

## УДК 539.3

**Дейнека О. Ю.**, асистент (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне), **Сяський В. А.**, к.т.н., доцент (Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне)

### НАПРУЖЕНА ПОСАДКА ЗАМКНЕНОГО КРУГОВОГО СТРИЖНЯ В КРУГОВИЙ ОТВІР НЕСКІНЧЕНОЇ ІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНКИ

**Знайдено точний розв'язок задачі про напружену посадку кругового кільця сталого поперечного перерізу в круговий отвір нескінченної ізотропної пластинки, яка перебуває в умовах однорідного напруженого стану на нескінченності. Моделюючи кільце замкненим криволінійним брусом, розрахунок якого ґрунтується на гіпотезі нормального перерізу, а лінія контакту не співпадає з геометричною віссю, побудовано інтегро-диференціальне рівняння з ядром Гільберта для визначення контактних зусиль між пластинкою і кільцем. Розв'язок задачі встановлено методом тригонометричних рядів. Визначено мінімальний натяг, за якого розмикання ділянки контакту між пластинкою і кільцем відбувається у двох точках.**

**Ключові слова:** ребро жорсткості, напружена посадка, ізотропна пластина, круговий стрижень, внутрішні зусилля, нормальні напруження.

**Вступ.** У машинобудуванні широко використовуються пресові з'єднання, в яких відносна нерухомість циліндричних тіл досягається за рахунок натягу.

Концентрація напружень у з'єднаннях з натягом є визначальним фактором їх міцності та довговічності. Огляд досліджень напруженого стану в масивних циліндричних тілах кругової форми проведено в роботах [1; 2]. Задачі про запресовку замкнених тонких пружних стрижнів в криволінійний отвір нескінченної ізотропної пластинки з використанням особливих крайових умов в інтегральній формі розглянуті в [3; 4].

У роботі [5] для розрахунку напруженого стану в замкненому криволінійному кільці запропоновано використовувати метод сил. У даній статті цей підхід використано для побудови точного розв'язку задачі про запресовку пружного кільця прямокутного поперечного перерізу в круговий отвір нескінченної ізотропної пластинки.

**Постановка задачі.** Розглянемо нескінчену ізотропну пластинку товщиною  $2h_n$  з круговим отвором радіусом  $\rho_n$ , в який з натягом  $\Delta$  запресоване кругове кільце сталого прямокутного перерізу висотою  $2h$ , шириною  $2\eta$ . Спільна серединна площина пластинки і кільця із зовнішнім радіусом  $\rho_0$  віднесені до прямокутної  $(x, y)$  і полярної  $(\rho, \lambda)$  систем відліку з початком в центрі отвору.

Пружна система «пластинка – кільце» перебуває в умовах узагальненого плоского напруженого стану, створеного рівномірно розподіленими зусиллями  $p$  і  $q$ , прикладеними на нескінченості (Рисунок). Інше зовнішнє навантаження на пластинку і кільце відсутнє.

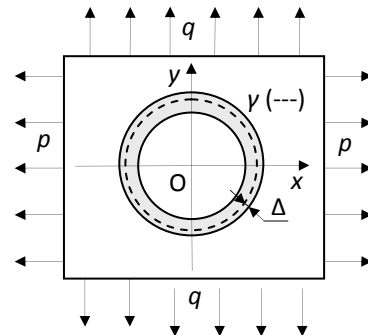


Рисунок. Пружне кільце запресоване в пластинку

Розв'язання задачі передбачає визначення контактних зусиль між пластинкою і кільцем та мінімального натягу  $\Delta_{\min}$ , за якого відбувається розмикання зони контакту в скінченій кількості точок, а також компонент напруженого стану в кільці.

Умовно відділивши пластинку від кільця, замінюючи дії одного тіла на інше нормальними  $T_\rho$  і дотичними  $S_{\rho\lambda}$  контактними зусиллями, приходимо до першої основної задачі для нескінченної пластинки з круговим отвором і круглого пружного кільця. При цьому вважаємо що між пластинкою і кільцем відсутні сили тертя.

