

УДК 519.87

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗМІШАНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

О. І. Степаненко

студент 4 курсу, група ТЕ-41, навчально-науковий інститут водного господарства
та природооблаштування

Науковий керівник – к.т.н., доцент О. Ю. Тимейчук

*Національний університет водного господарства та природокористування,
м. Рівне, Україна*

Наведена постановка змішаної крайової задачі для рівняння теплопровідності в одномірному випадку та приклад її розв'язку з використанням явної різницевої схеми. Отримано результати в табличному і графічному вигляді та запропоновані області, в яких можна розв'язати дану задачу.

Ключові слова: лапласіан, коефіцієнт температуропровідності, явна різницева схема.

Приведена постановка смешанной краевой задачи для уравнения теплопроводности в одномерном случае и пример её решения с использованием явной разностной схемы. Получены результаты в табличном и графическом виде и предложены области, где можно решить данную задачу.

Ключевые слова: лапласиан, коэффициент температуропроводности, явная разностная схема.

The paper suggests the formulation of the mixed boundary value problem for the heat conductivity equation in one-dimensional case and the example of its solution with the use of explicit difference scheme. The results are obtained in tabular and graphical form and the areas in which this problem can be solved are suggested.

Keywords: laplacian, temperature conductivity coefficient, explicit difference scheme.

Лінійні диференціальні рівняння з частковими похідними (найчастіше другого порядку) називають рівняннями математичної фізики. Ці рівняння описують реальні фізичні процеси і до них відносяться рівняння еліптичного, параболічного та гіперболічного типів (табл. 1, Δ – диференціальний оператор Лапласа або лапласіан).

Таблиця 1

Типи рівнянь математичної фізики в канонічній формі

№ з/п	Тип рівняння	Назва рівняння	Канонічна форма рівняння	Які реальні процеси описують
1	Еліптичний	Пуассона	$\Delta u = F(\vec{x})$	Стаціонарні та квазістаціонарні потенціальні гідрогазодинамічні потоки, $F(\vec{x})$ – інтенсивність дії внутрішніх джерел поля.
		Лапласа	$\Delta u = 0$	
2	Параболічний	дифузії, переносу	$\frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + F(\vec{x}, t)$	Нестаціонарні процеси дифузії та переносу тепла.
3	Гіперболічний	хвильове	$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + F(\vec{x}, t)$	Нестаціонарні процеси поширення коливань в струнах.

Рівняння теплопровідності відноситься до рівнянь *параболічного типу* і описує нестационарні процеси дифузії та переносу тепла.

В загальному випадку воно записується так

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \cdot \Delta T, \quad (1)$$

де $\Delta T \equiv \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$; $a^2 = \lambda / (c \cdot \rho)$ – коефіцієнт температуропровідності.

Рівняння теплопровідності в одновірній постановці має такий вигляд

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (2)$$

Рівняння (2) описує процес поширення тепла в стержні довжиною l . Оскільки температурний режим досліджуємо протягом часу t_1 , то областю задання рівняння (2) є фазова область $G = \{ (x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq t_1 \}$ (рис. 1).

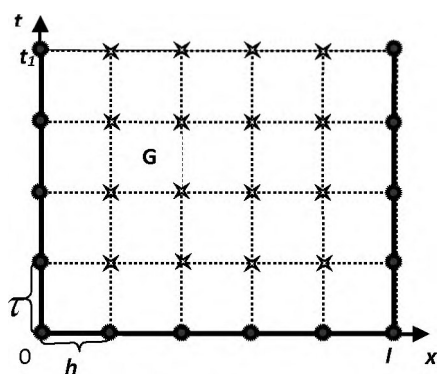


Рис. 1. Область задання рівняння теплопровідності

Нехай відомо розподіл температур в стержні $[0, l]$ в початковий момент часу $t=0$

$$T(x, 0) = f(x), \quad (3)$$

а на кінцях стержня підтримується задана температура, яка може змінюватись з часом ($0 \leq t \leq t_1$), за законом

$$\begin{cases} T(0, t) = \varphi(t), \\ T(l, t) = \phi(t), \end{cases} \quad (4)$$

Крайова задача (2)-(4) є *змішаною крайовою задачею для рівняння теплопровідності* з граничними умовами першого роду (перша крайова задача для рівняння теплопровідності).

Покриємо область G різницевою сіткою: $x_i = i \cdot h$, $i = \overline{1, n-1}$, $t_k = k \cdot \tau$, $k = \overline{1, m-1}$, де $h = l/n$, $\tau = t_1/m$ – відповідно кроки по осях Ox та Oy .

