



Національний університет  
водного господарства  
та природокористування

**Міністерство освіти і науки України**

**Національний університет водного господарства  
та природокористування**

**Кафедра теоретичної механіки,  
інженерної графіки та машинознавства**

**02-05-52**

**Методичні вказівки та варіанти завдань  
до виконання індивідуальних графічних робіт з нарисної  
геометрії (частина 1) для студентів спеціальності  
145 «Гідроенергетика» денної форми навчання**

Рекомендовано науково-методичною  
комісією зі спеціальності  
145 «Гідроенергетика»  
протокол №3 від 29.12.2016р.

**Рівне - 2017**



Національний університет

Методичні вказівки та варіанти завдань до виконання індивідуальних графічних робіт з нарисної геометрії (частина 1) для студентів спеціальності 145 «Гідроенергетика» денної форми навчання / Сасюк З.К. - Рівне: НУВГП, 2017.- 29с.

**Упорядник:** Сасюк З.К., кандидат с.-г. наук, доцент

**Відповідальний за випуск:** М.М.Козяр, доктор педагогічних наук, професор, завідувач теоретичної механіки, інженерної графіки та машинознавства НУВГП



Національний університет  
водного господарства  
та природокористування

## ЗМІСТ

1.	Вступ	3
2.	Точка	4
3.	Пряма	9
4.	Перетин площин	16
5.	Перпендикулярність прямої і площини	22
6.	Таблиця 1. Вихідні дані до графічних робіт «Точка», «Пряма», «Перетин площин», «Визначення відстані від точки до площини»	29

© Сасюк З.К., 2017

© НУВГП, 2017



Навчальний процес з дисципліни «Нарисна геометрія і інженерна графіка» передбачає такі форми навчання: лекції, самостійну роботу студента, практичні заняття з програмованим контролем знань з усіх тем дисципліни, виконання графічних робіт, консультацій та залік.

**Лекції.** На лекціях студенти знайомляться з теоретичними основами дисципліни, методами геометричних побудов, способами вирішення геометричних задач на площині за допомогою креслярських інструментів, а також складають конспект лекцій.

**Самостійна робота.** Після лекцій проробляється теоретичний матеріал (методи проєціювання, метод Монжа, проєціювання точки, прямої, площини) за допомогою конспекту і навчальних посібників і підручників.

**Практичні заняття.** На цих заняттях студенти показують викладачу виконані домашні завдання (графічні роботи, відповіді на питання) з даної теми, уточнюють і виправляють їх. З цієї теми проводиться контроль і студенти під керівництвом викладача виконують аудиторні завдання.

**Графічні роботи** виконують за індивідуальним варіантом згідно порядкового номеру в журналі викладача із застосуванням креслярських інструментів на аркушах креслярського паперу формату А4 або А3.

Методичні вказівки та варіанти завдань до виконання індивідуальних графічних робіт з нарисної геометрії (частина 1) призначені для студентів спеціальності 145 «Гідроенергетика». Виконання графічних робіт за темами «Точка», «Пряма», «Перетин площин», «Перпендикулярність прямої та площини» сприяє закріпленню та поглибленню знань з нарисної геометрії, розвитку просторового мислення, набуттю навиків конструювання.

Студенти, які засвоїли курс нарисної геометрії, отримали відомості і навички по оформленню креслеників, мають можливість успішно застосовувати набуті знання при вивченні «Інже-



«...ерної графіки», при виконанні курсових та дипломних проєктів, які включають графічну частину.

## Тема: ТОЧКА

**Мета роботи:** вивчити основні властивості прямокутного проєціювання геометричних елементів (точок) на дві і три взаємноперпендикулярні площини; розв'язувати позиційні та метричні задачі.

### Завдання:

**Задача.** Побудувати за даними у таблиці 1 координатами точок А, В, С, D їх комплексний кресленик у трьох проєкціях та наочне зображення у системі трьох площин проєкцій на аркуші креслярського паперу формату А3. Масштаб виконання 1:1. Зразок оформлення наведений на рис. 9.

### Розв'язування задачі:

#### Побудова комплексного кресленика точок

1) Виконання комплексного кресленика точок А (20; 40; 50), В (10; 10; 20), С (55; 30; 40), D (70; 50; 0) розпочинаємо із побудови взаємноперпендикулярних координатних осей ОХ, ОУ, ОZ та сталої креслення – прямої  $k$  (рис. 1).

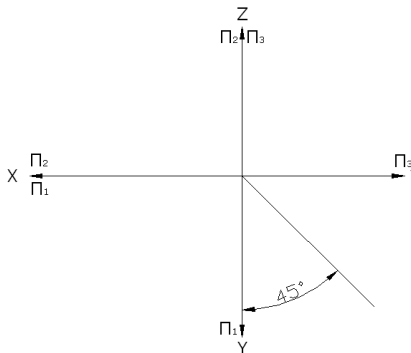


Рис. 1

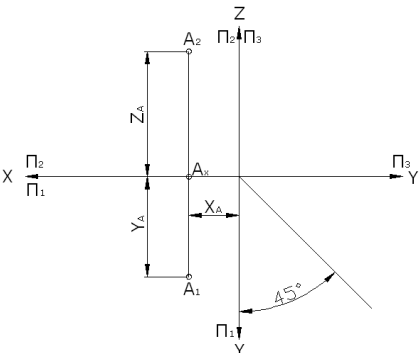


Рис. 2

2) Спочатку на осі ОХ відміряємо координату  $X=20$  точки А і відмічаємо точку  $A_x$ . Через т.  $A_x$  проводимо перпендикулярно



до осі  $OX$  тонку вертикальну лінію проекційного зв'язку (рис. 2).

3) Координату  $Y=40$  точки  $A$  відміряємо на лінії проекційного зв'язку вниз від т.  $A_x$  і відмічаємо т.  $A_1$  – горизонтальну проекцію точки  $A$  на площині  $\Pi_1$  (рис. 2).

4) Координату  $Z=50$  точки  $A$  відміряємо на лінії проекційного зв'язку вгору від т.  $A_x$  і відмічаємо т.  $A_2$  – фронтальну проекцію точки  $A$  на площині  $\Pi_2$  (рис. 2).

5) Профільну проекцію т.  $A_3$  (рис. 3) отримуємо на площині  $\Pi_3$  на перетині ліній проекційного зв'язку, які проводимо: горизонтальну лінію - через т.  $A_2$  перпендикулярно до осі  $OZ$  (на осі  $OZ$  відмічаємо точку  $A_z$ ), горизонтально-вертикальну - через т.  $A_1$  перпендикулярно до осі  $OY$  (на осі  $OY$  відмічаємо точку  $A_y$ ) за допомогою сталої креслення – прямої  $k$  (рис. 4).

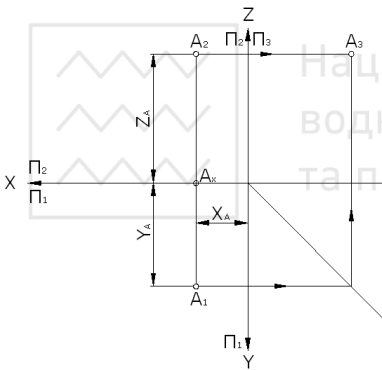


Рис. 3

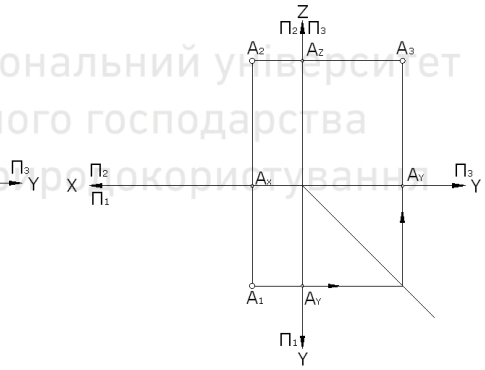


Рис. 4

б) комплексний кресленик точок  $B, C, D$  виконуємо аналогічно (рис. 5).

