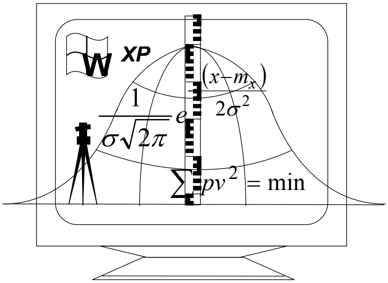
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВОДНОГО ГОСПОДАРСТВА ТА ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ

Інститут агроекології та землеустрою

Кафедра геодезії та картографії



05-04-74

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання самостійних та лабораторних робіт з дисципліни
«МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ»
студентами спеціальності «Геодезія та землеустрій»
Розділ 3. Метод найменших квадратів.
Побудова емпіричних формул методом найменших квадратів

Рекомендовано
науково-методичною комісією
зі спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій».
Протокол № 4 від 24 січня 2017 р.

РІВНЕ – 2017

Методичні вказівки до виконання самостійних та лабораторних робіт з дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірів» студентами спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій»: Розділ 3. Метод найменших квадратів. Побудова емпіричних формул методом найменших квадратів / О. А.Тадєєв, Т. І.Дець, Рівне: НУВГП, 2017. – 28 с.

Упорядники: О.А. Тадєєв, кандидат технічних наук, доцент кафедри геодезії та картографії;
Т. І. Дець, кандидат технічних наук, доцент кафедри геодезії та картографії.

ЗМІСТ

сторінка

ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ПОЛОЖЕННЯ

1. Вибір типу формули

Важливим завданням геодезії та природознавства загалом є описування законів природних явищ. Засобом для цього є накопичення результатів спостережень та вираження за ними закономірностей перебігу явищ. Таке завдання важливе з огляду на те, що встановлення законів явищ дозволяє передбачати їх перебіг на визначену перспективу.

З іншого боку, геодезична теорія і практика тісно пов'язана з різними дослідженнями в польових та лабораторних умовах. Виходячи з результатів досліджень і теоретичних передумов, часто використовуються стандартні формули, які виражають загальні закономірності досліджуваних явищ та процесів. Ці формули можуть містити відомі константи, які залишаються сталими з перебігом експерименту, а також змінні параметри, котрі є сталими лише в умовах даного експерименту. В таких випадках співвідношення між незалежною змінною величиною, яка описує явище, і функцією змінних параметрів та констант може представлятись закономірністю, яка виражена математично. Така закономірність може бути числовою та функціональною. В обох випадках результати вимірів чи спостережень x_i та y_i деяких величин X та Y завжди виражають дискретним числом значень n $(i = \overrightarrow{1,n})$.

Допустимо, що величина Y залежить від величини X і потрібно за наявними результатами знайти функцію $Y = F(X)$, яка описувала б їх залежність. Така задача надзвичайно складна. Теоретично складно побудувати загальну однозначну формулу залежності величин. Тому задача описування результатів спостережень величин розглядається як задача складання табличної функції, яку потрібно апроксимувати деякою функціональною залежністю у тій чи іншій аналітичній формі.

В природі не існує простих зв'язків тільки між двома величинами. Як правило, кожна величина залежить від низки інших величин. Задача пошуку зв'язку двох величин виникає за умов, що впливом на величину y інших аргументів можна нехтувати, або вони зберігають сталі (хоча б приблизно) значення під час експерименту. Перша умова означає, що сумарна похибка впливу знехтуваних величин несуттєва порівняно з точністю результатів спостережень і не позначається на точності функції. Друга умова передбачає, що інші аргументи входять до функціональної залежності як сталі параметри.

Задача пошуку закономірностей у табличній функції не може забезпечити значення функції при довільних значеннях аргументів, оскільки не встановлює універсальної закономірності досліджуваного явища протягом усього його перебігу. Встановлена функція діє лише для тих значень аргументу, які містяться у таблиці. Коли потрібно визначити приблизні значення функції за значеннями аргументів, які відсутні у таблиці, але не виходять за межі табуляції, то розв'язується задача інтерполяції. За своєю суттю задачі апроксимації табличних значень функціональною залежністю та інтерполяції у межах табуляції тотожні і мають на меті побудову емпіричних функцій або емпіричних формул. Емпіричною формулою називають всяку функцію, яка наближує табличну функцію, отриману з результатів спостережень. В геодезичній практиці побудову емпіричних формул здійснюють способом найменших квадратів.

Визначення значень емпіричної формули поза межами табуляції функції називають екстраполяцією. Для використання емпіричної формули на усьому проміжку перебігу процесу відносно значень аргументу, які знаходяться поза межами експерименту, формальних підстав не існує. Тому екстраполяція може мати наслідком хибні висновки. Однак практика застосування емпіричних формул поза межами експериментів, підтверджена додатковими дослідженнями, показує їх значимість і часто забезпечує вагомі результати.

Задача побудови емпіричних формул вимагає дотримання двох умов. По-перше, потрібно вибрати аналітичну структуру функції, якою здійснюватиметься наближення табличної емпіричної функції. По-друге, потрібно визначитись з критерієм оптимальності описування результатів експерименту різними функціями.

У всіх випадках, коли потрібно побудувати емпіричну формулу, попередньо викреслюють в прямокутній системі координат графік емпіричної таблиці. Точки на графіку покажуть певне розсіювання. Випадкові відхилення від явної чи припустимої закономірності розташування точок обумовлені похибками вимірів чи спостережень, якими завжди обтяжені всякі дослідження. Порівняння виявленої закономірності з різними кривими, рівняння яких відомі, дає підстави сформувати загальні уявлення про можливий тип емпіричної формули. Загалом закономірності перебігу природних явищ характеризуються однією з трьох основних залежностей: степеневою, показниковою, гармонічною.

Загальна формула степеневої функції має вигляд

$$y - k = m(x - h)^n .$$

Якщо $n = 1$, то формула відповідає прямій лінії

$$y = mx + b .$$

Якщо $n > 0$, то рівняння належить до параболічного типу з вершиною в точці (h, k). Сюди відносять часткові формули

$$y = mx^n + b$$

та поліноми степені n

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n .$$

Якщо $n < 0$, то формула належить до гіперболічного типу

$$y - k = m(x - h)^{-n}$$

з центром у точці (h, k). До цього типу відносяться часткові формули

$$y = \frac{a}{x^n} + b\,; \qquad xy = bx + ay\,.$$

Остання формула перетворюється до вигляду

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1\,\cdot$$

Показникова залежність виражається формулою

$$y = ab^{kx}\,.$$

Можлива також комбінація останніх двох типів формул вигляду

$$y = ab^{kx^n}\,.$$

Гармонічній залежності відповідає, наприклад, формула

$$y = a\sin(nx + B)\,.$$

Якщо розташування геометричного місця точок на графіку емпіричної таблиці показує лінійну залежність, то в найпростіших випадках типом емпіричної формули можна приймати рівняння прямої. Якщо розташування точок показує більш складну залежність, то доцільно обрати поліноміальний тип функції. Теоретично вважається, що через будь-яке число точок з координатами x_i та y_i $(i = \overrightarrow{1,n})$ завжди можна провести криву, яка аналітично виражається поліномом степені n – 1. Така крива буде проходити через кожну із сукупності точок. Однак вона не виражатиме закономірності їх розташування і такий підхід не забезпечить досягнення поставленої мети. Адже випадкове розташування точок на графіку віддзеркалює статистичний розподіл результатів експерименту. Згладити випадкові відхилення і виразити загальний характер і тенденції залежності y від x можна за принципом найменших квадратів.

