УДК 519.87

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА

Р. М. Шабасюк
студент 4 курсу, група ТЕ-41, навчально-науковий інститут водного господарства та природооблаштування
Науковий керівник – старший викладач В. М. Кузьменко

Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне, Україна

Наведена постановка задачі Діріхле для рівняння Лапласа в двовимірній постановці та приклад її чисельного розв'язку. Отримано результати в табличному вигляді та запропоновані області, де можна розв'язати дану задачу.
Ключові слова: лапласіан, різницева схема, п'ятиточковий шаблон „хрест».

Приведена постановка задачи Дирихле для уравнения Лапласа в двумерном случае и пример её численного решения. Получены результаты в табличном виде и предложены области, где можно решить данную задачу.
Ключевые слова: лапласиан, разностная схема, пятиточечный шаблон «крест».

The formulation of the Dirichlet problem for the Laplace equation in two-dimensional setting and the example of its numerical solution are suggested. The results are obtained in tabular form and the .areas in which you can solve the given problem are suggested.
Keywords: laplacian, difference scheme, five-spot pattern «cross».

Рівняння Лапласа у двовимірному випадку має такий вигляд: $\Delta u \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$,

де Д – диференціальний оператор Лапласа або лапласіан. Це рівняння відноситься до рівнянь еліптичного типу і описує стаціонарні та квазістаціонарні потенціальні гідро-теплодинамічні потоки, електромагнітні поля, форми поверхонь мембран тощо.

Задача Діріхле для рівняння Лапласа

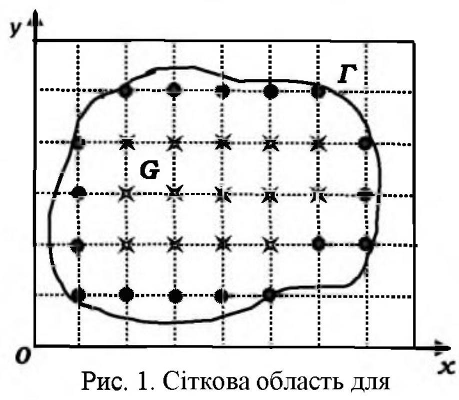

Рис. 1. Сіткова область для неперервної області G

Задача Діріхле для рівняння Лапласа формулюється так: знайти функцію $u=u(x, y)$, що задовольняє в області $\boldsymbol{G}$ рівняння

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

а на межі $\boldsymbol{\Gamma}$ задовольняє граничним умовам –

$$u|_{\Gamma} = \varphi(x, y). \tag{2}$$

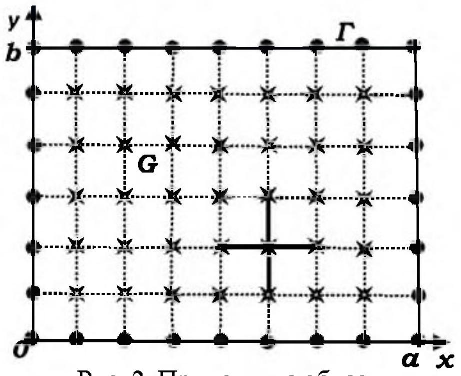

Рис. 2. Прямокутна область розв'язування задачі Діріхле

Розглянемо випадок прямокутної області G – прямокутник з розмірами $a \times b$ (рис. 2).

Виберемо п'ятиточковий шаблон „хрест». Замінимо часткові похідні в рівнянні (1) їх різницевими співвідношеннями і отримаємо розрахункову формулу для отримання температури у внутрішніх вузлах:

$$u_{ij} = \frac{1}{4}\left(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}\right), \quad i = \overline{1,n-1}, \quad j = \overline{1,m-1}. \qquad (3)$$

Граничні умови (2) матимуть такий вигляд:

$$\begin{cases} u_{i0} = \varphi_{i0}, & u_{im} = \varphi_{im}, \quad i = \overline{1,n-1}, \\ u_{0j} = \varphi_{0j}, & u_{nj} = \varphi_{nj}, \quad j = \overline{1,m-1}. \end{cases} \qquad (4)$$