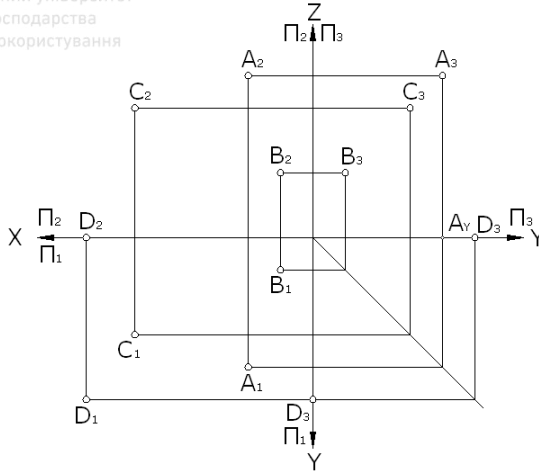


Рис. 5

### Побудова наочного зображення точок в системі трьох площин проєкцій

1) Виконання наочного зображення точок у системі трьох площин  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$  розпочинаємо із побудови координатних осей  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ . Осі  $OX$  та  $OZ$  є взаємноперпендикулярними при наочному зображенні, а вісь  $OY$  будемо під кутом 45 градусів до  $OX$  і  $OZ$  (рис. 6).

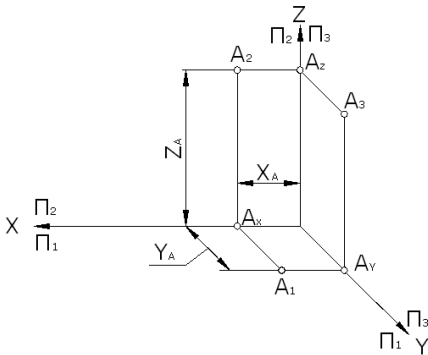


Рис. 6

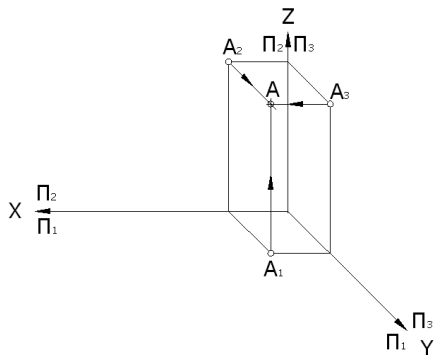


Рис. 7

2) Спочатку на осі  $OX$  відміряємо координату  $X=20$  точки  $A$  і відмічаємо точку  $A_x$ . Через т.  $A_x$  проводимо паралельно до осі  $OY$  тонку лінію проєкційного зв'язку (рис. 6).

3) На отриманій лінії проєкційного зв'язку відміряємо координату  $Y=40$  точки  $A$  і відмічаємо т.  $A_1$  – горизонтальну проєкцію точки  $A$  на площині  $\Pi_1$ . Пам'ятаємо, що вісь  $OY$  має кут  $45$  градусів і відстані на осі  $OY$  візуально будуть меншими у два рази. Отже, відміряти будемо  $20\text{мм}$  замість  $40\text{мм}$  (рис. 6).

4) Координату  $Z=50$  точки  $A$  відміряємо на лінії проєкційного зв'язку вгору від т.  $A_x$  і відмічаємо т.  $A_2$  – фронтальну проєкцію точки  $A$  на площині  $\Pi_2$  (рис. 6).

5) Профільну проєкцію т.  $A_3$  отримуємо на площині  $\Pi_3$  на перетині ліній проєкційного зв'язку, які проводимо точку  $A_2$  та точку  $A_y$  паралельно до координатних осей  $OX$  і  $OZ$  відповідно (рис. 6).

6) Наочне зображення точки  $A$  отримуємо на перетині проєціюючих променів, які проводимо із кожної проєкції  $A_1, A_2, A_3$  паралельно до координатних осей  $OX, OY, OZ$  (рис. 7).

7) Наочне зображення точок  $B, C, D$  виконуємо аналогічно (рис. 8).

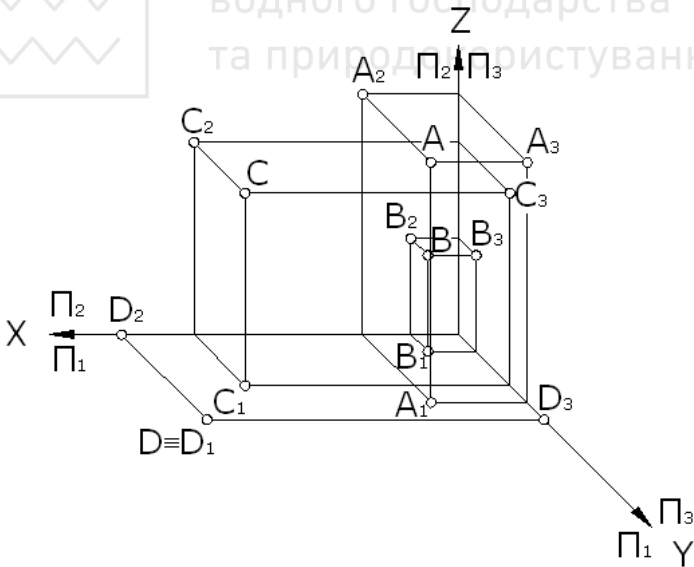


Рис. 8



Національний університет  
водного господарства  
та природокористування

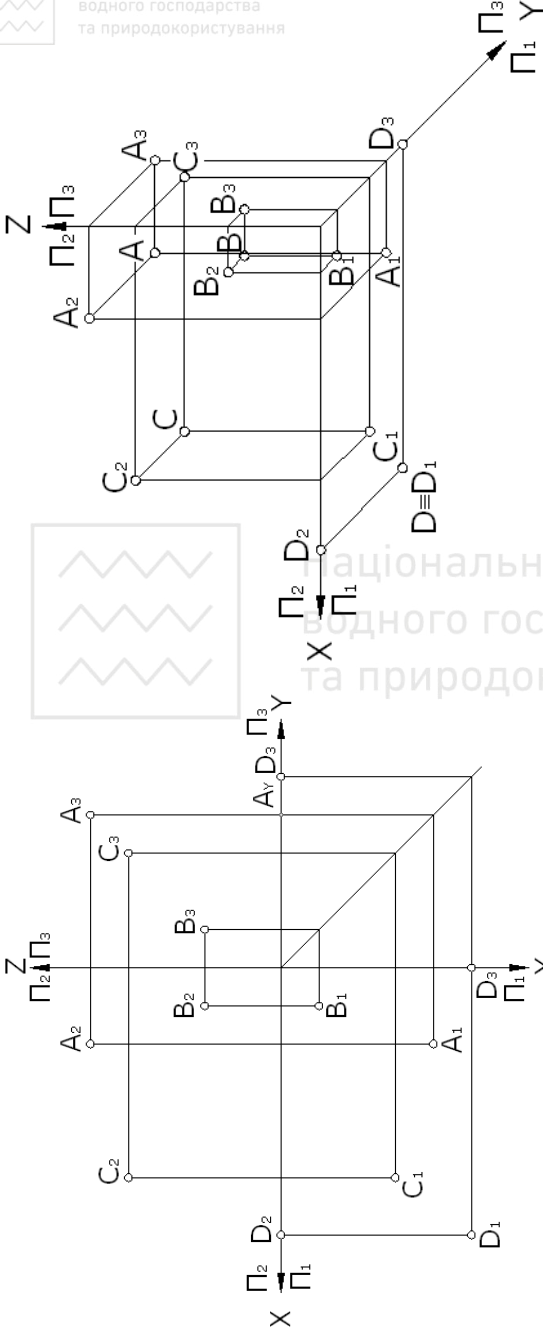


Рис. 9 Зразок оформлення графічної роботи «Гочка»



**Мета роботи:** навчитися будувати проекції відрізків прямих часткового та загального положення; розв'язувати позиційні та метричні задачі.

**Завдання:**

**Задача 1.** Побудувати за даними у таблиці 1 координатами точок  $A, B, C, D$  фронтальну і горизонтальну проекції піраміди  $DABC$ . Встановити видимість ребер на кожній проекції в конкуруючих точках.