2. Апроксимація функцій за результатами вимірів

Нехай за результатами експерименту фізичні величини X та Y набули значень $(x_i\,; y_i)$; $i = \overrightarrow{1,n}$; $n -$ число вимірів чи спостережень. Точність результатів y_i характеризують середні квадратичні похибки m_i. Необхідно виконати апроксимацію емпіричних даних і визначити оптимальну емпіричну формулу.

2.1. Імовірнісне обґрунтування вирішення задачі

Допустимо, що істинну залежність Y від X виражає формула

$$Y = F(X)\,, \tag{1}$$

а похибки вимірів m_i і результати y_i підпорядковані нормальному законові розподілу. Якщо виміри рівноточні, то $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m$. Тоді для функції щільності нормально розподіленої величини Y одержимо:

$$f_i(y_i) = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[y_i - F(x_i)]^2}{2m^2}}. \quad (2)$$

В такій постановці задачі величини m_i ідентифікуються як середні квадратичні відхилення (стандарти), а $F(x_i)$ - математичні очікування результатів y_i. З метою забезпечення істинності умови (1) ймовірність сукупності результатів y_i має бути найбільшою. Для цього абсолютне значення показника степені у функції щільності (2) повинно бути найменшим. У межах проведеного експерименту $\frac{1}{2m^2} = const$. Отже,

$$\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - F(x_i)\right)^2 = \left[\theta^2\right] = \min. \quad (3)$$

Для нерівноточних результатів y_i з урахуванням зв'язку (3) середньої квадратичної похибки m та ваги p, отримаємо:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \left(y_i - F(x_i)\right)^2 = \left[p\theta^2\right] = \min. \quad (4)$$

Різниці $y_i - F(x_i) = \theta_i$ виражають істинні похибки результатів y_i. Тож рішення поставленої задачі зводиться до визначення поправок

$$v_i = F(x_i) - y_i, \quad (5)$$

які мають ліквідовувати наявні похибки. З іншого боку, величини v_i посвідчують відхилення результатів експерименту y_i і відповідних значень функції (1). Використані у рамках того чи іншого чисельного критерію, тим самим відхилення v_i забезпечать встановлення оптимального аналітичного вираження та параметрів функції (1).

Отже, умови (3) та (4) набувають вигляду

$$[v^2] = \min \quad (6)$$

або загалом

$$[pv^2] = \min. \quad (7)$$

Формули (6) і (7) є математичним вираженням принципу найменших квадратів. Отже, ці умови є основою вирішення поставленого завдання.

2.2. Вираження залежності у загальному вигляді

Будь-яка функція (1) містить сукупність постійних параметрів c_j ($j=\overrightarrow{1,k}$), значення яких апріорі невідомі. Тому загалом існуючу закономірність перебігу експерименту виражає функція

$$Y = F(X; c_1, \ldots, c_k)\,. \tag{8}$$

Співвідношення змінної X з параметрами c_j визначають характер аналітичного вираження залежності Y від X. Якщо значеннями параметрів c_j сформувати матрицю $\underset{k\times 1}{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_k \end{pmatrix}$, а результати y_i звести до матриці $\underset{n\times 1}{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$, то залежність (8) набуває вигляду

$$\underset{n\times 1}{Y} = \underset{n\times k}{A} \cdot \underset{k\times 1}{c}\,. \tag{9}$$

Тут $\underset{n\times k}{A}$ - матриця коефіцієнтів, які залежать від аналітичного вираження залежності (8) і значень змінної *X*. Наприклад, якщо попередньо встановлено, що залежність виражається лінійною функцією $Y = c_1 X + c_2$, то $\underset{n\times 2}{A} = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \cdots & \cdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}$. При параболічній залежності загального вигляду $Y = c_1 X + c_2 X^2 + \ldots + c_{k-1} X^{k-1} + c_k$ матриця формується коефіцієнтами $\underset{n\times k}{A} = \begin{pmatrix} x_1\ x_1^2 \cdots x_1^{k-1} & 1 \\ x_2\ x_2^2 \cdots x_2^{k-1} & 1 \\ \cdots\cdots\cdots\ \cdots & \cdots \\ x_n\ x_n^2 \cdots x_n^{k-1} & 1 \end{pmatrix}$. Тут потрібно брати до уваги зв’язок числа параметрів c_j і степені поліному m: $k = m+1$. Якщо функціональна залежність Y від сукупності величин X_i $(i = \overrightarrow{1, k-1})$ має вигляд $Y = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \ldots + c_{k-1} X_{k-1} + c_k$, то одержимо матрицю коефіцієнтів $\underset{n\times k}{A} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \cdots x_{1,k-1} & 1 \\ x_{21} & x_{22} \cdots x_{2,k-1} & 1 \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\ \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} \cdots x_{n,k-1} & 1 \end{pmatrix}$. Загалом, користуючись різними системами координат з функціональними шкалами на осях, нелінійні рівняння можна перетворити в лінійні і представити у формі (9). Так, рівняння $Y = c_1 X^2 + c_2$ заміною змінної $U = X^2$ перетворюється до лінійного вигляду $Y = c_1 U + c_2$. Такого ж вигляду набуває рівняння $Y = \frac{c_1}{X} + c_2$ після підстановки $U = \frac{1}{X}$. Рівняння $XY = c_1 X + c_2 Y$ діленням на XY і заміною змінних $U = \frac{1}{X}$ та $V = \frac{1}{Y}$ перетворюється до вигляду $1 = c_1 V + c_2 U$. Часто такого типу перетворення зручно виконувати шляхом логарифмування нелінійних функцій. Наприклад, рівняння $Y - k = m(X-h)^n$ після логарифмування $\lg(Y-k) = \lg m + n\lg(X-h)$ та підстановки $V = \lg(Y-k)$ та $U = \lg(X-h)$ перетворюється у рівняння $V = nU + \lg m$; показникова функція $Y = ab^{kX}$ набуває лінійного вигляду $\lg Y = kX\lg b + \lg a$ тощо.

2.3. Визначення параметрів апроксимуючої функції

Враховуючи (8), рівняння поправок (5) набувають вигляду

$$v_i = F(x_i; c_1, \ldots, c_k) - y_i, \tag{10}$$

а завдання визначення чисельних значень невідомих параметрів c_j під умовою (7) (а в підсумку – побудови емпіричної формули) зводиться до розв’язування системи рівнянь

$$\left[pv \frac{\partial v}{\partial c_j} \right] = 0. \tag{11}$$

Чисельні значення частинних похідних

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial c_j}\right)_{\circ} = a_{ij} \tag{12}$$

можна встановити за результатами експерименту x_i. Диференціювання рівнянь поправок (10) показує, що значення a_{ij} - це елементи матриці коефіцієнтів $\underset{n\times k}{A}$ рівняння (9). Тепер система рівнянь (11) набуває вигляду

$$[pa_j v] = 0 \tag{13}$$

або у матричній формі

$$\underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times 1}{V} = 0\,. \tag{14}$$

Тут $\underset{n\times 1}{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_n \end{pmatrix}$ - матриця поправок; $\underset{n\times n}{P} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$ - діагональна вагова матриця, яка формується за середніми квадратичними похибками m_i на основі формули (3). Якщо умови рівнянь (13) чи (14) будуть дотримані, тим самим буде забезпечена вимога мінімуму (7).