**Основні рівняння задачі.** Пластинка перебуває під дією зовнішнього навантаження на нескінченості та контактних зусиль на контурі  $\gamma$ . Її напружено-деформований стан характеризується співвідношеннями [6]

$$\begin{aligned} \varepsilon_\lambda^n = \frac{1}{2E_n h_n} & \left[ (1-\nu_n)T_\rho(\lambda) - \frac{1}{\pi} \oint_\gamma T_\rho(t) dt + \frac{1}{\pi} \oint_\gamma S_{\rho\lambda}(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt + \right. \\ & \left. + p + q - 2(p-q) \cos(2\lambda) \right], \\ V^n = \frac{1}{2E_n h_n} & \left[ (1-\nu_n)S_{\rho\lambda}(\lambda) - \frac{1}{\pi} \oint_\gamma S_{\rho\lambda}(t) dt - \frac{1}{\pi} \oint_\gamma T_\rho(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt + \right. \\ & \left. + 2(p-q) \sin(2\lambda) \right], \end{aligned} \quad (1)$$

$$k^n(\lambda) = \frac{1}{\rho_n} \left( 1 - \varepsilon_\lambda^n + \frac{dV^n}{d\lambda} \right).$$

Тут введено позначення:  $\varepsilon_\lambda^n, V^n$  – відносне видовження контуру  $\gamma$  і кут повороту нормалі до нього;  $k^n(\lambda)$  – кривина контуру  $\gamma$  внаслідок деформації;  $E_n, \nu_n$  – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки.

Якщо контактні зусилля  $T_\rho$  стануть відомі, то кільцеві зусилля  $T_\lambda$  на контурі  $\gamma$  визначаються за формулою [6]

$$T_\lambda = \nu_n T_\rho + 2E_n h_n \varepsilon_\lambda^n. \quad (2)$$

Кільце моделюємо замкненим криволінійним стрижнем (брусом) геометрична вісь, якого не співпадає з фактичною лінією контакту [3; 7].

Компоненти напруженого стану кільця (поперечна  $Q$ , поздовжня  $N$  сили та згинальний момент  $L_b$ ) які віднесені до його осі, визначаються залежностями

$$T_\rho = \frac{N}{\rho_0} - \frac{dQ}{ds_0}, \quad S_{\rho\lambda} = -\frac{Q}{\rho_0} - \frac{dN}{ds_0}, \quad (3)$$

$$L_b = L_b^0 + (x_0 - \eta - x)N_0 + \eta N - \int_0^s Q ds_0. \quad (4)$$

Тут введено такі позначення:  $\theta$  – кут нахилу розглядуваного поперечного перерізу стрижня до осі  $Ox$ ;  $N_0, L_b^0$ ; – поздовжня сила та згинальний момент у перерізі  $\theta = 0$ , відповідно;  $s_0$  – дуга на контурі контакту кільця, до якого прикладене зовнішнє навантаження;  $x, x_0$  – відповідні абсциси точок перетину перерізів  $\theta = \theta, \theta = 0$  з контуром  $\gamma$ .

Формули для визначення деформації крайнього волокна кільця, яке контактує з пластинкою мають вигляд [5]:

$$\frac{dV^c}{d\lambda} = \frac{RL_b}{EJ} + \frac{N}{EF}, \quad \varepsilon_\lambda^c = \frac{N}{EF} + \frac{\rho_0 - r_0}{\rho_0} \frac{RL_b}{EJ}, \quad (5)$$

$$k^c(\lambda) = \frac{1}{\rho_0} \left( 1 - \varepsilon_\lambda^c + \frac{dV^c}{d\lambda} \right) = \frac{1}{\rho_0} \left( 1 + \frac{r_0 RL_b}{\rho_0 EJ} \right),$$

де  $EF$  – жорсткість кільця на розтяг (стиск);  $EJ$  – жорсткість на згин;  $r_0$  – радіус кривини нейтрального для чистого згину волокна стрижня;  $R$  – радіус кривини осі стрижня.

