2dt\end{array}\right|=\int\frac{3t^2dt}{t+1}=3\int\frac{t^2-1+1}{t+1}dt=3\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt=$$

$$=3\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|\right)+C=\left|\begin{array}{l}x=t^3\\ t=\sqrt[3]{x}\end{array}\right|=3\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2}-\sqrt[3]{x}+\ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right|\right)+C;$$

$$2)\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}=\left|\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{t}\\ dx=-\dfrac{1}{t^2}dt\end{array}\right|=\int\frac{-\dfrac{dt}{t^2}}{\dfrac{1}{t}\sqrt{1+\dfrac{1}{t^2}}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=$$

$$=-\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+C=\left|t=\frac{1}{x}\right|=-\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right|+C=\ln\frac{|x|}{1+\sqrt{1+x^2}}+C;$$

$$3)\int\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=\left|\begin{array}{ll}\sqrt{e^x-1}=t, & x=\ln(t^2+1);\\ e^x=t^2+1, & dx=\dfrac{2t\,dt}{t^2+1};\end{array}\right|=\int\frac{\dfrac{2t\,dt}{t^2+1}}{t}=2\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$= 2arctg\,t + C = 2arctg\sqrt{e^x - 1} + C;$$

$$4)\ \int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{1+e^x}}dx = \int \frac{e^x\,e^x dx}{\sqrt[4]{1+e^x}} = \begin{vmatrix} \sqrt[4]{1+e^x} = t, & e^x = t^4 - 1; \\ 1+e^x = t^4, & e^x dx = 4t^3 dt; \end{vmatrix} =$$

$$= \int \frac{(t^4-1)4t^3 dt}{t} = 4\int (t^6 - t^2)dt = 4\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^3}{3}\right) + C = \frac{4}{21}t^3(3t^4 - 7) + C =$$

$$= \frac{4}{21}(3e^x - 4)\sqrt[4]{(e^x+1)^3} + C;$$

$$5)\ \int \frac{dx}{(x+10)\sqrt{x+1}} = \begin{vmatrix} \sqrt{x+1} = t, & x = t^2 - 1; \\ x+1 = t^2, & dx = 2tdt; \end{vmatrix} = \int \frac{2tdt}{(t^2+9)t} = 2\int \frac{dt}{t^2+9} =$$

$$= \frac{2}{3}arctg\frac{t}{3} + C = \frac{2}{3}arctg\frac{\sqrt{x+1}}{3} + C;$$

$$6)\ \int \frac{\sqrt{4-\ln x}}{x\ln x}dx = \begin{vmatrix} \sqrt{4-\ln x} = t, & \ln x = 4 - t^2; \\ 4 - \ln x = t^2, & \dfrac{dx}{x} = -2t\,dt; \end{vmatrix} = -2\int \frac{t^2}{4-t^2}dt =$$

$$= 2\int \frac{t^2}{t^2-4}dt = 2\int \frac{t^2-4+4}{t^2-4}dt = 2\int\left(1 + \frac{4}{t^2-4}\right)dt = 2\left(t + \ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|\right) + C =$$

$$= 2\left(\sqrt{4-\ln x} + \ln\left|\frac{\sqrt{4-\ln x}-2}{\sqrt{4-\ln x}+2}\right|\right) + C.$$

Інтегрування частинами

Якщо $U = U(x)$ і $V = V(x)$ – диференційовані функції, то має місце формула інтегрування частинами:

$$\int UdV = UV - \int VdU\ .$$

Ця формула використовується в тих випадках, коли підінтегральний вираз $f(x)dx$ можна так подати у вигляді UdV, що інтеграл $\int VdU$, при відповідному виборі U і dV, виявиться простішим ніж заданий інтеграл. Зокрема, цим методом завжди знаходяться інтеграли виду:

$$1)\ \int \underbrace{P_n(x)}_{U} \underbrace{\left\{\begin{matrix} a^{kx+b} \\ \sin(kx+b) \\ \cos(kx+b) \end{matrix}\right\} dx}_{dV}; \quad 2)\ \underbrace{P_n(x) \underbrace{\left\{\begin{matrix} \log_a(kx+b) \\ \arcsin(kx+b) \\ \arccos(kx+b) \\ arctg(kx+b) \\ arcctg(kx+b) \end{matrix}\right\}}_{U} dx}_{dV},$$

де $P_n(x)$ – многочлен n-го степеня (зокрема може бути степенева функція x^n).

В деяких випадках при двократному використанні методу інтегрування частинами одержуються рівняння відносно шуканого інтеграла, з якого знаходять цей інтеграл. До таких інтегралів, зокрема, відносяться інтеграли:

$$3)\ \int a^{kx} \sin bx\, dx \ \text{ і } \int a^{kx} \cos bx\, dx\,.$$

При знаходженні таких інтегралів за U приймаємо обидва рази або показникову функцію, або тригонометричну функцію.

Приклад 149. Знайти інтеграли:

$1)\ \int x\sin 3x\, dx; \quad 2)\ \int x e^{5x} dx; \quad 3)\ \int x^2 \cos x\, dx.$

Розв'язання.

$$1)\ \int x\sin 3x\, dx = \left| \begin{matrix} U = x; & dU = dx \\ dV = \sin 3x dx; & V = \int \sin 3x dx = -\frac{1}{3}\cos 3x \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{1}{3} x\cos 3x + \frac{1}{3}\int \cos 3x dx = -\frac{1}{3} x\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x + C;$$

$$2)\ \int x e^{5x} dx = \left| \begin{matrix} U = x; & dU = dx \\ dV = e^{5x} dx; & V = \frac{1}{5} e^{5x} \end{matrix} \right| = \frac{1}{5} x e^{5x} - \frac{1}{5}\int e^{5x} dx =$$

$$= \frac{1}{5} x e^{5x} - \frac{1}{25} e^{5x} + C = \frac{1}{5}\left(x - \frac{1}{5} \right) e^{5x} + C;$$

3) двічі застосовуємо формулу інтегрування частинами:

$$\int x^2 \cos x\, dx = \left| \begin{matrix} U = x^2; & dU = 2x\, dx \\ dV = \cos x\, dx; & V = \sin x \end{matrix} \right| = x^2 \sin x - 2\int x\sin x\, dx =$$

$$=\begin{vmatrix} U=x; & dU=dx \\ dV=\sin x\,dx; & V=-\cos x \end{vmatrix}=x^2\sin x-2\left(-x\cos x+\int\cos x\,dx\right)=$$

$$=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C.$$

Приклад 150. Знайти інтеграли:

1) $\int x^4\ln 3x\,dx$; 2) $\int x^3 arctg\,x\,dx$; 3) $\int\arcsin 2x\,dx$.

Розв'язання.

1) $$\int x^4\ln 3x\,dx=\begin{vmatrix} U=\ln 3x; & dU=\dfrac{1}{3x}3\,dx=\dfrac{dx}{x} \\ dV=x^4dx; & V=\dfrac{x^5}{5} \end{vmatrix}=\frac{x^5}{5}\ln 3x-\frac{1}{5}\int x^4dx=$$

$$=\frac{x^5}{5}\ln 3x-\frac{1}{25}x^5+C=\frac{x^5}{5}\left(\ln 3x-\frac{1}{5}\right)+C;$$

2) $$\int x^3 arctg\,x\,dx=\begin{vmatrix} U=arctg\,x; & dU=\dfrac{dx}{x^2+1} \\ dV=x^3dx; & V=\dfrac{x^4}{4} \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{x^4}{4}arctg\,x-\frac{1}{4}\int\frac{x^4}{x^2+1}dx=\frac{x^4}{4}arctg\,x-\frac{1}{4}\int\frac{x^4-1+1}{x^2+1}dx=$$

$$=\frac{x^4}{4}arctg\,x-\frac{1}{4}\int\left(x^2-1+\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\frac{x^4}{4}arctg\,x-$$

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{3}-x+arctg\,x\right)+C=\frac{1}{4}\left(x^4arctg\,x-arctg\,x-\frac{1}{3}x^3+x\right)+C;$$

3) $$\int\arcsin 2x\,dx=\begin{vmatrix} U=\arcsin 2x; & dU=\dfrac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}} \\ dV=dx; & V=x \end{vmatrix}=$$

$$=x\arcsin 2x-\int\frac{2x\,dx}{\sqrt{1-4x^2}}=x\arcsin 2x+\frac{1}{4}\int\frac{d(1-4x^2)}{\sqrt{1-4x^2}}=$$

$$=x\arcsin 2x+\frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}+C.$$

Приклад 151. Знайти інтеграл $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$.

Розв'язання. Двічі використаємо формулу інтегрування частинами:

$$\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \left| \begin{matrix} U = e^{2x}; & dU = 2e^{2x}dx \\ dV = \cos 3x\,dx; & V = \frac{1}{3}\sin 3x \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x - \frac{2}{3}\int e^{2x}\sin 3x\,dx = \left| \begin{matrix} U = e^{2x}; & dU = 2e^{2x}dx \\ dV = \sin 3x\,dx; & V = -\frac{1}{3}\cos 3x \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3x\,dx \right).$$

Отже, $\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{1}{3}e^{2x}\left(\sin 3x + \frac{2}{3}\cos 3x \right) - \frac{4}{9}\int e^{2x}\cos 3x\,dx.$

Звідки $\frac{13}{9}\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{1}{3}e^{2x}\left(\sin 3x + \frac{2}{3}\cos 3x \right).$

Тому $\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{3}{13}e^{2x}\left(\sin 3x + \frac{2}{3}\cos 3x \right) + C.$

Зауважимо, що метод інтегрування частинами може використовуватись і для знаходження інших інтегралів, які не належать до розглянутих випадків 1 – 3.

Приклад 152. Знайти інтеграл $\int \sqrt{x^2 + a^2}\,dx$.

Розв'язання. Використовуючи інтегрування частинами, одержимо рівняння відносно шуканого інтеграла:

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\,dx = \left| \begin{matrix} U = \sqrt{x^2 + a^2}; & dU = \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \\ dV = dx; & V = x \end{matrix} \right| =$$

$$= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}dx = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \sqrt{x^2 + a^2}\,dx + \int \frac{a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}dx.$$

Отже, $\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx = x\sqrt{x^2+a^2} - \int\sqrt{x^2+a^2}\,dx + a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|.$

Звідки $\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|\right) + C.$

Завдання для самостійного розв'язування

153. Знайти інтеграли:

1) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$; 2) $\int\frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$; 3) $\int\frac{e^{2x}}{e^x-1}dx$;

4) $\int\frac{\sqrt{x+3}}{x}dx$; 5) $\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^x}}dx$.

154. Знайти інтеграли:

1) $\int x^3\ln x\,dx$; 2) $\int x\cos x\,dx$; 3) $\int x^2 e^x dx$;

4) $\int x\,arctg\,x\,dx$; 5) $\int x^2\sin x\,dx$; 6) $\int e^{ax}\cos bx\,dx$.

§3. Раціональні дроби. Виділення цілої частини. Прості раціональні дроби та їх інтегрування. Розклад правильного раціонального дробу на суму простих дробів. Інтегрування дробово-раціональних функцій

Розглянемо дробову раціональну функцію (раціональний дріб) $R(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, де $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлени відповідно степенів n і m.

Якщо $m \ge n$, то раціональний дріб називається неправильним, якщо $m < n$, то – правильним. Неправильний дріб шляхом ділення чисельника на знаменник можна подати у вигляді суми його цілої частини (многочлена) і правильного раціонального дробу.

Правильний раціональний дріб розкладається на суму простих (елементарних) дробів виду:

$$\frac{A}{x-a},\quad \frac{A}{(x-a)^k},\quad \frac{Ax+B}{x^2+px+q},\quad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k},$$

де $k=1,2,3,\ldots, A,B,a,p,q$ – константи; $p^2-4q<0$.

Отже, інтегрування правильних раціональних дробів зводиться до інтегрування простих дробів.

Приклад 155. Знайти інтеграли:

$$1)\int\frac{dx}{x-5};\quad 2)\int\frac{dx}{(x-3)^5};\quad 3)\int\frac{5x-4}{x^2-6x+25}dx.$$

Розв'язання. Усі три інтеграли знаходимо методом безпосереднього інтегрування:

$$1)\int\frac{dx}{x-5}=\int\frac{d(x-5)}{x-5}=\ln|x-5|+C;$$

$$2)\int\frac{dx}{(x-3)^5}=\int(x-3)^{-5}d(x-3)=\frac{(x-3)^{-4}}{-4}+C=-\frac{1}{4(x-3)^4}+C;$$

3) цей інтеграл знайдемо шляхом виділення в чисельнику похідної знаменника і подання даного інтегралу у вигляді суми двох інтегралів. Перший з цих інтегралів за допомогою операції підведення під знак диференціала є логарифмом знаменника, а другий інтеграл, виділивши у знаменнику повний квадрат, також зведемо до табличного:

$$\int\frac{5x-4}{x^2-6x+25}dx=\int\frac{\frac{5}{2}(2x-6)+11}{x^2-6x+25}dx=\frac{5}{2}\int\frac{d(x^2-6x+25)}{x^2-6x+25}+$$

$$=11\int\frac{d(x-3)}{(x-3)^2+16}=\frac{5}{2}\ln(x^2-6x+25)+\frac{11}{4}arctg\frac{x-3}{4}+C.$$

Приклад 156. Знайти інтеграл $\int\frac{3x+2}{x^2-2x+10}dx$.

