Національний університет
водного господарства
та природокористування

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВОДНОГО ГОСПОДАРСТВА ТА ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ

Навчально-науковий інститут
автоматики, кібернетики та обчислювальної техніки

Кафедра прикладної математики

04 - 01 - 27

Національний університет
водного господарства
та природокористування

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для виконання лабораторних робіт з
навчальної дисципліни **"Математичні методи і моделі"**
для студентів спеціальності 193 "Геодезія та землеустрій"
денної форми навчання

Рекомендовано науково-методичною
комісією зі спеціальності 193
"Геодезія та землеустрій"

Протокол №7
від 23 листопада 2016 року

РІВНЕ - 2016

Національний університет

Методичні вказівки для виконання лабораторних робіт з дисципліни **"Математичні методи і моделі"** денної форми навчання спеціальності 193 "Геодезія та землеустрій" / Грицюк П.М., Мічута О.Р., Рощенюк А.М. - Рівне, НУВГП, 2016. - 42 с.

Укладачі:

Грицюк П.М. - доктор економічних наук, завідувач кафедри економічної кібернетики;

Мічута О.Р. - канд. тех. наук, доцент кафедри прикладної математики;

Рощенюк А.М. - ст. викладач кафедри прикладної математики.

Зміст

Програма дисципліни…...…….…….…….....3
Література……3
Вступ……...…….……..……...4
Розв’язання систем лінійних, алгебричних рівнянь …….....5
Апроксимація функцій за методом найменших квадратів……..…..11
Інтерполяція кубічними сплайнами……..…...…14
Застосування чисельного інтегрування до обчислення площ……...19
Побудова замкнутих контурів.....22
Завдання для виконання лабораторної роботи……26

© Грицюк П.М., Мічута О.Р., Рощенюк А.М., 2016.
© НУВГП, 2016.

Національний університет водного господарства та природокористування

Програма дисципліни.

1. Математичне моделювання задач землевпорядкування. Цільова функція і обмеження ресурсів. Математичні методи у землевпорядкуванні.

2. Розв’язання систем лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) з використанням алгебри матриць. Метод Жордана-Гаусса розв’язання СЛАР. Ітераційні методи роз’язання СЛАР.

3. Розв’язання недоозначених і переозначених СЛАР. Нормальна матриця. Метод найменших квадратів.

4. Інтерполяція і апроксимація табличних данних. Використання методу найменших квадратів в апроксимації даних. Інтерполяція функцій кубічними сплайнами. Інтерполяція параметричними сплайнами.

5. Чисельні методи знаходження площ фігур, обмежених криволінійними контурами. Похибка обчислення площі. Принцип Рунге.

6. Методи безумовної оптимізації функцій. Метод градієнтного спуску.

7. Задача лінійного програмування (ЗЛП) в землевпорядкуванні. Розв’язання ЗЛП графічним і табличним симплекс методом.

8. Пара двоїстих задач. Зв’язок між їх розв’язками. Двоїстий симплекс-метод.

9. Транспортна задача. Методи побудови початкового опорного плану. Розв’язання транспортної задачі методом потенціалів.

10. Розв’язання математичними методами задач про планування структури земельних угідь, про складання схеми зеленого конвеєра.

Національний університет водного господарства та природокористування

Література.

1. Барановская Г.Г., Любченко И.Н. Микрокалькуляторы в курсе высшей математики. – К.: Вища школа, 1987.

2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Чисельные методы – М. : Наука, 1987.

3.Демидович Е.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М. : Наука, 1966.

4. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. –М. : Наука, 1976.

5. Практикум по экономико-математическим методам в землеустройстве. Под. ред. С.Н. Волкова. – М.. Агропромиздат, 1991.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

ВСТУП

В процесі обробки геодезичних даних доводиться використовувати різноманітні математичні методи, але найчастіше – розв’язання систем лінійних рівнянь, апроксимацію та інтерполяцію табличних даних, обчислення площ фігур, оптимізацію функцій. При розв’язанні задач оптимізації структури земельних ресурсів господарства, оптимального ведення сільського виробництва доводиться складати математичну модель відповідної задачі, яка потім оптимізується відповідними методами математичного програмування.

Завдання курсу "Математичні методи і моделі" полягає в тому, щоб дати студентам навики постановки і розв’язання таких задач, які виникають у повсякденній практиці інженера-геодезиста чи землевпорядника.

Дані методичні вказівки присвячені розгляду першої групи задач, які найчастіше виникають при обробці геодезичних даних. До цих задач відносяться: розв’язання неоднозначних і переозначених систем рівнянь, лінійна апроксимація табличних даних і розрахунок коефіцієнта кореляції, інтерполяція таблично заданої функції кубічними сплайнами, обчислення площі криволінійної трапеції і визначення похибки таких розрахунків.

В результаті вивчення даної частини навчальної дисципліни студент повинен виконати п’ять лабораторних робіт. Номером варіанта служать дві останні цифри nn номера залікової книжки студента. Якщо nn >50, то варіант обчислюється формулою nn-50. У лабораторній роботі потрібно навести детальні розв’язки завдань у табличній формі з необхідними поясненнями і графічними ілюстраціями.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Національний університет водного господарства та природокористування

1. РОЗВЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРИЧНИХ РІВНЯНЬ (СЛАР)

1.1. Основні питання

В загальному вигляді система n лінійних рівнянь з n невідомими запишеться так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

В коефіцієнтах a_{ij} перший індекс вказує номер рівняння, а другий – номер невідомого, при якому знаходиться коефіцієнт $x_1, x_2, \ldots x_n$ – невідомі. Числа $b_1, b_2, \ldots b_n$ називаються вільними членами системи. З використанням символу сумування $\sum$ система (1) може бути записана так:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} * x_j = b_i \qquad \text{(j=1,2,..., n)} \qquad (2)$$

В матричній формі запис системи виглядає так :

$$A * X = B, \qquad (3)$$

де $A = (a_{ij}), i = 1, n;\ j = 1, n$ – матриця коефіцієнтів системи;

$X = (x_j),\ j = 1, n$ – стовпець невідомих;

$B = (b_i),\ i = 1, n$ – стовпець вільних членів.

Розв'язком системи (1) називають сукупність чисел $d_1, d_2, \ldots d_n$, яка будучи підставленою замість невідомих $x_1, x_2, \ldots x_n$ в (1), перетворює всі рівняння в тотожності. Система рівнянь називається сумісною (невиродженою), якщо вона має розв'язок та несумісною (виродженою), якщо розв'язку немає. При розв'язанні системи рівнянь над нею можна виконувати наступні перетворення, які не змінюють розв'язку системи:

1) преставляти рівняння місцями;
2) домножувати рівняння системи на довільне, відмінне від нуля число;
3) додавати рівняння або віднімати їх почленно.

Для розв'язання СЛАР використовують різні методи, які можна поділити на дві групи: прямі та інтераційні. Якщо в прямих методах всі обчислення проводити без округлень, то дістанемо точний розв'язок. До прямих методів відносяться: правило Крамера, методи Гаусса і Жордана-Гаусса, метод прогонки та інші. Інтеграційні методи дають послідовність наближених розв'язків, границя якої є розв'язком системи рівнянь.

Національний університет водного господарства та природокористування

1.2. Метод Жордана-Гаусса

Розглянемо детальніше алгоритм методу Жордана-Гаусса, перевагою якого є можливість отримати за скінченну кількість кроків точний розв'язок системи (1), Розширеною матрицею системи (1) називають матрицю виду:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \dots\dots\dots\dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Ідея методу Жордана-Гаусса полягає в тому, що матрицю коефіцієнтів a_{ij} шляхом тотожних перетворень зводять до одиничної. Внаслідок аналогічних перетворень, в колонці вільних членів b_i отримують розв'язки системи (1). Дійсно, якщо домножити обидві частини рівності (3) на обернену матрицю A^{-1} то отримаємо:

$$A^{-1} * A * X = E * X = A^{-1} * B = X .$$

Нехай система рівнянь (1) сумісна і коефіцієнт $a_{11} \neq 0$, тоді алгоритм методу Жордана-Гаусса можна представити так:

1. Записуємо розширену матрицю системи (1). Справа дописуємо два стовпці контрольних сум S1 і S2. На першому кроці заповнюємо їх сумами перших чотирьох коефіцієнтів рядка. Вибираємо розв'язуючий елемент для першого рядка-коефіцієнт a_{11} $(a_{11} \neq 0)$.

2. Ділимо перший (розв'язуючий) рядок розширеної матриці на розв'язуючий елемент a_{11} (крім стовпця S2).

3. Всі коефіцієнти першого (розв'язуючого) стовпця (a_{11}=1) заміняємо нулями.

4. Решту коефіцієнтів і вільних членів розширеної матриці (крім стовпця S2) перерахуємо згідно правила "прямокутника". Нове значення коефіцієнта, що знаходиться в *i*-му рядку *ij*-му стовпці a_{ij} обчислюють за формулою:

$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{ik} * a_{lj} / a_{lk} \qquad (5)$$

Тут a_{ij} – попереднє значення шуканого коефіцієнта; *l* – номер розв'язуючого рядка; *k* – номер розв'язуючого стовпця; a_{lk} - розв'язуючий коефіцієнт.

Коефіцієнти, записані у формулі (5) розташовані у вершинах прямокутника, звідки і пішла назва формули. Коефіцієнти стовпчика S2 обчислюється як суми перших чотирьох коефіцієнтів поточного рядка. Рівність S1=S2 служить контролем безпомилкового ведення розрахунків.

Національний університет
розвитку людини
та промислового життя

5. Пункти 1-4 повторюємо для кожного рядка розширеної матриці. При цьому розв'язуючі елементи вибирають на головній діагоналі. В результаті ліва частина початкової розширеної матриці перетворюється в одиничну матрицю, а четвертий стовпець утворить вектор розв'язків системи (1). Наведений вище алгоритм ілюструє розрахункова таблиця 1.

Таблиця 1.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМИ ТРЬОХ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ ЖОРДАНА-ГАУССА

A_{ij}			B_i	РОЗВ'ЯЗОК	
2,2	2,95	4,12	16,83	X1=	3,241
2,93	2,08	0,70	12,60	X2=	0,922
4,00	1,10	3,20	19,40	X3=	1,694

Крок	Ai1	Ai2	Ai3	Bi	Контрольні суми S1	S2
1	**2,20**	2,95	4,12	16,83	26,10	26,10
	2,93	2,08	0,70	12,60	18,31	18,31
	4,00	1,10	3,20	19,40	27,70	27,70
2	1	1,341	1,873	7,650	11,864	11,864
	0	**-1,849**	-4,787	-9,815	-16,450	-16,450
	0	-4,264	-4,291	-11,200	-19,755	-19,755
3	1	0	-1,599	0,532	-0,067	-0,067
	0	1	2,589	5,308	8,898	8,898
	0	0	**6,749**	11,433	18,182	18,182
4	1	0	0	**3,241**	4,241	4,241
	0	1	0	**0,922**	1,929	1,929
	0	0	1	**1,694**	2,694	2,694

Контрольні запитання

1. Що таке СЛАР?
2. Система рівнянь називається однорідною (неоднорідною), якщо ….
3. Розв'язком СЛАР називається …
4. Дайте означення сумісної (несумісної) СЛАР.
5. Метод Жордана -Гауса – це ….
6. Як здійснюється вибір головного елемента?
7. В чому полягає "правило прямокутника"?
8. Чому метод Жордана -Гауса називають методом повного виключення?
9. В якому випадку СЛАР немає розв'зку?
10. В якому випадку СЛАР має безліч розв'зків?