Граничні умови на межі гладкого контакту пластинки і кільця

формулюємо у вигляді рівності кривин пластинки і кільця. При відсутності тертя ці умови можна записати так:

$$k^c(\lambda) = k^n(\lambda), \quad S_{\rho\lambda} = 0, \quad \lambda \in [0; 2\pi].$$

Підстановка (1), (5) в ці граничні умови призводить до сингулярного інтегро-диференціального рівняння для визначення контактної зусилля  $T_\rho$

$$-\frac{\Delta}{\rho_0\rho_n} + \frac{r_0RL_b}{\rho_0^2EJ} = \frac{1}{2E_n h_n \rho_n} \left[ (v-1)T_\rho(\lambda) + \frac{1}{\pi} \int_\gamma T_\rho(t) dt - \frac{1}{\pi} \frac{d}{d\lambda} \left( \int_\gamma T_\rho(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt \right) - p - q + 6(p-q)\cos(2\lambda) \right], \quad (6)$$

де  $\Delta = \rho_0 - \rho_n$  ( $\rho_0 - \rho_n \neq 0$ ,  $\rho_0 \approx \rho_n$ ).

Рівняння (6) визначає математичну модель задачі.

**Побудова розв'язку задачі.** Враховуючи симетрію задачі відносно координатних осей, контактне зусилля подамо у вигляді:

$$T_\rho(\lambda) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^M A_{2m} \cos(2m\lambda). \quad (7)$$

Підставивши (7) в (3), одержимо:

$$N = \rho \left[ \frac{A_0}{2} (1 - \cos \lambda) - \sum_{m=1}^M A_{2m} \frac{\cos(2m\lambda) - \cos \lambda}{4m^2 - 1} \right] + N_0 \cos \lambda. \quad (8)$$

Зважаючи, що  $N(0) = N(\pi) = N_0$ , із (8) знаходимо:

$$N_0 = \rho_0 \left[ \frac{A_0}{2} - \sum_{m=1}^M \frac{A_{2m}}{4m^2 - 1} \right]. \quad (9)$$

Тоді, вирази для внутрішніх силових і моментного факторів у кільці набудуть вигляду:

$$N = \rho_0 \left[ \frac{A_0}{2} - \sum_{m=1}^M A_{2m} \frac{\cos(2m\lambda)}{4m^2 - 1} \right], \quad (10)$$

$$Q = \rho_0 \left[ -2 \sum_{m=1}^M A_{2m} \frac{m \sin(2m\lambda)}{4m^2 - 1} \right], \quad (11)$$

$$L_b = (\eta - \rho_0)(N - N_0) + L_b^0. \quad (12)$$

З урахуванням (7), (10), (12) із (6) одержимо функціональне рівняння для визначення  $A_0, A_{2m}$  ( $m \geq 1$ )

$$-\frac{\Delta}{\rho_0\rho_n} + \frac{r_0R}{\rho_0^2EJ} \left\{ (\eta - \rho_0)\rho_0 \left( \frac{A_0}{2} - \sum_{m=1}^M \frac{A_{2m} \cos(2m\lambda)}{4m^2 - 1} \right) + (\rho_0 - \eta)N_0 + L_b^0 \right\} = \frac{1}{2E_n h_n \rho_n} \left\{ \frac{1+v_n}{2} A_0 + \sum_{m=1}^M (v-1-4m) A_{2m} \cos(2m\lambda) - p - q + 6(p-q)\cos(2\lambda) \right\}. \quad (13)$$