Розв'язання. Інтеграли такого типу можна знаходити іншим методом, виділивши у знаменнику повний квадрат та ввівши заміну змінної:

$$\int\frac{3x+2}{x^2-2x+10}dx=\int\frac{3x+2}{(x-1)^2+9}dx=\left|\begin{array}{l}x-1=t;\\ x=t+1;\\ dx=dt\end{array}\right|=\int\frac{3(t+1)+2}{t^2+9}dt=$$

$$= 3\int \frac{t\,dt}{t^2+9} + 5\int \frac{dt}{t^2+9} = \frac{3}{2}\int \frac{d(t^2+9)}{t^2+9} + \frac{5}{3} arctg\frac{t}{3} + C =$$

$$= \frac{3}{2}\ln(t^2+9) + \frac{5}{3} arctg\frac{t}{3} + C = \frac{3}{2}\ln(x^2-2x+10) + \frac{5}{3} arctg\frac{x-1}{3} + C.$$

Інтегрування правильних раціональних дробів

При інтегруванні правильного раціонального дробу його попередньо потрібно розкласти на суму простих дробів.

Нехай $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ – правильний раціональний дріб і $P_n(x) = (x-a)^k(x-b)^l \ldots (x^2+px+q)^s$, де k, l, s – цілі додатні числа і $p^2-4q<0$. Розкладемо, користуючись методом неозначених коефіцієнтів, цей раціональний дріб на прості дроби.

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots +$$

$$+ \frac{B_l}{(x-b)^l} + \ldots + \frac{C_1x+D_1}{x^2+px+d} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2+px+d)^2} + \ldots + \frac{C_sx+D_s}{(x^2+px+d)^s}.$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів праву частину розкладу зведемо до спільного знаменника і прирівняємо чисельники дробів, які є в обох частинах рівності. З умови рівності одержаних многочленів, знаходимо шукані коефіцієнти. Це можна зробити або прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x цих многочленів, або надаючи x довільні числові значення (по кількості невизначених коефіцієнтів). В обох випадках одержуються системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів. Можна також скористатись комбінованим методом з цих двох розглянутих методів.

Приклад 157. Знайти інтеграл $\int \frac{6x^2-13x-5}{(x-3)(x^2+x-2)}dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція – правильний раціональний дріб. Оскільки квадратний тричлен x^2+x-2 має дійсні корені $x=-2$ і $x=1$, то знаменник цього дробу розкладається на множники: $(x-3)(x^2+x-2) = (x-3)(x-1)(x+2)$, тому

$$\frac{6x^2-13x-5}{(x-3)(x^2+x-2)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-3}=$$
$$=\frac{A(x-1)(x-3)+B(x+2)(x-3)+C(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-1)(x-3)}.$$

Прирівняємо чисельники останнього та початкового дробів:

$A(x-1)(x-3)+B(x+2)(x-3)+C(x+2)(x-1)=6x^2-13x-5.$

Підберемо (по кількості невизначених коефіцієнтів) певні значення змінної x (найкраще, якщо є корені знаменника раціонального дробу) і підставимо їх в останнє рівняння:

$$\left.\begin{array}{l|l} x=-2 & 15A=45; \\ x=1 & -6B=-12; \\ x=3 & 10C=10. \end{array}\right\}$$

З отриманої системи рівнянь, маємо $A=3;\ B=2;\ C=1$.

Отже, $\int\frac{6x^2-13x-5}{(x-3)(x^2+x-2)}dx=\int\left(\frac{3}{x+2}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x-3}\right)dx=$

$=3\ln|x+2|+2\ln|x-1|+\ln|x-3|+C=\ln\left|(x+2)^3(x-1)^2(x-3)\right|+C.$

Приклад 158. Знайти інтеграл $\int\frac{5x^2+2x+9}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція – правильний раціональний дріб. Квадратний тричлен x^2+2x+5 не має дійсних коренів, тому розклад знаменника дробу є остаточним.

$$\frac{5x^2+2x+9}{(x-1)(x^2+2x+5)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+5}=$$
$$\frac{A(x^2+2x+5)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+2x+5)}.$$

Прирівнюємо чисельники останнього та початкового дробів:

$A(x^2+2x+5)+(Bx+C)(x-1)=5x^2+2x+9.$

Надамо змінній x значення $x=1$ і прирівняємо коефіцієнти лівої і правої частин рівняння при степенях x^2 і x:

$$\left.\begin{array}{ll} x=1 & \big| 8A=16; \\ x^2 & \big| A+B=5; \\ x & \big| 2A-B+C=2. \end{array}\right\}$$

З цієї системи рівнянь отримаємо: $A=2;\ B=3;\ C=1$.

Підінтегральну функцію запишемо у вигляді:

$$\frac{5x^2+2x+9}{(x-1)(x^2+2x+5)}=\frac{2}{x-1}+\frac{3x+1}{x^2+2x+5}=$$

Тому, $\int\frac{5x^2+2x+9}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx=\int\frac{2}{x-1}dx+\int\frac{3x+1}{x^2+2x+5}dx=$

$$=2\ln|x-1|+\int\frac{\frac{3}{2}(2x+2)-2}{x^2+2x+5}dx=2\ln|x-1|+\frac{3}{2}\ln\left|x^2+2x+5\right|-$$

$$-2\int\frac{dx}{(x+1)^2+4}=2\ln|x-1|+\frac{3}{2}\ln\left|x^2+2x+5\right|-arctg\frac{x+1}{2}+C=$$

$$=\ln(x-1)^2\sqrt{(x^2+2x+5)^3}-arctg\frac{x+1}{2}+C.$$

Приклад 159. Знайти інтеграл $\int\frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$.

Розв'язання. Розкладаємо підінтегральну функцію на прості дроби та зведемо їх до спільного знаменника:

$$\frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}=$$

$$\frac{A(x+1)(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)(x+1)^2}{(x+1)^2(x^2+1)}.$$

Прирівняємо чисельники останнього та початкового дробів:

$$A(x+1)(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)(x+1)^2=3x^2+2x+1.$$

З рівності многочленів одержуємо систему рівнянь для знаходження невизначених коефіцієнтів:

$$\left.\begin{array}{ll} x=-1 & \big|\, 2B=2; \\ x^3 & \big|\, A+C=0; \\ x^2 & \big|\, A+B+D+2C=3; \\ x^0 & \big|\, A+B+D=1. \end{array}\right\}$$

З цієї системи рівнянь отримаємо: $A=-1;\ B=1;\ C=1;\ D=1$.

Тому, $\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx = \int\left(-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{x+1}{x^2+1}\right)dx =$

$$= -\ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{x^2+1} + \int\frac{dx}{x^2+1} = -\ln|x+1| - \frac{1}{x+1} +$$

$$+\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + arctg\,x + C = \ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x+1|} - \frac{1}{x+1} + arctg\,x + C.$$

Приклад 160. Знайти інтеграл $\int\frac{x^4+2}{x^3-1}dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція – неправильний дріб, оскільки степінь многочлена, який є в знаменнику менший, ніж степінь многочлена, який є у чисельнику. Поділимо ці два многочлена:

$$\begin{array}{l|l} x^4+2 & \underline{x^3-1} \\ \underline{x^4-x} & x \\ \quad x+2 & \end{array}$$

В наслідок ділення многочленів у частці отримуємо x, а в залишку $x+2$. Звідси:

$$\frac{x^4+2}{x^3-1} = x + \frac{x+2}{x^3-1}.$$

Оскільки $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ і x^2+x+1 не має дійсних коренів, то запишемо розклад виділеного правильного раціонального дробу на прості дроби та зведемо їх до спільного знаменника:

$$\frac{x+2}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \frac{A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}.$$

Прирівнюємо відповідні чисельники та одержуємо систему рівнянь для знаходження коефіцієнтів:

$$A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)=x+2,$$

$$\left.\begin{array}{ll} x=1 & \left|3A=3;\right. \\ x^2 & \left|A+B=0;\right. \\ x^0 & \left|A-C=2.\right. \end{array}\right\}$$

З цієї системи рівнянь отримаємо $A=1;\ B=-1;\ C=-1.$

Підінтегральну функцію запишемо у вигляді:

$$\frac{x^4+2}{x^3-1}=x+\frac{1}{x-1}-\frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

Тому, $\int\frac{x^4+2}{x^3-1}dx=\int x\,dx+\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{(x+1)\,dx}{x^2+x+1}=$

$$=\frac{x^2}{2}+\ln|x-1|-\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{x^2}{2}+\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Завдання для самостійного розв'язування

161. Знайти інтеграли:

1) $\int\frac{5x+2}{x^2+2x+10}dx;$ 2) $\int\frac{3x+5}{x^2-8x+17}dx.$

162. Знайти інтеграли:

1) $\int\frac{2x^2-1}{x^3-5x^2+6x}dx;$ 2) $\int\frac{x^3+2}{x^3-4x}dx;$ 3) $\int\frac{dx}{(x+1)(x^2+2)};$

4) $\frac{dx}{x^3+8};$ 5) $\int\frac{3x^2+2x-1}{(x-1)^2(x+2)}dx.$

§4. Інтегрування тригонометричних виразів. Універсальна тригонометрична підстановка та підстановка *tg x = t* . Інтегрування ірраціональних виразів. Тригонометричні підстановки

Розглянемо інтеграл $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, де підінтегральна функція раціональна відносно $\sin x$ і $\cos x$. Такі інтеграли за допомогою універсальної тригонометричної підстановки $tg\dfrac{x}{2}=t$,

$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$ завжди зводиться до інтегралів від раціональних дробів. Ця підстановка особливо є ефективною при знаходженні інтегралів виду:

$$\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x+c},\ a,b,c\in R \text{ і } a^2+b^2\neq 0;$$

$$\int\frac{dx}{\sin^{2k+1}x};\quad \int\frac{dx}{\cos^{2k+1}x}=\int\frac{dz}{\sin^{2k+1}z},\ z=x+\frac{\pi}{2},\ k=1,2,\ldots$$

Приклад 163. Знайти інтеграли:

1) $\displaystyle\int\frac{dx}{3\sin x+4\cos x+5}$; 2) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^5 x}$.

Розв'язання. Для знаходження цих інтегралів використаємо універсальну тригонометричну підстановку:

$$1)\ \int\frac{dx}{3\sin x+4\cos x+5}=\left|\begin{matrix} tg\dfrac{x}{2}=t; & dx=\dfrac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}; & \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\end{matrix}\right|=$$

$$=\int\frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{\dfrac{6t}{1+t^2}+\dfrac{4-4t^2}{1+t^2}+5}=2\int\frac{dt}{6t+4-4t^2+5+5t^2}=2\int\frac{dt}{t^2+6t+9}=$$

$$=2\int\frac{dt}{(t+3)^2}=-\frac{2}{t+3}=-\frac{2}{tg\dfrac{x}{2}+3}+C;$$

$$2)\ \int \frac{dx}{\sin^5 x} = \left| \begin{matrix} tg\frac{x}{2} = t; & dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} & \end{matrix} \right| = \frac{1}{16}\int \frac{(1+t^2)^4}{t^5}dt =$$

$$= \frac{1}{16}\int \frac{1+4t^2+6t^4+4t^6+t^8}{t^5}dt = \frac{1}{16}\int\left(t^{-5}+4t^{-3}+\frac{6}{t}+4t+t^3\right)dt =$$

$$= \frac{1}{16}\left(-\frac{1}{4t^4}-\frac{2}{t^2}+6\ln|t|+2t^2+\frac{t^4}{4}\right)+C =$$

$$= \frac{1}{16}\left(-\frac{1}{4tg^4\frac{x}{2}}-\frac{2}{tg^2\frac{x}{2}}+6\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+2tg^2\frac{x}{2}+\frac{tg^4\frac{x}{2}}{4}\right)+C .$$

Зауважимо, що застосування універсальної тригонометричної підстановки не завжди приводить до мети найкоротшим шляхом. Тому доцільно використовувати також інші тригонометричні підстановки. Розглянемо деякі випадки.

1. Якщо $R(-\sin x; \cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, то застосовують підстановку $\cos x = t$.

2. Якщо $R(\sin x; -\cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, то застосовують підстановку $\sin x = t$.

3. Якщо $R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x)$, то застосовують підстановку $tg\, x = t$. В цьому випадку маємо:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}; \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}; \quad \sin x\cdot\cos x = \frac{t}{1+t^2} .$$

Приклад 164. Знайти інтеграли:

$$1)\ \int \frac{\sin^3 x}{(\cos x+1)^4}dx; \quad 2)\ \int \frac{dx}{4+5\sin^2 x-3\cos^2 x}.$$

Розв’язання.