Складемо рівняння поправок (10) у матричній формі, залучивши відповідну форму функції (9):

$$\underset{n\times 1}{V} = \underset{n\times k}{A} \cdot \underset{k\times 1}{c} - \underset{n\times 1}{Y}\,. \tag{15}$$

Підстановка його в (14) зумовлює рівняння

$$\underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times k}{A} \cdot \underset{k\times 1}{c} - \underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times 1}{Y} = 0\,. \tag{16}$$

В теорії способу найменших квадратів такого типу рівняння називають нормальними рівняннями з коефіцієнтами $\underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times k}{A} = \underset{k\times k}{N}$ і вільними членами $\underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times 1}{Y} = \underset{k\times 1}{L}$. Якщо результати експерименту y_i рівноточні, то їх ваги $p_i = 1$, і вагова матриця перетворюється в одиничну: $\underset{n\times n}{P} = \underset{n\times n}{E}$.

Тоді нормальне рівняння має вигляд

$$\underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times k}{A} \cdot \underset{k\times 1}{c} - \underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times 1}{Y} = 0\,, \tag{17}$$

де $\underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times k}{A} = \underset{k\times k}{N}$ і $\underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times 1}{Y} = \underset{k\times 1}{L}$.

Таким чином, незалежно від умов експерименту з урахуванням точності його результатів маємо нормальне рівняння загального вигляду

$$\underset{k\times k}{N}\cdot \underset{k\times 1}{c} - \underset{k\times 1}{L} = 0\,. \qquad (18)$$

Розв’язок рівняння

$$\underset{k\times 1}{c} = \underset{k\times k}{Q}\cdot \underset{k\times 1}{L}\,, \qquad (19)$$

де $\underset{k\times k}{Q} = \underset{k\times k}{N^{-1}}$ – обернена матриця, забезпечує значення найбільш оптимальних з точки зору вимоги (7) параметрів c_j, які відповідають емпіричній формулі (9) обраної аналітичної структури в умовах проведеного експерименту.

Однозначний розв’язок (19) можливий виключно за умови

$$k < n\,. \qquad (20)$$

2.4. Апроксимація лінійної функції

Нехай залежність (9) виражає лінійна функція

$$Y = c_1 X + c_2 \qquad (21)$$

з матрицею коефіцієнтів $\underset{n\times 2}{A} = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \cdots & \cdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}$, а результати y_i рівноточні.

Нормальне рівняння (17) для функції (21) у розгорнутому вигляді розкриває систему двох рівнянь:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \cdots & \cdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} [x^2] & [x] \\ [x] & n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [xy] \\ [y] \end{pmatrix};$$

$$\left.\begin{aligned} [x^2]\cdot c_1 + [x]\cdot c_2 &= [xy] \\ [x]\cdot c_1 + n\cdot c_2 &= [y] \end{aligned}\right\}. \qquad (22)$$

Розділивши рівняння на n, переходимо до системи такого вигляду:

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{[x^2]}{n}c_1 + \dfrac{[x]}{n}c_2 = \dfrac{[xy]}{n} \\ \dfrac{[x]}{n}c_1 + c_2 = \dfrac{[y]}{n} \end{array}\right\} \quad (23)$$

або

$$\left.\begin{array}{r} \alpha_2^*[X]\cdot c_1 + \widetilde{X}\cdot c_2 = \alpha_{1,1}^*[XY] \\ \widetilde{X}\cdot c_1 + c_2 = \widetilde{Y} \end{array}\right\}, \quad (24)$$

де $\widetilde{X} = \alpha_1^*[X]$, $\widetilde{Y} = \alpha_1^*[Y]$, $\alpha_2^*[X]$, $\alpha_{1,1}^*[XY]$ - початкові статистичні моменти. З другого рівняння утвореної системи виражаємо невідомий параметр c_2

$$c_2 = \widetilde{Y} - \widetilde{X}\cdot c_1 \quad (25)$$

і одержаний вираз підставляємо до першого рівняння:

$$\alpha_2^*[X]\cdot c_1 + \widetilde{X}\left(\widetilde{Y} - \widetilde{X}\cdot c_1\right) = \alpha_{1,1}^*[XY];$$

$$c_1 = \frac{\alpha_{1,1}^*[XY] - \widetilde{X}\cdot\widetilde{Y}}{\alpha_2^*[X] - \widetilde{X}^2}. \quad (26)$$

Рівняння (25) та (26) забезпечують однозначний розв'язок завдання апроксимації експериментальних даних, яке є найбільш оптимальним з точки зору принципу найменших квадратів для лінійної залежності (21).

В математичній статистиці існують співвідношення, які виражають зв'язок початкових і центральних моментів такого вигляду:

$$\alpha_{1,1}^*[XY] - \alpha_1^*[X]\cdot\alpha_1^*[Y] = \mu_{1,1}^*[XY];$$

$$\alpha_2^*[X] - \left(\alpha_1^*[X]\right)^2 = \mu_2^*[X].$$

Другий змішаний центральний момент $\mu_{1,1}^*[XY]$ називається кореляційним моментом:

$$\mu_{1,1}^*[XY] = K_{x,y}^* = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \widetilde{X})(y_i - \widetilde{Y})}{n}.$$

Другий центральний момент

$$\mu_2^*[X] = D_x^* = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \widetilde{X})^2}{n}$$

виражає дисперсію величини X. Якщо врахувати, що для величини Y

$$\mu_2^*[Y] = D_y^* = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \widetilde{Y})^2}{n},$$

то за центральними моментами можна виразити статистичний коефіцієнт кореляції

$$r_{x,y}^* = \frac{K_{x,y}^*}{\sqrt{D_x^* \cdot D_y^*}}.$$

Наведені тут статистичні співвідношення дають можливість розкрити за ними невідомий параметр c_1:

$$c_1 = \frac{K_{x,y}^*}{D_x^*} = r_{x,y}^* \frac{\sqrt{D_y^*}}{\sqrt{D_x^*}}. \tag{27}$$

Формула (27) виражає коефіцієнт регресії Y на X: $\rho_{y/x} = c_1$. Враховуючи формулу (25), лінійна залежність (21) тепер виразиться рівнянням

$$Y = \rho_{y/x} X + \widetilde{Y} - \rho_{y/x} \widetilde{X}$$

або

$$Y - \widetilde{Y} = \rho_{y/x}\left(X - \widetilde{X}\right). \tag{28}$$

Рівняння (28) називають рівнянням регресії Y на X. Співвідношення

$$\frac{Y - \widetilde{Y}}{X - \widetilde{X}} = \rho_{y/x} = tg\varphi \tag{29}$$

виражає кутовий коефіцієнт прямої, яка відповідає рівнянням (21) чи (28).

Отже, завдання визначення параметрів c_1 та c_2 математично тотожне завданню побудови рівняння регресії. Однак за суттю завдання різняться, адже наявність функціональної залежності передбачає, що коефіцієнт кореляції $r_{x,y}^* = \pm 1$. Говорити про встановлення функціонального зв'язку між величинами X та Y за результатами експерименту немає жодних підстав. Це є наслідком того, що результати вимірів обтяжені похибками. Тому апроксимація експериментальних даних забезпечує хоча й однозначне, проте наближене розв’язання завдання вираження закономірності перебігу експерименту обраним типом функціональної залежності.