Національний університет водного господарства та природокористування

1.3. Недоозначені СЛАР

Система рівнянь виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (6)$$

причому $m<n$ називається недоозначеною. Недоозначена система має безліч розв'язків. Розглянемо метод розв'язування недоозначеної СЛАР, який називають базисним. Виберемо m невідомих довільним чином і запишемо їх з їхніми коефіцієнтами перенесемо в праву частину. Отримуємо систему рівнянь у базисному виді

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 - a_{1m+1}x_{m+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 - a_{2m+1}x_{m+1} - \ldots - a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mm}x_m = b_m - a_{mm+1}x_{m+1} - \ldots - a_{mn}x_n \end{cases} \qquad (7)$$

Невідомі $x_1, x_2, \ldots x_n$ у лівій частині рівнянь називають базисними, а невідомі $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_n$ у правій частині рівнянь – вільними. Якщо надати всім вільним невідомим значення нуль, то система (7) стане нормально означеною (кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих) і легко розв'язується одним з відомих методів. Отриманий таким чином розв'язок називають базисним. Кількість базисних розв'язків недоозначеної системи рівнянь – скінченна.

Приклад. Нехай задана система рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 11 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 8 \end{cases}.$$

1) Виберемо за базисні невідомі x_1, x_2, а за вільні невідомі - x_3, x_4.

Отримаємо

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 11 - x_3 - 2x_4 \\ 2x_1 + x_2 = 8 + 3x_3 - 3x_4 \end{cases}$$

Приймемо $x_3 = x_4 = 0$. Отримаємо

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 11 \\ 2x_1 + x_2 = 8 \end{cases}.$$

Розв'язком даної системи є $x_1 = 5; x_2 = -2.$ Повний розв'язок вихідної системи матиме вигляд: $x_1 = 5; x_2 = -2; x_3 = 0; x_4 = 0.$

2) Виберемо тепер за базисні невідомі x_3, x_4. Отримаємо

$$\begin{cases} x_3 + 2x_4 = 11 - x_1 + 3x_2 \\ -3x_3 + 3x_4 = 8 - 2x_1 - x_2 \end{cases}.$$

Приймемо $x_1 = x_2 = 0$. Розв'язком такої системи буде:

$$x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = \frac{17}{9}; x_4 = \frac{41}{9}.$$

Базисні невідомі вихідної системи можна вибрати шістьма способами. Отже, дана система має шість різних базисних розв'язків.

1.4. Переозначені СЛАР

В процесі геодезичних вимірювань отримані дані мають деяку похибку. Для зменшення впливу похибок на результати вимірювань дані знімаються декілька разів. Тому при обробці результатів таких замірів ми отримуємо систему, кількість рівнянь якої перевищує кількість невідомих.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{8}$$

Система (8) є пере означеною і не має жодного точного розв'язку. Проблема полягає у відшуканні такого наближеного розв'язку, який би найкращим чином задовольняв усі рівняння системи. Розв'язок даної проблеми ґрунтується на принципі Лагранжа.

Принцип Лагранджа (принцип максимальної правдоподібності)

З усіх можливих значень $x_1, x_2, \ldots x_n$ слід взяти ті, для яких сума квадратів відхилень лівої частини від правої є найменшою

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n - b_1)^2 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n - b_2)^2 + \ldots \\ + (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n - b_m)^2 \to \min \tag{9}$$

Розв'язання системи (8) на основі принципу Лагранджа називають розв'язанням за методом найменших квадратів.

Національний університет водного господарства та природокористування

Теорема. Найкращий наближений розв'язок системи (8) буде розв'язком системи з n невідомими.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{i1}{}^2 x_1 + \sum_{i=1}^{m} a_{i1}a_{i2}x_2 + \ldots + \sum_{i=1}^{m} a_{i1}a_{in}x_n = \sum_{i=1}^{m} a_{i1}b_i, \\ \sum_{i=1}^{m} a_{i2}a_{i1}x_1 + \sum_{i=1}^{m} a_{i2}{}^2 x_2 + \ldots + \sum_{i=1}^{m} a_{i2}a_{in}x_n = \sum_{i=1}^{m} a_{i2}b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{i=1}^{m} a_{in}a_{i1}x_1 + \sum_{i=1}^{m} a_{in}a_{i2}x_2 + \ldots + \sum_{i=1}^{m} a_{in}{}^2 x_n = \sum_{i=1}^{m} a_{in}b_i \end{cases} \quad (10)$$

Система (10) називається нормальною системою рівнянь.

Приклад. Нехай задано систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2{,}20 * x_1 + 2{,}95 * x_2 + 4{,}12 * x_3 = 16{,}83 \\ 2{,}93 * x_1 + 2{,}08 * x_2 + 0{,}70 * x_3 = 12{,}6 \\ 4{,}00 * x_1 + 1{,}10 * x_2 + 3{,}20 * x_3 = 19{,}40 \\ 1{,}95 * x_1 + 3{,}02 * x_2 + 3{,}90 * x_3 = 17{,}03 \\ 3{,}07 * x_1 + 2{,}15 * x_2 + 0{,}90 * x_3 = 13{,}10 \\ 3{,}82 * x_1 + 1{,}20 * x_2 + 2{,}90 * x_3 = 18{,}80 \\ n = 3; m = 6. \end{cases}$$

Нормальна система рівнянь матиме вигляд:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{6} a_{i1}{}^2 x_1 + \sum_{i=1}^{6} a_{i1}a_{i2}x_2 + \sum_{i=1}^{6} a_{i1}a_{i3}x_3 = \sum_{i=1}^{6} a_{i1}b_i, \\ \sum_{i=1}^{6} a_{i2}a_{i1}x_1 + \sum_{i=1}^{6} a_{i2}{}^2 x_2 + \sum_{i=1}^{6} a_{i2}a_{i3}x_3 = \sum_{i=1}^{6} a_{i2}b_i, \\ \sum_{i=1}^{6} a_{i3}a_{i1}x_1 + \sum_{i=1}^{6} a_{i3}a_{i2}x_2 + \sum_{i=1}^{6} a_{i3}{}^2 x_n = \sum_{i=1}^{6} a_{i3}b_i. \end{cases}$$

Розрахунок коефіцієнтів нормальної системи зручно вести у вигляді таблиці 2, зображеної на наступній сторінці. В результаті проведених табличних розрахунків отримуємо нормальну систему рівнянь у виді:

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\begin{cases} 57{,}24 * x_1 + 34{,}06 * x_2 + 45{,}36 * x_3 = 296{,}79 \\ 34{,}06 * x_1 + 29{,}42 * x_2 + 34{,}32 * x_3 = 199{,}35 \\ 45{,}36 * x_1 + 34{,}32 * x_2 + 52{,}13 * x_3 = 272{,}97. \end{cases}$$

Розв'язавши систему методом Жордана-Гаусса, отримуємо розв'язок

x_1=1,825; x_2=0,877; x_3=3,256.

Для оцінки точності отриманого розв'язку обчислимо "виправлені" вільні члени системи

$$b_i^{'} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{1i3}x_3 .$$

Результати такого розрахунку представлені в останній колонці таблиці 2

ТАБЛИЦЯ 2

РОЗВ'ЯЗАННЯ ПЕРЕОЗНАЧЕНОЇ СЛАР МЕТОДОМ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

№	Ai1	Ai2	Ai3	Bi	Ai1^2	Ai1*Ai2	Ai2^2	Ai2*Ai3	Ai3^2	Ai1*Ai3	Ai1*Bi	Ai2*Bi	Ai3*Bi	Bi
1	2,2	2,95	4,1	16,8	4,84	6,49	8,70	12,1	16,81	9,02	36,96	49,56	68,88	17,41
2	2,93	2,08	0,2	12,6	8,58	6,09	4,33	0,42	0,04	0,586	36,92	26,21	2,52	12,07
3	4	1,1	3,2	19,4	16	4,4	1,21	3,52	10,24	12,8	77,6	21,34	62,08	19,50
4	1,95	3,02	3,9	17	3,80	5,89	9,12	11,78	15,21	7,605	33,15	51,34	66,3	16,35
5	3,07	2,15	0,9	13,1	9,42	6,60	4,62	1,94	0,81	2,763	40,22	28,17	11,79	13,79
6	3,82	1,2	2,9	18,8	14,59	4,584	1,44	3,48	8,41	11,078	71,82	22,56	54,52	18,53
Сума					57,24	34,06	29,42	33,22	51,52	43,85	296,7	199,17	266,09	

Нормальна матриця

X1	X2	X3
3,106	**0,969**	**1,895**

Розв'язок

57,2447	34,0579	43,852	296,661
34,0579	29,4218	33,224	199,173
43,852	33,224	51,52	266,09

Контрольні запитання

1. Дайте означення недоозначеної СЛАР?
2. Дайте означення переозначеної СЛАР?
3. В чому суть принципу максимальної правдоподібності.
4. Що таке нормальна матриця.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

2. АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЙ ЗА МЕТОДОМ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

2.1. Постановка задачі

В інженерних дослідженнях часто зустрічається задача вияснення зв'язку (аналітичної залежності) між деякими змінними X і Y. В найпростішому випадку зв'язок між цими величинами є функціональним кожному значенню X однієї величини відповідає певне значення іншої величиниY. Функціональний зв'язок є найбільш тісним видом зв'язку. Проте набагато частіше зустрічається більш складний зв'язок – стохастичний або кореляційний, наприклад зв'язок між врожаєм Y і кількістю опадів X. Цей зв'язок не є однозначним, оскільки врожай залежить і від інших параметрів, таких як тип грунту, температура, кількість міндобрив і т.д. Звичайно дані спостережень чи вимірів двох величин X і Y задають у вигляді таблиці їх значень.

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y	y_1	y_2	y_3	...	y_n

Якщо на координатній площині відкласти точки $A_i(X_i;Y_i)$ то отримаємо точковий графік – поле розсіяння величин X і Y. Характер розташування точок може дати наглядне уявлення про тісноту зв'язку між величинами X і Y, а також підказати вид формули, що виражає зв'язок цих величин. Заміна табличних даних простою формулою y=f(x), яка коректно відображає зв'язок між x і y, називається апроксимацією даних. Якщо при цьому графік функції y=f(x) проходить через усі точки A_i, така апроксимація називається інтерполяцією. Необхідно відмітити, що інтерполяція таблично заданої функції не завжди можлива, а у випадку слабко зв'язаних величин, або ж неточних даних вона втрачає зміст. У таких випадках застосовують апроксимацію даних такою функцією простого вигляду (лінійною, квадратичною, логарифмічною), яка б у цілому вірно відображала характер залежності y=f(x). Найбільш ефективним методом апроксимації табличних даних є метод найменших квадратів. У відповідності з цим методом функція f(x) вибирається таким чином, щоб сума квадратів відхилень апроксимаційної функції від експериментальних точок була мінімальною

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - f(x_i))^2 \to \min \qquad (1)$$

Побудова лінії графіка тобто графічне, вирівнювання даних дозволяє виявити характер зв'язку між величинами X і Y (лінійний, квадратичний, логарифмічний, показниковий і т.д.).