1. Підінтегральна функція непарна відносно $\sin x$, тому використовуємо підстановку $\cos x = t$.

$$\int \frac{\sin^3 x}{(\cos x+1)^4}dx = \left| \begin{matrix} \cos x = t \\ -\sin x\, dx = dt \end{matrix} \right| = -\int \frac{1-t^2}{(t+1)^4}dt = \int \frac{t-1}{(t+1)^3}dt =$$

$$=\int\frac{t+1-2}{(t+1)^3}dt=\int\frac{dt}{(t+1)^2}-2\int\frac{dt}{(t+1)^3}=-\frac{1}{t+1}+\frac{1}{(t+1)^2}+C=$$

$$=-\frac{t}{(t+1)^2}+C=-\frac{\cos x}{(\cos x+1)^2}+C\,.$$

2. Підінтегральна функція парна відносно $\sin x$ і $\cos x$, тому застосуємо підстановку $tg\,x=t$.

$$\int\frac{dx}{4+5\sin^2 x-3\cos^2 x}.=\left|\begin{matrix} tg\,x=t; & \cos^2 t=\dfrac{1}{1+t^2} \\ \sin^2 t=\dfrac{t^2}{1+t^2}; & dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\end{matrix}\right|=\int\frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{4+\dfrac{5t^2}{1+t^2}-\dfrac{3}{1+t^2}}=$$

$$=\int\frac{dt}{9t^2+1}=\frac{1}{3}\int\frac{d(3t)}{(3t)^2+1}=\frac{1}{3}arctg\,(3t)+C=\frac{1}{3}arctg\,(3tg\,x)+C\,.$$

Зупинимося окремо на інтегралах

$$\int\sin^m x\cos^n x\,dx,$$

де m і n – цілі додатні числа. Розглянемо два випадки:

а) хоча б одне з чисел m і n непарне. В цьому випадку використовується метод підведення під знак диференціала;

б) числа m і n – парні. В цьому випадку використовуються формули зниження степеня тригонометричних функцій:

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x);\quad \cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x);\quad \sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x\,.$$

Приклад 165. Знайти інтеграли:

1) $\int\sin^6 x\cos^5 x\,dx$; 2) $\int\sin^3 4x\,dx$; 3) $\int\cos^4 x\,dx$.

Розв'язання.

1. В цьому випадку $n=5$ – непарне.

Оскільки $\cos^5 x=(1-\sin^2 x)^2\cos x$, то використовуємо метод підведення під знак диференціала $\cos x\,dx=d(\sin x)$. Тому

$$\int\sin^6 x\cos^5 x\,dx=\int\sin^6 x(1-\sin^2 x)^2\cos x\,dx=$$

$$=\int\sin^6 x(1-\sin^2 x)^2 d(\sin x)=\int(\sin^6 x-2\sin^8 x+\sin^{10} x)\,d(\sin x)=$$

$$=\frac{1}{7}\sin^7 x-\frac{2}{9}\sin^9 x+\frac{1}{11}\sin^{11} x+C.$$

2. $$\int\sin^3 4x\,dx=\int\sin^2 4x\sin 4x\,dx=-\frac{1}{4}\int(1-\cos^2 4x)\,d(\cos 4x)=$$

$$=-\frac{1}{4}\left(\cos 4x-\frac{1}{3}\cos^3 4x\right)+C.$$

3. Двічі застосуємо формулу пониження степеня тригонометричної функції за рахунок подвоєння аргументу:

$$\int\cos^4 x\,dx=\int(\cos^2 x)^2\,dx=\frac{1}{4}\int(1+\cos 2x)^2\,dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)\,dx=\frac{1}{4}(x+\sin 2x)+\frac{1}{8}\int(1+\cos 4x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{4}(x+\sin 2x)+\frac{1}{8}\left(x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$$

Інтеграли $\int\sin mx\cos nx\,dx$; $\int\cos mx\cos nx\,dx$; $\int\sin mx\sin nx\,dx$ знаходяться за допомогою формул перетворення добутку тригонометричних функцій в суму:

$$\sin mx\cos nx=\frac{1}{2}\big(\sin(m+n)x+\sin(m-n)x\big);$$

$$\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}\big(\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\big);$$

$$\sin mx\sin nx=\frac{1}{2}\big(\cos(m-n)x-\cos(m+n)x\big).$$

Приклад 166. Знайти інтеграл $\int\sin 8x\cos 3x\,dx$.

Розв'язання. Застосуємо формулу перетворення добутку тригонометричних функцій в суму:

$$\int\sin 8x\cos 3x\,dx=\frac{1}{2}\int(\sin 11x+\sin 5x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{11}\cos 11x-\frac{1}{5}\cos 5x\right)+C=-\frac{1}{22}\cos 11x-\frac{1}{10}\cos 5x+C.$$

Інтегрування найпростіших ірраціональних виразів

1. Інтеграли типу $\int R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, де n – натуральне число, функція R – раціональна і $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$. Такі інтеграли підстановкою $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^n$, зводиться до інтегралів від раціональної функції відносно змінної t.

Частинний випадок $\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right)dx$ – раціоналізується підстановкою $ax+b=t^n$.

2. В загальному випадку інтеграли типу

$$\int R\left(x, \sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \ldots, \sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$$

раціоналізується підстановкою $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^S$, де S – найменше спільне кратне чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

Приклад 167. Знайти інтеграли:

1) $\int \dfrac{x}{\sqrt[5]{x-4}}dx$; 2) $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}}$.

Розв'язання.

$$1. \int \frac{x}{\sqrt[5]{x-4}}dx = \begin{vmatrix} x-4=t^5 \\ x=t^5+4 \\ dx=5t^4dt \end{vmatrix} = \int \frac{t^5+4}{t}5t^4dt = 5\int (t^8+4t^3)\,dt =$$

$$= 5\left(\frac{t^9}{9}+t^4\right)+C = \frac{5}{9}t^4(t^5+9)+C = \frac{5}{9}(x+5)\sqrt[5]{(x-4)^4}+C.$$

2. Найменше спільне кратне чисел $n_1=2$ і $n_2=3$ дорівнює *6*, тому застосуємо підстановку $x=t^6$. Тоді

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}} = \int \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt{x}} = \begin{vmatrix} x=t^6 \\ dx=6t^5dt \end{vmatrix} = 6\int \frac{t^5dt}{t^4+t^3} = 6\int \frac{t^2}{t+1}dt =$$

$$6\int\frac{t^2-1+1}{t+1}dt=6\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt=6\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t-1|\right)+C=$$

$$3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}+6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+C\,.$$

Тригонометричні підстановки

Інтеграли типу

$$a)\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx;\quad б)\int R\left(x,\sqrt{x^2+a^2}\right)dx;\quad в)\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$$

підстановками

$$a)\;x=a\sin t;\quad б)\;x=a\,tg\,t;\quad в)\;x=\frac{a}{\cos t}$$

зводиться до інтегралів від тригонометричних функцій.

Приклад 168. Знайти інтеграли:

$$1)\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4}dx;\quad 2)\int\frac{dx}{\left(\sqrt{4+x^2}\right)^3}.$$

Розв'язання.

$$1)\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4}dx=\left|\begin{array}{l}x=2\sin t\\ \sqrt{4-x^2}=2\cos t\\ dx=2\cos t\,dt\end{array}\right|=\frac{1}{4}\int\frac{\cos^2 t}{\sin^4 t}dt=\frac{1}{4}\int ctg^2 t\frac{dt}{\sin^2 t}=$$

$$=-\frac{1}{4}\int ctg^2 t\,d(ctg\,t)=-\frac{1}{12}ctg^3 t+C=-\frac{1}{12}\left(\frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t}\right)^3+C=$$

$$=-\frac{1}{12}\left(\frac{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}{\frac{x}{2}}\right)^3+C=-\frac{\left(\sqrt{4-x^2}\right)^3}{12x^3}+C\,.$$

$$2)\ \int \frac{dx}{\left(\sqrt{4+x^2}\right)^3} = \left| \begin{array}{l} x = 2tg\, t \\ \sqrt{4+x^2} = \dfrac{2}{\cos t} \\ dx = \dfrac{2\,dt}{\cos^2 t} \end{array} \right| = \int \frac{\dfrac{2\,dt}{\cos^2 t}}{\dfrac{8}{\cos^3 t}} = \frac{1}{4}\int \cos t\, dt = \frac{1}{4}\sin t + C =$$

$$\frac{1}{4}\frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2 t}} + C = \frac{x}{4\sqrt{4+x^2}} + C\ .$$

Зауважимо, що відповідь можна записати в іншій формі:

$$\int \frac{dx}{\left(\sqrt{4+x^2}\right)^3} = \frac{1}{4}\sin arctg\,\frac{x}{2} + C\ .$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Завдання для самостійного розв’язування

169. Знайти інтеграли:

1) $\int \dfrac{dx}{5+4\sin x}$; 2) $\int \dfrac{dx}{3+\cos x + 2\sin x}$; 3) $\int \dfrac{dx}{4\sin^2 x - 7\cos^2 x}$;

4) $\int \dfrac{dx}{1+\sin^2 x}$; 5) $\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx$; 6) $\int \sin^5 x\, dx$;

7) $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$; 8) $\int \cos 5x \cos 4x\, dx$; 9) $\int \sin 3x \cos 5x\, dx$.

170. Знайти інтеграли:

1) $\int \dfrac{x}{\sqrt{2x+1}+1}dx$; 2) $\int \dfrac{\sqrt{x+1}}{x}dx$; 3) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x^3}}$; 4) $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$.

Тема 7. Визначений інтеграл

§1. Означення визначеного інтеграла і його властивості. Формула Ньютона-Лейбніца. Методи заміни змінної та інтегрування частинами

Нехай функція $f(x)$ визначена на відрізку $[a,b]$ і $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ – довільне розбиття цього відрізка на n частинних відрізків $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$. На кожному з них виберемо довільну точку η_i і складемо суму $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)\Delta x_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Число I_n називається інтегральною сумою функції $f(x)$, що відповідає даному розбиттю відрізка $[a,b]$ і вибору точки η_i. Позначимо $\lambda = \max \Delta x_i$, $1 \le i \le n$.

Означення. Якщо існує границя інтегральної суми I_n при $\lambda \to 0$, що не залежить від способу розбиття відрізка $[a,b]$, ні від вибору точок η_i, то ця границя називається визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ і позначається $\int_a^b f(x)\,dx$, тобто

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)\Delta x_i .$$

Основні властивості:

1) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$;

2) $\int_a^b \left(C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)\right)dx = C_1 \int_b^a f_1(x)\,dx + C_2 \int_b^a f_2(x)\,dx$;

3) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$,

де C – довільне число, а функція $f(x)$ інтегрована у найбільшому з відрізків $[a,b]$, $[a,c]$, $[c,b]$.

4) Якщо m – найменше, а M – найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $a \le x \le b$, то $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

5) Якщо $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то на цьому відрізку існує точка С, що $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$.

Число $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$ називається середнім значенням функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$.

Якщо $F(x)$ – первісна для неперервної функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$ – формула Ньютона-Лейбніца.

Якщо $U(x)$ і V(x) – неперервно диференційовані функції на $[a,b]$, то справедлива формула інтегрування частинами:

$$\int\limits_a^b U\,dV = U\,V\Big|_a^b - \int\limits_a^b V\,dU\,.$$

Заміна змінної у визначеному інтегралі:

$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$, де $\varphi(t)$ – функція, неперервна разом зі своєю похідною $\varphi'(t)$ на відрізку $\alpha \le x \le \beta$; $\varphi(\alpha)=a$; $\varphi(\beta)=b$, $f(\varphi(t))$ – функція неперервна на $[\alpha,\beta]$.

Важливо те, що замінюючи змінну у визначеному інтегралі, знаходять також нові межі інтегрування, і надалі вже не повертаються до початкової змінної.

Приклад 171. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{1+x^2}$;   2) $\int\limits_1^2 (3x^2+2x-1)\,dx$.

Розв'язання.

1. Першісною для функції $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ є функція $F(x)=arctg\,x$, тому $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=arctg\,x\Big|_0^1=arctg\,1-arctg\,0=arctg\,1=\frac{\pi}{4}$;

2. Інтегруючи алгебраїчну суму функцій для яких відомі первісні функції, маємо:

$$\int_1^{22}(3x^2+2x-1)\,dx=(x^3+x^2-x)\Big|_1^2=(8+4-2)-(1+1-1)=10-1=9.$$

Приклад 172. Обчислити $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$.

Розв'язання. Оскільки $dx=\dfrac{1}{3}d(3x+1)$, то

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{3x+1}}=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{d(3x+1)}{\sqrt{3x+1}}=\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}\Big|_0^1=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}.$$

Приклад 173. Обчислити $\displaystyle\int_1^2\frac{x^2}{x+1}dx$.

Розв'язання. Використаємо відповідні тотожні перетворення:

$$\int_1^2\frac{x^2}{x+1}dx=\int_1^2\frac{x^2-1+1}{x+1}dx=\int_1^2\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|\right)\Bigg|_1^2=$$

$$=(2-2+\ln 3)-\left(\frac{1}{2}-1+\ln 2\right)=\ln 3+\frac{1}{2}-\ln 2=\frac{1}{2}+\ln\frac{3}{2}.$$

Приклад 174. Обчислити інтеграли:

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\cos^3 x\,dx$; 2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2x\,dx$.