**Задача 2.** Розділити ребро  $DA$  точкою  $E$  у відношенні  $2:3$ ;

**Задача 3.** Провести через точку  $E$ : *горизонталь*  $h$  до перетину з ребром  $AB$  (або з його продовженням) та *фронталь*  $f$  до перетину з ребром  $AB$  (або його продовженням);

**Задача 4.** Визначити натуральну величину одного із ребер загального положення і кут його нахилу до однієї із площин проекцій;

**Задача 5.** Провести через точку  $D$  пряму паралельну до ребра  $AB$ .

**Розв'язування задач:**

**Задача 1.** За вихідними даними (табл. 1) координатами точок  $A, B, C, D$  побудуємо фронтальну і горизонтальну проекції піраміди  $DABC$ . Встановимо видимість мимобіжних ребер  $AC$  та  $DB$  за наступним алгоритмом:

1) на горизонтальній проекції піраміди  $A_1B_1C_1D_1$  визначимо видимість проекцій ребер  $A_1C_1$  та  $D_1B_1$  (рис. 1). Для цього порівняємо відносно положення пари конкуруючих точок  $1$  і  $2$ , горизонтальні проекції яких збігаються в одну точку ( $1_1 \equiv 2_1$ ) – точку перетину горизонтальних проекцій ребер  $A_1C_1$  та  $D_1B_1$ . Точки  $1$  і  $2$  належать різним ребрам. В цьому ми переконаємося, коли побудуємо їх фронтальні проекції  $1_2, 2_2$ :  $1_2$  належить проекції ребра  $A_2C_2$  ( $1_2 \in A_2C_2$ ), а  $2_2$  – фронтальній проекції ребра  $D_2B_2$  ( $2_2 \in D_2B_2$ ). Це означає, що ребра  $AC$  та  $DB$  – мимобіжні. З двох конкуруючих точок видимою буде та, у якій друга (незбігаюча) проекція буде знаходитися далі від осі проекцій. Отже, з двох конкуруючих точок  $1$  і  $2$  видимою буде точка  $1$ , оскільки її фро-



Горизонтальна проекція  $1_2$  знаходиться далі від осі проєкцій, ніж фронтальна проекція  $2_2$ . Точка 1 належить прямій  $AC$  ( $1 \in AC$ ), отже, горизонтальна проекція прямої  $A_1C_1$  буде видимою (наводимо її суцільною товстою лінією), а горизонтальна проекція  $D_1B_1$  - буде невидимою (наводимо її тонкою штриховою лінією) (рис. 1).

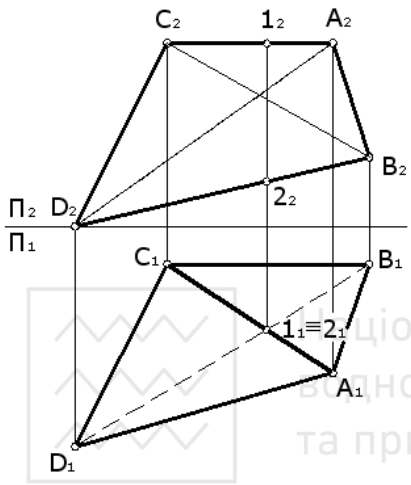


Рис. 1

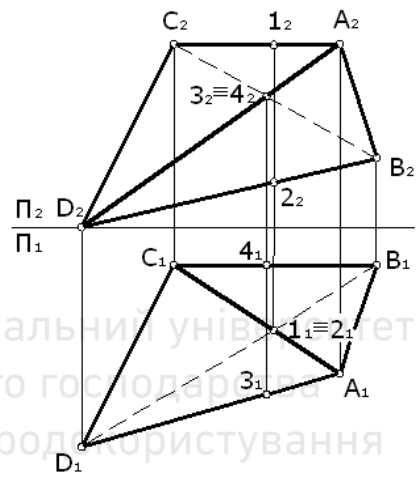


Рис. 2

2) на фронтальній проєкції піраміди  $A_2B_2C_2D_2$  конкуруючими будуть точки 3 та 4 ( $3_2 \equiv 4_2$ ) (рис.2) . Точка 3 належить ребру  $AD$  ( $3 \in AD$ ), точка 4 - ребру  $BC$  ( $4 \in BC$ ). Видимість зазначених точок будемо визначати по їх горизонтальних (незбігаючих) проєкціях  $3_1$  та  $4_1$ . Оскільки, горизонтальна проєкція  $3_1$  знаходиться далі від осі проєкцій  $OX$ , то проєкція  $3_2$  буде видимою, а, відповідно, і проєкція прямої  $A_2D_2$  - буде видимою (наводимо її суцільною товстою лінією). Фронтальна проєкція  $B_2C_2$  - буде невидимою (наводимо її тонкою штриховою лінією).



**Задача 2.** Потрібно розділити ребро  $DA$  точкою  $E$  у відношенні  $2:3$ , тобто  $\frac{DE}{EA} = \frac{2}{3}$ .

Знаємо, що проєкції точки ділять проєкцію відрізка прямої у такому самому відношенні, в якому сама точка ділить відрізок прямої:  $\frac{DE}{EA} = \frac{D_1E_1}{E_1A_1} = \frac{D_2E_2}{E_2A_2} = \frac{2}{3}$ .

Отже, виконаємо внутрішній поділ ребра  $DA$ . Спочатку із проєкції  $D_1$  у довільному напрямку проведемо пряму  $D_15_0$ , довжина якої буде дорівнювати сумі рівних частин поділу відрізка, тобто  $5=2+3$ . З'єднаємо поділку  $5_0$  з  $A_1$  (рис. 3). Через кожну поділку  $4_0, 3_0, 2_0, 1_0$  проведемо прямі паралельні прямій  $5_0A_1$  (рис. 4) до перетину з проєкцією  $D_1A_1$  і отримаємо горизонтальну проєкцію  $E_1 \in D_1A_1$ .

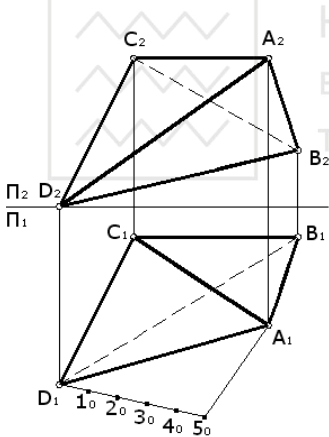


Рис. 3

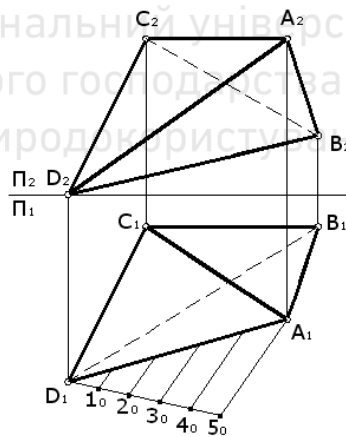


Рис. 4

Спираючись на правило, що точка належить прямій, якщо її проєкції належать однойменним проєкціям прямої, за допомогою лінії проєкційного зв'язку  $E_1E_2$  будуємо фронтальну проєкцію  $E_2 \in D_2A_2$ . Таким чином, ми розділили ребро  $DA$  точкою  $E$  у відношенні  $2:3$  (рис. 5).

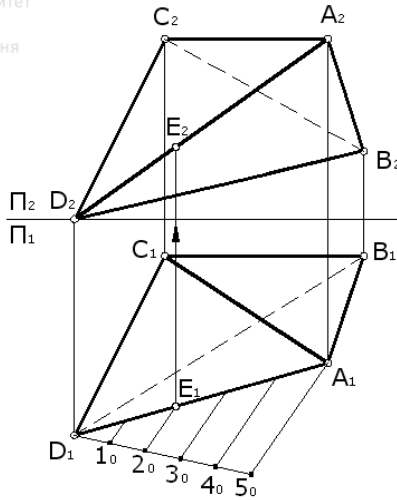


Рис. 5

**Задача 3.** Провести через точку  $E$ : горизонталь  $h$  до перетину з ребром  $AB$  (або з його продовженням) та фронталь  $f$  до перетину з ребром  $AB$  (або його продовженням).