Тісноту зв'язку характеризує, так званий, коефіцієнт кореляції *r*, який змінюється в межах $-1 \le r \le 1$. Якщо $|r| \approx 1$, то зв'язок є функціональним

Національний університет водного господарства та природокористування

(повним). Якщо $|r| > 0.7$ - зв'язок вважається тісним, якщо $|r| < 0.4$ - зв'язок вважається слабким.

2.2. Кореляційний аналіз залежності *y = ax + b*

Найпростішим видом зв'язку є лінійний зв'язок, який можна виразити співвідношенням

$$y = a * x + b. \tag{2}$$

Маючи заданий набір даних *Xi*, *Yi* (*i*=1,...*n*), ми повинні підібрати параметри *a* і *b* таким чином, щоб виконувався принцим Лагранджа. Виявляється, що *a* і *b* виражаються через середні значення *Xc*, *Yc*, коефіцієнт *r*, вибіркові відхилення *Vx* і *Vy*. Алгоритм обчислень виглядає так:

1) Обчислюємо *Xc*, *Yc*

$$X_c = \sum_{i=1}^{n} x_i / n; \qquad Y_c = \sum_{i=1}^{n} y_i / n. \tag{3}$$

2) Обчислюємо вибіркові відхилення *Vx* і *Vy*, а також вибіркову коваріацію *Qxy*

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_c)^2}, \quad S_y = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_c)^2}, \tag{4}$$

$$Q_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_c)*(y_i - y_c). \tag{5}$$

3) Обчислюємо вибірковий коефіцієнт кореляції

$$r = Q_{xy} \big/ (S_x * S_y) \tag{6}$$

і параметри *a* і *b* лінійного рівняння регресії (2)

$$a = \frac{S_y}{S_x} * r \qquad b = y_c - a * x_c. \tag{7}$$

4) Знаючи рівняння регресії, можна побудувати графік отриманої прямої регресії. При цьому експериментальні точки (*Xi*, *Yi*) і теоретичні (X^*i, Y^*i) обчислені згідно (2), не співпадатимуть. Характеристикою точності апроксимації є середнє вибіркове відхилення V^*y.

$$V_y^* = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - (ax_i + b))^2}. \tag{8}$$

Величина V^*y визначає ширину довірчого інтервалу. Це означає, що всі точки, які попадають всередину інтервалу, визначеного подвійною нерівністю

$$a*x_i+b- V^*y <y_i<a*x_i+b+ V^*y$$

репрезентують дані, що заслуговуютьна довіру.

Більш складні види залежностей, такі як степенева, логарифмічна, показникова за допомогою спеціальних замін вдається звести до лінійної залежності (лінеаризувати).

Приклад. Залежність між величинами X та Y представлена у таблиці

i	1	2	3	4	5
X	3.74	3.83	3.89	4.09	4.22
Y	20.00	17.00	14.50	12.00	7.50

Вважаючи залежність Y=f(X) лінійною, визначити параметри лінійного зв'язку *a* і *b*, коефіцієнт кореляції r, середнє вибіркове відхилення V^*y. Побудувати точковий і лінійний графіки. Визначити тісноту зв'язку.

Розрахунки зручно вести у вигляді таблиці.

Таблиця 3.

ОБЧИСЛЕННЯ ПАРАМЕТРІВ РІВНЯННЯ ЛІНІЙНОЇ РЕГРЕСІЇ

Вибіркове рівняння регресії Y= -24,67*X+111,69

i	Xi	Yi	(Xi-Xc)^2	(Yi-Yc)^2	(Xi-Xc)*(Yi-Yc)	a*Xi+b	(Y1i-Yi)^2
1	3,74	20,00	0,07	53,78	-2,00	19,41	0,347
2	3,83	17,00	0,03	18,78	-0,79	17,19	0,036
3	3,89	14,50	0,02	3,36	-0,23	15,71	1,463
4	4,09	12,00	0,01	0,44	-0,05	10,78	1,500
5	4,22	7,50	0,04	26,69	-1,07	7,57	0,005
6	4,31	5,00	0,09	58,78	-2,27	5,35	0,120
∑	24,08	76,00	0,26	161,83	-6,42	76,00	3,472
Сер.	4,01	12,67					

Sx=0,23 *Sy=5,69* *Qxy= -1,28* *r= -0,989*

A= -24,67 *B=111,69* Vy^* *=0,83*

Отже досліджуваний зв'язок є функціональним.

Графічна ілюстрація розв'язку наведена на рис. 1.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

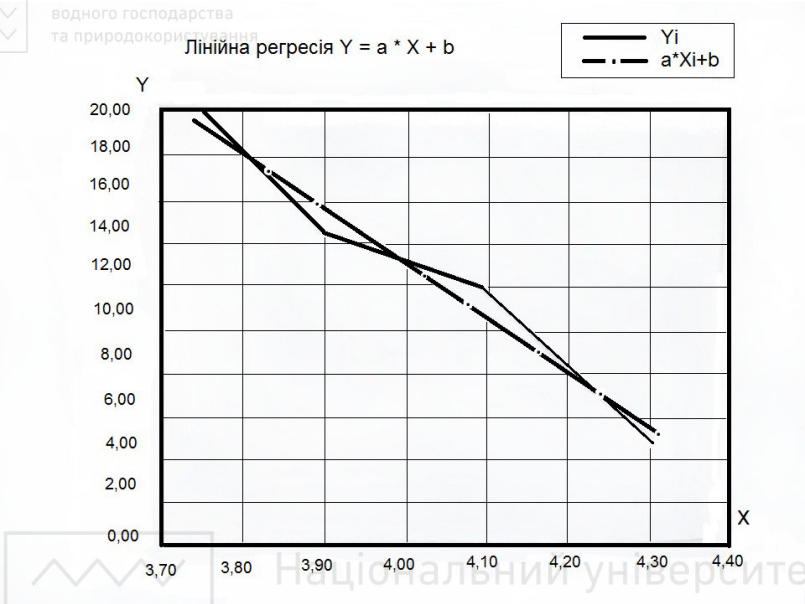

Рис. 1.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Контрольні запитання

1. Дайте означення кореляції.
2. Що називають регресією?
3. Парна регресія характеризує …
4. Які особливості багатофакторної регресії в порівнянні з парною регресією?
5. Що характеризує коефіцієнт кореляції?
6. Які значення може приймати коефіцієнт кореляції?
7. В чому суть методу найменших квадратів?

3. ІНТЕРПОЛЯЦІЯ КУБІЧНИМИ СПЛАЙНАМИ

Для реконструкції функції, графік якої проходить через задані вузлові точки $(x_0; y_0), (x_2; y_2), \dots, (x_n; y_n)$ використовують параметричні кубічні сплайни виду

$$y = at^3 + bt^2 + ct + d. \qquad (1)$$

Для визначення невідомих коефіцієнтів a, b, c, d використовують наступні чотири умови:

1. Співпадіння значень координат сплайна із значеннями координат вузлової точки.
2. Неперервність сплайна у вузлових точках.
3. Неперервність першої похідної сплайна у вузлових точках.

Національний університет водного господарства та природокористування

4. Неперервність другої похідної сплайна у вузлових точках.

Перша похідна сплайна має вигляд:

$$y_t^{'} = 3at^2 + 2bt + c. \tag{2}$$

Друга похідна сплайна має вигляд:

$$y_t^{''} = 6at + 2b. \tag{3}$$

Враховуючи вказані вище умови і формули (2, 3) отримуємо наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} &d_i = y_i; \\ &a_i + b_i + c_i = y_{i+1} - y_i; \\ &3a_i + 2b_i + c_i = c_{i+1}; \\ &3a_i + b_i = b_{i+1}. \end{aligned} \tag{4}$$

Кількість рівнянь системи (4) становить $3n$, а кількість невідомих - $3n+2$. Ще дві недостаючих умови можна отримати з умови поведінки сплайна на кінцях відрізка $[x_0, x_n]$. Найчастіше вибирають умову нульової кривизни сплайна на краях відрізка

$$y''(x_0) = y''(x_n) = 0. \tag{5}$$

Сплайн отриманий таким чином називається природним.

Після деяких алгебраїчних перетворень із системи (4) вдається отримати систему

$$b_{i+2} + 4b_{i+1} + b_i = 3(y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i) \quad i = 0, n-2. \tag{6}$$

Згідно з (3) - (5) маємо

$$b_0 = 0; \quad b_n = 3a_{n-1} + b_{n-1} = 0. \tag{7}$$

Система (6) –(7) містить $n+1$ рівнянь з $n+1$ невідомими. Матриця системи є невиродженою і, отже, система має єдиний розв'язок. Із системи (4) отримуємо наступні системи рівнянь для визначення коефіцієнтів a_i

$$a_i = \frac{1}{3}(b_{i+1} - b_i), \quad i = 0, n-1 \tag{8}$$

та коефіцієнтів c_i

$$c_i = y_{i+1} - y_i - a_i - b_i, \quad i = 0, n-1. \tag{9}$$

Розв'язавши отримані системи рівнянь (6)–(9), отримаємо повний набір коефіцієнтів a, b, c, d, необхідних для побудови інтерполюючих кубічних сплайнів. Змінна x задається регулярною сіткою з кроком $h_1 = (x_n - x_0)/5n$.

Для розв'язування отриманих систем рекомендується використати електронні таблиці Excel, або ж один з математичних пакетів. Розрахунки оформляються у вигляді таблиць, представлених на наступній сторінці. За результатами розрахунків будується графік інтерполюючої функції (Рис. 2).

Національний університет
водного господарства
та природокористування

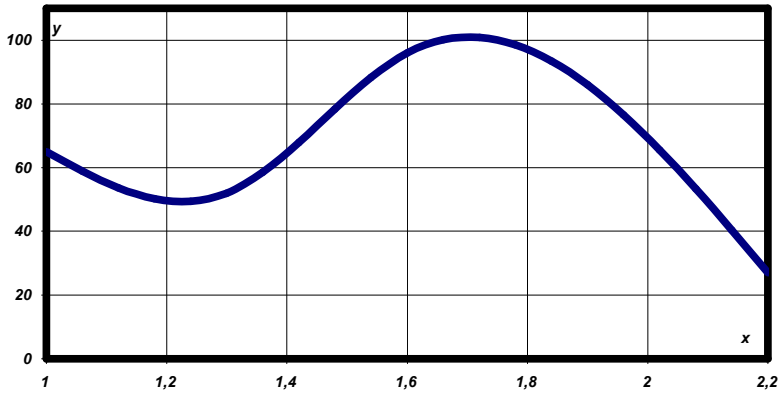

Рис. 2. Побудова інтерполюючої функції методом кубічних сплайнів

Приклад. Функція y(x) задана таблично у точках $(x_0; y_0), (x_1; y_1), (x_2; y_2), (x_3; y_3), (x_4; y_4)$, тобто n=4. Необхідно виконати інтерполяцію табличних даних за допомогою кубічних сплайнів на відрізку (a, b). Побудувати графік використовуючи значення функції у вузлових точках, а також обчислені значення функції у проміжних точках.

Результати розрахунків зручно представити у вигляді таблиці.