Чисельний метод розв'язування різницевої схеми

Відповідно методу Лібмана обчислення будемо вести так:

1) виберемо початкове наближення $u_{ij}^{(0)}$ як середнє арифметичне значення в чотирьох сусідніх граничних вузлах:

$$u_{ij}^{(0)} = \frac{1}{4}\left(u_{i0} + u_{im} + u_{0j} + u_{nj}\right), \quad i = \overline{1,n-1}, \quad j = \overline{1,m-1}, \qquad (5)$$

2) послідовні наближення $u_{ij}^{(k+1)}$ будемо шукати за ітераційною формулою

$$u_{ij}^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(u_{i-1,j}^{(k)} + u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)}\right), \quad i = \overline{1,n-1}, \quad j = \overline{1,m-1}. \qquad (6)$$

Алгоритм розв'язання задачі Діріхле

1. Задану область G покрити квадратною сіткою з кроком h.
2. Обчислити значення функції *u(x,y)* в граничних вузлах сітки за формулою (4).
3. Обчислити початкові наближення $u_{ij}^{(0)}$ за формулою (5).
4. Обчислювати послідовні наближення $u_{ij}^{(k+1)}$ в кожному внутрішньому вузлі сітки за формулою (6) до виконання умови:

$$\left|u_{ij}^{(k+1)} - u_{ij}^{(k)}\right| \le \varepsilon, \quad i = \overline{1,n-1}, \quad j = \overline{1,m}. \qquad (7)$$

Приклад розрахунку стаціонарного розподілу температури в пластині

Провести чисельний розрахунок стаціонарного розподілу температури *T(x, y)* у внутрішніх точках прямокутної пластини з розмірами $a=4$ і $b=3$ $(0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le b)$, який описується рівнянням Лапласа $\Delta T \equiv 0$ в області G і задовольняє такі граничні умови:

на нижній *(y=0)* та верхній *(y=b)* сторонах пластини підтримується стала температура:

$$T(x,0) = T_1, \qquad (8)$$

$$T(x,b) = T_2, \qquad (9)$$

на бічних сторонах *(x=0* та *x=a)* температура змінюється за такими законами:

$$T(0,y) = \frac{T_2 - T_1}{b} \cdot y + T_1, \qquad (10)$$

$$T(a,y) = \frac{T_2 - T_1}{b^2} \cdot y^2 + T_1. \qquad (11)$$

Розв'язання

Нехай $T_1 = 20^\circ C$, $\quad T_2 = 530^\circ C$ і точність обчислення температури $\varepsilon = 0.5$.

1. Задану область G покриємо квадратною сіткою з кроком $h=1$.
2. Обчислимо значення температури в граничних вузлах сітки (на сторонах пластини):

нижня сторона (за формулою (8)): $T_{io}^{(0)} = 20^\circ C, \qquad i=\overline{1,3}$,

верхня сторона (за формулою (9)): $T_{i3}^{(0)} = 530^\circ C, \qquad i=\overline{1,3}$,

ліва сторона (за формулою (10)):

$$T_{01}^{(0)} = \frac{(530-20)}{3}\cdot 1 + 20 = 190^\circ C, \qquad T_{02}^{(0)} = \frac{(530-20)}{3}\cdot 2 + 20 = 360^\circ C,$$

права сторона (за формулою (11)):

$$T_{41}^{(0)} = \frac{(530-20)}{3^2}\cdot 1^2 + 20 = 76.67^\circ C, \qquad T_{42}^{(0)} = \frac{(530-20)}{3^2}\cdot 2^2 + 20 = 246.67^\circ C.$$