1) Побудову фронталі  $f$  через точку  $E$  починаємо із її горизонтальної проекції  $f_1$ , яку проводимо через точку  $E_1$  паралельно осі  $OX$  ( $f_1 \parallel OX$ ) до перетину із продовженням проекції ребра  $A_1B_1$ . При перетині з  $AB$  отримуємо точку  $5$  ( $5_1, 5_2$ ): ( $f_1 \cap A_1B_1 = 5_1$ ,  $5_2 \in A_2B_2$ ). Будуємо фронтальну проекцію  $f_2$  фронталі  $f$ :  $E_2 \cup 5_2 = f_2$  (рис. 6).

2) Побудову горизонталі  $h$  через точку  $E$  починаємо із її фронтальної проекції  $h_2$ , яку проводимо через точку  $E_2$  паралельно осі  $OX$  ( $h_2 \parallel OX$ ) до перетину із проекції ребра  $A_2B_2$ . При перетині з прямою  $AB$  отримуємо точку  $6$  ( $6_1, 6_2$ ): ( $h_2 \cap A_2B_2 = 6_2$ ,  $6_1 \in A_1B_1$ ). Будуємо горизонтальну проекцію горизонталі  $h_1$ :  $E_1 \cup 6_1 = h_1$  (рис. 7).

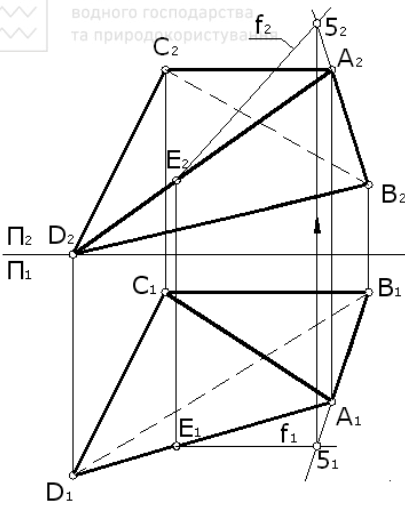


Рис. 6

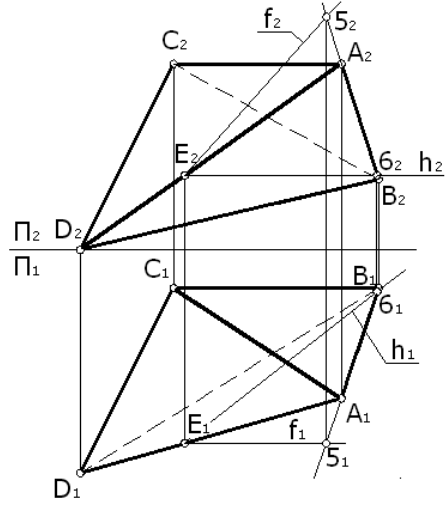


Рис. 7

**Задача 4.** Визначимо дійсну величину одного із ребер загального положення і кут його нахилу до однієї із площин проєкцій (рис. 8).

Загальне положення займають ребра  $DC$ ,  $DA$ ,  $AB$ , тому що жодна із їх проєкцій не паралельна і не перпендикулярна до площин проєкцій. Визначимо дійсну величину ребра  $DC$  та кут  $\beta$  його нахилу до фронтальної площини проєкцій  $\Pi_2$  за правилом прямокутного трикутника. Правило: дійсна величина відрізка прямої загального положення визначається гіпотенузою прямокутного трикутника, у якого одним катетом є проєкція на одну із площин проєкцій, а другий катет дорівнює різниці відстаней кінців відрізка прямої від тієї самої площини проєкцій.

1) оскільки будемо визначати кут  $\beta$  нахилу  $DC$  до фронтальної площини проєкцій  $\Pi_2$ , то побудови будемо виконувати на  $\Pi_2$ . Першим катетом буде  $D_2C_2$ . Від будь-якого одного із кінців  $D_2C_2$  (оберемо проєкцію  $C_2$ ) проводимо напрям другого катета:  $C_2C_0 \perp D_2C_2$ .

2) Визначаємо на горизонтальній проєкції  $D_1C_1$  різницю координат  $Y$  точок  $D$  та  $C$ :  $\Delta Y = \Delta Y_D - \Delta Y_C$  ( $\Delta Y$  – різниця відстаней



між кінцями відрізка DC і фронтальною площиною проєкцій  $\Pi_2$ ).

3) Відкладаємо на прямій  $C_2C_0$  від проєкції  $C_2$  відрізок, який дорівнює  $\Delta Y$  ( $C_2C_0 = \Delta Y$ ).

4) Сполучаємо точки  $C_0$  і  $D_2$ , отримуємо прямокутний трикутник  $D_2C_2C_0$ , у якому гіпотенуза  $D_2C_0$  – дійсна величина відрізка DC загального положення:  $D_2C_0 = |DC|$ .

5) Кут між гіпотенузою  $D_2C_0$  і катетом-проєкцією  $D_2C_2$  дорівнює куту нахилу  $\beta$  прямої DC до фронтальної площини проєкцій  $\Pi_2$ :  $(D_2C_0 \wedge D_2C_2) = \beta$ .

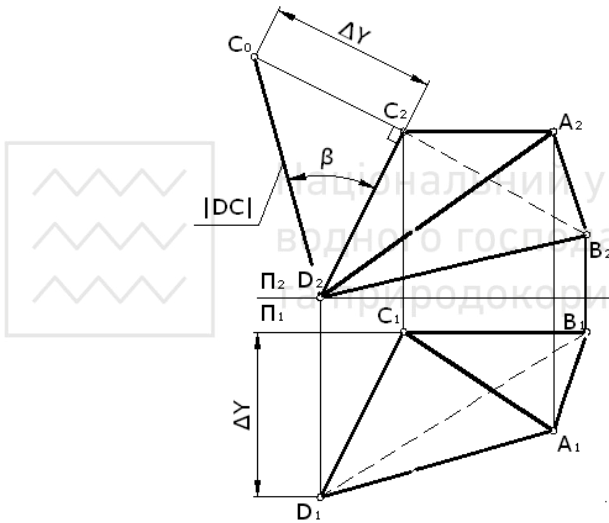


Рис. 8

**Задача 5.** Провести через точку D пряму паралельну до ребра AB.

Використаємо властивість проєціювання двох паралельних прямих: проєкції паралельних прямих на будь-яку площину проєкцій, але не перпендикулярну до даних прямих, паралельні між собою або збігаються.

Отже, через точку  $D_1$  проведемо горизонтальну проєкцію прямої  $t_1$  паралельно  $A_1B_1$ :  $t_1 \parallel A_1B_1$ , а через точку  $D_2$  проведемо



фронтальну проекцію прямої  $t_2$  паралельно  $A_2B_2$ :  $t_2 \parallel A_2B_2$  (рис. 9).

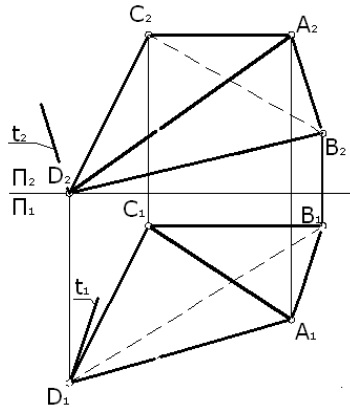


Рис. 9

Графічна робота виконується на аркуші формату А4. Зразок виконання роботи наведений на рис. 10.