Таблиця 4.

a	*b*	*h*	*h1*		Матриця А			B0
1	2,2	0,3	0,06		4	1	0	171
					1	4	1	-162
i	*x*	*y*			0	1	4	-147
0	1	65			Матриця A^{-1}			
1	1,3	52			0,268	-0,071	0,018	
2	1,6	96			-0,071	0,286	-0,071	
3	1,9	86			0,018	-0,071	0,268	
4	2,2	27						

1. Знаходимо крик h та h_1:

$$h = \frac{b-a}{4} = \frac{2,2-1}{4} = 0,3; \qquad h_1 = \frac{x_n - x_0}{5*n} = \frac{2,2-1}{5*4} = 0,06$$

2. Знаходимо B_0:

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$B_0 = 3(y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i) = \begin{cases} 3*(96 - 2*52 + 65) = 171 \\ 3*(86 - 2*96 + 52) = -162 \\ 3*(27 - 2*86 + 96) = -147 \end{cases}$$

3. Знаходимо матрицю A^{-1}:

- крок №1: вибираєм масив з порожніми осередками розмірністю 3х3 - майбутня матриця $A^{-1;}$
- крок №2: вибираєм ф-цію МОБР (в рядку f(x) вона міститься в категорії "Матемаческие");
- крок №3: вказуємо масив (діапазон клітинок) - матриця А;
- крок №4: натискаємо shift + ctrl + enter.

4. Знаходимо коефіцієнти сплайнів:

$d_i = y_i$; $d_1=y_1=65$; $d_2=y_2=52$; $d_3=y_3=96$; $d_4=y_4=86$;

$b_i = A^{-1} * B_0$ - вибираєм ф-цію МУМНОЖ(..)в категорії "Матемаческие"; $b_1=0$; $b_2=54,75$; $b_3=-48,00$; $b_4=-24,75$; $b_5=0$;

$a_i = \frac{1}{3}(b_{i+1} - b_i)$, $a_1=1/3*(54,75-0)=18,25$; $a_2=1/3*(-48-54,75)=-34,25$; $a_3=1/3*(-24,75+48)=7,75$; $a_4=1/3*(0+24,75)=8,25$

$c_i = y_{i+1} - y_i - a_i - b_i$; $c_1=52-65-18,25-0=-31,25$; $c_2=96-52+34,25-54,75=23,5$; $c_3=86-96-7,75+48=30,25$; $c_4=27-86-8,25+24,75=-42,5$.

Таблиця 5.

Коефіцієнти сплайнів			
a	b	c	d
18,25	0,00	-31,25	65,00
-34,25	54,75	23,50	52,00
7,75	-48,00	30,25	96,00
8,25	-24,75	-42,50	86,00
	0,00		

5. Будуємо параметричні кубічні сплайни виду $y = at^3 + bt^2 + ct + d$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Таблиця 6.

i	*t*	*x*	*y*
0	0	1	65,00
	0,2	1,06	58,90
	0,4	1,12	53,67
	0,6	1,18	50,19
	0,8	1,24	49,34
1	0	1,3	52,00
	0,2	1,36	58,62
	0,4	1,42	67,97
	0,6	1,48	78,41
	0,8	1,54	88,30
2	0	1,6	96,00
	0,2	1,66	100,19
	0,4	1,72	100,92
	0,6	1,78	98,54
	0,8	1,84	93,45
3	0	1,9	86,00
	0,2	1,96	76,58
	0,4	2,02	65,57
	0,6	2,08	53,37
	0,8	2,14	40,38
4	1	2,2	27,00

Національний університет
водного господарства
та природокористування

6. Будуємо графік інтерполюючої функції рис. 3.

Рис. 3.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Контрольні запитання

1. В чому зміст поняття інтерполяція.
2. В чому зміст поняття "вузол інтерполяції".
3. В чому суть інтерполяції кубічними сплайнами.
4. Як знаходяться коефіцієнти сплайна?

4. ЗАСТОСУВАННЯ ЧИСЕЛЬНОГО ІНТЕГРУВАННЯ ДО ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩ

4.1. Постановка задачі

Розглянемо фігуру ABCD (Рис. 4), дві сторони якої AB і CD паралельні до осі OY, сторона AD належить осі OX, а контур BC описується кривою f(x). Така фігура називається криволінійною трапецією. Площа криволінійної трапеції визначається значенням інтеграла

$$S = \int_a^b f(x)dx. \qquad (1)$$

Якщо функція f(x) має складний вигляд (наприклад, набір сплайнів), то інтеграл (1) доводиться обчислювати чисельними методами. Розіб'ємо участок [a,b] на *n* рівних частин довжиною h: $h = \frac{b-a}{n}$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

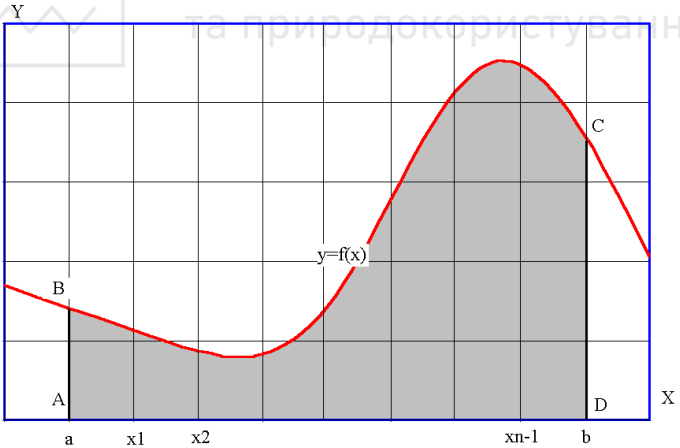

Рис. 4.

Позначимо утворені точки x_0, x_1, x_2, ..., x_n. Очевидно, що

$$x_0=a, \quad x_1=a+h, \ ..., \quad x_n=x_0+n*h=b. \qquad (2)$$

Площа всієї фігури дорівнює сумі площ окремих смужок. Таким чином, задача зводиться до обчислення площі вузької смужки криволінійної трапеції, верхній край якої – крива лінія. Замінивши криву лінію відрізком прямої (а це можна зробити з невеликою похибкою, якщо *n*-велике число), ми

Національний університет водного господарства та природокористування

отримаємо прямокутник, або ж трапецію – фігуру, площа якої легко обчислюється. В залежності від способу побудови прямої можна отримати різні способи наближеного обчислення площі криволінійної трапеції.

4.2. Метод лівих прямокутників

Будемо вважати всі смужки прямокутниками шириною *h* і висотою $f(x_i)$, де x_i - ліва точка інтегралу $[x_i, x_{i+1}]$. Позначимо $y_i=f(x_i)$. Тоді площа окремої смужки $S_i=y_i*h$, а площа всієї фігури

$$S \approx h * \sum_{i=0}^{n-1} y_i \tag{3}$$

Приклад оформлення представлений у таблиці 8.

4.3. Метод правих прямокутників (міркування повністю аналогічні п.4.2.)

$$S \approx h * \sum_{i=1}^{n} y_i \tag{4}$$

4.4. Метод трапеції

Сполучимо всі точки (X_i,Y_i)-(X_{i+1},Y_{i+i}) відрізками прямих, утворивши ламану лінію ВС. Тоді кожна із смужок набере вигляду трапеції, площа якої

$$S \approx \frac{h}{2} * \left(y_i + y_{i+1}\right).$$

Загальна площа всієї фігури

$$S \approx \frac{h}{2} * \left[y_0 + y_n + 2 * \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right]. \tag{5}$$

4.5. Метод парабол (Сімпсона)

Найбільш точне значення площі отримаємо коли представимо верхню границю у вигляді набору участків квадратних парабол, кожен з яких з'єднує сусідні три точки. Необхідною умовою такого представлення є умова: *n-число парне.* Тоді формула площі криволінійної трапеції набере вигляду:

$$S \approx \frac{h}{3} * \left[y_0 + y_n + 4 * \sum y_{непарні} + 2 * \sum y_{парні} \right] \tag{6}$$

Таблиця 7

Метод	**порядок точності P**	**похибка Δ**
прямокутників	1	$\left\|y'\right\|_{\max} * (b-a) * h/4$
трапеції	2	$\left\|y''\right\|_{\max} * (b-a) * h^2/12$
Сімпсона	4	$\left\|y^{IV}\right\|_{\max} * (b-a) * h^4/180$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Похибка обчислення площі залежить від величини інтервалу h , а також від вибраного методу. Чим менший інтервал h, тим вища точність обчислень.

Таблиця 8

Метод лівих прямокутників

i	x	y
0	1	65
1	1,06	58,9
2	1,12	53,67
3	1,18	50,19
4	1,24	49,34
5	1,3	52
6	1,36	58,62
7	1,42	67,97
8	1,48	78,41
9	1,54	88,3
10	1,6	96
11	1,66	100,19
12	1,72	100,92
13	1,78	98,54
14	1,84	93,45
15	1,9	86
16	1,96	76,58
17	2,02	65,57
18	2,08	53,37
19	2,14	40,38
20	2,2	27
		$\sum$ = **1433,4**
h= 0,06		
S_{20}= 86,00400		

i	x	y
0	1	65
1	1,12	53,67
2	1,24	49,34
3	1,36	58,62
4	1,48	78,41
5	1,6	96
6	1,72	100,92
7	1,84	93,45
8	1,96	76,58
9	2,08	53,37
10	2,2	27
		$\sum$ = **725,36**
h= 0,12		
S_{10}= 87,04320		

p= 1

Δ = = -1,03920

St= 84,96480

Національний університет
водного господарства
та природокористування

4.6. Принцип Рунге

Для більш точної оцінки похибки обчислень використовують принцип Рунге (принцип подвійного перерахунку). Суть його полягає в наступному. Нехай S – точне значення площі криволінійної трапеції, S_n – її наближене значення, отримане при поділі фігури на n інтервалі, S_{2n} – наближене

Національний університет водного господарства та природокористування

значення площі, отримане при поділі на *2n* інтервалів. Тоді похибку Δ значення площі S_{2n} можна представити у вигляді

$$\Delta = \frac{S_{2n} - S_n}{2^p - 1} \tag{7}$$

Тут P – порядок точності методу. Уточнене значення площі S_t обчислюється за формулою:

$$S_t = S_{2n} + \Delta. \tag{8}$$

Результати розрахунків площі криволінійної трапеції, проведених різними методами для функції f(x), отриманої внаслідок інтерполяції табличних даних (Розділ 3), представлені у таблиці 9.

Таблиця 9

Метод	S_n	S_{2n}	Δ	S_t
Лівих прямокутників	87,04320	86,00400	-1,03920	84,96480
Правих прямокутників	82,48320	83,72400	1,24080	84,96480
Трапеції	84,76320	84,86400	0,03360	84,89760
Парабол	84,91760	84,89760	-0,00133	84,89627

Національний університет водного господарства та природокористування

Контрольні запитання

1. Які Ви знаєте способи наближеного обчислення площі криволінійної трапеції.
2. Як обчислюється площа криволінійної трапеції за методом лівих прямокутників.
3. Як обчислюється площа криволінійної трапеції за методом правих прямокутників
4. Як обчислюється площа криволінійної трапеції за методом трапеції.
5. Як обчислюється площа криволінійної трапеції за методом парабол.
6. В чому суть принципу Рунге.