Для визначення сталих  $N_0, L_b^0$  використаємо метод сил [5]. З

цією метою рівняння (13) доповнимо системою канонічних рівнянь цього методу

$$\delta_{11}L_b^0 + \delta_{12}N_0 + \Delta_{1p} = 0, \quad (14)$$

$$\delta_{21}L_b^0 + \delta_{22}N_0 + \Delta_{2p} = 0, \quad (15)$$

де

$$\Delta_{ip} = \int_{L_0} \bar{L}_i \left( \frac{\bar{L}_p}{EJ} + \frac{\bar{N}_p}{EFR} \right) ds_1 + \int_{L_0} \bar{N}_i \left( \frac{\bar{N}_p}{EF} + \frac{\bar{L}_p}{EFR} \right) ds_1 + \mu \int_{L_0} \frac{\bar{Q}_i \bar{Q}_p}{GF} ds_1 \quad (i=1,2),$$

$$\delta_{ij} = \int_{L_0} \bar{L}_i \left( \frac{\bar{L}_j}{EJ} + \frac{\bar{N}_j}{EFR} \right) ds_1 + \int_{L_0} \bar{N}_i \left( \frac{\bar{N}_j}{EF} + \frac{\bar{L}_j}{EFR} \right) ds_1 + \mu \int_{L_0} \frac{\bar{Q}_i \bar{Q}_j}{GF} ds_1 \quad (i, j=1,2),$$

$$\bar{L}_1 = 1, \quad \bar{N}_1 = 0, \quad \bar{Q}_1 = 0 \quad \text{при} \quad L_b^0 = 1,$$

$$\bar{L}_2 = (x_0 - \eta - x + \eta \cos \lambda), \quad \bar{N}_2 = \cos \lambda, \quad \bar{Q}_2 = \sin \lambda \quad \text{при} \quad N_0 = 1,$$

$$\bar{L}_p = (\eta - \rho_0)(N - N_0 \cos \lambda), \quad \bar{N}_p = N - N_0 \cos \lambda, \quad \bar{Q}_p = Q - N_0 \sin \lambda, \quad (16)$$

$GF$  – жорсткість на зсув;  $ds_1 = Rd\theta$  – елемент дуги осі стрижня;  $\mu$  – стала (для прямокутного перерізу  $\mu=1,2$ );  $E, G$  – модулі матеріалу стрижня на розтяг (стиск) і зсув.

Із системи (16) при  $R = \rho_0 - \eta$  визначаємо:

$$\Delta_{1p} = \pi \rho_0 R A_0 \left[ -\frac{R}{EJ} + \frac{1}{EFR} \right],$$

$$\Delta_{2p} = \pi \rho_0 R^2 A_0 \left[ -\frac{R}{EJ} + \frac{1}{EFR} \right] - \pi R N_0 \left[ \frac{R^2}{EJ} - \frac{1}{EF} + \frac{\mu}{GF} \right],$$

$$\delta_{11} = \frac{2\pi R}{EJ}, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{2\pi R^2}{EJ}, \quad \delta_{22} = \pi R \left[ \frac{3R^2}{EJ} - \frac{1}{EF} + \frac{\mu}{GF} \right].$$

У результаті підстановки отриманих співвідношень в (14), (15) одержимо одне незалежне рівняння

$$L_b^0 + RN_0 + \frac{A_0 \rho_0}{2} \left[ \frac{J}{FR} - R \right] = 0. \quad (17)$$

Порівнюючи в (13) коефіцієнти при однакових гармоніках з урахуванням (9) і (17), одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення сталих  $A_0, A_{2m}, N_0, L_b^0$ :

$$L_b^0 + RN_0 + \frac{A_0 \rho_0}{2} \left[ \frac{J}{FR} - R \right] = 0,$$

$$\frac{9r_0 R}{8\rho_n \alpha \eta^3} L_b^0 + \frac{9r_0 R^2}{8\rho_n \alpha \eta^3} N_0 - \left( \frac{9r_0 R^2}{8\alpha \eta^3} + 1 + \nu_n \right) \frac{A_0}{2} = \frac{2E_n h_n \Delta}{\rho_n} - p - q,$$

$$A_2 = \frac{144\alpha\eta^3(p-q)}{9(\eta-\rho_n)r_0-8\alpha\eta^3(\nu_n-5)}, \quad A_{2m} = 0 \quad (m > 1),$$

$$N_0 = \rho_0 \left( \frac{A_0}{2} - \frac{A_2}{3} \right). \quad (18)$$

Тут введено позначення  $E = \alpha E_n$ ,  $F_0 = 4h\eta$ ,  $h = 4h_n/3$ ,  $J = 4h\eta^3/3$ .