Метод найменших квадратів призначений для розв’язання системи лінійних вхідних рівнянь. Тому його пряме застосування в задачі апроксимації так, як це розкрито раніше, можливе тільки для вираження лінійних залежностей і залежностей параболічного типу у вигляді поліномів заданої степені. При апроксимації нелінійних функцій (крім поліномів) їх потрібно перетворювати до лінійного вигляду. Перетворення нелінійних рівнянь до лінійного вигляду називають лінеаризацією. Можна виділити два способи лінеаризації.

Перший спосіб, досить простий, полягає в такій заміні змінних, щоб після відповідних підстановок функції були лінійними відносно нових змінних. До цього способу також відносять лінеаризацію шляхом логарифмування нелінійних функцій. Деякі типові приклади такого роду заміни змінних були розкриті раніше. Перетворення нелінійних функцій таким способом дозволяє виразити їх лінійною формою (9).

Розв’язок системи лінійних рівнянь методом найменших квадратів забезпечує визначення новоутворених змінних. За ними потім виражають невідомі параметри нелінійної функції відповідно до проведеної на початку заміни змінних. Однак практично застосувати такий простий спосіб лінеаризації вдається не завжди. Тоді використовують другий спосіб, загальний, який підходить для функцій будь-якого типу. Цей спосіб зводиться до лінеаризації нелінійної функції шляхом розкладання у ряд Тейлора. Обидва декларованих способи апроксимації нелінійних функцій не є предметом вивчення у межах цієї теми.

3. Оцінка точності за результатами апроксимації

Алгоритм розв’язання задачі побудови емпіричних формул аналогічний алгоритму розв’язання задачі зрівноважування вимірів параметричним способом. Відповідно залишається аналогічною група формул оцінки точності за результатами вирішення задачі.

3.1. Оцінка точності прямих результатів експерименту

Точність результатів експерименту y_i характеризують середні квадратичні похибки m_i. Їх емпіричні значення можуть бути встановлені шляхом аналізу умов перебігу експерименту з урахуванням інструментальних, методичних, зовнішніх та особистих чинників виникнення похибок. З іншого боку, оцінку точності можна виконати також за результатами встановлення закономірностей його перебігу. В цьому випадку похибки m_i визначаються за сукупністю результатів y_i, взявши за основу величини відхилень від них відповідних значень встановленої емпіричної формули. Відхилення v_i виражаються рівняннями поправок (15), які є наслідком їх загальної форми (10). Далі, відповідно до формули мінімуму, обчислюється значення $[pv^2] = \underset{1\times n}{V}^T \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times 1}{V}$ і середня квадратична похибка одиниці ваги за формулою Бесселя $\mu = \sqrt{\dfrac{[pv^2]}{n-k}}$. Точність результатів y_i виражає формула $m_i = \dfrac{\mu}{\sqrt{p_i}}$. Ваги p_i для результатів y_i встановлюються з аналізу умов проведення експерименту. Якщо результати експерименту рівноточні, то їх точність виражає формула Бесселя $m = \sqrt{\dfrac{[v^2]}{n-k}}$, де $[v^2] = \underset{1\times n}{V}^T \cdot \underset{n\times 1}{V}$.

Отже, середні квадратичні похибки μ або m визначають точність результатів експерименту. З іншого боку, вони є критерієм вираження закономірностей його перебігу побудованою емпіричною формулою. З усіх типів функцій, які застосовувались для побудови відповідних їм емпіричних формул, найбільш оптимальною буде та, якій відповідає найменше значення μ або m. З цієї причини похибки μ та m при розв’язанні поставленого завдання називають середніми квадратичними похибками апроксимації.

3.2. Оцінка точності параметрів емпіричних формул

Згідно загальної теорії параметричного способу, точність розв’язання задачі зрівноважування визначає матриця вагових коефіцієнтів $\underset{k\times k}{Q}$. Це матриця, обернена до матриці коефіцієнтів системи нормальних рівнянь: $\underset{k\times k}{Q} = \underset{k\times k}{N}^{-1}$. В задачі апроксимації матриця $\underset{k\times k}{Q}$ зумовлює точність визначення параметрів емпіричних формул.

Обернені ваги $\dfrac{1}{P_j}$ невідомих параметрів $\underset{k\times 1}{c}$ системи нормальних рівнянь (18) дорівнюють квадратичним ваговим коефіцієнтам Q_{jj} з відповідними індексами: $\dfrac{1}{P_j} = Q_{jj}$. Середні квадратичні похибки параметрів

$$M_j = \mu\sqrt{Q_{jj}} \qquad (30)$$

розкриває кореляційна матриця $\underset{k\times k}{M^2} = \mu^2 \cdot \underset{k\times k}{Q}$. При апроксимації рівноточних результатів експерименту середні квадратичні похибки параметрів

$$M_j = m\sqrt{Q_{jj}} \tag{31}$$

виражаються діагональними елементами кореляційної матриці $\underset{k\times k}{M^2} = m^2 \cdot \underset{k\times k}{Q}$. Інші (не квадратичні) елементи матриці вагових коефіцієнтів $\underset{k\times k}{Q}$ виражають залежність між параметрами емпіричної формули. Коефіцієнт кореляції між параметрами c_i та c_j виражає формула

$$r_{ij} = \frac{Q_{ij}}{\sqrt{Q_{ii}Q_{jj}}}.$$

3.3. Оцінка точності результатів інтерполяції та екстраполяції

Задачі інтерполяції та екстраполяції полягають у визначенні значень функції Y за значеннями змінної X, які відсутні у табличній формі функції і не брали участі у встановленні емпіричної формули. За своїм змістом ці задачі аналогічні задачі визначення функцій параметрів за результатами зрівноважування параметричним способом. Як наслідок, при оцінці точності результатів інтерполяції та екстраполяції мають силу відповідні формули параметричного способу.

Нехай за емпіричною формулою, яка побудована апроксимацією функції визначеної аналітичної структури за табличною функцією $(x_i; y_i)$, для r значень змінної X обчислено відповідні значення Y: $y_l = F_l(x_l; c_1, \ldots, c_k)$; $l = \overrightarrow{1, r}$.

Згідно теорії параметричного способу, обернену вагу функції параметрів виражають формули

$$\frac{1}{P_F} = \sum_{j=1}^{k} F_j F_j Q_{jj} + 2\sum_{i<j} F_i F_j Q_{ij}$$

чи у матричній формі

$$\frac{1}{P_F} = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & \cdots & F_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1k} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_{k1} & Q_{k2} & \cdots & Q_{kk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \cdots \\ F_k \end{pmatrix} = \underset{1\times k}{F} \cdot \underset{k\times k}{Q} \cdot \underset{k\times 1}{F^T}.$$

Для r значень емпіричної формули, які є результатом інтерполяції та (або) екстраполяції, остання формула набуває вигляду

$$\underset{r\times r}{Q_F} = \underset{r\times k}{F} \cdot \underset{k\times k}{Q} \cdot \underset{k\times r}{F^T} . \tag{32}$$

Вона виражає вагову матрицю r значень емпіричної формули з параметрами c_j, які встановлено апроксимацією методом найменших квадратів. Матриця $\underset{r\times k}{F}$ формується значеннями частинних похідних емпіричної формули за її параметрами c_j:

$$F_{lj} = \left(\frac{\partial F_l}{\partial c_j} \right)_{\circ} . \tag{33}$$

Ними враховується аналітична структура емпіричної формули і значення x_l змінної X. Головна діагональ вагової матриці $\underset{r\times r}{Q_F}$ містить обернені ваги $\frac{1}{P_{y_l}}$ значень функції y_l, які є результатами інтерполяції та (або) екстраполяції за емпіричною формулою. Їх дисперсії розкриває кореляційна матриця $\underset{r\times r}{M^2}$:

$$\underset{r\times r}{M^2} = \mu^2 \cdot \underset{r\times r}{Q_F} ; \tag{34}$$

$$\underset{r\times r}{M^2} = m^2 \cdot \underset{r\times r}{Q_F} . \tag{35}$$

На головній діагоналі кореляційної матриці розташовані квадрати середніх квадратичних похибок результатів інтерполяції та (або) екстраполяції за емпіричною формулою. Їх абсолютні значення

$$M_l = \mu\sqrt{Q_{ll}} ; \tag{36}$$

$$M_l = m\sqrt{Q_{ll}} . \tag{37}$$

Останні формули середніми квадратичними похибками апроксимації μ та m враховують умови нерівноточності (або рівноточності) вхідних результатів експерименту.