Розв'язання. При знаходженні заданих інтегралів скористаємось методами знаходження первісних для відповідних невизначених інтегралів:

$$1)\ \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^3 x\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x(1-\sin^2 x)\,d(\sin x) =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 x - \sin^6 x)\,d(\sin x) = \left(\frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{2}{35};$$

$$2)\ \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 4x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}.$$

Приклад 175. Обчислити інтеграли:

$$1)\ \int\limits_1^5 \frac{x}{\sqrt{5+4x}}\,dx; \quad 2)\ \int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}; \quad 3)\ \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+5\cos x}.$$

Розв'язання. Використаємо метод заміни змінної для визначеного інтеграла:

$$1)\ \int\limits_1^5 \frac{x}{\sqrt{5+4x}}\,dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{5+4x} = t;\ dx = \frac{1}{2}t\,dt \\ 4x+5 = t^2, \quad \text{якщо } x=1, \text{ то } t=3 \\ x = \frac{1}{4}(t^2-5), \quad \text{якщо } x=5, \text{ то } t=5 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{8}\int\limits_3^5 \frac{(t^2-5)t\,dt}{t} = \frac{1}{8}\int\limits_3^5 (t^2-5)\,dt = \frac{1}{8}\left(\frac{t^3}{3} - 5t\right)\Bigg|_3^5 =$$

$$\frac{1}{8}\left(\frac{125}{3} - 25 - 9 + 15\right) = \frac{17}{6};$$

$$2)\ \int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt[3]{x+1} = t;\ dx = 3t^2 dt \\ x+1 = t^3, \quad \text{якщо } x=-1, \text{ то } t=0 \\ x = t^3 - 1, \quad \text{якщо } x=0, \text{ то } t=1 \end{array} \right| = \int\limits_0^1 \frac{3t^2 dt}{1+t} =$$

$$= 3\int\limits_0^1 \frac{t^2-1+1}{1+t}\,dt = 3\int\limits_0^1 \left(t - 1 + \frac{1}{t+1}\right)dt = 3\left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1|\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$3\left(\frac{1}{2} - 1 + \ln 2\right) = 3\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right);$$

$$3)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+5\cos x} = \left| \begin{array}{l} tg\frac{x}{2}=t;\ \ якщо\ x=0,\ то\ t=0 \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2};\quad якщо\ x=\frac{\pi}{2},\ то\ t=1 \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+\frac{5-5t^2}{1+t^2}} = \int_0^1 \frac{dt}{4-t^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right|\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4}\ln 3 .$$

Приклад 176. Обчислити інтеграли:

$$1)\ \int_{-1}^{1} x e^{-x} dx;\quad 2)\ \int_0^{\pi} x\sin\frac{x}{2}dx;\quad 3)\ \int_0^1 x\, arctgx\, dx .$$

Розв'язання. Використаємо формулу інтегрування частинами визначеного інтеграла:

$$1)\ \int_{-1}^{1} x e^{-x} dx = \left| \begin{array}{ll} u=x; & du=dx \\ dv=e^{-x}dx; & v=-e^{-x} \end{array} \right| = -xe^{-x}\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} e^{-x}dx =$$

$$= -xe^{-x}\Big|_{-1}^{1} - e^{-x}\Big|_{-1}^{1} = -e^{-1}-e-e^{-1}+e = -\frac{2}{e};$$

$$2)\ \int_0^{\pi} x\sin\frac{x}{2}dx = \left| \begin{array}{ll} u=x; & du=dx \\ dv=\sin\frac{x}{2}dx; & v=-2\cos\frac{x}{2} \end{array} \right| =$$

$$= -2x\cos\frac{x}{2}\Bigg|_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}dx = 4\sin\frac{x}{2}\Bigg|_0^{\pi} = 4;$$

$$3)\ \int_0^1 x\, arctg\, x\, dx = \left| \begin{array}{ll} u=arctg\, x; & du=\frac{dx}{1+x^2} \\ dv=x\,dx; & v=\frac{x^2}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x^2}{2} arctg\, x\Bigg|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2} arctg\, x\Bigg|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx =$$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}(x-arctg\,x)\Big|_0^1=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

Завдання для самостійного розв'язування

177. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}dx$; 2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{tgx+4}}$; 3) $\int\limits_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx$.

178. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_1^3 \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$; 2) $\int\limits_0^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+3x}}$; 3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$.

179. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_0^1 x e^{3x}dx$; 2) $\int\limits_1^{\sqrt{3}} arctg\,x\,dx$; 3) $\int\limits_e^{e^2} x\ln x\,dx$.

§2. Невласні інтеграли. Геометричне застосування визначеного інтеграла

Невласні інтеграли першого типу (з нескінченними межами інтегрування)

Нехай функція $y=f(x)$ визначена на проміжку $[a;+\infty)$ та інтегрована на будь-якому відрізку $[a,b]$. У цьому випадку для будь-якого $b>a$ існує визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Границю цього інтеграла, якщо $b\to+\infty$ називають невласним інтегралом першого типу від функції $f(x)$ на проміжку $[a;+\infty)$ і позначають

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Якщо дана границя скінченна, то інтеграл збіжний. Якщо ця границя нескінченна або не існує, то невласний інтеграл розбіжний.

Аналогічно вводиться поняття невласного інтеграла для функції $f(x)$ на проміжку $(-\infty; a]$:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{b\to-\infty}\int_{b}^{a} f(x)\,dx,$$

та інтеграла для функції $f(x)$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

де c – довільне дійсне число.

Приклад 180. Обчислити інтеграли:

1) $\int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-x^3}\,dx$; 2) $\int_{4}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+16}$; 3) $\int_{0}^{+\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+4}}$; 4) $\int_{0}^{+\infty}\sin x\,dx$.

Розв'язання. Використаємо означення невласного інтеграла першого типу:

1) $$\int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-x^3}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} x^2 e^{-x^3}\,dx = -\frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} e^{-x^3}\,d(-x^3) =$$

$$= -\frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty} e^{-x^3}\Big|_0^b = -\frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty} e^{-b^3} + \frac{1}{3} = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Оскільки існує скінченна границя, то заданий невласний інтеграл збіжний і дорівнює $\frac{1}{3}$;

2) $$\int_{4}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+16} = \lim_{b\to+\infty}\int_{4}^{b}\frac{dx}{x^2+16} = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{4}arctg\frac{x}{4}\Big|_4^b =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{b\to+\infty} arctg\frac{b}{4} - \frac{\pi}{16} = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{16} = \frac{\pi}{16};$$

3) $$\int_{0}^{+\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+4}} = \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{d(x^2+4)}{\sqrt{x^2+4}}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty} 2\sqrt{x^2+4}\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty}\sqrt{b^2+4} - 2 = \infty.$$

Інтеграл розбіжний;

4) $$\int_{0}^{+\infty}\sin x\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\sin x\,dx = -\lim_{b\to+\infty}\cos x\Big|_0^b = -\lim_{b\to+\infty}\cos b + 1.$$

Оскільки $\lim\limits_{b\to+\infty}\cos b$ не існує, то $\int\limits_0^{+\infty}\sin x\,dx$ розбіжний.

Невласні інтеграли другого типу (від необмежених функцій)

Нехай функція $y=f(x)$ неперервна на проміжку $[a;b)$ і $\lim\limits_{x\to b}f(x)=\infty$. У цьому випадку точку $x=b$ називають особливою.

Границя інтеграла $\int\limits_a^{b-\varepsilon}f(x)\,dx$ при $\varepsilon\to 0$ називають невласним інтегралом другого типу від функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ і позначають:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon}f(x)\,dx\,.$$

Якщо існує скінченна границя, то інтеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ називають збіжним. В іншому випадку інтеграл називають розбіжним.

Якщо особливою є точка $x=a$, то невласний інтеграл від функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ визначений рівністю:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b}f(x)\,dx\,.$$

У випадку, коли особливою є точка $x=c$, $a<c<b$, невласний інтеграл визначений рівністю:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_a^c f(x)\,dx+\int\limits_c^b f(x)\,dx\,.$$

Приклад 181. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_1^2\frac{dx}{\sqrt{2-x}}$; 2) $\int\limits_1^3\frac{dx}{(x-1)^2}$.

Розв'язання.

1. Точка $x=2$ особлива, тому, що підінтегральна функція в цій точці необмежена. Запишемо цей інтеграл у вигляді:

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_1^{2-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{2-x}} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_1^{2-\varepsilon}\frac{d(2-x)}{\sqrt{2-x}} = -2\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{2-x}\Big|_1^{2-\varepsilon} =$$
$$-2\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt{\varepsilon}-1\right) = 2\,.$$

2. Оскільки при $x=1$ функція $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ необмежена, то ця точка є особливою. У цьому випадку маємо:

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^{3}\frac{dx}{(x-1)^2} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x-1}\Big|_{1+\varepsilon}^{3} =$$

$= -\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\varepsilon}\right) = +\infty$, і заданий невласний інтеграл розбіжний.

Геометричні застосування визначеного інтеграла

1. Обчислення площі плоскої фігури

Найпростішою плоскою фігурою є криволінійна трапеція, обмежена графіком неперервної додатної функції $y=f(x)$ на відрізку $[a,b]$, прямими $x=a$, $x=b$ і відрізком осі Ox. Площа такої криволінійної трапеції обчислюється за формулою:

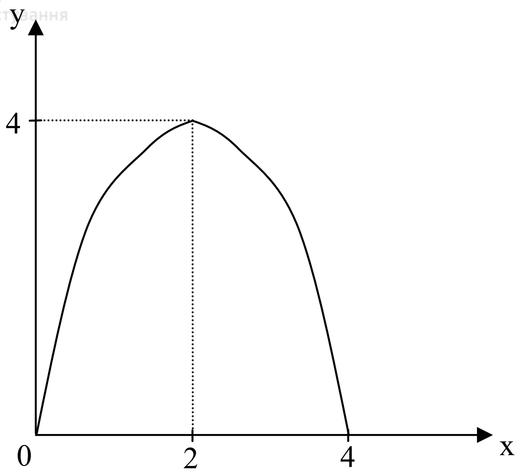
$$S=\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Якщо фігура обмежена зверху і знизу графіками неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій $f(x)$ і $g(x)$, $\left(f(x)>g(x)\right)$, то її площа обчислюється за формулою:

$$S=\int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)dx\,.$$

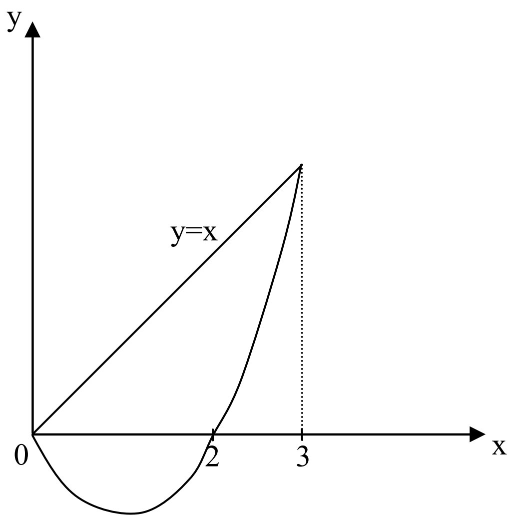
Приклад 182. Обчислити площу фігури, обмежену лініями:
1) $y=4x-x^2$, $y=0$; 2) $y=x^2-2x$, $y=x$;
3) $y=-x^2+6x-7$, $y=x-3$.

Розв'язання.
1. Маємо криволінійну трапецію, обмежену параболою і відрізком $[0,4]$ осі Ox.



$$S=\int_0^4 (4x-x^2)\,dx=\left(2x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4=32-\frac{64}{3}=\frac{32}{3}\text{ (кв. од.).}$$

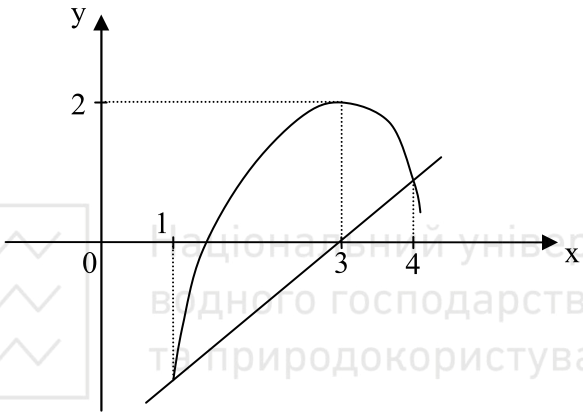
2. Побудуємо графіки параболи і прямої. Визначимо абсциси точок перетину параболи і прямої. Для цього розв'яжемо систему рівнянь: $\begin{cases} y=x^2-2x; \\ y=x. \end{cases}$ Звідси $x_1=0,\ \ x_2=3$.



$$S=\int_0^3\left(x-(x^2-2x)\right)dx=\int_0^3(3x-x^2)\,dx=\left.\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^3=13{,}5-9=$$

4,5 (кв. од.).

3. Побудуємо графіки параболи і прямої. Визначимо абсциси точок перетину параболи і прямої. Розв'язавши систему рівнянь:
$\begin{cases} y=-x^2+6x-7; \\ y=x-3. \end{cases}$ Одержуємо $x_1=1,\ x_2=4$.



$$S=\int_1^4\left((-x^2+6x-7)-(x-3)\right)dx=\int_1^4(5x-x^2-4)\,dx=$$

$$=\left.\left(\frac{5}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-4x\right)\right|_1^4=\frac{9}{2}=4{,}5 \text{ (кв. од.).}$$

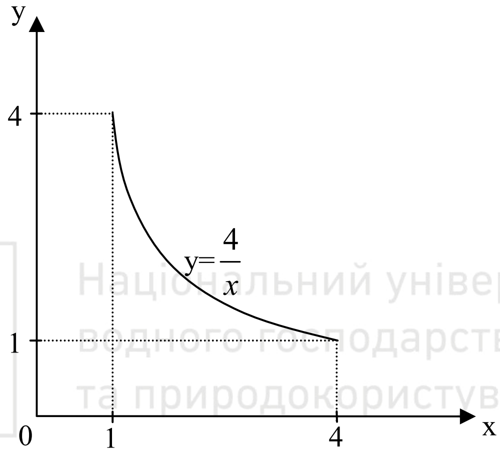
2. Обчислення об'єму тіла обертання

Розглянемо на площині Oxy криволінійну трапецію, обмежену графіком неперервної додатної на відрізку $[a,b]$ функції $f(x)$, прямими $x=a$, $x=b$ і відрізком $[a,b]$ осі Ox. Внаслідок обертання такої криволінійної трапеції навколо осі Ox отримаємо тіло обертання. Об'єм такого тіла обчислюється за формулою:

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Приклад 183. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$.