Введемо такі позначення: $T(x_i, t_k) = T_i^k$, $f(x_i) = f_i$, $\varphi(t_k) = \varphi_k$, $\phi(t_k) = \phi_k$.

Апроксимуємо часткові похідні різницевиими співвідношеннями і в результаті отримуємо *явну різницеву схему* змішаної задачі (2)-(4):

$$\begin{cases} T_i^{k+1} = (1 - 2 \cdot \sigma) \cdot T_i^k + \sigma \cdot (T_{i-1}^k + T_{i+1}^k), & i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, m-1}, \\ T_i^0 = f_i, & i = \overline{0, n}, \\ T_0^k = \varphi_k, & k = \overline{1, m}, \\ T_n^k = \phi_k, & k = \overline{1, m}. \end{cases} \quad (5)$$

де $\sigma = \frac{a^2 \cdot \tau}{h^2}$.

Доведено, що явна різницева схема (5) є стійкою при $0 < \sigma \leq 0.5$.

Найбільш часто розглядають два випадки: $\sigma = \frac{1}{2}$: $T_i^{k+1} = \frac{1}{2}(T_{i-1}^k + T_{i+1}^k)$;

$$\sigma = \frac{1}{6} : T_i^{k+1} = \frac{1}{6}(T_{i-1}^k + 4 \cdot T_i^k + T_{i+1}^k);$$

Приклад розрахунку розподілу температури в стержні за допомогою явної різницевої схеми

Знайти розподіл температури $T(x, t)$, який задовольняє рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

в чавунному стержні довжиною $l=0.1$ м.

На кінцях стержня підтримуються такі температури:

$$T(0, t) = T_1 = 1000^\circ C, \quad T(l, t) = T_2 = 400^\circ C,$$

а розподіл температури в початковий момент часу здійснюється за нелінійним законом

$$T(x, 0) = \frac{T_2 - T_1}{l^2} \cdot x^2 + T_1.$$

Розв'язання

1. За таблицями фізичних величин знайдемо їх значення для чавуну:

$$\lambda = 63 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}, \quad c = 0.5 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}, \quad \rho = 7220 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3},$$

і обчислимо коефіцієнт теплопровідності:

$$a^2 = \frac{\lambda}{c \cdot \rho} = \frac{63}{0.5 \cdot 7220} = 0.0175 \text{ (м}^2/\text{с)}.$$

2. Виберемо $n=5$ – число поділу відрізка $[0, l]$.

3. Обчислимо крок розбиття відрізка $[0, l]$:

$$h = \frac{l}{n} = \frac{0.1}{5} = 0.02 \text{ (м)}.$$

4. Обчислимо крок по часу при $\sigma = \frac{1}{6}$:

$$\tau = \frac{\sigma \cdot h^2}{a^2} = \frac{h^2}{6 \cdot a^2} = \frac{0.02^2}{6 \cdot 0.0175} \approx 0.0038 \text{ (с)}.$$

5. Задамо кількість кроків по часу $m=3$.

6. Покриємо область $G = \{ (x, t) : 0 < x < l, 0 < t < t_1 \}$ прямокутною різницевою сіткою з кроками $h=0.02$ (м) і $\tau=0.0038$ (с) і отримаємо фазову область розподілу температури (рис. 2).

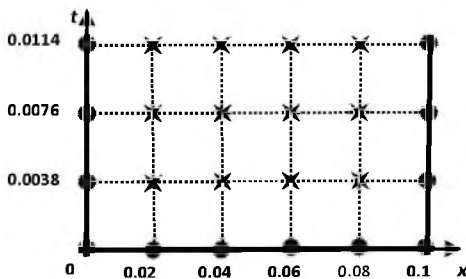


Рис. 2. Фазова область розподілу температури в стержні

Явна різницева схема даної задачі:

$$T_i^{k+1} = \frac{1}{6}(T_{i-1}^k + 4 \cdot T_i^k + T_{i+1}^k), \quad i = \overline{1, 4}, \quad j = \overline{1, 3}, \quad (6)$$

$$T_i^0 = \frac{T_2 - T_1}{l^2} \cdot x_i^2 + T_1, \quad i = \overline{0, 5}, \quad (7)$$

$$T_0^k = T_1, \quad k = \overline{1, 3}, \quad (8)$$

$$T_n^k = T_2, \quad k = \overline{1, 3}. \quad (9)$$

7. Використовуючи початкову умову (7) обчислимо температуру T_i^0 , $i = \overline{0, 5}$ та $k=0$.