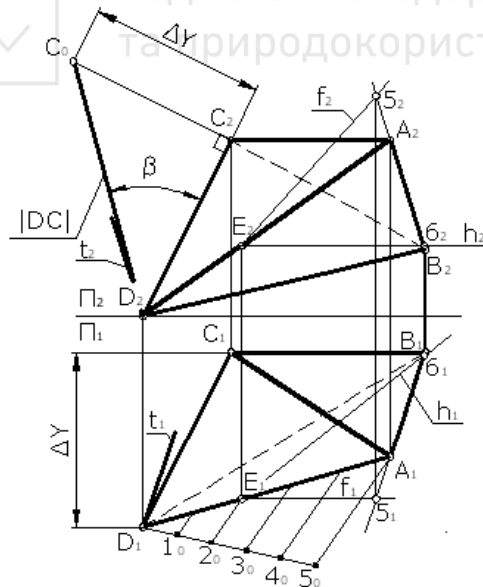


Рис. 10 Зразок виконання графічної роботи «Пряма»



## Тема: ПЕРЕТИН ПЛОЩИН

**Мета роботи:** закріплення знань студентів із побудови лінії перетину двох площин загального положення.

### Завдання:

– побудувати за заданими (таблиця 1) координатами точок **A, B, C, D, S, K** горизонтальну та фронтальну проекції площин трикутників **ABC** і **DSK**;

– побудувати лінію взаємного перетину двох площин трикутників **ABC** і **DSK**;

– встановити видимість частин площин.

Графічна робота виконується на аркуші креслярського паперу формату А4. Зразок виконання роботи наведений на рис. 5.

**Лінією перетину двох площин є пряма**, для побудови якої необхідно визначити дві точки, спільні для обох площин, і через них провести пряму. Спільні точки у загальному випадку визначають способом допоміжних січних площин-посередників, якими є, як правило, площини рівня або проєціюючі площини.

Побудову лінії перетину двох площин загального положення (рис.1) виконуємо загальним способом, **використовуючи площини рівня**, у такій послідовності:

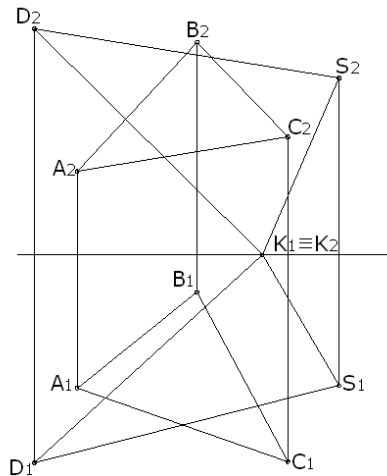


Рис. 1

1) Проведемо допоміжну січну площину – горизонтальну площину рівня  $\Delta$ , яка буде задана фронтальним слідом  $\Delta_2$  ( $\Delta \parallel \Pi_1$ )



$\rightarrow \Delta_2 \parallel OX$ ). Площину  $\Delta$  слід вводити так, щоб її фронтальний слід  $\Delta_2$  перетинав кожну із заданих площин трикутників  $ABC$  і  $DEK$  (рис. 2).

2) Відмічаємо фронтальні проекції точок лінії перетину площини  $\Delta$  та трикутника  $DSK$  (рис. 2): точка 1 знаходиться на стороні  $DK$  ( $1_2 \in D_2K_2$ ), точка  $S$  знаходиться на стороні  $SK$  ( $S_2 \in S_2K_2$ ). Будуємо горизонтальні проекції зазначених точок  $1_1, S_1$  ( $1_1 \in D_1K_1, S_1 \in S_1K_1$ ) і з'єднуємо їх, причому лінія  $1S$  є горизонталлю площини  $DSK$ , оскільки  $\Delta \parallel \Pi_1$ .

3) Відмічаємо фронтальні проекції точок лінії перетину площин  $\Delta$  та  $ABC$  (рис.2): точка 2 знаходиться на стороні  $AB$  ( $2_2 \in A_2B_2$ ), точка 3 знаходиться на стороні  $BC$  ( $3_2 \in B_2C_2$ ). Будуємо горизонтальні проекції зазначених точок  $2_1, 3_1$  ( $2_1 \in A_1B_1, 3_1 \in B_1C_1$ ) і з'єднуємо їх, причому лінія  $23$  є горизонталлю площини  $ABC$ , оскільки  $\Delta \parallel \Pi_1$ .

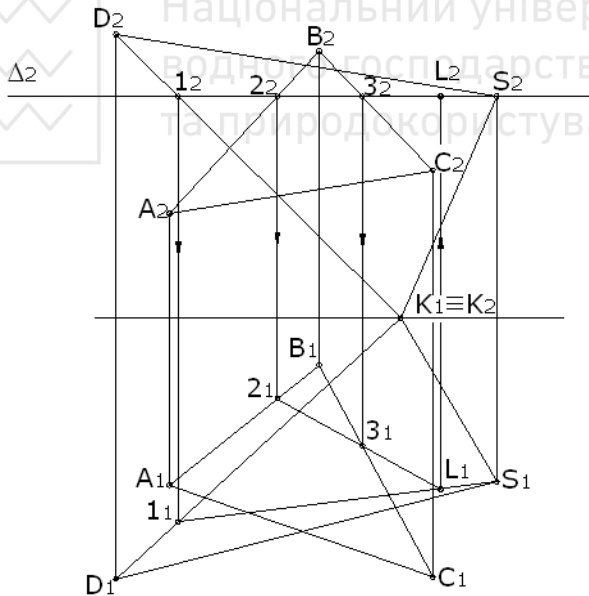


Рис. 2

4) Визначаємо **першу спільну точку L** для площин  $ABC$  і  $DEK$ . Точка  $L$  знаходиться на перетині ліній  $1S$  та  $23$ , що чітко



видно на перетині горизонтальних проєкцій  $1_1S_1$  та  $2_13_1$  (рис. 2):  $1_1S_1 \cap 2_13_1 = L_1$ . Фронтальну проєкцію  $L_2$  побудуємо у проєційному зв'язку  $L_1 \rightarrow L_2$  на фронтальному сліді  $\Delta_2$ , оскільки точка  $L$  належить площині  $\Delta$ :  $L_2 \in \Delta_2$ .

5) Проведемо другу січну горизонтальну площину рівня  $\beta$ , яка буде задана фронтальним слідом  $\beta_2$  ( $\beta \parallel \Pi_1 \rightarrow \beta_2 \parallel OX$ ) і аналогічно виконуємо побудови (рис. 3).

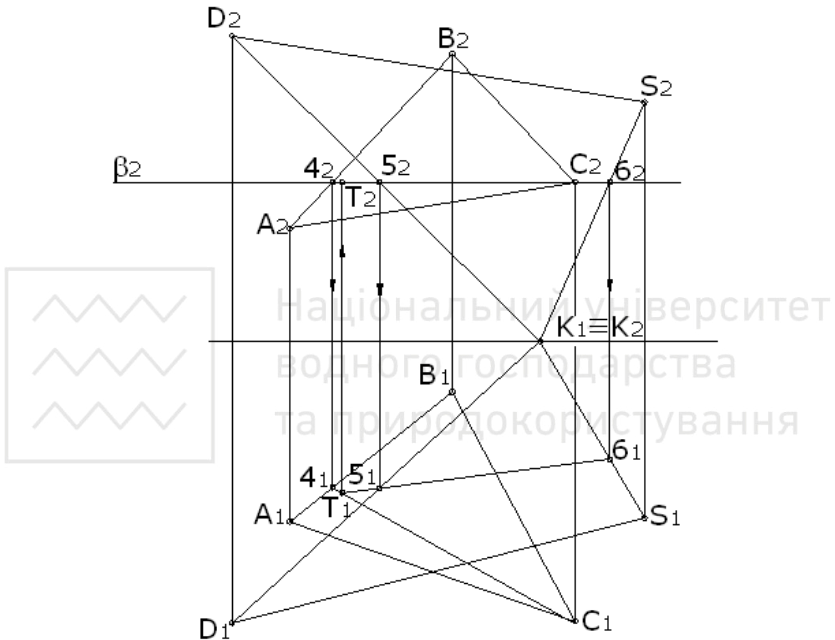


Рис. 3

6) Відмічаємо фронтальні проєкції точок лінії перетину площини  $\beta$  та трикутника  $DSK$  (рис. 3): точка 5 знаходиться на стороні  $DK$  ( $5_2 \in D_2K_2$ ), точка 6 знаходиться на стороні  $SK$  ( $6_2 \in S_2K_2$ ). Будуємо горизонтальні проєкції зазначених точок  $5_1$ ,  $6_1$  ( $5_1 \in D_1K_1$ ,  $6_1 \in S_1K_1$ ) і з'єднуємо їх, причому лінія  $56$  є горизонталлю площини  $DSK$ , оскільки  $\beta \parallel \Pi_1$ .