3. Обчислимо початкові $T_{ij}^{(0)}$ за формулою (5) і запишемо в 1-й рядок таблиці:

$$T_{11}^{(0)} = \frac{1}{4}\left(T_{10}^{(0)} + T_{13}^{(0)} + T_{01}^{(0)} + T_{41}^{(0)}\right) = \frac{1}{4}(20+530+190+76.67) = 204.17\,^\circ C,$$

$$T_{21}^{(0)} = \frac{1}{4}\left(T_{20}^{(0)} + T_{23}^{(0)} + T_{01}^{(0)} + T_{41}^{(0)}\right) = \frac{1}{4}(20+530+190+76.67) = 204.17\,^\circ C,$$

$$T_{31}^{(0)} = \frac{1}{4}\left(T_{30}^{(0)} + T_{33}^{(0)} + T_{01}^{(0)} + T_{41}^{(0)}\right) = \frac{1}{4}(20+530+190+76.67) = 204.17\,^\circ C,$$

$$T_{12}^{(0)} = \frac{1}{4}\left(T_{10}^{(0)} + T_{13}^{(0)} + T_{02}^{(0)} + T_{42}^{(0)}\right) = \frac{1}{4}(20+530+360+246.67) = 289.17\,^\circ C,$$

$$T_{22}^{(0)} = \frac{1}{4}\left(T_{20}^{(0)} + T_{23}^{(0)} + T_{02}^{(0)} + T_{42}^{(0)}\right) = \frac{1}{4}(20+530+360+246.67) = 289.17\,^\circ C,$$

$$T_{32}^{(0)} = \frac{1}{4}\left(T_{30}^{(0)} + T_{33}^{(0)} + T_{02}^{(0)} + T_{42}^{(0)}\right) = \frac{1}{4}(20+530+360+246.67) = 289.17\,^\circ C.$$

4. Обчислюємо і записуємо в таблицю послідовні наближення $T_{ij}^{(k+1)}$ в кожному внутрішньому вузлі сітки до виконання умови: $\left|T_{ij}^{(k+1)} - T_{ij}^{(k)}\right| \le \varepsilon = 0.5$, $\quad i=\overline{1,n-1}, \quad j=\overline{1,m}$.

Таблиця

№	$T_{11}^{(k)}$	$T_{21}^{(k)}$	$T_{31}^{(k)}$	$T_{12}^{(k)}$	$T_{22}^{(k)}$	$T_{32}^{(k)}$
0	*204.17*	*204.17*	*204.17*	*289.17*	*289.17*	*289.17*
1	*175.83*	*172.29*	*139.53*	*338.75*	*332.55*	*312.19*
2	*180.26*	*168.09*	*144.24*	*350.70*	*340.24*	*315.29*
3	*182.20*	*171.67*	*145.91*	*353.11*	*342.52*	*316.27*
4	*183.69*	*173.03*	*146.49*	*354.05*	*343.34*	*316.62*
5	*184.27*	*173.53*	*146.70*	*354.40*	*343.64*	*316.75*
6	**184.48**	**173.71**	**146.78**	**354.53**	**343.75**	**316.80**

Як видно з таблиці, на шостому кроці ітерацій отримали квазістаціонарний розподіл температур у внутрішніх вузлах пластини (різниця температур на п’ятому і шостому кроках менша заданої точності $\varepsilon = 0.5$, тобто виконалась умова (7)).

Висновок: Задачу Діріхле для рівняння Лапласа можна розв’язати:

- в областях, де безпосереднє вимірювання температури неможливе;
- у випадку криволінійних областей, але при цьому кроки ітерацій по довжині та ширині області можуть бути різними.

Список використаних джерел:

1. Беляев Н. М. Основы теплопередачи / Н. М. Беляев. – К. : Вища школа, 1989. – 344 с. **2.** Теплопередача / Исаченко В. П. и др. – М. : Энергоиздат, 1981. – 416 с. **3.** Калиткин Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. – М. : Наука, 1978. – 512 с. **4.** Михеев М. А. Основы теплопередачи / М. А. Михеев, И. М. Михеев. – М. : Энергия, 1977. – 342 с. **5.** Никитенко Н. И. Исследование процессов тепло- и массообмена методом сеток / Н. И. Никитенко – К. : Наукова думка, 1978. – 211 с. **7.** Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1977. – 735 с. **8.** Тимейчук О. Ю. Математичні моделі та оптимізація тепломасообміну : навчальний посібник / О. Ю. Тимейчук. – Рівне : НУВГП, 2010. – 50 с.