ПРИКЛАДИ ПОБУДОВИ ЕМПІРИЧНИХ ФОРМУЛ

Завдання 1.

Провести апроксимацію лінійної функції $Y = c_1X + c_2$ за емпіричними значеннями довжин D і похибок їх виміру $|\Delta|$.

Вихідні дані для виконання завдання студентами денної та заочної форм навчання наведено в додатку 1 та вибираються за номером варіанту N студента.

Приклад. Емпіричні значення довжин D і похибок їх виміру $|\Delta|$ подано у таблиці 1 (n=20). Позначимо: x_i − результати вимірів довжин ліній D, y_i − похибки вимірів довжин Δ.

Допустимо, що емпіричні дані одержані за сталого комплексу умов, тому результати вимірів вважаємо рівноточними.

Таблиця 1 – Емпіричні значення довжин D і похибок їх виміру $|\Delta|$

№	D (км)	$\|\Delta\|$ (см)	№	D (км)	$\|\Delta\|$ (см)
1	8.7	7.0	11	5.7	6.0
2	3.7	3.0	12	4.9	5.0
3	6.0	4.0	13	5.6	3.0
4	3.3	3.0	14	7.6	4.0
5	5.1	4.0	15	4.2	3.0
6	6.1	4.0	16	2.0	2.0
7	2.7	3.0	17	4.0	2.0
8	4.9	4.0	18	6.5	5.0
9	3.1	4.0	19	7.2	6.0
10	3.7	2.0	20	2.7	2.0

Насамперед формуємо матриці коефіцієнтів $\underset{n\times k}{A}$ та вільних членів $\underset{n\times 1}{Y}$ рівнянь поправок (15):

$$\underset{20\times 2}{A} = \begin{pmatrix} 8.7 & 1 \\ 3.7 & 1 \\ 6.0 & 1 \\ 3.3 & 1 \\ 5.1 & 1 \\ 6.1 & 1 \\ 2.7 & 1 \\ 4.9 & 1 \\ 3.1 & 1 \\ 3.7 & 1 \\ 5.7 & 1 \\ 4.9 & 1 \\ 5.6 & 1 \\ 7.6 & 1 \\ 4.2 & 1 \\ 2.0 & 1 \\ 4.0 & 1 \\ 6.5 & 1 \\ 7.2 & 1 \\ 2.7 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \underset{20\times 1}{Y} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \\ 6 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Враховуючи добутки $\underset{2\times20}{A}^T \cdot \underset{20\times2}{A} = \underset{2\times2}{N}$ і $\underset{2\times20}{A}^T \cdot \underset{20\times1}{Y} = \underset{2\times1}{L}$, складаємо нормальне рівняння (18):

$$\underset{2\times2}{N} \cdot \underset{2\times1}{c} - \underset{2\times1}{L} = 0;$$

$$\begin{pmatrix} 538.73 & 97.7 \\ 97.7 & 20 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 409.8 \\ 76 \end{pmatrix} = 0 \cdot$$

За оберненою матрицею $\underset{2\times2}{Q} = \underset{2\times2}{N}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.016269 & -0.079475 \\ -0.079475 & 0.438238 \end{pmatrix}$ з формули (19) тепер легко одержати розв’язок складеного нормального рівняння:

$$\underset{2\times1}{c} = \underset{2\times2}{Q} \cdot \underset{2\times1}{L} = \begin{pmatrix} 0.63 \\ 0.74 \end{pmatrix}.$$

Отже, лінійна емпірична формула, яка виражає залежність похибок вимірів від абсолютних значень довжин ліній за даного комплексу умов, має вигляд $Y = 0.63X + 0.74$ або $\Delta = 0.63D + 0.74$.

Результати апроксимації подано графічно на рисунку 1.

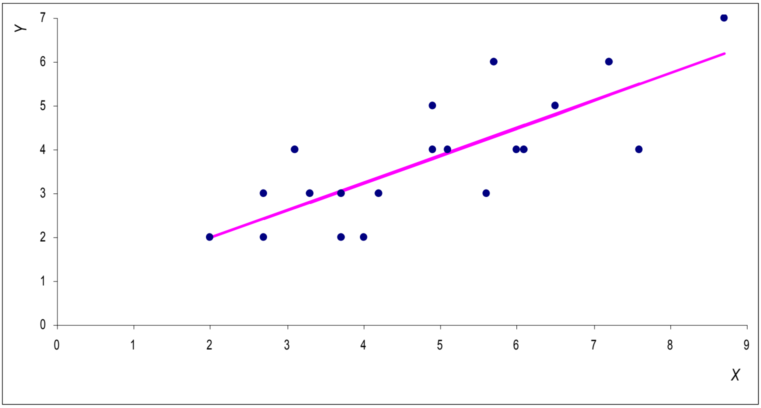


Рисунок 1 – Відображення результатів лінійної апроксимації емпіричних даних

З рівняння (15) виражаємо матрицю поправок $\underset{20\times1}{V}$ і за формулою Бесселя $m=\sqrt{\dfrac{[v^2]}{n-k}}$ обчислюємо середню квадратичну похибку апроксимації, беручи до уваги, що $[v^2]=\underset{1\times20}{V}^T\cdot\underset{20\times1}{V}$. Отже, $m=\sqrt{\dfrac{15.0347}{20-2}}=\pm0.91$. Наостанок виражаємо кореляційну матрицю $\underset{2\times2}{M}^2=m^2\cdot\underset{2\times2}{Q}=\begin{pmatrix}0.0136 & -0.0664\\ -0.0664 & 0.3660\end{pmatrix}$ і за формулою (31) середні квадратичні похибки параметрів емпіричної формули: $M_{c_1}=\pm0.12$; $M_{c_2}=\pm0.61$. Остаточно $c_1=0.63\pm0.12$, $c_2=0.74\pm0.61$. Залежність параметрів c_1 та c_2 можна виразити коефіцієнтом кореляції r_{12}, обчисленим за формулою $r_{ij}=\dfrac{Q_{ij}}{\sqrt{Q_{ii}Q_{jj}}}$: $r_{12}=\dfrac{-0.0795}{\sqrt{0.0163\times0.4382}}=-0.94$.