5. ПОБУДОВА ЗАМКНУТИХ КОНТУРІВ

5.1. Теоретичні відомості

Для побудови замкнутого контура, який проходить через задані вузлові точки $(x_1; y_1), (x_2; y_2), \ldots, (x_n; y_n)$ використовують параметричні кубічні сплайни виду

$$\begin{aligned} x &= a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x; \\ y &= a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y. \end{aligned} \tag{1}$$

Для визначення невідомих коефіцієнтів a, b, c, d використовують наступні чотири умови:

- Співпадіння значення координат сплайна із значеннями координат вузлової точки.

Національний університет водного господарства та природокористування

- Неперервність сплайна у вузлових точках.
- Неперервність першої похідної сплайна у вузлових точках.
- Неперервність другої похідної сплайна у вузлових точках.

Перша похідна сплайна має вигляд:

$$x_t^{'} = 3a_x t^2 + 2b_x t + c_x; \qquad y_t^{'} = 3a_y t^2 + 2b_y t + c_y. \tag{2}$$

Друга похідна сплайна має вигляд:

$$x_t^{''} = 6a_x t + 2b_x; \qquad y_t^{''} = 6a_y t + 2b_y. \tag{3}$$

Враховуючи вказані вище умови і формули (2-3) отримуємо наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} &d_i = x_i; \\ &a_i + b_i + c_i = x_{i+1} - x_i; \\ &3a_i + 2b_i + c_i = c_{i+1}; \\ &3a_i + b_i = b_{i+1}. \end{aligned} \tag{4}$$

Національний університет водного господарства та природокористування

В результаті нескладних алгебраїчних перетворень систему (4) вдається звести до виду

$$\begin{aligned} &a_{i+2} + 4a_{i+1} + a_i = x_{i+3} - 3x_{i+2} + 3x_{i+1} - x_i; \\ &b_{i+2} + 4b_{i+1} + b_i = 3(x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i); \\ &c_{i+2} + 4c_{i+1} + c_i = 3(x_{i+2} - x_i). \end{aligned} \tag{5}$$

Таким чином, початкова система 3n рівнянь розпалась на три незалежних системи з n рівнянь кожна. Враховуючи замкнутість контура, матимемо

$$\begin{aligned} &x_{n+1} = x_1;\ x_{n+2} = x_2;\ ... \\ &a_{n+1} = a_1;\ a_{n+2} = a_2;\ ... \\ &b_{n+1} = b_1;\ b_{n+2} = b_2;\ ... \\ &c_{n+1} = c_1;\ c_{n+2} = c_2;\ ... \end{aligned} \tag{6}$$

Системи рівнянь, зв'язані із змінною **y** отримуємо з (5) заміною координати **x** на координату **y.** Розв'язавши отримані шість систем рівнянь одним з відомих методів, отримаємо набір коефіцієнтів $a_x, b_x, c_x, d_x, a_y, b_y, c_y, d_y$, необхідних для побудови сплайнів.

Для розв'язування отриманих систем рекомендується використати електронні таблиці Excel, або ж один з математичних пакетів. Розрахунки оформляються у вигляді таблиць 10-11, представлених на наступних двох сторінках. Матриці коефіцієнтів і відповідні обернені матриці для всіх шести систем рівнянь мають однаковий вигляд. Вільні члени мають різний вигляд і

визначаються правою частиною рівнянь (5) та їх аналогів для змінної ***y***. За результатами розрахунків будується замкнений контур (Рис.2).

Рис. 2. Побудова замкненого контура методом кубічних сплайнів

5.2. Побудова замкненого контура за допомогою параметричних кубічних сплайнів

Таблиця 10.

Розрахунок коефіцієнтів сплайнів

Матриця коефіцієнтів А

	X	Y		1	2	3	4	5	6	7
1	*63*	*103*	1	*1*	*4*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*
2	*103*	*43*	2	*0*	*1*	*4*	*1*	*0*	*0*	*0*
3	*115*	*-14*	3	*0*	*0*	*1*	*4*	*1*	*0*	*0*
4	*53*	*-57*	4	*0*	*0*	*0*	*1*	*4*	*1*	*0*
5	*-3*	*-58*	5	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*4*	*1*
6	*-24*	*17*	6	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*4*
7	*-4*	*79*	7	*4*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*
1	*63*	*103*								
2	*103*	*43*								
3	*115*	*-14*								

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Обернена матриця A^{-1}

	1	2	3	4	5	6	7
1	-0,077	0,020	-0,004	-0,004	0,020	-0,077	0,289
2	0,289	-0,077	0,020	-0,004	-0,004	0,020	-0,077
3	-0,077	0,289	-0,077	0,020	-0,004	-0,004	0,020
4	0,020	-0,077	0,289	-0,077	0,020	-0,004	-0,004
5	-0,004	0,020	-0,077	0,289	-0,077	0,020	-0,004
6	-0,004	-0,004	0,020	-0,077	0,289	-0,077	0,020
7	0,020	-0,004	-0,004	0,020	-0,077	0,289	-0,077

Вільні члени системи (2.5)

	Ax0	Bx0	Cx0	Ay0	By0	Cy0
1	-46	-84	156	11	9	-351
2	80	-222	-150	28	42	-300
3	29	18	-354	34	126	-132
4	6	105	-231	-89	228	222
5	6	123	-3	-25	-39	411
6	-74	141	261	-46	-114	258
7	-1	-81	321	87	-252	-108

Коефіцієнти сплайнів

	Ax	Bx	Cx	Ay	By	Cy
1	10,585	-30,293	59,707	28,098	-66,000	-22,098
2	-20,341	1,463	30,878	-5,488	18,293	-69,805
3	24,780	-59,561	-27,220	4,854	1,829	-49,683
4	1,220	14,780	-72,000	14,073	16,390	-31,463
5	-0,659	18,439	-38,780	-27,146	58,610	43,537
6	7,415	16,463	-3,878	5,512	-22,829	79,317
7	-23,000	38,707	51,293	-19,902	-6,293	50,195

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Таблиця 11

Розрахунок сплайнів

i	t	X	Y
1	**0**	**63**	**103**
	0,2	73,8	96,17
	0,4	82,7	85,4
	0,6	90,2	72,05
	0,8	96,8	57,47
2	**0**	**103**	**43**
	0,2	109	29,73
	0,4	114	17,65
	0,6	118	6,517
	0,8	118	-3,95
3	**0**	**115**	**-14**
. . .	. . .	. . .	. . .
	0,4	21,2	96,8
	0,6	35,7	102,6
	0,8	50	104,9
1	**1**	**63**	**103**

Національний університет
водного господарства
та природокористування

6. ЗАВДАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

6.1. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Розв'язати систему трьох лінійних рівнянь AX=B методом Жордана-Гаусса. Розширена матриця (A I B) утворена *першими трьома рядками* матриці, поданої нижче.

Національний університет водного господарства та природокористування

ВАРІАНТ НОМЕР 1
1.9 7.1 3.0 5.8
6.4 1.0 4.3 - 7.5
2.7 -1.9 6.2 - 4.5
2.7 -1.5 6.2 -4.7
1.8 7.1 3.0 5.8
6.4 1.2 4.1 -7.6

ВАРІАНТ НОМЕР 2
4.4 7.1 -2.0 3.2
4.1 5.5 12.5 -1.9
9.1 4.4 1.9 -5.4
9.1 4.6 1.9 -5.4
4.5 7.1 -2.0 3.2
4.1 5.5 12.2 -1.8

ВАРІАНТ НОМЕР 3
2.5 4.5 9.0 -6.8
1.8 9.6 5.9 2.2
4.1 -2.4 1.6 -0.9
4.1 -2.2 1.6 -0.9
2.6 4.5 9.0 -6.8
1.3 9.4 5.8 2.0

ВАРІАНТ НОМЕР 4
5.5 11.0 3.1 -7.1
11.2 4.1 -5.6 6.7
1.5 -0.9 4.1 3.5
1.2 -0.9 3.9 3.2
5.5 11.2 3.0 -7.1
11.2 4.3 -5.6 6.8

ВАРІАНТ НОМЕР 5
3.3 9.1 -3.3 8.5
5.2 0.4 -2.9 7.5
2.4 -2.3 7.8 -1.2
2.4 -2.5 7.8 -1.3
3.3 9.1 -3.5 8.5
5.2 0.7 -2.9 8.5

ВАРІАНТ НОМЕР 6
1.6 4.0 0.1 -3.2
4.9 1.9 -1.0 2.1
3.3 5.4 10.4 -2.7
3.3 5.4 10.0 -2.4
1.8 4.0 0.1 -3.4
4.5 1.9 -1.2 1.1

ВАРІАНТ НОМЕР 7
3.0 5.7 -0.1 7.3
6.8 -2.3 -3.3 -8.6
2.2 -0.3 4.5 1.8
2.2 -0.3 4.7 1.9
3.2 5.8 -0.1 7.4
6.6 -2.3 -3.0 -8.0

ВАРІАНТ НОМЕР 8
11.1 5.0 5.1 -3.0
1.3 6.5 4.2 -7.6
0.4 3.2 3.9 -3.7
1.3 6.2 4.2 -8.1
0.2 3.2 3.8 -2.7
11.5 5.0 5.2 -4.0

ВАРІАНТ НОМЕР 9
3.3 5.3 9.6 -8.3
2.6 5.7 0.2 -0.5
10.1 5.3 -3.5 -7.0
2.3 5.7 0.4 -7.0
10.1 5.6 -3.6 -7.1
3.3 5.7 9.2 -8.1

ВАРІАНТ НОМЕР 10
7.1 1.1 5.2 2.5
1.4 4.1 -1.6 1.0
0.2 -2.3 4.0 7.2
1.6 4.1 -1.6 0.8
0.2 -2.3 4.4 7.6
7.1 1.4 5.3 3.0

ВАРІАНТ НОМЕР 11
8.7 0.2 5.5 -5.0
2.1 4.0 1.9 7.5
0.9 -2.5 5.6 -4.3
2.1 4.2 1.9 7.8
0.9 -2.2 5.2 -4.0
8.4 0.2 5.3 -4.7

ВАРІАНТ НОМЕР 12
11.5 5.7 5.5 -1.8
4.1 -2.2 8.4 1.4
1.4 5.9 1.6 6.7
4.3 -2.0 8.2 1.4
1.4 5.9 1.8 7.1
11.5 5.3 5.6 -1.6

ВАРІАНТ НОМЕР 13
9.3 -4.6 -3.4 -6.8
5.4 7.0 0.4 4.5
3.2 -4.1 8.8 8.1
5.9 7.0 0.2 5.0
3.2 -4.1 9.3 8.5
9.3 -4.3 -3.7 -7.3

ВАРІАНТ НОМЕР 14
4.1 -2.3 6.8 5.0
4.7 1.5 -5.8 2.7
10.1 -5.9 -4.2 1.0
4.7 13.5 -5.8 3.7
0.6 -5.9 -4.2 1.2
4.1 -2.3 6.0 4.2