8. Використовуючи граничні умови (8)-(9) обчислимо T_0^k, T_n^k , $k = \overline{1, m}$, $i=0$ та $i=5$.

9. Використовуючи рекурентну формулу (6) обчислимо температуру T_i^{k+1} , $i = \overline{1, n-1}$, $k = \overline{1, m}$, у внутрішніх вузлах сітки ($i = \overline{1, 4}$, $k = \overline{1, 3}$).

Таблиця 2

Розрахунок розподілу температури в стержні

		i					
		0	1	2	3	4	5
k	t	h					
		0	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1
0	0	1000	976	904	784	616	400
1	$\tau=0.0038$	1000	968	896	776	608	400
2	$2\tau=0.0076$	1000	961	888	768	601	400
3	$3\tau=0.0114$	1000	955	880	760	595	400

10. Будуємо часові та просторові розгортки температури у вигляді графіків (рис. 3 – при постійних значеннях x_{\otimes} та рис. 4 – при постійних значеннях t_{\otimes})

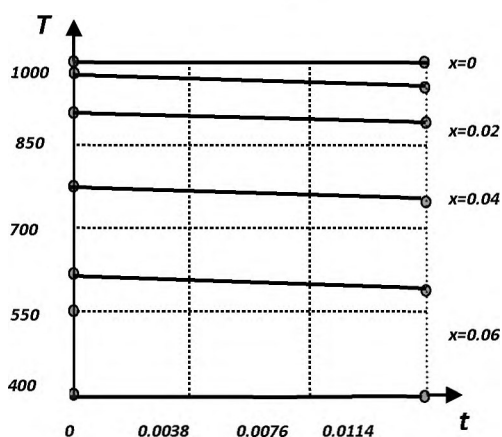


Рис. 3. Графіки $T=T(x_{\otimes}, t)$

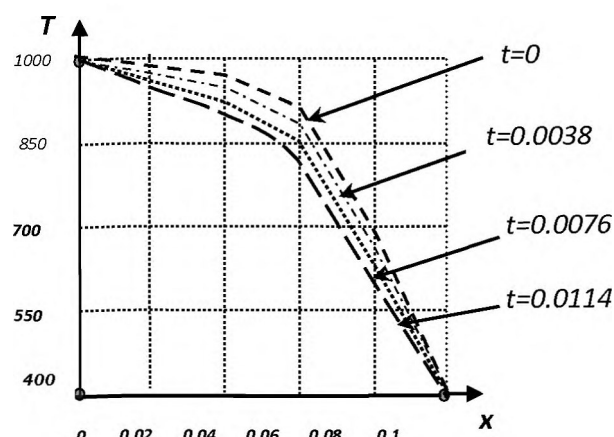


Рис. 4. Графіки $T=T(x, t_{\otimes})$

Як видно з таблиці 2 та графіка (рис. 4) різниця температур з кожним кроком по часу зменшується, тобто нестационарний процес розподілу температури стає майже стаціонарним або квазістаціонарним.

Висновок: Дану змішану крайову задачу для рівняння теплопровідності можна розв'язати для випадків дво- і тривимірних областей та в областях, де безпосереднє вимірювання температури неможливе.

Список використаних джерел:

1. Беляев Н. М. Основы теплопередачи / Н. М. Беляев – К. : Вища школа, 1989. – 344 с.
2. Теплопередача / Исаченко В. П. и др. – М. : Энергоиздат, 1981. – 416 с.
3. Калиткин Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин – М. : Наука, 1978. – 512 с.
4. Керн Д. Развитие поверхности теплообмена / Д. Керн, А. Краус – М. : Энергия, 1977. – 464 с.
5. Михеев М. А. Основы теплопередачи / М. А. Михеев, И. М. Михеев – М. : Энергия, 1977. – 342 с.
6. Никитенко Н. И. Исследование процессов тепло- и массообмена методом сеток / Н. И. Никитенко – К. : Наукова думка, 1978. – 211 с.
7. Никитенко Н. И. Теория тепло-массообмена / Н. И. Никитенко – К. : Наукова думка, 1983. – 352 с.
8. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский – М. : Наука, 1977. – 735 с.
9. Тимейчук О. Ю. Математичні моделі та оптимізація тепломасообміну : навчальний посібник / О. Ю. Тимейчук. – Рівне : НУВГП, 2010. – 50 с.