Зіставлення одержаних результатів із розв'язками завдання математичної статистики «Визначення тісноти і форми кореляційного зв'язку в системі двох випадкових величин» посвідчує наступне: 1) лінійна емпірична формула, побудована методом найменших квадратів, тотожна лінійному рівнянню регресії, яке визначене шляхом кореляційного аналізу заданих емпіричних даних; 2) кутовий коефіцієнт лінійної емпіричної формули c_1 дорівнює коефіцієнту регресії $\rho_{\Delta/D}$; 3) розбіжності абсолютних значень параметрів обох формул не перевищують значення похибок їх обчислення. Отже, одержані результати чисельно підтверджують сформульоване у §2.4 теоретичне обґрунтування тотожності завдань визначення параметрів емпіричних формул і побудови рівняння регресії.

Одержана емпірична формула дає змогу реалізовувати інтерполяцію та (або) екстраполяцію табличних значень функції. Для прикладу оберемо два довільних значення змінної X, які знаходяться всередині (інтерполяція) та поза межами (екстраполяція) табуляції функції, наприклад, $x_{інт} = 3$ км та $x_{екст} = 10$ км. Відповідні їм значення побудованої емпіричної формули будуть $y_{інт} = 2{,}6$ см та $y_{екст} = 7{,}0$ см. Точність останніх можна виразити з формул (32), (35) та (37):

$$\underset{2\times2}{F} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}; \quad \underset{2\times2}{Q_F} = \begin{pmatrix} 0{,}146424 & 0{,}488079 \\ 0{,}488079 & 1{,}626929 \end{pmatrix}; \quad \underset{2\times2}{M^2} = \begin{pmatrix} 0{,}1223 & 0{,}4077 \\ 0{,}4077 & 1{,}3589 \end{pmatrix}.$$

Отже, остаточно $y_{інт} = 2{,}6 \pm 0{,}4$ (см) і $y_{екст} = 7{,}0 \pm 1{,}2$ (см).

Завдання 2.

Визначити оптимальну емпіричну формулу для рівноточних результатів експерименту $(x_i; y_i)$.

Вихідні дані для виконання завдання студентами денної та заочної форм навчання наведено в додатку 2 та вибираються за номером варіанту N студента.

Приклад. Рівноточні результати експерименту $(x_i; y_i)$ подано у таблиці 2. З метою визначення оптимальної емпіричної формули, яка відповідає результатам експерименту, проведемо апроксимацію поліномів різної степені.

Таблиця 2 – Результати експерименту $(x_i; y_i)$

№ вимірів	x_i	y_i
1	273	32,6
2	283	33,7
3	288	34,8
4	293	36,5
5	313	44,6
6	333	55,2
7	353	65,9
8	373	78,3

2.1. Апроксимація лінійної функції $Y = c_1 X + c_2$.

Сформувавши матрицю коефіцієнтів $\underset{8\times2}{A}$ та вільних членів $\underset{8\times1}{Y}$ рівнянь поправок (15), складаємо нормальне рівняння (17):

$$\underset{2\times8}{A^T} \cdot \underset{8\times2}{A} \cdot \underset{2\times1}{c} - \underset{2\times8}{A^T} \cdot \underset{8\times1}{Y} = 0;$$

$$\begin{pmatrix} 273 & 283 & 288 & 293 & 313 & 333 & 353 & 373 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 273 & 1 \\ 283 & 1 \\ 288 & 1 \\ 293 & 1 \\ 313 & 1 \\ 333 & 1 \\ 353 & 1 \\ 373 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} 273 & 283 & 288 & 293 & 313 & 333 & 353 & 373 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 32.6 \\ 33.7 \\ 34.8 \\ 36.5 \\ 44.6 \\ 55.2 \\ 65.9 \\ 78.3 \end{pmatrix} = 0.$$

З урахуванням добутків матриць рівняння перетворюється до вигляду

$$\underset{2\times2}{N} \cdot \underset{2\times1}{c} - \underset{2\times1}{L} = 0;$$

$$\begin{pmatrix} 796007 & 2509 \\ 2509 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 123963.8 \\ 381.6 \end{pmatrix} = 0.$$

За оберненою матрицею $\underset{2\times2}{Q} = \underset{2\times2}{N^{-1}} = \begin{pmatrix} 0.000110 & 0.034382 \\ 0.034382 & 10.907941 \end{pmatrix}$ одержуємо розв’язок нормального рівняння

$$\underset{2\times1}{c} = \underset{2\times2}{Q} \cdot \underset{2\times1}{L} = \begin{pmatrix} 0.000110 & 0.034382 \\ 0.034382 & 10.907941 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 123963.8 \\ 381.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.47 \\ -100 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, лінійна емпірична формула має вигляд $Y = 0.47X - 100$.

Результати апроксимації подано графічно на рис. 2.

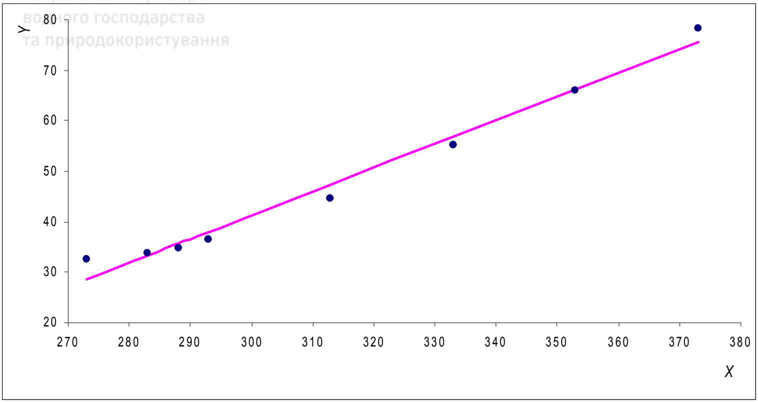


Рисунок 2 – Відображення результатів апроксимації функції $Y = c_1 X + c_2$

Виразивши з рівняння (15) матрицю поправок $\underset{8\times1}{V}$, з урахуванням значення $[v^2] = \underset{1\times8}{V^T} \cdot \underset{8\times1}{V} = 36.9113$ обчислюємо середню квадратичну похибку апроксимації $m = \sqrt{\dfrac{36.9113}{8-2}} = \pm 2.48$.

Точність параметрів емпіричної формули характеризують середні квадратичні похибки

$$M_{c_1} = m\sqrt{Q_{11}} = \pm 0.03 \text{ і } M_{c_2} = m\sqrt{Q_{22}} = \pm 8.$$

2.2. Апроксимація поліному $Y = c_1 X + c_2 X^2 + c_3$.