7) Відмічаємо фронтальні проєкції точок лінії перетину площини  $\beta$  та трикутника  $ABC$  (рис. 3): точка 4 знаходиться на стороні  $AB$  ( $4_2 \in A_2B_2$ ), точка  $C$  знаходиться на стороні  $BC$

( $C_2 \in B_2 C_2$ ). Будуємо горизонтальні проекції зазначених точок  $4_1, C_1$  ( $4_1 \in A_1 B_1, C_1 \in B_1 C_1$ ) і з'єднуємо їх, причому лінія  $4C$  є горизонталлю площини  $ABC$ , оскільки  $\beta \parallel \Pi_1$ .

8) Визначаємо другу спільну точку  $T$  для площин  $ABC$  і  $DEK$ . Точка  $T$  знаходиться на перетині ліній  $4C$  та  $56$ , що чітко видно на перетині горизонтальних проекцій  $4_1 C_1$  та  $5_1 6_1$  (рис. 3):  $4_1 C_1 \cap 5_1 6_1 = T_1$ . Фронтальну проекцію  $T_2$  побудуємо у проекційному зв'язку  $T_1 \rightarrow T_2$  на фронтальному сліді  $\beta_2$ , оскільки точка  $T$  належить площині  $\beta$ :  $T_2 \in \beta_2$ .

9) Через точки  $L$  і  $T$ , які одночасно належать площинам  $DSK$  та  $ABC$ , проводимо пряму лінію, яка є лінією  $LT$  перетину вказаних площин (рис. 4).

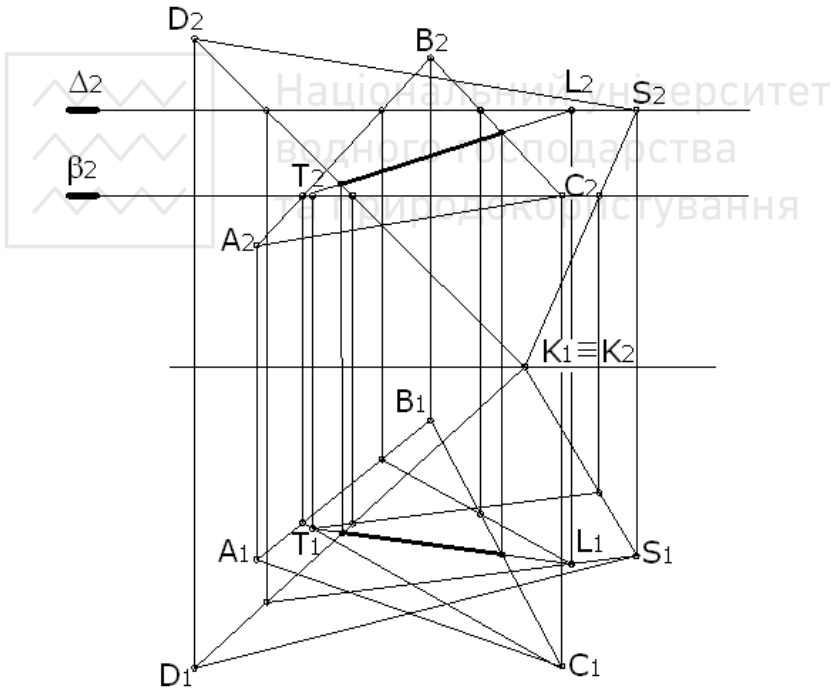


Рис. 4

10) Встановлюємо взаємну видимість заданих площин, оскільки прийнято вважати площину непрозорим об'єктом (рис.



5) Видимість встановлюємо методом конкуруючих точок, який детально розглянутий у роботі «Пряма».

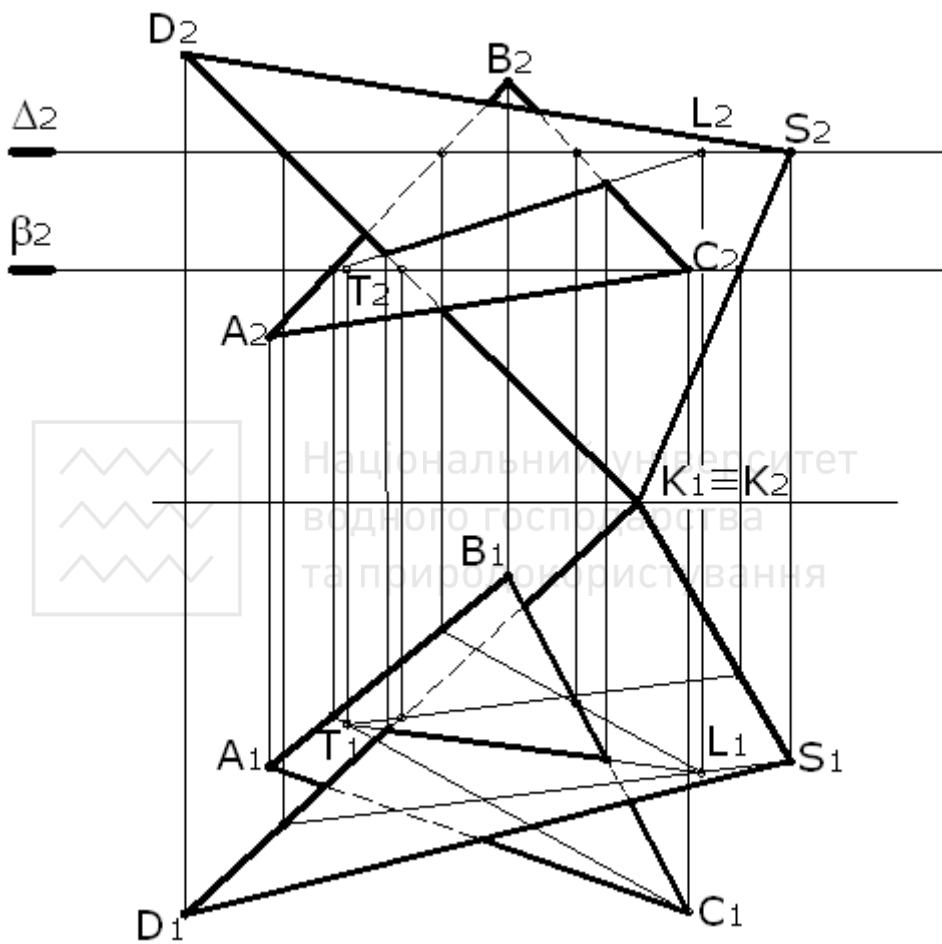


Рис. 5 Зразок виконання роботи «Перетин площин»



**Побудова проєкцій спільних точок способом допоміжних проєціюючих площин** на епюрі проводиться у такому порядку (рис. 6):

1. Для знаходження **першої спільної точки N** вибираємо будь-який відрізок в одному з двох трикутників (наприклад, АВ) і будуємо точку перетину його з площиною трикутника DEK. Для цього:

- через відрізок АВ проводимо допоміжну горизонтально-проєціюючу площину  $\beta$ , що задається горизонтальним слідом  $\beta_1$ ;
- будуємо лінію 1-2 перетину заданої площини DEK і допоміжної проєціюючої площини  $\beta$ , що проходить через сторону АВ другого трикутника;
- визначаємо точку N перетину відрізка АВ з допоміжною прямою 1-2, яка також є точкою перетину прямої АВ із площиною трикутника DEK.

2. Для знаходження **другої спільної точки M** лінії перетину вибираємо будь-який інший відрізок (наприклад, DK) і знаходимо точку M перетину його з площиною трикутника DEK, повторивши наведену вище послідовність побудов.

3. Точки M і N з'єднуємо, **отримуємо лінію MN перетину** площин DEK та ABC.