Розв'язання. Побудуємо у прямокутній системі координат Oxy гіперболу $y = \dfrac{4}{x}$, прямі $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$. При перетині цих ліній отримаємо криволінійну трапецію.



У наслідок обертання цієї криволінійної трапеції навколо осі Ox одержимо тіло, об'єм якого обчислюємо за формулою:

$$V = \pi \int_1^4 \left(\frac{4}{x}\right)^2 dx = 16\pi \int_1^4 \frac{dx}{x^2} = -\frac{16\pi}{x}\bigg|_1^4 = -4\pi + 16\pi = 12\pi \text{ (куб. од.)}.$$

3. Обчислення довжини дуги плоскої кривої

Нехай незамкнута крива на площині Oxy задана рівнянням $y = f(x)$, де $f(x)$ неперервна і має неперервну похідну на відрізку $[a, b]$. Довжина дуги такої лінії знаходиться за формулою:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx .$$

Приклад 184. Обчислити довжину дуги кривої $y=\ln\cos x$ для

$$0\le x\le\frac{\pi}{6}.$$

Розв'язання. Обчислимо похідну $y'=(\ln\cos x)'=-tg\,x$ і підставимо її у формулу для довжини дуги:

$$l=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+tg^2x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{\cos x}=\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}=\ln tg\frac{\pi}{3}-\ln tg\frac{\pi}{4}=$$

$$=\ln\sqrt{3}=\frac{1}{2}\ln 3.$$

Завдання для самостійного розв'язування

185. Обчислити інтеграли або довести, що вони розбіжні:

1) $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3x}$; 2) $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{(x-1)^4}$; 3) $\int_0^{+\infty}\frac{arctg\,x}{1+x^2}$; 4) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{5x+2}}$;

5) $\int_{-1}^{7}\frac{dx}{\sqrt[3]{7-x}}$; 6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}$; 7) $\int_1^{5}\frac{dx}{x\ln x}$.

186. Обчислити площу фігури, обмежену лініями:

1) $y=x^2+1,\ y=0,\ x=1,\ x=2$; 2) $y=x,\ y=\frac{1}{x},\ x=4$;

3) $y=2x-x^2,\ y=-x$; 4) $3y=x^2,\ 3y=12-2x^2$.

187. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y=\frac{1}{2}(x^2-x),\ \ y=0$.

188. Обчислити довжину дуги лінії $y=\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}},\ \ 0\le x\le 1$.

Розділ 4

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ. РЯДИ

Тема 8. Диференціальні рівняння першого порядку

§1. Основні поняття про звичайні диференціальні рівняння першого порядку: означення, задача Коші, теорема існування та єдиність розв’язку задачі Коші. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними. Однорідні диференціальні рівняння

Звичайне диференціальне рівняння першого порядку, в загальному випадку, можна записати у вигляді $F(x, y, y') = 0$, або $y' = f(x, y)$ – у випадку рівняння, розв’язаного відносно похідної.

Розв’язком диференціального рівняння називається функція $y = \varphi(x)$, яка задовольняє це рівняння. Значення шуканого розв’язку при заданому значенні аргументу $x = x_0$, тобто $y_0 = \varphi(x_0)$ називаються початковими умовами. Знаходження розв’язку рівняння, який задовольняє заданим початковим умовам, називається задачею Коші.

Теорема. Нехай задано диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ і початкові умови $y_0 = \varphi(x_0)$. Якщо функція $f(x, y)$ і її похідна $f'_y(x, y)$ неперервна в деякій області D, яка містить точку (x_0, y_0), то в достатньо малому інтервалі точки x_0 це рівняння має єдиний розв’язок, який задовольняє заданим початковим умовам.

Нехай в кожній точці області D рівняння $y' = f(x, y)$ має єдиний розв’язок. Загальним розв’язком диференціального рівняння в області D називається функція $y = \varphi(x, C)$, яка є розв’язком даного рівняння при довільних значеннях сталої C і для будь-яких початкових умов $y_0 = \varphi(x_0)$ (точка $(x_0; y_0) \in D$) існує єдине значення $C = C_0$ таке, що функція $y = \varphi(x, C_0)$ задовольняє заданим початковим умовам, тобто $y_0 = \varphi(x_0, C_0)$.

Рівняння $y' = f(x, y)$ є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними, якщо $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$. Таке рівняння можна записати у вигляді: $\dfrac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y)$.

Поділимо обидві частини на $f_2(y)$ $\left(f_2(y) \neq 0\right)$ і помножимо на dx. Після інтегрування отримаємо загальний розв'язок у вигляді: $\displaystyle\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)\,dx + C$. Зауважимо, що рівняння $y' = f(x)$ є найпростіше рівняння з відокремлюваними змінними. Його загальний розв'язок – $y = \int f(x)\,dx + C$.

Рівняння $y' = f(x, y)$, де функція $f(x, y)$ задовольняє умові $f(t\,x, t\,y) = f(x, y)$ для довільного числа $t \neq 0$, є однорідним диференціальним рівнянням першого порядку. Таке рівняння розв'язується підстановкою $y = xU$, де U – деяка невідома функція від x. Після підстановки функції $y = xU$ в дане рівняння, воно зводиться до диференціального рівняння з відокремлюваними змінними відносно невідомої функції U.

Приклад 189. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' = -\dfrac{y}{x^2}$.

Розв'язання. Це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Запишемо його у вигляді $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x^2}$. Функція $f(x, y) = -\dfrac{y}{x^2}$ і її частинна похідна $f'_y(x, y) = -\dfrac{1}{x^2}$ неперервна в області, у якій $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ і $y \in (-\infty; +\infty)$. Тому в цій області виконуються умови теореми існування і єдиності розв'язку.

Відокремлюючи змінні та інтегруючи, одержимо:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x^2}; \quad \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x^2} + C; \quad \ln|y| = \frac{1}{x} + C;$$

$$|y| = e^{\frac{1}{x} + C}; \quad y = \pm C\,e^{\frac{1}{x}}, \text{ або } y = C\,e^{\frac{1}{x}}.$$

Отримана функція $y = C\,e^{\frac{1}{x}}$ – є шуканим загальним розв'язком.

Зауважимо, що при відокремлюванні змінних можлива втрата розв'язку $y=0$, але цей розв'язок входить в загальний розв'язок при $C=0$.

Приклад 190. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'=\dfrac{y-2}{x+5}$.

Розв'язання. Відокремлюємо змінні:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-2}{x+5};\quad \frac{dy}{y-2}=\frac{dx}{x+5},$$

вважаючи, що $y-2\neq 0,\quad y\neq 2$.

Інтегруючи, знаходимо $\int\dfrac{dy}{y-2}=\int\dfrac{dx}{x+5}+C$, тобто

$\ln|y-2|=\ln|x+5|+\ln|C|$ або $\ln|y-2|=\ln|C(x+5)|$,

звідки одержуємо загальний розв'язок $y=2+C(x+5)$.

При $C=0$ одержується розв'язок $y=2$.

Приклад 191. Знайти розв'язок рівняння $(1+\sin x)\,y'=y\cos x$, який задовольняє початковим умовам

$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=4$.

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y\cos x}{1+\sin x}$;

та знайдемо загальний розв'язок. Відокремивши змінні і проінтегрувавши, отримаємо:

$$\frac{dy}{y}=\frac{\cos x}{1+\sin x}dx;\quad \int\frac{dy}{y}=\int\frac{\cos x}{1+\sin x}dx+C,\qquad \ln|y|=\ln|1+\sin x|+\ln|C|,$$

звідки $y=C(1+\sin x)$ – загальний розв'язок рівняння. (При $C=0$ отримаємо розв'язок $y=0$, втрачений при відокремлюванні змінних).

Використовуючи початкові умови $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=4$, маємо

$$4=C(1+\sin\frac{\pi}{2}),\quad C=2.$$

Отже, $y=C(1+\sin x)$ – шуканий частинний розв'язок.

Приклад 192. Розв'язати рівняння $y' = -2xe^{x^2}\sqrt{1+y^2}$.

Розв'язання. Маємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремлюємо змінні та інтегруємо:

$$\frac{dy}{dx} = -2xe^{x^2}\sqrt{1+y^2}; \quad \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = -2xe^{x^2}dx;$$

$$\int\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = -\int 2xe^{x^2}dx + C;$$

$\ln\left|y+\sqrt{1+y^2}\right| = -e^{x^2} + C$ або $e^{x^2} + \ln\left|y+\sqrt{1+y^2}\right| = C$ – загальний інтеграл рівняння.

Приклад 193. Розв'язати рівняння $x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$, $y(0) = 0$.

Розв'язання. Маємо диференціальне рівняння, записане в диференціальній формі. Оскільки функції $x\sqrt{1+y^2}$ і $y\sqrt{1+x^2}$ є добутками двох функцій, одна з яких залежить від x, а друга від змінної y, то це диференціальне рівняння є з відокремлюваними змінними. Відокремлюємо змінні та інтегруємо:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy = 0, \int\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} + \int\frac{y\,dy}{\sqrt{1+y^2}} = C,$$

$\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C$ – загальний інтеграл рівняння. Враховуючи початкові умови $x = 0$, $y = 0$, маємо $C = 2$.

Отже, $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = 2$ – шуканий частинний інтеграл.

Приклад 194. Знайти загальний розв'язок рівняння $xy' = y\ln\frac{y}{2}$.

Розв'язання. Розв'яжемо рівняння відносно похідної: $y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{2}$. Оскільки $f(x,y) = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{2}$, і $f(tx;ty) = f(x,y)$, то рівняння – однорідне.

Покладемо $y = xU$, $y' = U + xU'$. Підставивши значення y та y' в рівняння, одержимо: $U + xU' = U\ln U$, $\frac{dU}{dx} = \frac{U(\ln U - 1)}{x}$.

Відокремлюючи змінні та інтегруючи, маємо: $\dfrac{dU}{U(\ln U-1)}=\dfrac{dx}{x}$,

$\displaystyle\int\frac{dU}{U(\ln U-1)}=\int\frac{dx}{x}+C$, $\ln\left|\ln U-1\right|=\ln\left|C x\right|$, або $\ln U-1=C x$,

$U=e^{Cx+1}$. Тому $y=x e^{Cx+1}$ – шуканий загальний розв'язок.

Приклад 195. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'=\dfrac{y+\sqrt{xy}}{x}$.

Розв'язання.

Оскільки $f(x,y)=\dfrac{y+\sqrt{xy}}{x}$; $f(tx;ty)=\dfrac{ty+t\sqrt{xy}}{tx}=f(x,y)$, то маємо однорідне диференціальне рівняння. Підставимо у рівняння $y=xU$, $y'=U+xU'$, отримаємо: $U+xU'=\dfrac{xU+x\sqrt{U}}{x}$, звідки $U'=\dfrac{\sqrt{U}}{x}$ або $\dfrac{dU}{dx}=\dfrac{\sqrt{U}}{x}$ – рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо це рівняння $\dfrac{dU}{\sqrt{U}}=\dfrac{dx}{x}$; $\displaystyle\int\frac{dU}{\sqrt{U}}=\int\frac{dx}{x}+C$,

звідки маємо $2\sqrt{U}=\ln|x|+C$ або $U=\dfrac{(\ln|x|+C)^2}{4}$.

Отже, $y=\dfrac{1}{4}x(\ln|x|+C)^2$ – шуканий розв'язок.

Зауважимо, що при відокремленні змінних був втрачений розв'язок $U=0$, тобто $y=0$, який не міститься в знайденому розв'язку при жодному значенні *C*. Тому вся множина розв'язків даного рівняння складається із загального розв'язку $y=\dfrac{1}{4}x(\ln|x|+C)^2$ і розв'язку $y=0$.

Приклад 196. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'=\dfrac{y}{x}+tg\dfrac{y}{x}$.

Розв'язання. Маємо однорідне диференціальне рівняння. Використовуючи підстановку $y=xU$, $y'=U+xU'$, отримаємо:

$U + xU' = U + tg\,U$; $x\dfrac{dU}{dx} = tg\,U$; $\int ctg\,U\,dU = \int \dfrac{dx}{x} + C$;

$\ln|\sin U| = \ln|x| + \ln|C|$ або $\sin U = Cx$.

Оскільки, $U = \dfrac{y}{x}$, то $\sin\dfrac{y}{x} = Cx$ – загальний інтеграл.

Зауважимо, що при відокремлюванні змінних втрачені розв'язки рівняння $tg\,U = 0$, тобто $U = k\pi$, або $y = k\pi x$, $k = 0; \pm 1; \pm 2, \ldots$, які належать знайденому загальному інтегралу при $C = 0$.

Приклад 197. Знайти розв'язок диференціального рівняння $y' = \dfrac{3x + y}{x}$, який задовольняє умовам $y(1) = 3$.