Матриця коефіцієнтів рівнянь поправок формується елементами $a_{ij} = \left(\dfrac{\partial v_i}{\partial c_j}\right)_\circ = \left(\dfrac{\partial y_i}{\partial c_j}\right)_\circ$ $(i = \overline{1,8},\ j = \overline{1,3})$. Нормальне рівняння має вигляд

$$\underset{3\times8}{A^T} \cdot \underset{8\times3}{A} \cdot \underset{3\times1}{c} - \underset{3\times8}{A^T} \cdot \underset{8\times1}{Y} = 0;$$

$$\begin{pmatrix} 273 & 283 & 288 & 293 & 313 & 333 & 353 & 373 \\ 74529 & 80089 & 82944 & 85849 & 97969 & 110889 & 124609 & 139129 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 273 & 74529 & 1 \\ 283 & 80089 & 1 \\ 288 & 82944 & 1 \\ 293 & 85849 & 1 \\ 313 & 97969 & 1 \\ 333 & 110889 & 1 \\ 353 & 124609 & 1 \\ 373 & 139129 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} -$$

$$
-\begin{pmatrix} 273 & 283 & 288 & 293 & 313 & 333 & 353 & 373 \\ 74529 & 80089 & 82944 & 85849 & 97969 & 110889 & 124609 & 139129 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 32.6 \\ 33.7 \\ 34.8 \\ 36.5 \\ 44.6 \\ 55.2 \\ 65.9 \\ 78.3 \end{pmatrix} = 0
$$

$$
\begin{pmatrix} 796007 & 255525661 & 2509 \\ 255525661 & 82997154503 & 796007 \\ 2509 & 796007 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 123963.8 \\ 407446084 \\ 381.6 \end{pmatrix} = 0.
$$

За оберненою матрицею $\underset{3\times3}{Q} = \underset{3\times3}{N}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.0680639 & -0.0001055 & -10.8535083 \\ -0.0001055 & 0.0000002 & 0.0167899 \\ -10.8535083 & 0.0167899 & 1733.442291 \end{pmatrix}$

виражаємо невідомі параметри квадратичного поліному $Y = c_1 X + c_2 X^2 + c_3$:

$$
\underset{3\times1}{c} = \underset{3\times3}{Q} \cdot \underset{3\times1}{L} =
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0.0680639 & -0.0001055 & -10.8535083 \\ -0.0001055 & 0.0000002 & 0.0167899 \\ -10.8535083 & 0.0167899 & 1733.442291 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 123963.8 \\ 40744608.4 \\ 381.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.0 \\ 0.0023 \\ 139 \end{pmatrix}.
$$

Отже, маємо емпіричну формулу $Y = -X + 0.0023X^2 + 139$.

Результати апроксимації подано графічно на рис. 3.

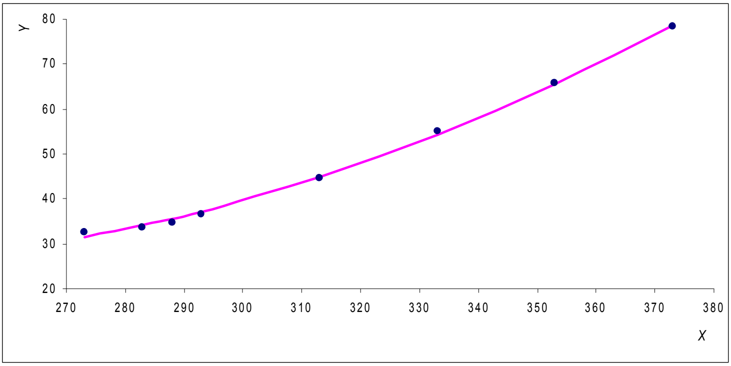


Рисунок 3 – Відображення результатів апроксимації функції $Y = c_1 X + c_2 X^2 + c_3$

Наприкінці, виразивши з рівняння $\underset{8\times1}{V} = \underset{8\times3}{A} \cdot \underset{3\times1}{c} - \underset{8\times1}{Y}$ матрицю поправок, обчислюємо значення $[v^2] = \underset{1\times8}{V}^T \cdot \underset{8\times1}{V} = 3.8056$ і середню квадратичну похибку апроксимації $m = \sqrt{\dfrac{3.8056}{8-3}} = \pm 0.87$ ·

За результатами апроксимації середні квадратичні похибки параметрів емпіричної формули набувають наступних значень:

$$M_{c_1} = \pm 0.2,\ \ M_{c_2} = \pm 0.0004,\ \ M_{c_3} = \pm 36.$$

2.3. Апроксимація поліному $Y = c_1 X + c_2 X^2 + c_3 X^3 + c_4$**.**

Матриця коефіцієнтів рівнянь поправок має структуру

$$\underset{8\times4}{A} = \begin{pmatrix} 273 & 74529 & 20346417 & 1 \\ 283 & 80089 & 22665187 & 1 \\ 288 & 82944 & 23887872 & 1 \\ 293 & 85849 & 25153757 & 1 \\ 313 & 97969 & 30664297 & 1 \\ 333 & 110889 & 36926037 & 1 \\ 353 & 124609 & 43986977 & 1 \\ 373 & 139129 & 51895117 & 1 \end{pmatrix}.$$

З урахуванням добутків $\underset{4\times8}{A}^T \cdot \underset{8\times4}{A} = \underset{4\times4}{N}$ і $\underset{4\times8}{A}^T \cdot \underset{8\times1}{Y} = \underset{4\times1}{L}$ нормальне рівняння (18) набуває вигляду $\underset{4\times4}{N} \cdot \underset{4\times1}{c} - \underset{4\times1}{L} = 0$:

$$\begin{pmatrix} 796007 & 255525661 & 82997154503 & 2509 \\ 255525661 & 82997154503 & 2.72725\times10^{13} & 796007 \\ 82997154503 & 2.72725\times10^{13} & 9.06282\times10^{15} & 255525661 \\ 2509 & 796007 & 255525661 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 123963.8 \\ 40744608.4 \\ 13544594406 \\ 381.6 \end{pmatrix} = 0.$$

Тепер, з урахуванням $\underset{4\times4}{Q} = \underset{4\times4}{N}^{-1}$, розв'язок рівняння

$$\underset{4\times1}{c} = \underset{4\times4}{Q} \cdot \underset{4\times1}{L} =$$

$$= \begin{pmatrix} 20.34466 & -0.0632170 & 0.0000651 & -2169.301 \\ -0.0632170 & 0.0001966 & -0.0000002 & 6.735023 \\ 0.0000651 & -0.0000002 & 2\times10^{-10} & -0.0069283 \\ -2169.301 & 6.735023 & -0.0069283 & 231500.5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 123963.8 \\ 40744608.4 \\ 13544594406 \\ 381.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0.027 \\ -0.000025 \\ 983 \end{pmatrix},$$

Отже, емпірична формула, побудована апроксимацією кубічного поліному, має вигляд $Y = -9X + 0.027X^2 - 0.000025X^3 + 983$. Результати апроксимації подано графічно на рис. 4.

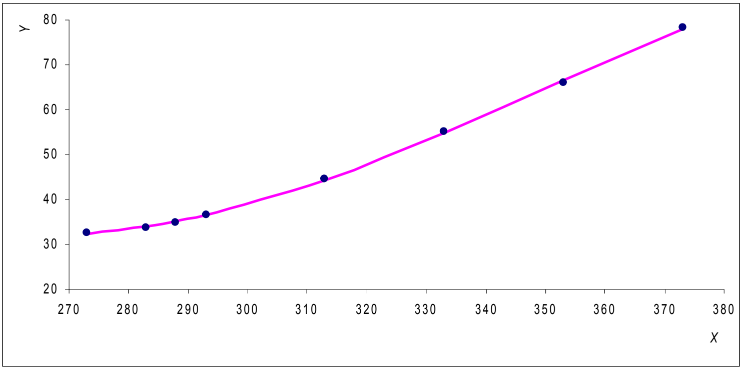


Рисунок 4 – Відображення результатів апроксимації функції

$$Y = c_1 X + c_2 X^2 + c_3 X^3 + c_4$$

Насамкінець оцінимо точність розв'язку. Матриця поправок $\underset{8\times1}{V} = \underset{8\times4}{A} \cdot \underset{4\times1}{c} - \underset{8\times1}{Y}$ і $[v^2] = \underset{1\times8}{V^T} \cdot \underset{8\times1}{V} = 0{,}7033$, тому середня квадратична похибка апроксимації $m = \sqrt{\dfrac{0.7033}{8-4}} = \pm 0.42$. Точність параметрів емпіричної формули виражають середні квадратичні похибки $M_{c_1} = \pm 2$, $M_{c_2} = \pm 0.006$, $M_{c_3} = \pm 0.000006$, $M_{c_4} = \pm 201$.