4. Встановлюємо видимість одного трикутника відносно другого. Видимість елементів визначаємо за конкуруючими точками (точками, що належать різним прямим, але розміщених відносно площин проєкцій на одній проєціюючій прямій).

Графічна робота виконується на аркуші креслярського паперу формату А4. Зразок виконання роботи на рис. 5-6.

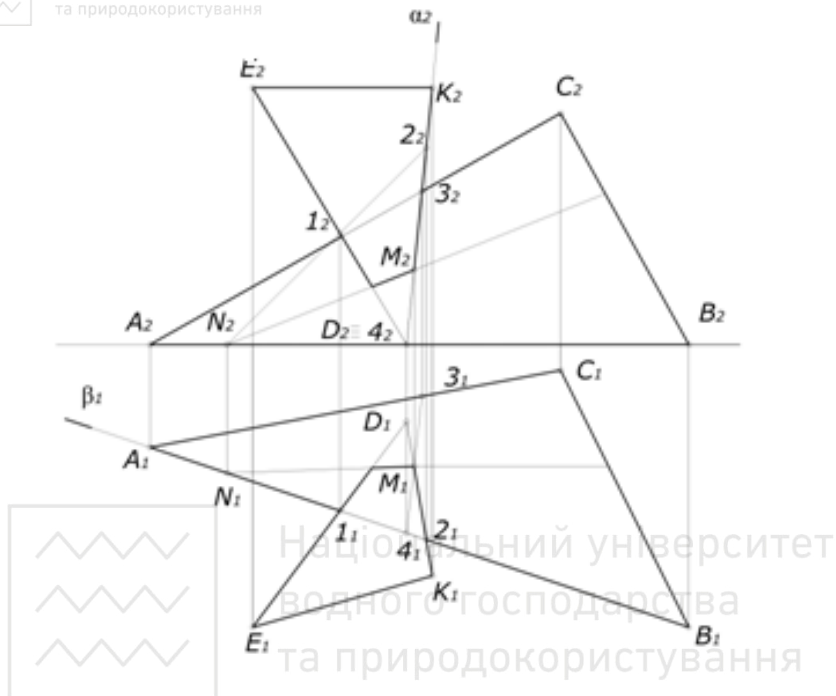


Рис. 6. Зразок виконання роботи «Перетин площин»

## Тема: ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ

**Мета роботи:** навчитися виконувати побудови взаємоперпендикулярних прямої та площини, застосовувати теорему проєціювання прямого кута.

Теорема проєціювання прямого кута: прямий кут проєціюється на площину проєкцій прямим кутом, якщо одна із його сторін паралельна до цієї площини проєкцій, а друга сторона – не перпендикулярна до цієї площини проєкцій.



**Задача:** Визначити відстань від точки D до площини трикутника ABC. Вихідні дані взяти з таблиці 1.

Для розв'язку даної задачі необхідно знати основні правила:

- 1) Відстань від точки до площини визначається по перпендикуляру, опущеному з точки до площини.
- 2) Пряма перпендикулярна до площини, якщо вона перпендикулярна до двох прямих, що перетинаються і лежать у цій площині.

Графічна робота виконується на аркуші креслярського паперу формату A4. Зразок виконання роботи наведений на рис. 5.

Алгоритм побудов:

- 1) У площині  $\Sigma(\triangle ABC)$  через точку C проводимо горизонталь h ( $h \subset \Sigma, C \in h$ ). Спочатку проводимо, паралельно до осі OX, фронтальну проекцію горизонталі  $h_2$  ( $h_2 \parallel OX$ ). При перетині з прямою AB отримаємо точку 1 ( $1_1, 1_2$ ): ( $h_2 \cap A_2B_2 = 1_2, 1_1 \in A_1B_1$ ). Будуємо горизонтальну проекцію горизонталі  $h_1$ :  $C_1 \cup 1_1 = h_1$  (рис. 1).
- 2) У площині  $\Sigma(\triangle ABC)$  через точку A проводимо фронталь f ( $f \subset \Sigma, A \in f$ ). Спочатку проводимо, паралельно до осі OX, горизонтальну проекцію фронталі  $f_1$  ( $f_1 \parallel OX$ ). При перетині з прямою BC отримаємо точку 2 ( $2_1, 2_2$ ): ( $f_1 \cap B_1C_1 = 2_1, 2_2 \in B_2C_2$ ). Будуємо фронтальну проекцію фронталі  $f_2$ :  $A_2 \cup 2_2 = f_2$  (рис. 1).

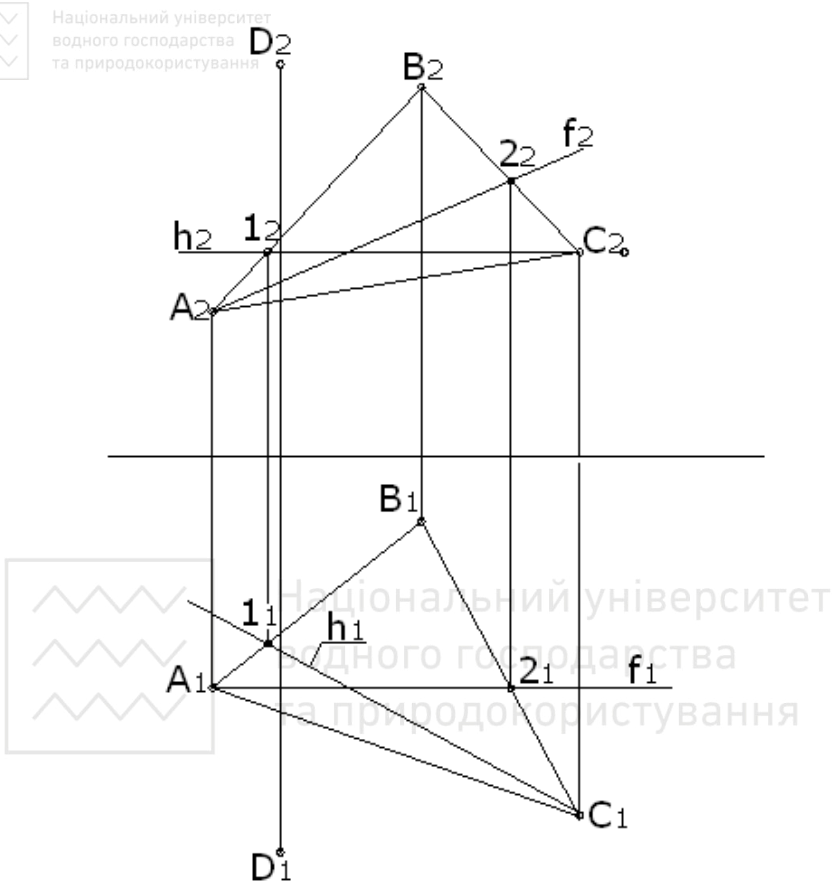


Рис.1

- 3) З точки  $D$  опускаємо пряму  $p$  перпендикулярно до площини  $\Sigma(\triangle ABC)$ . Горизонтальну проекцію  $p_1$  прямої  $p$  будемо перпендикулярно до горизонтальної проекції горизонталі:  $D_1 \in p_1 \perp h_1$ . Фронтальну проекцію  $p_2$  будемо перпендикулярно до фронтальної проекції фронталі  $f_2$ :  $D_2 \in p_2 \perp f_2$  (рис. 2).