Розв'язання. Використовуючи підстановку $y = xU$, $y' = U + xU'$, отримаємо: $xU' = 3$, $U' = \dfrac{3}{x}$. Інтегруючи, маємо $U = 3\ln|x| + C$. Тому, $y = x(3\ln|x| + C)$ – загальний розв'язок.

Використовуючи початкові умови, знаходимо $C = 3$ і шуканий частинний розв'язок: $y = 3x(\ln|x| + 1)$.

Завдання для самостійного розв'язування

198. Знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь:

1) $(1 + x^2)y' = 2xy$;   2) $xy' + y\ln y = 0$;

3) $y' = \dfrac{y + 1}{x\ln x}$;   4) $y' = \dfrac{e^x y}{1 + e^x}$.

199. Знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь, які задовольняють початковим умовам:

1) $y = (2y + 1)ctg\,x$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$;   2) $(1 + x^2)\,y' = -xy$, $y(0) = 1$.

200. Знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь:

1) $y' = \dfrac{xy - y^2}{x^2}$;   2) $y' = 1 + \dfrac{y}{x} + \dfrac{y^2}{x^2}$;   3) $y' = \dfrac{y}{x} + \sqrt{1 + \dfrac{y^2}{x^2}}$.

§2. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння Бернуллі

Диференціальне рівняння першого порядку називається лінійним, якщо воно є лінійним відносно шуканої функції та її похідної. Це означає, що шукана функція та її похідна міститься в рівнянні в першому степені і не перемножуються. Його канонічна форма записується у вигляді:

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

де функції $P(x)$ і $Q(x)$ – неперервні на деякому проміжку.

Загальний розв'язок такого рівняння будемо шукати у вигляді $y = UV$, де U і V – деякі, відмінні від нуля, функції, які можна знайти з двох диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними, що одержуються з даного рівняння після підстановки в нього $y = UV$.

Приклад 201. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' - y\,ctg\,x = \sin^2 x$.

Розв'язання. Це лінійне диференціальне рівняння першого порядку.

Підставляємо у рівняння $y = UV$, $y' = U'V + UV'$, отримаємо: $U'V + UV' - UVctg\,x = \sin^2 x$. Після очевидних перетворень маємо: $UV' + V(U' - U\,ctg\,x) = \sin^2 x$. Оскільки U або V можна вибрати довільно, то за U виберемо будь-який, відмінний від нуля, розв'язок рівняння $U' - U\,ctg\,x = 0$.

Інтегруючи одержане рівняння будемо мати:

$\dfrac{dU}{dx} = U\,ctg\,x$, $\dfrac{dU}{U} = ctg\,x\,dx$, $\displaystyle\int \frac{dU}{U} = \int ctg\,x\,dx$,

$\ln|U| = \ln|\sin x|$, $U = \pm\sin x$, виберемо $U = \sin x$.

Функцію V знайдемо з рівняння $UV' = \sin^2 x$ при знайденій функції $U = \sin x$, тобто $V'\sin x = \sin^2 x$, $V' = \sin x$, $V = \int \sin x\,dx + C = -\cos x + C$. Шуканий загальний розв'язок даного рівняння $y = \sin x(C - \cos x)$.

Приклад 202. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' = 3x^2 e^{-x^2} - 2xy$.

Розв'язання. За означенням це рівняння лінійне. Запишемо його у вигляді $y' + 2xy = 3x^2 e^{-x^2}$.

Покладемо $y = UV$, $y' = U'V + UV'$.

Тоді рівняння набуде вигляду: $U'V + UV' + 2xUV = 3x^2 e^{-x^2}$ або $UV' + V(U' + 2xU) = 3x^2 e^{-x^2}$. За невідому функцію $U \neq 0$ виберемо частинний розв'язок рівняння $U' + 2xU = 0$. Розв'яжемо це рівняння: $\dfrac{dU}{dx} = -2xU$, $\dfrac{dU}{U} = -2x\,dx$, $\displaystyle\int \frac{dU}{U} = -\int 2x\,dx$, $\ln|U| = -x^2$, $U = \pm e^{-x^2}$, звідки один з розв'язків $U = e^{-x^2}$. Підставимо знайдений розв'язок в рівняння $UV' = 3x^2 e^{-x^2}$, будемо мати $V' = 3x^2$, $V = x^3 + C$.

Шуканий загальний розв'язок даного рівняння $y = e^{-x^2}(x^3 + C)$.

Приклад 203. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' - \dfrac{2xy}{1+x^2} = x^2$.

Розв'язання. Дане рівняння лінійне.

Підставивши в рівняння $y = UV$, $y' = U'V + UV'$, отримаємо:

$$U'V + UV' - \frac{2xUV}{1+x^2} = x^2, \quad UV' + V\left(U' - \frac{2xU}{1+x^2}\right) = x^2.$$

Знаходимо частинний розв'язок рівняння $U' - \dfrac{2xU}{1+x^2} = 0$, $\dfrac{dU}{U} = \dfrac{2x}{1+x^2}$, $\displaystyle\int \frac{dU}{U} = \int \frac{2x\,dx}{1+x^2}$, $\ln|U| = \ln(1+x^2)$, $U = 1 + x^2$, звідки маємо: $V' = \dfrac{x^2}{x^2+1}$, $\displaystyle V = \int \frac{x^2 dx}{x^2+1} + C = x - arctg\,x + C$.

Отже, шуканий загальний розв'язок $y = (x^2+1)(x - arctg\,x + C)$.

Приклад 204. Знайти розв'язок рівняння $y' - \frac{2y}{x} = x^4$, який задовольняє початковим умовам $y(1) = \frac{4}{3}$.

Розв'язання. Знайдемо загальний розв'язок цього рівняння. Оскільки рівняння лінійне, то підставивши в це рівняння $y = UV$, $y' = U'V + UV'$, після перетворення, маємо: $UV' + V\left(U' - \frac{2U}{x}\right) = x^4$.

Знаходимо функції U і V: $U' - \frac{2U}{x} = 0$,

$\frac{dU}{U} - \frac{2dx}{x} = 0$, $\ln|U| = 2\ln|x|$, $U = x^2$.

$UV' = x^4$, $x^2 V' = x^4$, $V' = x^2$, $V = \frac{x^3}{3} + C$.

Шуканий загальний розв'язок даного рівняння: $y = x^2\left(\frac{x^3}{3} + C\right)$.

Використовуючи початкові умови, маємо: $\frac{4}{3} = \frac{1}{3} + C$, $C = 1$ і шуканий частинний розв'язок $y = x^2\left(\frac{x^3}{3} + 1\right)$.

Приклад 205. Розв'язати диференціальне рівняння $y' - 2xy = xy^2$.

Розв'язання. Дане рівняння є диференціальним рівнянням Бернуллі. Це рівняння має очевидний розв'язок $y = 0$. Аналогічно як і у випадку лінійного рівняння, будемо розв'язувати це рівняння підстановкою $y = UV$, $y' = U'V + UV'$. В результаті розв'язання, отримаємо: $U'V + UV' - 2xUV = xU^2V^2$

або $UV' + V(U' - 2xU) = xU^2V^2$.

Виберемо функцію U з умови $U' - 2xU = 0$. Проінтегруємо отримане рівняння: $\frac{dU}{dx} = 2xU$, $\frac{dU}{U} = 2x\,dx$, $\ln|U| = x^2$, $U = e^{x^2}$ – один із розв'язків.

Підставляючи $U = e^{x^2}$ в рівняння $UV' = xU^2V^2$, отримаємо: $V' = xe^{x^2}V^2$, $\int \frac{dV}{V^2} = \int xe^{x^2}dx + C$, $-\frac{1}{V} = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$, звідки $V = -\frac{2}{e^{x^2} + C}$. Отже, $y = -\frac{2e^{x^2}}{e^{x^2} + C}$.

Відповідь. Множина всіх розв'язків даного рівняння: $y = -\frac{2e^{x^2}}{e^{x^2} + C}$, $y = 0$.

Приклад 206. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' - \frac{y}{x} = \frac{x^5}{y^2}$.

Розв'язання. За означенням це диференціальне рівняння Бернуллі. Покладемо $y = UV$, $y' = U'V + UV'$. Тоді отримаємо: $U'V + UV' - \frac{UV}{x} = \frac{x^5}{U^2V^2}$ або $UV' + V\left(U' - \frac{U}{x}\right) = \frac{x^5}{U^2V^2}$. Функцію $U \neq 0$ знаходимо з рівняння $U' - \frac{U}{x} = 0$. Розв'язуючи його, маємо: $\frac{dU}{dx} = \frac{U}{x}$, $\frac{dU}{U} = \frac{dx}{x}$, $\ln|U| = \ln|x|$, $U = x$. Функція V – загальний розв'язок рівняння $UV' = \frac{x^5}{U^2V^2}$ при $U = x$. Інтегруючи його, маємо: $\frac{dV}{dx} = \frac{x^2}{V^2}$, $V^2dV = x^2dx$, $\int V^2dV = \int x^2dx + C$, $\frac{V^3}{3} = \frac{x^3}{3} + C$, $V^3 = x^3 + C$, $V = \sqrt[3]{x^3 + C}$.

Тому $y = x\sqrt[3]{x^3 + C}$ – шуканий загальний розв'язок рівняння.

Завдання для самостійного розв'язування

207. Розв'язати рівняння:

1) $y' - 2xy = 2x\,e^{x^2}$;   2) $y' - y\,tgx = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

3) $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{e^{-x}}{x}$;   4) $y' - \dfrac{y}{x} = x\cos x$;

5) $y' - \dfrac{2y}{x} = 3x^4$;   6) $y' + \dfrac{y}{x} = -x\,y^2$;

7) $y' - \dfrac{y}{x-1} = \dfrac{y^2}{x-1}$;   8) $y' + \dfrac{y}{x} = y^2\,\dfrac{\ln x}{x}$.

Тема 9. Ряди

§1. Числові ряди

Числовим рядом називається вираз $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, де $u_1, u_2, u_3, \ldots$ – члени ряду, u_n – загальний член ряду. $S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$ називається n-ю частинною сумою ряду.

Якщо існує $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд називається збіжним, а S – називається сумою ряду. Якщо ця границя не існує або нескінченна, то ряд називається розбіжним.

Якщо ряд збіжний, то $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ – необхідна умова збіжності.

Ряд, всі члени якого є додатними членами, називається знакододатним. Наведемо достатні ознаки збіжності знакододатних рядів.

Ознака порівняння. Якщо задані ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, причому $0 \le u_n \le v_n$, то зі збіжності другого ряду випливає збіжність першого ряду, а із розбіжності першого ряду випливає розбіжність другого ряду.

Зручною є **гранична ознака порівняння**: якщо існує $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k \ne 0, \infty$, то обидва ряди або одночасно збіжні, або одночасно розбіжні.

Для застосування ознак порівняння часто використовують ряди, члени яких утворюють геометричну прогресію і гармонічні ряди, тобто:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} a q^{n-1}$ $\begin{cases} \text{збіжний, якщо } |q| < 1, \\ \text{розбіжний, якщо } |q| \ge 1; \end{cases}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ $\begin{cases} \text{збіжний, якщо } \alpha > 1, \\ \text{розбіжний, якщо } \alpha \le 1. \end{cases}$

Ознака Даламбера. Нехай для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n > 0$ існує границя $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = l$. Тоді ряд збіжний при $l < 1$ і розбіжний при $l > 1$. У випадку $l = 1$ потрібні додаткові дослідження.

Радикальна ознака Коші. Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n > 0$ існує $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = l$, то при $l < 1$ ряд збіжний, а при $l > 1$ – розбіжний. У випадку $l = 1$ потрібні додаткові дослідження.

Інтегральна ознака Коші. Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n = f(n)$, де $f(x) \geq 0$ неперервна і незростаюча функція на $[1;\infty)$, то якщо $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ збіжний, тоді і ряд збіжний, якщо вказаний невласний інтеграл розбіжний, тоді і ряд розбіжний.

Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ з членами довільного знаку. Такий ряд називається знакозмінним.

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, складений з модулів членів даного ряду, збіжний, то даний ряд теж збіжний і називається абсолютно збіжним.

Якщо ряд, утворений з модулів розбіжний, а даний знакозмінний ряд збіжний, то він називається умовно збіжним.

Ряд, знаки членів якого строго чергуються $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1} u_n + \ldots$, називається знакопочережним. Такий ряд досліджується за ознакою Лейбніца: якщо для знакопочережного ряду $u_n > u_{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ і $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, то цей ряд збіжний, його сума додатня і не перевищує першого члена ($S \leq u_1$).

Приклад 208. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{7n+3}$.

Розв'язання. Знаходимо $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{7n+3} = \frac{2}{7} \neq 0$. Отже, ряд розбіжний, оскільки не виконується необхідна ознака збіжності ряду.

Приклад 209. Дослідити на збіжність ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2+3}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{6n^3+5}$.

Розв'язання.

1. Порівняємо даний ряд з гармонічним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, який розбіжний, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{4n^2+3} : \frac{1}{n} \right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{4n^2+3} = \frac{1}{4} \neq 0$. Отже, даний ряд також розбіжний.

2. Порівняємо даний ряд з рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, який збіжний, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{6n^3+5} : \frac{1}{n^2} \right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3}{6n^3+5} = \frac{1}{6} \neq 0$. Отже, даний ряд також збіжний.

Приклад 210. Дослідити на збіжність ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{3^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{4^{2n-1}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.