Таким чином, з точки зору точності результати апроксимації показали значення середніх квадратичних похибок ±2.48, ±0.87 і ±0.42 для функцій $Y = c_1 X + c_2$, $Y = c_1 X + c_2 X^2 + c_3$ і $Y = c_1 X + c_2 X^2 + c_3 X^3 + c_4$ відповідно.

Порівняння похибок апроксимації дає підстави зробити висновок: найменша похибка досягнута апроксимацією кубічним поліномом $Y = c_1 X + c_2 X^2 + c_3 X^3 + c_4$, тому відповідну цій функції емпіричну формулу слід визнати найбільш оптимальною для вираження закономірності у межах заданих результатів експерименту.

Такий висновок підтверджує також порівняння графічного відображення результатів апроксимації на рисунках 2, 3 і 4: на останньому рисунку крива емпіричної формули найкраще описує точки, які відображають табличну функцію.

Питання для самостійної роботи

1. Зміст задачі апроксимації функцій за результатами вимірів.
2. В чому полягає принцип найменших квадратів?
3. Зміст оцінки точності результатів інтерполяції та екстраполяції.
4. Зміст задачі побудови емпіричних формул.
5. Види функцій та їх графіки.
6. Який зміст задачі екстраполяції?
7. Що характеризують середні квадратичні похибки апроксимації?
8. Який зміст задачі інтерполяції?
9. Що виражає рівняння регресії і як воно використовується на практиці?
10. Який зміст поняття лінійної імовірнісної залежності в системі двох випадкових величин?
11. Зміст оцінки точності параметрів емпіричних формул.

ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Большаков В.Д., Маркузе Ю.И. Практикум по теории математической обработки геодезических измерений. Навч. посібник. – М.: Недра, 1984. – 352с.
2. Большаков В.Д. Теория ошибок наблюдений. Підручник. – М.: Недра, 1983. – 223с.
3. Войтенко С.П. Математична обробка геодезичних вимірів. Метод найменших квадратів. Навч. посібник. – К.: КНУБА, 2005. – 236 с.
4. Зазуляк П.М., Гавриш В.І., Євсеєва Е.М., Йосипчук М.Д. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірювань. Підручник. – Львів: Растр-7, 2007. – 408 с.
5. Мазмишвили А.И. Способ наименьших квадратов. Навч. посібник. – Москва: Недра, 1968. – 437с.

ДОДАТКИ

Додаток 1

Вихідні дані для виконання завдання №1

N	D(км)	|Δ| (см)	N	D(км)	|Δ| (см)	N	D(км)	|Δ| (см)
1	8.7	7.0	31	6.3	5.0	61	6.4	4.0
2	5.4	3.0	32	4.7	4.0	62	8.6	7.0
3	3.7	3.0	33	3.5	3.0	63	2.4	3.0
4	6.8	4.0	34	5.6	3.0	64	5.3	3.0
5	7.7	5.0	35	7.6	4.0	65	8.7	6.0
6	6.0	4.0	36	3.9	4.0	66	3.6	3.0
7	3.2	4.0	37	4.2	3.0	67	4.5	3.0
8	2.5	3.0	38	6.6	5.0	68	5.9	4.0
9	3.3	3.0	39	3.7	3.0	69	7.1	6.0
10	6.5	4.0	40	2.0	2.0	70	2.6	3.0
11	5.1	4.0	41	4.1	3.0	71	8.8	7.0
12	5.8	4.0	42	8.3	7.0	72	2.2	3.0
13	7.9	6.0	43	4.0	2.0	73	6.2	4.0
14	6.1	4.0	44	7.8	6.0	74	4.8	3.0
15	7.2	6.0	45	6.5	5.0	75	2.9	3.0
16	8.4	7.0	46	3.8	3.0	76	7.3	6.0
17	2.7	3.0	47	7.2	6.0	77	2.8	3.0
18	3.2	3.0	48	5.6	5.0	78	8.1	7.0
19	4.9	4.0	49	5.1	4.0	79	8.5	7.0
20	4.6	3.0	50	2.7	2.0	80	7.5	4.0
21	3.1	4.0	51	7.6	5.0	81	3.4	3.0
22	2.7	2.0	52	7.5	6.0	82	5.5	4.0
23	4.1	3.0	53	2.1	3.0	83	5.6	4.0
24	3.7	2.0	54	4.4	3.0	84	7.6	5.0
25	3.9	3.0	55	6.9	5.0	85	7.9	5.0
26	7.4	6.0	56	4.3	3.0	86	3.8	4.0
27	5.7	6.0	57	8.2	7.0	87	7.2	5.0
28	5.0	4.0	58	6.7	5.0	88	5.6	4.0
29	8.9	7.0	59	5.2	4.0	89	6.1	5.0
30	4.9	5.0	60	2.3	3.0	90	7.2	5.0

Додаток 2

Вихідні дані для виконання завдання №2

№ варіанту студента	№ вимірів	x_i	y_i	№ варіанту студента	№ вимірів	x_i	y_i	№ варіанту студента	№ вимірів	x_i	y_i	№ варіанту студента	№ вимірів	x_i	y_i
1	1	271	27,4	**4**	1	272	25,6	**7**	1	274	29,9	**10**	1	278	31,5
	2	280	33,1		2	284	34,0		2	284	33,5		2	285	35,7
	3	286	31,8		3	295	37,5		3	289	35,0		3	296	39,4
	4	291	37,2		4	309	45,1		4	295	36,9		4	303	40,9
	5	311	40,5		5	338	57,2		5	316	45,1		5	325	50,3
	6	325	52,2		6	352	65,5		6	334	56,3		6	340	57,8
	7	356	64,9		7	365	72,3		7	355	66,1		7	362	68,0
	8	375	75,0		8	378	76,8		8	376	77,7		8	376	74,9
2	1	273	28,0	**5**	1	273	32,0	**8**	1	275	30,0	**11**	1	274	33,9
	2	288	35,1		2	281	32,7		2	280	32,3		2	283	34,3
	3	303	41,9		3	288	35,0		3	290	34,8		3	292	36,7
	4	322	50,8		4	292	35,9		4	302	40,1		4	300	41,2
	5	333	56,2		5	314	44,9		5	315	44,9		5	330	55,0
	6	353	65,7		6	335	57,1		6	322	51,2		6	358	66,1
	7	362	69,0		7	363	70,9		7	359	68,0		7	365	71,6
	8	373	74,9		8	371	76,2		8	372	76,6		8	372	73,9
3	1	279	30,3	**6**	1	277	29,6	**9**	1	276	31,2	**12**	1	276	32,8
	2	286	36,7		2	284	35,5		2	289	35,2		2	288	36,0
	3	298	40,6		3	296	38,9		3	291	36,8		3	305	43,5
	4	307	42,4		4	305	41,3		4	299	40,0		4	328	52,1
	5	325	50,1		5	323	50,1		5	318	44,3		5	336	55,9
	6	343	59,0		6	341	58,0		6	337	55,1		6	349	60,0
	7	360	67,2		7	361	66,2		7	356	67,4		7	359	68,7
	8	377	71,8		8	373	74,7		8	374	75,2		8	375	75,4