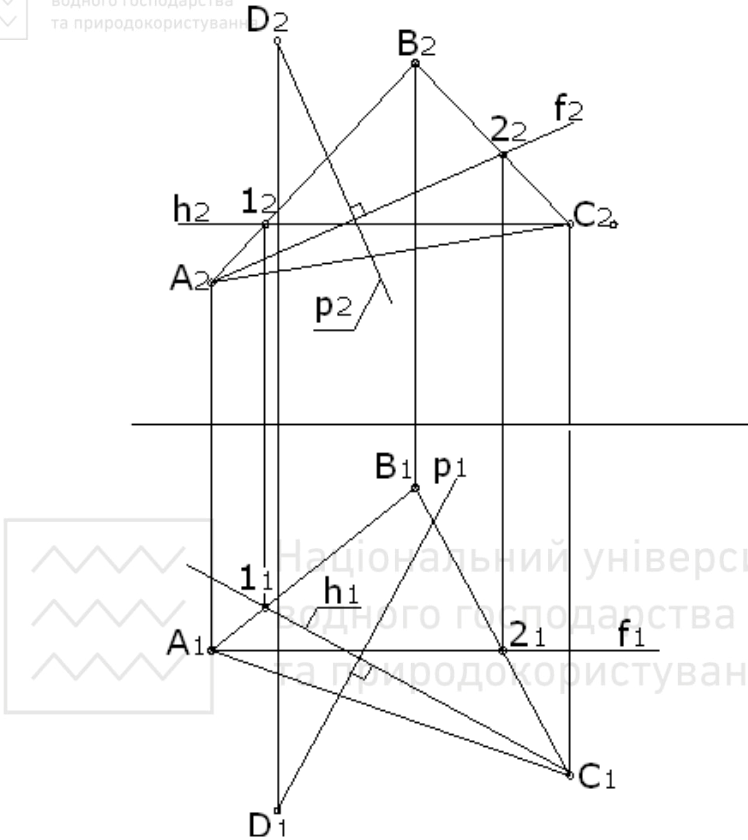


Рис. 2

- 4) Знаходимо точку К перетину перпендикуляра  $p$  з площиною  $\Sigma(\triangle ABC)$ . Спочатку через перпендикуляр  $p$  проводимо горизонтально-проеціюючу площину  $\Delta_1: p \subset \Delta_1 \perp \Pi_1, p_1 \equiv \Delta_1$ . Площина  $\Delta$  перетинається з площиною  $\Sigma(\triangle ABC)$  по прямій  $MN: \Delta \cap \Sigma = MN, \Delta_1 \cap A_1C_1 = M_1, \Delta_1 \cap B_1C_1 = N_1$ . Будуємо фронтальні проєкції точок  $M_2, N_2$  і отримуємо  $M_2N_2$  (рис. 3). На перетині  $M_2N_2$  та  $p_2$  отрима-



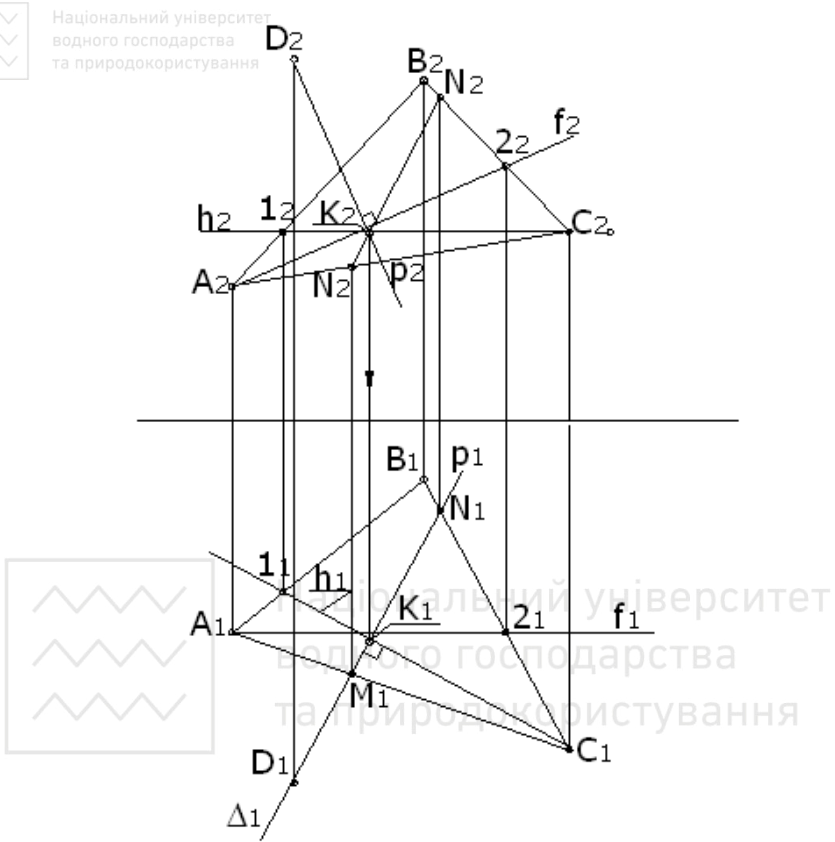


Рис. 4

- 5) Проекції прямої  $r$  ( $D_1 K_1$  та  $D_2 K_2$ ) є проєкціями віддалі від точки  $D$  до площини  $\Sigma(\Delta ABC)$ . В даному випадку відрізок  $DK$  є відрізком прямої загального положення. Дійсну величину відрізка  $|DK|$  знаходимо за правилом прямокутного трикутника (рис. 5).
- 6) Встановлюємо видимість перпендикуляра  $p$  відносно площини  $\Sigma(\Delta ABC)$  за конкуруючими точками.





**Вихідні дані до графічних робіт  
«Точка», «Пряма», «Перетин площин»,  
«Визначення відстані від точки до площини»**

№ варіанту	А			В			С			D			S			К		
	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	100	45	85	45	5	0	5	75	45	50	90	15	5	30	55	55	10	100
2	105	45	90	40	10	0	0	75	45	45	80	15	0	30	60	60	10	85
3	120	30	10	60	10	60	45	75	25	95	50	35	70	15	75	45	45	5
4	55	70	45	30	0	10	0	40	65	20	0	70	70	40	75	5	65	0
5	110	10	30	40	40	45	50	70	5	105	70	40	50	65	55	70	5	10
6	0	70	65	20	5	0	105	50	85	60	85	0	95	20	15	10	20	85
7	0	45	75	20	0	20	105	70	15	75	45	60	55	0	10	0	60	45
8	115	25	45	65	20	30	45	75	25	80	15	60	30	60	20	105	45	20
9	90	0	30	0	50	80	40	75	0	110	60	5	30	0	85	10	40	80
10	105	40	80	35	10	25	95	80	45	85	50	15	120	25	60	45	40	60
11	105	25	0	70	85	80	0	5	50	110	55	50	50	52	75	20	0	10
12	90	25	25	70	5	75	45	75	5	100	35	40	65	10	50	25	40	15
13	110	45	90	45	10	5	5	60	25	35	75	10	50	30	50	60	10	85
14	10	70	85	30	20	0	110	10	85	70	70	5	105	5	80	35	5	70
15	20	70	85	30	20	0	110	10	85	70	70	5	105	5	80	10	25	5
16	80	15	70	0	25	25	55	85	5	110	20	35	75	60	5	35	25	10
17	90	45	25	65	0	50	40	45	10	60	35	55	95	0	5	55	0	5
18	95	40	25	70	45	40	45	15	0	45	50	40	105	30	0	75	10	0
19	25	50	0	40	10	50	95	35	0	50	0	0	80	50	35	20	15	15
20	115	20	0	10	55	0	35	5	45	65	15	0	95	55	50	60	45	50
21	20	30	20	50	45	35	75	50	0	0	95	20	0	20	10	95	10	0
22	40	35	20	25	50	0	40	10	50	50	0	0	20	15	15	80	50	35
23	60	5	40	90	55	0	15	15	0	90	10	5	75	0	25	30	45	25
24	10	50	15	40	0	50	100	0	35	80	40	50	15	0	0	65	0	10
25	85	0	40	55	45	0	95	0	20	65	55	50	15	40	0	30	25	50
26	55	0	5	90	45	25	65	0	50	40	45	10	60	35	55	95	0	5
27	95	10	0	20	30	20	0	20	10	50	45	35	75	50	0	0	95	20
28	105	35	15	70	50	55	30	5	15	70	0	40	110	20	0	50	40	0
29	15	15	35	50	0	35	15	25	0	95	0	15	55	50	50	85	35	0
30	20	50	0	40	10	50	95	35	0	50	0	0	80	50	35	25	15	15