Розв'язання. Оскільки загальні члени даних рядів містять вирази a^n і $n!$, то для дослідження на збіжність таких рядів зручно використовувати ознаку Даламбеа.

1. Оскільки $u_n = \frac{n^2+2}{3^n}$; $u_{n+1} = \frac{(n+1)^2+2}{3^{n+1}}$, то

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^2+2}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^2+2} \right) = \frac{1}{3} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+3}{n^2+2} = \frac{1}{3} < 1$, отже, даний ряд збіжний.

2. Маємо $u_n = \frac{3n+1}{4^{2n-1}}$; $u_{n+1} = \frac{3n+4}{4^{2n+1}}$.

Обчислимо $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+4}{4^{2n+1}}\cdot\dfrac{4^{2n-1}}{3n+1}\right)=\dfrac{1}{16}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+4}{3n+1}=\dfrac{1}{16}<1$, отже, даний ряд збіжний.

3. Оскільки $u_n=\dfrac{2^n}{n!}$; $u_{n+1}=\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$, то

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\dfrac{n!}{2^n}\right)=2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n!(n+1)}=2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0<1$, тому, даний ряд збіжний.

Приклад 211. Дослідити на збіжність ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n+2}{4n+5}\right)^{2n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{5n+4}{5n-1}\right)^{n^2}$.

Розв'язання. Використаємо радикальну ознаку Коші.

1. Знаходимо $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{3n+2}{4n+5}\right)^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+2}{4n+5}\right)^2=\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=$

$=\dfrac{9}{16}<1$, отже, даний ряд збіжний.

2. Обчислимо $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{5n+4}{5n-1}\right)^{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n+4}{5n-1}\right)^n=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+\dfrac{4}{5n}}{1-\dfrac{1}{5n}}\right)^n=\dfrac{e^{\frac{4}{5}}}{e^{-\frac{1}{5}}}=e>1$, отже, даний ряд розбіжний.

Приклад 212. Дослідити на збіжність ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+2)\ln(n+2)}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+2)\ln^3(n+2)}$.

Розв'язання. Застосуємо інтегральну ознаку Коші.

1. Функція $f(x)=\dfrac{1}{(x+2)\ln(x+2)}$. Знайдемо невласний інтеграл

$\int\limits_1^{\infty}f(x)\,dx=\int\limits_1^{\infty}\dfrac{dx}{(x+2)\ln(x+2)}=\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_1^{b}\dfrac{dx}{(x+2)\ln(x+2)}=\lim\limits_{b\to\infty}\ln\ln(x+2)\Big|_1^b=$

$= \lim\limits_{b\to\infty} \ln\ln(b+2)\Big| - \ln\ln 3 = \infty$. Отже, невласний інтеграл розбіжний, тому ряд теж розбіжний.

2. Функція $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)\ln^3(x+2)}$. Невласний інтеграл

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+2)\ln^3(x+2)} = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} \frac{dx}{(x+2)\ln^3(x+2)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\frac{1}{\ln^2(x+2)}\Bigg|_1^b = -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\frac{1}{\ln^2(b+2)} + \frac{1}{2\ln^2 3} = \frac{1}{2\ln^2 3}.$$ Отже,

невласний інтеграл збіжний, тому ряд теж збіжний.

Приклад 213. Дослідити на збіжність ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^3}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n^2}}$.

Розв'язання. Маємо знакопочережні ряди.

1. Дослідимо ряд з абсолютних величин його членів. Оскільки, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}$ – збіжний, як узагальнений гармонічний ряд при $\alpha = 3 > 1$, то даний знакопочережний ряд абсолютно збіжний.

2. Ряд з абсолютних величин його членів – $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$. Цей ряд розбіжний, оскільки він є узагальнений гармонічний ряд при $\alpha = \dfrac{2}{3} < 1$. Тому для подальшого дослідження даного ряду використаємо ознаку Лейбніца. На підставі цієї ознаки, маємо: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = 0$ і даний знакопочережний ряд збіжний. Оскільки, ряд з абсолютних величин його членів розбіжний, то даний ряд умовно збіжний.

Завдання для самостійного розв'язування

214. Дослідити на збіжність ряди:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{7n-2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n!}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+1}{5^5}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\, n!}{n^n}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-2}{5n+3}\right)^{2n}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{4^n}$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n}$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{n^3+2n-1}$.

§2. Функціональні ряди. Степеневі ряди та їх застосування

Функціональним рядом називається ряд, члени якого є функціями деякої змінної: $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$.

Множина змінної x, при яких відповідний числовий ряд збіжний, називається областю збіжності функціонального ряду.

Сумою функціонального ряду називається функція $S(x)$, якщо $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$, де $S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)$.

Функціональний ряд :

$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots$ або

$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$ називається степеневим рядом. Дійсні числа $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ називаються коефіцієнтами ряду.

Інтервал збіжності степеневого ряду можна знайти за ознаками Даламбера і Коші. Щоб знайти область збіжності, потрібно дослідити збіжність ряду в крайніх точках його інтервалу збіжності.

Якщо функція $f(x)$ на деякому проміжку є сумою степеневого ряду, то будемо говорити, що вона розкладається в степеневий ряд на цьому проміжку.

Якщо функція $f(x)$ на деякому проміжку розкладається в степеневий ряд, то цей ряд єдиний і являється рядом Тейлора (Маклорена) для цієї функції.

Розклад функції $f(x)$ в ряд Тейлора має вигляд: $f(x)=f(x_0)+$
$$+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

При $x_0=0$ маємо розклад функції в ряд Маклорена:
$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

Розклад в ряд Маклорена деяких елементарних функцій:
$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\quad(-\infty<x<\infty),$$
$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots\quad(-\infty<x<\infty),$$
$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\cdots\quad(-\infty<x<\infty),$$
$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots\quad(-1<x<1),$$
$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n!}+\cdots\quad(-1<x\le 1),$$
$$arctg\,x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots\quad(-1\le x\le 1),$$
$$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7}+\ldots+$$
$$+\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\quad(-1\le x\le 1).$$

Степеневі ряди застосовуються при наближених обчисленнях визначених інтегралів, при знаходженні наближених значень функцій, при наближеному інтегруванні диференціальних рівнянь.

Приклад 215. Визначити область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n\,4^n}$.

Розв'язання. Використовуючи ознаку Даламбера, знайдемо інтервал збіжності цього ряду з нерівності $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|<1$.

Маємо, $u_n(x)=\frac{(x-2)^n}{n\,4^n}$, $u_{n+1}(x)=\frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)\,4^{n+1}}$;

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\left|\frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)\,4^{n+1}}\cdot\frac{n\,4^n}{(x-2)^n}\right|=\frac{|x-2|}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{|x-2|}{4};$$

$$\frac{|x-2|}{4}<1,\ \ |x-2|<4,\ \ -4<x-2<4,\ \ -2<x<6\,.$$

Отже, $-2<x<6$ – інтервал збіжності. Дослідимо збіжність ряду на кінцях цього інтервалу.

При $x=6$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n\,4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – розбіжний гармонічний ряд.

При $x=-2$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^n}{n\,4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ – умовно збіжний ряд, оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ розбіжний, а за ознакою Лейбніца $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Отже, область збіжності даного ряду є проміжок $-2\le x<6$.

Приклад 216. Визначити область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n}}{n16^n}$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку інтервал збіжності ряду. Оскільки $u_n(x)=\frac{(x-3)^{2n}}{n16^n}$, $u_{n+1}(x)=\frac{(x-3)^{2n+2}}{(n+1)16^{n+1}}$ і

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \left|\frac{(x-3)^{2n+2}}{(n+1)16^{n+1}}\cdot\frac{n16^n}{(x-3)^{2n}}\right| = \frac{(x-3)^2}{16}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{(x-3)^2}{16},$$ то даний ряд абсолютно збіжний при значеннях x, які задовольняють нерівність $\frac{(x-3)^2}{16} < 1$, або $|x-3| < 4$, $-4 < x-3 < 4$, $-1 < x < 7$ – шуканий інтервал збіжності.

На кінцях інтервалу при $x=-1$ і $x=7$ маємо гармонічний розбіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Отже, область збіжності даного ряду є проміжок $-1 < x < 7$.

Приклад 217. Визначити область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

Розв'язання. Знаходимо границю
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$ для $-\infty < x < \infty$.

Отже, ряд збіжний на всій числовій прямій.

Приклад 218. Обчислити $arctg\,0,2$ з точністю до $0,0001$.

Розв'язання. Використаємо розклад функції $arctg\,x$ в ряд Маклоена: $arctg\,x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$. Покладемо $x = 0,2$, отримаємо: $arctg\,0,2 = 0,2 - \frac{0,2^3}{3} + \frac{0,2^5}{5} - \frac{0,2^7}{7} + \ldots$, або $arctg\,0,2 = 0,2 - \frac{0,008}{3} + \frac{0,00032}{5} - \ldots$. Оскільки одержаний числовий ряд є знакопочережним і третій член розкладу менший за $0,0001$, для забезпечення потрібної точності, цей і всі наступні члени ряду можна відкинути. Тому, $arctg\,0,2 \approx 0,2 - \frac{0,008}{3} = \frac{0,6-0,008}{3} = \; = \frac{0,592}{3} = 0,1973$.

Приклад 219. Обчислити з точністю до 0,001 інтеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}dx$.

Розв'язання. Розкладаємо підінтегральну функцію в степеневий ряд.

Оскільки $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$,

то $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{n!} + \cdots$. Тому,

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}dx = \int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots\right)dx = \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \ldots\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} =$$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{320} - \frac{1}{42\cdot 128} + \ldots$. Одержаний ряд – знакопочережний. Тому для знаходження його суми з точністю до 0,001 досить взяти лише три перші члени, оскільки $\frac{1}{42\cdot 128} < 0{,}001$.

Маємо: $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{320} = \frac{480 - 40 + 3}{960} = \frac{443}{960} = 0{,}461$.

Приклад 220. Обчислити з точністю до 0,0001 інтеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{5}} \sqrt[3]{1 + x^2}\,dx$.

Розв'язання. Запишемо підінтегральну функцію у вигляді $\sqrt[3]{1 + x^2} = \left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{3}}$ і використаємо біноміальний ряд:

$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots$, замінивши в ряді x на x^2 і $m = \frac{1}{3}$. Отримаємо ряд:

$$\sqrt[3]{1+x^2}=\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}x^2+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{2!}x^4+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)}{3!}x^6+\ldots=$$

$=1+\frac{1}{3}x^2-\frac{x^4}{9}+\frac{5}{81}x^6-\ldots$. Тому будемо мати:

$$\int_0^{\frac{1}{5}}\sqrt[3]{1+x^2}\,dx=\int_0^{\frac{1}{5}}\left(1+\frac{1}{3}x^2-\frac{x^4}{9}+\frac{5}{81}x^6-\ldots\right)dx=$$

$$=\left(x+\frac{x^3}{9}-\frac{x^5}{45}+\frac{5}{81}\frac{x^7}{7}-\ldots\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{5}}=\frac{1}{5}+\frac{1}{125\cdot 9}-\frac{1}{625\cdot 5\cdot 45}+\ldots\approx$$

$\approx\frac{1}{5}+\frac{1}{125\cdot 9}=\frac{226}{1125}=0{,}2009$, оскільки $\frac{1}{625\cdot 5\cdot 45}<0{,}0001$.

Отже, $\int_0^{\frac{1}{5}}\sqrt[3]{1+x^2}\,dx\approx 0{,}2009$.

Приклад 221. Обчислити з точністю до 0,001 інтеграл $\int_0^{\frac{1}{2}}\ln(1+x^3)\,dx$.

Розв'язання. Оскільки $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$, то

$\ln(1+x^3)=x^3-\frac{x^6}{2}+\frac{x^9}{3}-\frac{x^{12}}{4}+\ldots$. Тому будемо мати:

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\ln(1+x^3)\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x^3-\frac{x^6}{2}+\frac{x^9}{3}-\frac{x^{12}}{4}+\ldots\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^7}{14}+\frac{x^{10}}{30}-\ldots\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=$$

$=\frac{1}{4\cdot 2^4}-\frac{1}{14\cdot 2^7}+\frac{1}{30\cdot 2^{10}}-\ldots\approx\frac{1}{4\cdot 2^4}=\frac{1}{64}=0{,}016$, враховуємо, що $\frac{1}{14\cdot 2^7}=\frac{1}{1792}<0{,}001$.

Отже, $\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1+x^3)\,dx \approx 0{,}016$.

Приклад 222. Знайти чотири перших, відмінних від нуля, члени розкладу в степеневий ряд розв'язку $y(x)$ диференціального рівняння $y' = y^2 + x^3$, який задовольняє початковим умовам $y(0) = \frac{1}{2}$.

Розв'язання. Шукаємо розв'язок рівняння у вигляді ряду $y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dots$.

Диференціюючи це рівняння, знаходимо похідні в точці $x = 0$:

$$y'(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^3 = \frac{1}{4}, \quad y'' = 2yy' + 3x^2,$$

$$y''(0) = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}, \quad y''' = 2y'y' + 2yy'' + 6x = 2(y')^2 + 2yy'',$$

$$y'''(0) = 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}.$$

Підставляючи значення $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$, $y'''(0)$ в ряд Маклорена для функції $y(x)$ і обмежуючись чотирма першими відмінними від нуля членами розкладу, одержуємо наближений розв'язок: $y(x) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$.