ВАРІАНТ НОМЕР 15
7.0 0.6 4.4 -5.1
1.5 4.2 7.1 1.0
3.5 6.3 0.8 -6.3
1.2 4.0 7.1 1.0
3.8 6.3 07 -6.3
7.0 0.6 4.5 -5.1

Національний університет водного господарства та природокористування

Національний університет водного господарства та природокористування

ВАРІАНТ НОМЕР 16
3.4 -3.4 7.8 5.8
1.3 5.7 1.3 -1.8
5.8 -3.4 2.1 8.0
1.4 5.6 1.4 -1.9
5.9 -3.3 2.0 8.1
3.5 -3.3 7.9 5.9

ВАРІАНТ НОМЕР 17
9.8 5.1 3.0 -0.6
5.4 5.6 12.4 -4.8
3.8 10.8 5.3 3.4
5.5 5.5 12.5 -5.0
3.9 1.7 5.2 3.2
9.9 5.0 3.1 -0.7

ВАРІАНТ НОМЕР 18
8.1 -1.6 4.2 2.9
5.9 -4.8 12.3 7.0
1.1 8.0 -5.7 1.7
5.7 -4.8 12.3 7.0
1.1 8.0 -5.6 1.7
8.1 -1.8 4.2 2.8

ВАРІАНТ НОМЕР 19
1.9 -3.1 7.8 -1.2
1.8 5.7 1.9 6.4
7.1 -3.8 -2.2 5.0
1.8 6.0 1.9 6.6
7.6 -3.8 -2.2 5.1
1.9 -3.1 7.5 -1.2

ВАРІАНТ НОМЕР 20
5.5 -4.2 -0.7 -0.6
5.1 8.5 2.7 6.1
1.9 3.7 6.1 -2.6
5.2 8.5 2.9 6.1
1.9 3.7 6.4 -2.3
5.3 -4.2 -0.7 -0.5

ВАРІАНТ НОМЕР 21
7.2 3.7 3.3 8.2
5.2 5.5 11.4 4.85
3.7 9.4 -3.1 -2.5
5.2 5.5 11.7 4.9
3.5 9.4 -3.1 -24
7.2 3.1 3.3 -8.0

ВАРІАНТ НОМЕР 22
0.6 3.9 5.9 -5.4
1.5 4.3 0.5 -7.9
10.7 -3.1 -5.5 -1.3
1.2 4.3 0.5 -7.7
10.7 -3.1 -5.1 -0.9
0.6 3.6 5.9 -5.1

ВАРІАНТ НОМЕР 23
6.5 -0.3 -4.2 3.5
2.9 8.3 -5.4 8.1
2.4 3.4 6.2 -0.2
2.9 8.8 -5.4 8.6
2.0 3.4 6.2 0.2
6.5 -0.3 -4.4 3.7

ВАРІАНТ НОМЕР 24
7.9 -3.1 3.8 -7.1
4.6 2.7 8.4 -6.1
5.1 10.2 2.1 -5.0
4.6 2.7 8.7 -6.3
5.1 10.2 2.6 -5.3
7.4 -3.1 3.8 -6.8

ВАРІАНТ НОМЕР 25
9.5 4.7 2.2 3.0
0.4 5.9 -4.4 6.8
5.4 -1.0 6.8 1.2
0.4 5.9 -4.7 7.1
5.1 -1.0 6.8 2.2
9.5 4.1 2.2 2.5

ВАРІАНТ НОМЕР 26
9.4 3.2 -3.5 -1.9
2.3 -4.7 9.0 -1.5
0.1 5.5 -2.9 4.7
2.8 -4.7 9.0 -1.1
0.1 5.5 -2.6 5.7
9.4 3.5 -3.5 -1.3

ВАРАНТ НОМЕР 27
5.9 -2.6 10.7 -7.3
2.3 5.3 -0.9 1.1
10.3 5.9 4.1 6.7
2.3 5.8 -0.9 -1.3
10.8 5.9 4.1 7.1
5.9 -2.6 9.7 -8.

ВАРІАНТ НОМЕР 28
3.2 -1.8 7.8 2.5
5.4 11.3 -3.5 7.9
8.8 -2.3 -4.4 2.0
5.4 11.3 -3.3 7.8
8.8 -.3 -4.4 2.5
3.4 -1.8 7.8 2.7

ВАРІАНТ НОМЕР 29
3.6 -0.5 -3.0 7.4
4.2 4.6 10.0 4.2
3.6 5.0 -0.6 -8.0
4.2 4.6 10.2 4.4
3.1 5.0 -0.6 -7.0
3.6 -0.8 -3.0 7.6

ВАРІАНТ НОМЕР 30
7.5 3.0 1.7 4.3
3.6 -2.3 6.9 -9.
2.0 7.9 4.7 5.1
3.5 -2.3 6.9 -8.8
2.0 7.9 4.4 4.7
7.5 3.7 1.7 6.3

Національний університет водного господарства та природокористування

Національний університет водного господарства та природокористування

ВАРІАНТ НОМЕР 31
10.0 5.8 -2.1 0.9
5.9 -2.5 9.2 3.2
4.1 9.5 -1.7 -8.0
5.9 -2.2 9.2 3.6
4.8 9.5 -1.7 -9.0
10.0 5.8 -2.6 0.4

ВАРІАНТ НОМЕР 32
1.6 -2.9 7.1 1.7
2.6 8.2-2.5 7.0
11.3 4.6 -4.5 -4.9
2.6 82 -2.7 7.2
11.9 4.6 -4.5 -4.4
2.6 -2.6 7.1 1.3

ВАРІАНТ НОМЕР 33
7.8 3.6 -2.6 -3.6
2.4 -5.6 -3.4 1.5
2.5 3.1 8.1 0.2
2.4 5.6 -31 1.7
2.1 3.1 8.1 0.6
7.8 3.2 -2.6 -3.1

ВАРІАНТ НОМЕР 34
4.9 0.9 -3.8 5.3
1.8 6.3 4.6 -0.1
4.1 0.0 6.8 -8.4
1.6 6.3 4.6 0.1
4.1 0.0 6.4 -7.9
4.9 1.2 -3.8 5.8

ВАРІАНТ НОМЕР 35
5.8 2.1 10.3 1.8
1.0 7.2 4.5 5.5
5.5 -2.0 -1.3 8.4
1.0 7.8 4.5 5.9
5.8 -2.0 -1.3 8.9
5.8 2.1 10.0 1.6

ВАРІАНТ НОМЕР 36
1.0 1.0 3.7 6.6
5.5 11.9 3.3 6.2
3.4 -1.3 1.7 1.0
5.5 11.9 3.7 6.4
3.4 -1.3 1 0.0
1.5 1.0 37 5.6

ВАРІАНТ НОМЕР 37
3.5 -2.8 -0.2 3.7
2.9 2.2 5.8 1.1
4.2 9.0 -3.9 4.1
2.9 2.2 6.8 -0.1
4.6 9.0 -3.9 4.
3.5 -2.4 -0.2 3.4

ВАРІАНТ НОМЕР 38
7.9 -2.9 -3.1 -7.7
6.4 8.9 2.7 -1.6
1.1 -2.3 5.4 5.7
6.0 8.9 2.7 -1.3
1.1 -2.3 5.4 5.7
7.9 -2.6 -3.1 -7.1

ВАРІАНТ НОМЕР 39
1.5 3.8 5.9 -1.0
2.0 6.5 -1.8 -6.3
11.2 4.2 -4.8 6.5
2.0 8.3 -1.8 -6.6
11.7 4.2 -4.8 7.0
1.5 3.8 5.3 -1.5

ВАРІАНТ НОМЕР 40
3.4 4.4 10.5 3.2
4.1 10.3 -3.5 7.6
8.1 -3.0 -2.5 1.4
4.1 10.3 -3.6 7.8
8.3 -3.0 -2.5 -1.2
3.4 4.0 10.5 2.9

ВАРІАНТ НОМЕР 41
4.6 0.2 5.4 -8.2
4.7 8.8 1.5 -5.1
7.3 -2.9 4.8 -4.0
4.7 8.8 1.8 -5.4
7.8 -2.9 4.8 -4.3
4.6 0.5 5.4 -8.5

ВАРІАНТ НОМЕР 42
9.3 -2.9 4.1 -6.4
1.5 -1.4 4.8 -0.8
2.5 6.7 -1.6 -2.2
1.8 -1.4 4.8 -0.6
2.5 6.7 -1.8 -2.0
9.3 -2.5 4.1 -6.2

ВАРІАНТ НОМЕР 43
4.9 -3.3 -1.4 -4.6
1.3 3.1 6.0 -7.7
1.9 4.2 1.6 3.2
1.3 3.6 6.0 -8.0
1.4 4.2 1.6 2.2
4.9 -3.3 -1.5 -4.8

ВАРІАНТ НОМЕР 44
9.9 5.1 -2.5 5.8
3.9 0.0 5.4 -7.9
5.8 8.3 -1.9 3.4
3.9 0.0 5.2 -7.8
5.8 8.3 -1.7 3.7
8.9 5.1 -2.5 5.3

ВАРІАНТ НОМЕР 45
7.3 -4.7 -1.3 -5.9
4.2 2.7 8.1 -2.5
1.6 6.5 2.9 6.5
4.2 2.7 8.4 -2.8
1.3 6.5 2.9 6.0
7.3 -4.4 -1.3 -5.3

Національний університет водного господарства та природокористування

Національний університет
водного господарства
та природокористування

ВАРІАНТ НОМЕР 46

10.1	5.9	-3.1	8.5
0.6	0.6	2.2	-7.0
0.1	5.8	-4.5	-3.3
0.2	0.6	2.2	-7.9
0.1	5.8	-4.3	-2.9
10.1	5.3	-3.1	8.1

ВАРІАНТ НОМЕР 47

10.9	-3.3	5.4	3.1
25	1.4	6.2	-7.1
2.3	6.3	-0.9	-2.7
2.5	1.7	6.2	-7.5
2.5	6.3	-0.9	-2.9
10.9	-3.3	5.0	2.7

ВАРІАНТ НОМЕР 48

2.9	-0.2	0.3	-5.9
1.4	-2.4	5.2	4.0
1.8	4.2	-1.3	4.6
1.4	-2.4	5.7	4.4
1.8	4.2	-1.6	5.1
2.4	-0.2	0.3	-5.1

ВАРІАНТ НОМЕР 49

8.9	-2.7	-4.7	-7.4
3.7	4.5	-0.3	5.3
4.0	1.8	6.5	-1.0
3.7	4.5	-0.7	-6.3
4.2	1.8	6.5	-1.2
8.9	-2.5	-4.7	-7.3

ВАРІАНТ НОМЕР 50

2.7	0.1	1.9	1.0
4.4	10.0	-5.3	-3.6
5.9	1.8	10.1	7.7
4.6	10.0	-5.3	-3.7
5.9	1.8	10.3	7.9
2.7	0.4	1.9	1.2

6.2. Переозначені системи лінійних рівнянь

Розв’язати систему шести лінійних рівнянь з трьома невідомими AX=B, розширена матриця якої подана вище, методом найменших квадратів.

6.3. Апроксимація даних

Побудувати апроксимаційний поліном y=ax+b за методом найменших квадратів. Обчислити коефіцієнт кореляції, середнє вибіркове відхилення, вказати силу зв'язку величин. Побудувати графік.