Із системи (18) визначаємо:

$$A_0 = \frac{16\alpha\eta(p+q-2\Delta E_n h_n \rho_n)}{8(1+\nu_n)\alpha\eta+3r_0},$$

$$N_0 = \frac{8\alpha\eta\rho_n(p+q-2\Delta E_n h_n \rho_n)}{8(1+\nu)\alpha\eta+3r_0} - \frac{48\alpha\eta^3\rho_n(p-q)}{9R^2r_0-8\alpha\eta^3(\nu_n-5)},$$

$$L_b^0 = -\frac{8\alpha\eta^3\rho_n(p+q-2\Delta E_n h_n \rho_n)}{32R(1+\nu)\alpha\eta+12Rr_0} + \frac{48\alpha\eta^3\rho_n R(p-q)}{9R^2r_0-8\alpha\eta^3(\nu_n-5)}. \quad (19)$$

Тоді, із (7), (18), (19) знаходимо вираз для контактних зусиль  $T_\rho$ :

$$T_\rho(\lambda) = \frac{8\alpha\eta(p+q-2\Delta E_n h_n \rho_n)}{8(1+\nu)\alpha\eta+3r_0} + \frac{48\alpha\eta^3(p-q)}{9R^2r_0-8\alpha\eta^3(\nu_n-5)} \cos(2\lambda).$$

Постановка задачі, за якої розмикання можливе лише в скінченній кількості точок, передбачає виконання умови  $T_\rho(\lambda) \leq 0$ .

Очевидно, що для конкретних значень  $\alpha$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $\Delta$ ,  $\nu_n$ ,  $\eta$ ,  $E_n$ ,  $h_n$ ,  $\rho_n$

$$\max_{\lambda \in [0; 2\pi]} T_\rho(\lambda) = T_\rho(\pi(1 - \operatorname{sgn}(p-q))/4) = T_\rho(\pi + \pi(1 - \operatorname{sgn}(p-q))/4) =$$

$$= \frac{8\alpha\eta(p+q-2\Delta E_n h_n \rho_n)}{8(1+\nu)\alpha\eta+3r_0} + \frac{48\alpha\eta^3 |p-q|}{9R^2r_0-8\alpha\eta^3(\nu_n-5)}.$$

З умови  $\max_{\lambda \in [0; 2\pi]} T_\rho(\lambda) = 0$  знаходимо мінімальний натяг  $\Delta_{\min}$  і положення точок розмикання  $\lambda_{1,2}^*$

$$\Delta_{\min} = \frac{\rho_0}{2E_n h_n} \left[ p+q + \frac{6\eta^2(8(1+\nu_n)\alpha\eta+3r_0)|p-q|}{9R^2r_0-8\alpha\eta^3(\nu_n-5)} \right],$$

$$\lambda_1^* = \frac{\pi}{4}(1 - \operatorname{sgn}(p-q)), \quad \lambda_2^* = \lambda_1^* + \pi.$$

Аналізуючи отримані результати, приходимо до таких висновків:

- за умови  $p > q$  розмикання контакту відбувається в точках  $\lambda_1^* = 0$ ,  $\lambda_2^* = \pi$ , при  $p < q$  –  $\lambda_{1,2}^* = \pm\pi/2$ ;
- мінімальний натяг  $\Delta_{\min}$  залежить не тільки від фізико-геометричних параметрів кільця, але й від зовнішнього навантаження;

– запропонований метод розв'язання задачі без суттєвих змін можна перенести на ортотропні пластинки з круговим отвором.