Завдання для самостійного розв'язування

223. Визначити область збіжності степеневих рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n5^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n9^n}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{n^n}$.

224. Обчислити з точністю до 0,001 інтеграли:

1) $\int_0^1 \sin x^2\,dx$; 2) $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$; 3) $\int_0^{\frac{1}{4}} \ln(1+\sqrt{x})\,dx$.

Література

1. Антонюк Р. А. Вища математика. Навчальний посібник – Рівне : НУВГП, 2005. – 246 с.
2. Барковський В. В., Барковська Н. В. Вища математика для економістів. Навчальний посібник – К. : центр учбової літератури, 2010. – 448 с.
3. Пискунов Н. С. Дифференциональное и интегральное исчисление. Т. 1. – М. : Наука, 1978. – 456 с.
4. Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике. – Ч. 1-3. – Харьков, : ХГУ, 1972. – 946 с.
5. Клетенник Д. В. Сборник задач по аналитической геометри. – М. : Наука, 1980. – 240 с.
6. Мышкис А. Д. Лекции по высшей математике. – М. : Наука, 1973. – 640 с.
7. Бугров Я. С., Никольский С. М. Елементы линейной алгебры и аналитической геометри. – М. : Наука, 1980. – 288 с.

Відповіді

10. 1) 18; 2) $\cos 3x$. **11.** $\{-1; -4\}$. **12.** 1) 18; 2) 180; 3) –20; 4) –31; 5) 0; 6) –48. **13.** 1) $\{(1;1;1)\}$; 2) $\{(2;3;4)\}$; 3) $\{(1;2;-2)\}$; 4) $\{(0;0;0)\}$.

23. 1) $\begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -9 & -2 & 5 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; **24.** 1) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -8 \\ -2 & 4 & 10 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$; **25.** 1) $\{(1;1;1)\}$; 2) $\{(1;2;-2)\}$. **30.** 20. **31.** $\sqrt{129}$.

32. –61. **33.** $\varphi = \frac{\pi}{2}$. **34.** $-\frac{1}{3}$. **39.** $C(5;-3), D(1;-5)$. **40.** 13.

41. $D\left(\frac{5}{2}; -2\right)$. **42.** $2x - 3y - 13 = 0,\ 3x + 2y = 0$. **43.** $Q(-2;-1)$.

44. $3x - 5y - 13 = 0,\ 8x - 3y + 17 = 0,\ 5x + 2y - 1 = 0$.

55. 1) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$; 2) $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 0$.

56. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$. **57.** $C(5;-4), R = \sqrt{42}$. **58.** $3x - 2y - 19 = 0$.

59. $x + 2y - 2 = 0$. **60.** 1) $a = 3,\ b = 4$; 2) $F_1(-5;0),\ F_2(5;0)$; 3) $\varepsilon = \frac{5}{3}$; 4) $y = \pm\frac{4}{3}x$. **61.** 1) $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{5} = 1$; 2) $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{16} = 1$.

74. 1) $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$; 2) $[-1;1]$; 3) $(-\infty;-1)\cup(-1;4)\cup(4;+\infty)$; 4) $\left(\frac{3}{2};2\right)\cup(2;+\infty)$; 5) $[-1;2]$. **75.** 1) $\frac{3}{5}$; 2) 0; 3) ∞; 4) $\frac{5}{11}$; 5) 8; 6) $\frac{9}{29}$; 7) 1; 8) $\frac{3}{4}$; 9) 4; 10) $\frac{2}{3}$; 11) $-\frac{1}{36}$; 12) $\frac{3}{4}$;

90. 1) $\frac{1}{2}$; 2) –8; 3) 4; 4) $\frac{6}{5}$; 5) $\frac{2}{9}$; 6) e^6; 7) e^3; 8) e^8; 9) e^{-4}; 10) –2.

91. 1) $x \in R$; 2) $x = 4$ – точка усувного розриву; 3) $x = 5$ – точка розриву другого роду; 4) $x = 3$ – точка розриву другого роду; 5) $x = -2,\ x = 2$ – точки розриву другого роду. **98.** 1) $2x - 6$;

2) $-5\sin 5x$. **99.** 1) $\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$; 2) $-\frac{\sin 2x}{4\sqrt[4]{(1+\cos^2 x)^3}}$; 3) $-tg\frac{x}{2}$;

4) $3^{-x}(3x^2-x^3\ln 3)$; 5) $\frac{1}{x(1-x^2)}$; 6) $(\ln x)^{x^2}\left(2x\ln\ln x+\frac{x}{\ln x}\right)$.

100. $x-4y+4=0,\ 4x+y-18=0$. **101.** $-\frac{dx}{x^2+1}$. **102.** 1) $2e^{-x^2}(2x^2-1)$;

2) $2(1+t^2)$. **103.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $-\frac{1}{3}$. **116.** 1) $y_{\max}=y(\pm1)=4;\ y_{\min}=y(0)=3$;

2) $y_{\max}=y(-3)=4;\ y_{\min}=y(0)=0$; 3) $y_{\min}=y(0)=0;\ y_{\max}=y(2)=4e^{-2}$.

117. 1) опуклий $x\in\left(-\infty;\frac{5}{3}\right)$, вгнутий $x\in\left(\frac{5}{3};+\infty\right)$, $M_0\left(\frac{5}{3};\frac{250}{27}\right)$;

2) опуклий $x\in(2;4)$, вгнутий $x\in(-\infty;2)\cup(4;+\infty)$, $M_1(2;62)$, $M_2(4;206)$; 3) опуклий $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$, вгнутий $x\in(-1;1)$, $M_1(1;\ln 2)$, $M_2(-1;\ln 2)$. **118.** 1) 13 і 4; 2) 8 і 0. **119.** 1) $x=-2$, $y=2$; 2) $x=0$, $y=x$; 3) $x=-1$, $x=1$, $y=-x$. **120.** зростає для $x\in(-\infty;0)\cup(\sqrt[3]{4};+\infty)$, спадає $x\in(0;\sqrt[3]{4})$; $y_{\min}=f(\sqrt[3]{4})\approx 2{,}3$; вгнутий $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$; точок перегину немає; асимптоти: $x=0$, $y=x$. **121.** $E_x(y)=\frac{3x^3}{x^3+1}$, $E_1(y)=1{,}5$, $E_5(y)\approx 2{,}97$.

132. 1) бісектриса $y=x$; 2) півплощина, розміщена над прямою $x+y=1$ ($x+y>0$); 3) частина площини, розміщеної вище параболи $y=-x^2$ ($x^2+y>0$). **133.** 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$;

2) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)}$.

134. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2(y-x^2)}{(x^2+y)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{2x}{(x^2+y)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{(x^2+y)^2}$.

135. $\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{48}{5}$. **141.** 1) $z_{\min}=z(1;4)=-21$; 2) $z_{\min}=z(\sqrt{3};-3)=-6\sqrt{3}$, $z_{\max}=z(-\sqrt{3};-3)=6\sqrt{3}$; 3) $z_{\min}=z(1;0)=-1$. **142.** $z_{найб}=z(2;-1)$,

$z_{найм} = z(1;1) = z(0;-1)$. **146.** 1) $3\sqrt[3]{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + C$; 2) $\frac{3}{4}(x-4)\sqrt[3]{x} + C$;

3) $-ctg\, x - x + C$; 4) $3tg\, x + 2ctg\, x + C$; 5) $\frac{x^3}{3} - x + arctg\, x + C$;

6) $e^x + tg\, x + C$; 7) $x - 2arctg\frac{x}{2} + C$; 8) $-\frac{1}{2}ctg\, x + C$.

147. 1) $\frac{1}{6}(4x-1)^{\frac{3}{2}} + C$; 2) $-\sqrt{3-2x} + C$; 3) $\frac{2}{3}tg\, 6x + C$; 4) $-\frac{1}{7}e^{-7x} + C$;

5) $-\frac{1}{9}\ln|2-9x| + C$; 6) $-\frac{1}{3\sin^3 x} + C$; 7) $\ln|1+\ln x| + C$; 8) $\frac{1}{3}e^{x^3} + C$;

9) $-e^{\cos x} + C$; 10) $\frac{1}{4}\sqrt[3]{(x^3-8)^4} + C$; 11) $\frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3} + C$;

12) $\frac{1}{4}\ln\left(x^4 + \sqrt{x^8-1}\right) + C$; 13) $\arcsin(e^x) + C$; 14) $\frac{1}{6}\sin^6 x + C$;

15) $\sin(\ln x) + C$; 16) $\frac{1}{5}arctg\frac{e^x}{5} + C$. **153.** 1) $-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$;

2) $2\left(\sqrt{x} - arctg\sqrt{x}\right) + C$; 3) $e^x + \ln|e^x - 1| + C$;

4) $2\sqrt{x+3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}\right| + C$; 5) $\frac{2}{3}(e^x-2)\sqrt{1+e^x} + C$.

154. 1) $\frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + C$; 2) $x\sin x + \cos x + C$; 3) $(x^2-2x+2)e^x + C$;

4) $\frac{1}{2}(x^2+1)arctg\, x - \frac{x}{2} + C$; 5) $-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$;

6) $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C$.

161. 1) $\frac{5}{2}\ln(x^2+2x+10) - arctg\frac{x+1}{3}$;

2) $\frac{3}{2}\ln(x^2-8x+17) + 17arctg(x-4)$.

162. 1) $-\frac{1}{6}\ln|x| - \frac{7}{2}\ln|x-2| + \frac{17}{3}\ln|x-3| + C$;

2) $x-\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{3}{4}\ln|x+2|+\frac{5}{4}\ln|x-2|+C$;

3) $\frac{1}{3}\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+C$;

4) $\frac{1}{24}\ln\frac{(x+2)^2}{x^2-2x+4}+\frac{1}{4\sqrt{3}}arctg\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$;

5) $\frac{4}{3(x-1)}+\frac{20}{9}\ln|x-1|+\frac{7}{9}\ln|x+2|+C$.

169. 1) $\frac{2}{3}arctg\frac{5tg\frac{x}{2}+4}{3}+C$; 2) $arctg\left(tg\frac{x}{2}+1\right)+C$;

3) $\frac{1}{4\sqrt{7}}\ln\left|\frac{2tg\,x-\sqrt{7}}{2tg\,x+\sqrt{7}}\right|+C$; 4) $\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\sqrt{2}\,tg\,x\right)+C$;

5) $\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+C$; 6) $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$;

7) $\frac{x}{8}-\frac{\sin 4x}{32}+C$; 8) $\frac{1}{18}\sin 9x+\frac{1}{2}\sin x+C$; 9) $\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 8x+C$.

170. 1) $\frac{2x+1}{12}\left(2\sqrt{2x+1}-3\right)+C$; 2) $2\sqrt{x+1}+\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C$;

3) $4\left(\sqrt[4]{x}-\ln(\sqrt[4]{x}+1)\right)+C$; 4) $\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x\sqrt{4-x^2}}{4}+C$. **177.** 1) $1-\frac{\pi}{4}$;

2) $2(\sqrt{2}-1)$; 3) $32\frac{2}{3}$. **178.** 1) $2(\sqrt{3}-1)-\frac{\pi}{6}$; 2) 4; 3) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

179. 1) $\frac{2e^3+1}{9}$; 2) $\frac{\pi}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\ln 2$; 3) $\frac{e^3}{9}(5e^3-2)$. **185.** 1) $\frac{1}{\ln^2 2}$;

2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{\pi^2}{8}$; 4) розбіжний; 5) 6; 6) розбіжний; 7) розбіжний.

186. 1) $3\frac{1}{3}$; 2) $7{,}5-\ln 4$; 3) 4,5; 4) $\frac{32}{3}$. **187.** $\frac{\pi}{120}$. **188.** $\frac{61}{54}$.

198. 1) $y=C(1+x^2)$; 2) $y=e^{\frac{C}{x}}$; 3) $y=C\ln x-1$; 4) $y=C(1+e^x)$.

199. 1) $y=\sin^2 x-\dfrac{1}{2}$; 2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. **200.** 1) $y=\dfrac{x}{\ln|Cx|}$;
2) $arctg\dfrac{y}{x}-\ln|x|=C$; 3) $\sqrt{1+\dfrac{y^2}{x^2}}=Cx-1$. **207.** 1) $y=e^{x^2}(x^2+C)$;
2) $y=\dfrac{1}{\cos x}(tg\,x+C)$; 3) $y=\dfrac{1}{x}(C-e^{-x})$; 4) $y=x(\sin x+C)$;
5) $y=x^2(x^3+C)$; 6) $y=\dfrac{1}{x^2+Cx}$, $y=0$; 7) $y=\dfrac{1-x}{x+C}$, $y=0$;
8) $y=\dfrac{1}{Cx+\ln x+1}$, $y=0$. **214.** 1) розбіжний; 2) збіжний; 3) збіжний; 4) збіжний; 5) збіжний; 6) збіжний; 7) розбіжний; 8) збіжний абсолютно; 9) збіжний абсолютно; 10) збіжний умовно. **223.** 1) $-2\le x<8$; 2) $-4\le x\le -2$; 3) $-1<x<1$; 4) $-3<x<3$; 5) $-e<x<e$. **224.** 1) 0,310; 2) 0,333; 3) 0,072.

Зміст

Навчальне видання

Ярмуш Ярослав Іванович
Самолюк Ірина Василівна

Вища математика

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Практикум

Навчальний посібник