ВАРІАНТ НОМЕР 1

12.0	31.0
15.0	39.0
18.0	51.0
20.0	55.0
21.0	57.0
28.0	75.0
31.0	86.0
36.0	92.0

ВАРІАНТ НОМЕР 3

6.0	24.0
9.0	43.0
12.0	60.0
15.0	69.0
17.0	78.0
37.0	177.0
41.0	199.0
43.0	208.0

ВАРІАНТ НОМЕР 5

11.0	13.0
14.0	14.0
16.0	13.0
17.0	20.0
21.0	24.0
38.0	38.0
41.0	45.0
47.0	47.0

ВАРІАНТ НОМЕР 2

7.0	-13.0
11.0	-24.0
17.0	-31.0
20.0	-42.0
22.0	-42.0
29.0	-54.0
45.0	-87.0
48.0	-87.0

ВАРІАНТ НОМЕР 4

7.0	27.0
11.0	37.0
15.0	55.0
17.0	62.0
32.0	118.0
41.0	156.0
44.0	162.0
46.0	170.0

ВАРІАНТ НОМЕР 6

10.0	-35.0
14.0	-43.0
18.0	-53.0
20.0	-59.0
26.0	-80.0
29.0	-86.0
32.0	-98.0
42.0	-127.0

Національний університет водного господарства та природокористування

ВАРІАНТ НОМЕР 7

5.0	24.0
23.0	116.0
25.0	132.0
32.0	165.0
38.0	199.0
42.0	218.0
46.0	241.0
47.0	247.0

ВАРІАНТ НОМЕР 8

5.0	32.0
6.0	31.0
8.0	48.0
11.0	64.0
12.0	70.0
25.0	145.0
26.0	156.0
43.0	253.0

ВАРІАНТ НОМЕР 9

5.0	16.0
22.0	54.0
23.0	55.0
24.0	57.0
29.0	64.0
34.0	77.0
39.0	93.0
48.0	110.0

ВАРІАНТ НОМЕР 10

13.0	14.0
14.0	12.0
20.0	19.0
24.0	230
27.0	25.0
28.0	27.0
36.0	28.0
45.0	40.0

ВАРІАНТ НОМЕР 11

14.0	59.0
16.0	63.0
26.0	105.0
27.0	1112.0
31.0	127.0
33.0	138.0
35.0	146.0
40.0	167.0

ВАРІАНТ НОМЕР 12

6.0	4.0
19.0	11.0
20.0	8.0
25.0	9.0
27.0	15.0
30.0	12.0
38.0	15.0
44.0	16.0

ВАРІАНТ НОМЕР 13

5.0	-10.0
12.0	-22.0
19.0	-31.0
27.0	-45.0
38.0	-64.0
41.0	-69.0
42.0	-74.0
48.0	-84.0

ВАРІАНТ НОМЕР 14

10.0	-5.0
12.0	0.0
19.0	-2.0
27.0	3.0
31.0	2.0
33.0	5.0
35.0	5.0
41.0	11.0

ВАРІАНТ НОМЕР 15

8.0	-10.0
9.0	-16.0
12.0	-20.0
18.0	-30.0
21.0	-32.0
26.0	-40.0
27.0	-45.0
32.0	-54.0

ВАРІАНТ НОМЕР 16

16.0	-19.0
19.0	-22.0
25.0	-27.0
28.0	-30.0
39.0	-39.0
42.0	-39.0
46.0	-50.0
47.0	-50.0

ВАРІАНТ НОМЕР 17

12.0	74.0
14.0	88.0
16.0	101.0
18.0	113.0
20.0	118.0
28.0	173.0
42.0	254.0
48.0	291.0

ВАРІАНТ НОМЕР 18

5.0	-16.0
21.0	-50.0
25.0	-59.0
27.0	-62.0
28.0	-62.0
30.0	-71.0
42.0	-96.0
47.0	-103.0

Національний університет водного господарства та природокористування

Національний університет
водного господарства
та природокористування

ВАРІАНТ НОМЕР 19

13.0	6.0
16.0	5.0
17.0	9.0
21.0	11.0
26.0	9.0
28.0	10.0
32.0	13.0
39.0	10.0

ВАРІАНТ НОМЕР 20

9.0	30.0
11.0	37.0
12.0	39.0
13.0	46.0
27.0	88.0
28.0	94.0
34.0	112.0
35.0	115.0

ВАРІАНТ НОМЕР 21

5.0	0.0
11.0	5.0
20.0	15.0
27.0	26.0
30.0	26.0
32.0	29.0
37.0	38.0
49.0	47.0

ВАРІАНТ НОМЕР 22

7.0	45.0
16.0	106.0
20.0	134.0
25.0	168.0
33.0	218.0
36.0	235.0
38.0	252.0
43.0	286.0

ВАРІАНТ НОМЕР 23

9.0	48.0
10.0	46.0
12.0	60.0
14.0	68.0
15.0	73.0
19.0	97.0
46.0	245.0
49.0	254.0

ВАРІАНТ НОМЕР 24

10.0	14.0
24.0	33.0
25.0	36.0
30.0	38.0
34.0	41.0
37.0	46.0
44.0	58.0
48.0	63.0

ВАРІАНТ НОМЕР 25

6.0	35.0
27.0	152.0
31.0	177.0
32.0	180.0.
36.0	203.0
37.0	208.0
38.0	220.0
41.0	236.0

ВАРІАНТ НОМЕР 26

7.0	27.0
11.0	41.0
29.0	108.0
31.0	112.0
34.0	123.0
36.0	137.0
42.0	154.0
43.0	161.0

ВАРІАНТ НОМЕР 27

8.0	49.0
12.0	67.0
25.0	141.0
30.0	174.0
44.0	252.0
47.0	268.0
480	276.0
49.0	282.0

ВАРІАНТ НОМЕР 28

12.0	17.0
13.0	15.0
20.0	26.0
25.0	33.0
26.0	39.0
32.0	48.0
43.0	62.0
47.0	65.0

ВАРІАНТ НОМЕР 29

23.0	-46.0
29.0	-52.0
37.0	-74.0
41.0	-82.0
43.0	-84.0
46.0	-91.0
47.0	-92.0
48.0	-96.0

ВАРІАНТ НОМЕР 30

15.0	-20.0
22.0	-26.0
24.0	-25.0
32.0	-33.0
33.0	-31.0
36.0	-32.0
45.0	-43.0
46.0	-47.0

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Національний університет
водного господарства
та природокористування

ВАРІАНТ НОМЕР 31

5.0	15.0
15.0	53.0
21.0	69.0
22.0	78.0
36.0	120.0
39.0	137.0
45.0	155.0
46.0	157.0

ВАРІАНТ НОМЕР 32

5.0	11.0
18.0	28.0
19.0	32.0
25.0	40.0
27.0	45.0
28.0	47.0
34.0	50.0
40.0	64.0

ВАРІАНТ НОМЕР 33

9.0	-12.0
10.0	-14.0
20.0	-29.0
23.0	-32.0
33.0	-43.0
34.0	-43.0
37.0	-45.0
47.0	-55.0

ВАРІАНТ НОМЕР 34

6.0	21.0
10.0	36.0
11.0	48.0
17.0	73.0
19.0	78.0
27.0	113.0
37.0	157.0
42.0	180.0

ВАРІАНТ НОМЕР 35

15.0	6.0
21.0	9.0
28.0	9.0
31.0	12.0
35.0	16.0
37.0	12.0
38.0	17.0
41.0	19.0

ВАРІАНТ НОМЕР 36

5.0	-8.0
9.0	-18.0
17.0	-28.0
20.0	-34.0
30.0	-58.0
40.0	-78.0
45.0	-91.0
47.0	-93.0

ВАРІАНТ НОМЕР 37

8.0	52.0
17.0	105.0
25.0	159.0
26.0	165.0
31.0	194.0
33.0	204.0
34.0	211.0
41.0	257.0

ВАРІАНТ НОМЕР 38

5.0	21.0
8.0	33.0
20.0	90.0
21.0	92.0
32.0	144.0
37.0	162.0
39.0	172.0
45.0	198.0

ВАРІАНТ НОМЕР 39

13.0	66.0
19.0	98.0
20.0	103.0
26.0	136.0
31.0	158.0
35.0	183.0
39.0	202.0
45.0	234.0

ВАРІАНТ НОМЕР 40

10.0	27.0
16.0	43.0
18.0	51.0
30.0	92.0
31.0	94.0
40.0	123.0
43.0	134.0
46.0	144.0

ВАРІАНТ НОМЕР 41

10.0	52.0
14.0	74.0
24.0	120.0
26.0	128.0
31.0	159.0
38.0	188.0
43.0	219.0
47.0	237.0

ВАРІАНТ НОМЕР 42

6.0	14.0
10.0	14.0
14.0	21.0
15.0	19.0
17.0	27.0
23.0	28.0
38.0	54.0
40.0	54.0

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Національний університет
водного господарства
та природокористування

ВАРІАНТ НОМЕР 43

11.0	68.0
14.0	86.0
17.0	100.
18.0	112.0
24.0	141.0
28.0	166.0
29.0	177.0
36.0	218.0

ВАРІАНТ НОМЕР 44

7.0	7.0
10.0	120
13.0	19.0
18.0	31.0
20.0	29.0
34.0	55.0
37.0	60.0
46.0	79.0

ВАРІАНТ НОМЕР 45

23.0	136.0
24.0	141.0
33.0	198.0
34.0	207.0
36.0	218.0
41.0	252.0
42.0	253.0
44.0	266.0

ВАРІАНТ НОМЕР 46

7.0	-9.0
9.0	-4.0
13.0	-9.0
14.0	-10.0
16.0	-16.0
24.0	-24.0
25.0	-21.0
42.0	-42.0

ВАРІАНТ НОМЕР 47

9.0	45.0
13.0	65.0
26.0	133.0
32.0	162.0
36.0	180.0
43.0	212.0
44.0	216.0
49.0	245.0

ВАРІАНТ НОМЕР 48

7.0	3.0
9.0	7.0
11.0	3.0
14.0	7.0
28.0	16.0
32.0	20.0
40.0	31.0
44.0	27.0

ВАРІАНТ НОМЕР 49

7.0	17.0
23.0	68.0
31.0	84.0
32.0	92.0
34.0	98.0
37.0	109.0
39.0	114.0
46.0	129.0

ВАРІАНТ НОМЕР 50

17.0	48.0
27.0	85.0
30.0	92.0
32.0	95.0
34.0	102.0
42.0	129.0
43.0	130.0
45.0	131.0

Національний університет
водного господарства
та природокористування

6.4. Інтерполяція даних

Виконати інтерполяцію табличних даних за допомогою кубічних сплайнів на відрізку [a, b]. Побудувати графік використовуючи значення функції у вузлових точках, а також обчислені значення функції у проміжних точках.

$$x_i + \frac{h}{5}, \quad x_i + 2*\frac{h}{5}, \quad x_i + 3*\frac{h}{5}, \quad x_i + 4*\frac{h}{5},$$

$$\left(h = \frac{x_{i+1} - x_i}{5} \right)$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Варіант 1