**1.** Чернець М. Моделювання і аналіз трибоконтатної взаємодії у циліндричних спряженнях [Текст] / М. Чернець // *Машинознавство*. – 2003. – № 2(68). – С. 30–33. **2.** Семенов-Ежов И. Е. Проблема концентрации напряжений в соединениях с натягом (обзор) [Текст] / И. Е. Семенов-Ежов // *Вестник машиностр. МГТУ им. Н. Э. Баумана*. – 2001. – № 4. – С. 37–40. **3.** Мартынович Т. Л. Контактные взаимодействия пластин с упругими элементами [Текст] / Т. Л. Мартынович, В. Е. Юринец. – Львов : Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1984. – 160 с. **4.** Мартынович Т. Л. Впрессовка замкнутого стержня в криволинейное отверстие изотропной пластинки [Текст] / Т. Л. Мартынович, М. К. Зварич // *Прикладная механика*. – 1974. – Т. 10, Вып. 9. – С. 46–52. **5.** Сяський А. Застосування методу сил для статичного розрахунку замкнених криволінійних стрижнів жорсткості [Текст] / А. Сяський, Н. Шевцова // *Вісник Тернопільського національного технічного університету*. – 2015. – № 3 (79). – С. 24–30. **6.** Сяський А. А. Напряженное состояние кусочно-однородной пластинки с упругим включением [Текст] / А. А. Сяський В. А. Сяський // *Прикладная механика*. – 1983. – Т. 19. – № 5. – С. 94–99. **7.** Писаренко Г. С. Опір матеріалів [Текст] / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський. – К. : Вища школа, 2004. – 655 с.

Рецензент: д.т.н., професор Сяський А. О. (Рівненський державний гуманітарний університет)

---

**Deineka O. Y., Assistant** (National University of Water and Environmental Engineering, Rivne), **Siaskyi V. A., Candidate of Engineering, Associate Professor** (Rivne State University of Humanities)

## **TENSE LANDING OF THE RESERVED CIRCULAR BAR IN CIRCULAR OPENING INFINITELY ISOTROPIC PLATE**

**The exact solution of a task of the hard landing of a circular ring of constant cross-section in a circular hole of infinite isotropic plate, which is in conditions of the uniform stressed state at infinity is found. Simulating the ring by selfcontained curvilinear edge, calculation of which is based on a hypothesis of normal section, and the line of contact does not coincide with a center line, we obtained the integro-differential equation with Gilbert's core for determination the contact efforts between a plate and a ring. The solution of a task is**

**established by method of trigonometrical series. The minimum tension at which disconnection of the site of contact between a plate and a ring happens in two points is defined.**

**Keywords:** reinforcing edge, tense landing, isotropic plate, circular bar, internal efforts, normal tensions.

---

**Дейнека О. Ю., ассистент** (Национальный университет водного хозяйства и природопользования, г. Ровно), **Сяский В. А., к.т.н., доцент** (Ровенский государственный гуманитарный университет, г. Ровно)

### **НАПРЯЖЕННАЯ ПОСАДКА ЗАМКНУТОГО КРУГОВОГО СТЕРЖНЯ В КРУГОВОЕ ОТВЕРСТИЕ БЕСКОНЕЧНО ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ**

Найдено точное решение задачи о напряженной посадке кругового кольца постоянного поперечного сечения в круговое отверстие бесконечной изотропной пластинки, которая находится в условиях однородного напряженного состояния на бесконечности. Моделируя кольцо замкнутым криволинейным брусом, расчет которого основывается на гипотезе нормального сечения, а линия контакта не совпадает с геометрической осью, построено интегродифференциальное уравнение с ядром Гильберта для определения контактных усилий между пластинкой и кольцом. Решение задачи установлено методом тригонометрических рядов. Определено минимальное натяжение, при котором размыкание участка контакта между пластинкой и кольцом происходит в двух точках.

**Ключевые слова:** ребро жесткости, напряженная посадка, изотропная пластина, круговой стержень, внутренние усилия, нормальные напряжения.

---