0.00	66
0.45	44
0.90	119
1.35	63
1.80	-80

Варіант 2

0.00	50
0.50	41
1.00	44
1.50	-20
2.00	14

Варіант 3

0.00	3
0.50	-58
1.00	31
1.50	19
2.00	-53

Варіант 4

1.50	33
1.80	24
2.10	109
2.40	47
2.70	4

Варіант 5

1.50	80
1.90	156
2.30	70
2.70	165
3.10	92

Варіант 6

0.50	-119
1.00	156
1.50	38
2.00	94
2.50	123

Варіант 7

1.50	27
1.95	-46
2.40	71
2.85	-18
3.30	41

Варіант 8

0.00	36
0.25	-3
0.50	85
0.75	16
1.00	-49

Варіант 9

0.50	43
0.75	-10
1.00	49
1.25	-26
1.50	68

Варіант 10

0.50	32
0.95	110
1.40	35
1.85	-34
2.30	-19

Варіант 11

1.00	2
1.50	96
2.00	117
2.50	181
3.00	186

Варіант 12

0.00	69
0.45	-8
0.90	59
1.35	116
1.80	105

Варіант 13

1.50	49
1.80	88
2.10	60
2.40	152
2.70	219

Варіант 14

1.00	101
1.40	13
1.80	78
2.20	20
2.60	32

Варіант 15

1.50	21
1.85	118
2.20	89
2.55	72
2.90	65

Варіант 16

1.00	71
1.50	24
2.00	75
2.50	26
3.00	14

Варіант 17

0.5	34
0.80	-35
1.10	27
1.40	-12
1.70	60

Варіант 18

1.50	36
1.90	39
2.30	58
2.70	86
3.10	184

Варіант 19

0.50	25
1.00	80
1.50	36
2.00	95
2.50	147

Варіант 20

0.50	48
0.80	20
1.10	82
1.40	83
1.70	198

Варіант 21

1.50	77
1.80	160
2.10	101
2.40	76
2.70	-35

Варіант 22

1.00	46
1.35	-8
1.70	27
2.05	11
2.40	-83

Варіант 23

0.50	84
0.75	141
1.00	62
1.25	90
1.50	141

Варіант 24

1.50	114
1.85	80
2.20	51
2.55	74
2.90	240

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Національний університет водного господарства та природокористування

Варіант 25		Варіант 31		Варіант 37		Варіант 43	
1.50	28	0.50	87	1.00	105	0.00	65
1.80	7	1.00	181	1.30	138	0.45	16
2.10	24	1.50	66	1.60	70	0.90	116
2.40	67	2.00	4	1.90	63	1.35	162
2.70	84	2.50	63	2.10	-63	1.80	118

Варіант 26		Варіант 32		Варіант 38		Варіант 44	
1.00	45	0.50	96	1.00	89	0.00	54
1.30	107	0.80	125	1.30	50	0.45	78
1.60	116	1.10	32	1.60	117	0.90	44
1.90	172	1.40	-29	1.90	69	1.35	28
2.20	170	1.70	-25	2.20	-78	1.80	-2

Варіант 27		Варіант 33		Варіант 39		Варіант 45	
1.00	114	1.00	116	1.00	25	1.50	24
1.40	118	1.40	206	1.30	124	2.00	-52
1.80	40	1.80	110	1.60	93	2.50	29
2.20	18	2.20	206	1.90	111	3.00	55
2.60	-70	2.60	98	2.20	166	3.50	150

Варіант 28		Варіант 34		Варіант 40		Варіант 46	
1.50	91	0.50	85	1.50	48	1.00	45
1.95	71	0.90	80	1.90	122	1.40	20
2.40	108	1.30	37	2.30	48	1.90	84
2.85	60	1.70	80	2.70	-6	2.35	65
3.30	12	2.10	90	3.10	46	2.80	26

Варіант 29		Варіант 35		Варіант 41		Варіант 47	
1.50	33	0.50	32	1.00	71	1.00	46
1.80	24	0.95	110	1.50	24	1.35	-8
2.10	109	1.40	35	2.00	75	1.70	27
2.40	47	1.85	-34	2.50	26	2.05	11
2.70	4	2.30	-19	3.00	14	2.40	-83

Варіант 30		Варіант 36		Варіант 42		Варіант 48	
1.50	90	1.00	65	0.00	113	1.50	94
2.00	-3	1.30	52	0.45	84	1.75	92
2.50	74	1.60	96	0.90	21	2.00	114
3.00	85	1.90	86	1.35	80	2.25	153
3.50	248	2.20	-27	1.80	176	2.50	101

Національний університет водного господарства та природокористування

Національний університет водного господарства та природокористування

Варіант 49		Варіант 50	
0.50	97	0.00	87
1.00	2	0.35	79
1.50	37	0.70	59
2.00	13	1.05	93
2.50	19	1.40	102

6.5. Використовуючи результати інтерполяції виконаної в завданні 5.4. обчислити S_n криволінійної трапеції методами трапецій та Сімпсона, взявши:

$$h = \frac{x_{i+1} - x_i}{5}$$

тут x_i, - таблично задачі значення (завдання 5.4). Обчислити площу S_{2n}, при подвоєній кількості кроків, похибку Δ для кожного з методів, а також уточнити значення площі S_t.

Національний університет водного господарства та природокористування

6.6. Сім точок P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7 задані їх координатами (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3), (x_4,y_4), (x_5,y_5), (x_6,y_6), (x_7,y_7) утворюють замкнутий контур. Необхідно:

1. Виконати інтерполювання замкнутого контура параметричними сплайнами третього степеня

$$x = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x; \qquad i = 1,2,...,7.$$

$$y = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y.$$

2. Побудувати таблицю координат x,y для значень параметра $t = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ на кожному з інтервалів. Побудувати графік в MS Excel (Мастер диаграмм, Точечная).

ВАРІАНТ НОМЕР 1		ВАРІАНТ НОМЕР 2		ВАРІАНТ НОМЕР 3	
63	103	118	130	125	100
103	43	156	73	152	47
115	-14	174	12	159	-6
53	-57	121	-43	122	-37
-3	-58	52	-23	61	-42
-24	17	12	29	39	15
-4	79	42	93	56	78

Національний університет
водного господарства
та природокористування

ВАРІАНТ НОМЕР 4

40	86
73	46
90	-19
47	-63
-28	-69
-63	3
-33	61

ВАРІАНТ НОМЕР 5

98	162
129	121
127	59
87	24
43	20
7	80
9	140

ВАРІАНТ НОМЕР 6

214	99
258	63
242	8
217	-48
151	-39
118	21
150	87

ВАРІАНТ НОМЕР 7

183	160
215	113
217	60
186	18
119	3
90	76
118	149

ВАРІАНТ НОМЕР 8

26	66
70	30
78	-22
22	-82
-30	-86
-72	-12
-51	58

ВАРІАНТ НОМЕР 9

231	140
269	93
263	34
236	-19
163	4
137	55
144	118

ВАРІАНТ НОМЕР 10

158	144
201	98
190	33
152	-10
109	1
74	49
87	114

ВАРІАНТ НОМЕР 11

188	112
217	68
227	28
174	-15
120	-26
97	37
104	91

ВАРІАНТ НОМЕР 12

174	113
215	73
221	23
178	-24
118	-28
79	29
88	92

ВАРІАНТ НОМЕР 13

69	165
110	115
121	50
68	1
9	13
-23	65
-22	130

ВАРІАНТ НОМЕР 14

119	70
172	33
184	-31
118	-75
67	-70
46	-14
50	49

ВАРІАНТ НОМЕР 15

36	90
76	39
78	-10
34	-67
-34	-53
-54	6
-43	72

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Національний університет
водного господарства
та природокористування

ВАРІАНТ НОМЕР 16

169	148
213	111
213	52
175	2
107	0
61	80
82	142

ВАРІАНТ НОМЕР 17

168	95
206	52
207	1
177	-57
113	-43
87	10
90	80

ВАРІАНТ НОМЕР 18

184	75
218	46
225	-26
178	-67
114	-66
77	1
109	50

ВАРІАНТ НОМЕР 19

81	142
113	94
135	33
80	-22
16	-20
-14	42
-2	105

ВАРІАНТ НОМЕР 20

209	122
263	84
257	36
210	-31
147	-26
117	49
140	104

ВАРІАНТ НОМЕР 21

84	74
134	34
136	-30
85	-72
22	-60
-18	-8
13	53

ВАРІАНТ НОМЕР 22

68	97
133	30
113	-26
83	-64
26	-75
-5	0
-4	66

ВАРІАНТ НОМЕР 23

174	180
218	128
220	66
192	2
115	6
78	80
106	142

ВАРІАНТ НОМЕР 24

164	120
207	91
212	17
162	-36
102	-20
67	42
79	112

ВАРІАНТ НОМЕР 25

57	112
91	56
108	10
59	-33
-2	-42
-30	32
-17	90

ВАРІАНТ НОМЕР 26

117	113
152	66
155	18
113	-35
42	-20
2	35
37	95

ВАРІАНТ НОМЕР 27

104	112
170	80
159	19
106	-40
47	-28
9	42
39	102

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Національний університет
водного господарства
та природокористування

ВАРІАНТ НОМЕР 28

52	102
93	68
87	-1
47	-50
-20	-34
-43	27
-28	76

ВАРІАНТ НОМЕР 29

46	139
79	104
97	41
31	-16
-25	6
-57	66
-47	127

ВАРІАНТ НОМЕР 30

99	104
160	70
166	12
103	-35
46	-39
13	36
27	98

ВАРІАНТ НОМЕР 31

58	90
91	55
106	1
47	-63
-15	-64
-37	19
-15	61

ВАРІАНТ НОМЕР 32

143	109
187	58
185	-3
140	-55
85	-63
41	11
63	70

ВАРІАНТ НОМЕР 33

80	126
121	77
135	24
92	-28
24	-32
-9	40
-2	97

ВАРІАНТ НОМЕР 34

163	93
221	55
210	-17
175	-46
111	-63
80	17
85	63

ВАРІАНТ НОМЕР 35

73	107
108	64
111	11
57	-50
9	-49
-17	19
-4	85

ВАРІАНТ НОМЕР 36

150	136
197	82
203	14
154	-17
88	-16
72	50
92	107

ВАРІАНТ НОМЕР 37

43	126
93	63
98	21
53	-22
-19	-27
-47	40
-26	88

ВАРІАНТ НОМЕР 38

223	184
268	127
246	78
221	35
150	28
115	97
150	153

ВАРІАНТ НОМЕР 39

184	162
235	126
237	51
169	18
121	28
86	75
107	148

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Національний університет
водного господарства
та природокористування

ВАРІАНТ НОМЕР 40

102	152
147	119
136	50
102	0
38	27
15	79
39	143

ВАРІАНТ НОМЕР 41

166	122
214	71
219	8
174	-34
119	-22
90	30
89	88

ВАРІАНТ НОМЕР 42

125	108
165	82
189	18
133	-43
62	-35
25	38
46	99

ВАРІАНТ НОМЕР 43

119	113
144	84
147	16
104	-23
43	-21
22	38
46	101

ВАРІАНТ НОМЕР 44

109	145
155	108
156	41
102	-2
38	3
12	77
32	137

ВАРІАНТ НОМЕР 45

130	151
169	117
183	45
130	17
87	14
43	67
69	136

ВАРІАНТ НОМЕР 46

197	91
240	53
229	-6
186	-47
128	-55
89	12
131	76

ВАРІАНТ НОМЕР 47

41	124
86	89
100	28
32	-27
-26	-21
-62	49
-35	109

ВАРІАНТ НОМЕР 48

188	89
233	37
241	-5
190	-45
132	-56
89	6
121	71

ВАРІАНТ НОМЕР 49

205	81
266	47
266	-16
213	-57
151	-72
116	-10
140	60

ВАРІАНТ НОМЕР 50

160	100
198	44
189	-14
148	-59
99	-65
68	2
76	70

Національний університет
водного господарства
та природокористування