Müller-Breslau,
профессоръ политехникума въ Берлинѣ.

Выпускъ IX.

# Графическая статика сооруженій.

Переводъ съ послѣдняго нѣмецкаго изданія.

Г. Г. Кривошеинъ,
Военный инженеръ, преподаватель Николаевской Инженерной Академіи и Училища.

П. Н. Казинъ,
Военный инженеръ.

Томъ II.

Содержаніе выпуска IX:

II. Формулы, правила и примѣры расчета важнѣйшихъ статически неопредѣлимыхъ рѣшетокъ (продолженіе).

Изданіе инженера П. Н. Казина.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Типо-литографія и переплетная Ю. А. Мансфельда, Малая Морская, № 9.
1900.

Müller-Breslau,
профессоръ политехникума въ Берлинѣ.

Выпускъ IX.

# Графическая статика сооруженій.

Переводъ съ послѣдняго нѣмецкаго изданія.

Г. Г. Кривошеинъ,
Военный инженеръ, преподаватель Николаевской Инженерной Академіи и Училища.

П. Н. Казинъ,
Военный инженеръ.



## Томъ II.

СОДЕРЖАНІЕ выпуска IX:

II. Формулы, правила и примѣры расчета важнѣйшихъ статически неопредѣлимыхъ рѣшетокъ (продолженіе)



Изданіе инженера П. Н. Казина.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Типо-литографія и переплетная Ю. А. Мансфельда, Малая Морская, № 9.
1900.

Дозволено цензурою, С.-Петербургъ, 27 Іюля 1900 года.

# ОГЛАВЛЕНІЕ

## ВЫПУСКА IX.

---

### ОТДѢЛЪ II.

**Формулы, правила и примѣры расчета важнѣйшихъ статически неопредѣлимыхъ рѣшетокъ** (продолженіе).

# ОТДѢЛЪ II.

# Формулы, правила и примѣры расчета важнѣйшихъ статически неопредѣлимыхъ рѣшетокъ.

*(Продолженіе).*

---

## § 9.

### Цѣпь, усиленная рѣшетчатой балкой.

**98.** Одну изъ важнѣйшихъ системъ представляетъ цѣпь, усиленная простой балкой (фиг. 278), расчетъ которой весьма мало отличается отъ изслѣдованій, примѣненныхъ къ фермамъ предыдущаго выпуска. Пусть въ точкахъ $R$ и $T$ находятся горизонтальныя подвижныя опоры; подвѣски пусть будутъ вертикальны.

Такъ какъ жесткая балка имѣетъ назначеніе сопротивляться только дѣйствію подвижной нагрузки, то данную систему необходимо строить какъ нежесткій цѣпной мостъ; треугольники же жесткой балки необходимо замыкать тогда, когда звенья цѣпи и подвѣски уже будутъ имѣть соотвѣтствующія удлиненія, произведенныя постоянной нагрузкой.

Изслѣдованіе формы цѣпи, проводимой большею частью черезъ три точки $R$, $W$, $T$, и опредѣленіе усилій отъ дѣйствія постоянной нагрузки приведено въ I томѣ (выпускъ V, № 203); здѣсь мы добавимъ, что намъ надо найти по способу, указанному въ выпускѣ V, форму цѣпи, *напряженной* подъ дѣйствіемъ постоянной нагрузки, а не форму *не напряженной* цѣпи, и что длина звеньевъ цѣпей и подвѣсокъ, которая должна быть придана при ихъ изготовленіи въ мастерскихъ, должна опредѣляться по выраженію $= s - \frac{S_g s}{EF}$, если подъ $s$ будемъ подразумѣвать длину разсматриваемаго стержня при упомянутомъ опредѣленіи формы цѣпи, а подъ $S_g$ усиліе отъ постоянной нагрузки.

Само собой разумѣется, что необходимо будетъ еще принять во вниманіе разницу температуръ при установкѣ и при работахъ въ мастерскихъ; точно также при измѣненіи высотъ башенъ необходимо принять въ расчетъ укороченіе ихъ, получаемое отъ дѣйствія постоянной нагрузки.

Если *передъ* замыканіемъ жесткой балки будетъ привѣшена только часть ($g_v$) постоянной нагрузки ($g$), а остальная часть ($g_n$) будетъ подвѣшена *послѣ* замыканія жесткой балки, то въ предыдущемъ изслѣдованіи вмѣсто $S_g$ надо подставить $S_{gv}$. Описанное опредѣленіе доставитъ намъ форму цѣпи, находящейся подъ дѣйствіемъ нагрузки $g_v$, вліяніе же нагрузки $g_n$, а также и вліяніе подвижной нагрузки опредѣляется по способамъ, описаннымъ въ дальнѣйшемъ изслѣдованіи.

Но съ другой стороны къ нежесткому мосту кромѣ общей постоянной нагрузки ($g$) можно было бы приложить еще добавочную нагрузку $g'$, которую послѣ замыканія жесткой балки можно было бы опять удалить. Тогда при изслѣдованіи грузовъ, дѣйствующихъ послѣ замыканія жесткой балки, на нагрузку $g'$ слѣдовало бы смотрѣть какъ на отрицательную нагрузку.

Подобныя соотношенія могутъ быть приняты конечно при всякой статически неопредѣлимой фермѣ. Такъ напр. двухшарнирную арку можно было бы строить сначала какъ трехшарнирную, а затѣмъ послѣ приложенія полной постоянной нагрузки $g$ или части $g$ шарниръ этотъ можно было бы уничтожить *); иногда удаленіе добавочной нагрузки $g'$ послѣ замыканія балки можетъ имѣть нѣкоторыя преимущества.

Изслѣдованіе вліянія нагрузки, дѣйствующей на мостъ послѣ замыканія жесткой балки, мы будемъ начинать всегда съ разсмотрѣнія дѣйствія сосредоточеннаго груза.

**99. Горизонтальное напряженіе $H$ при дѣйствіи сосредоточеннаго груза.** Если соединить прямой (*замыкающей*) точки цѣпи $A''$ и $B''$, лежащія на вертикаляхъ надъ опорами балки $A$, $B$, и обозначить буквой $y_m$ отрѣзокъ, отсѣкаемый цѣпью и замыкающей линіею на той вертикали, которая проходитъ черезъ произвольный узелъ $m$ (фиг. 278), то сумма моментовъ всѣхъ силъ, взятыхъ по одну сторону, относительно точки $m$ будетъ равняться:

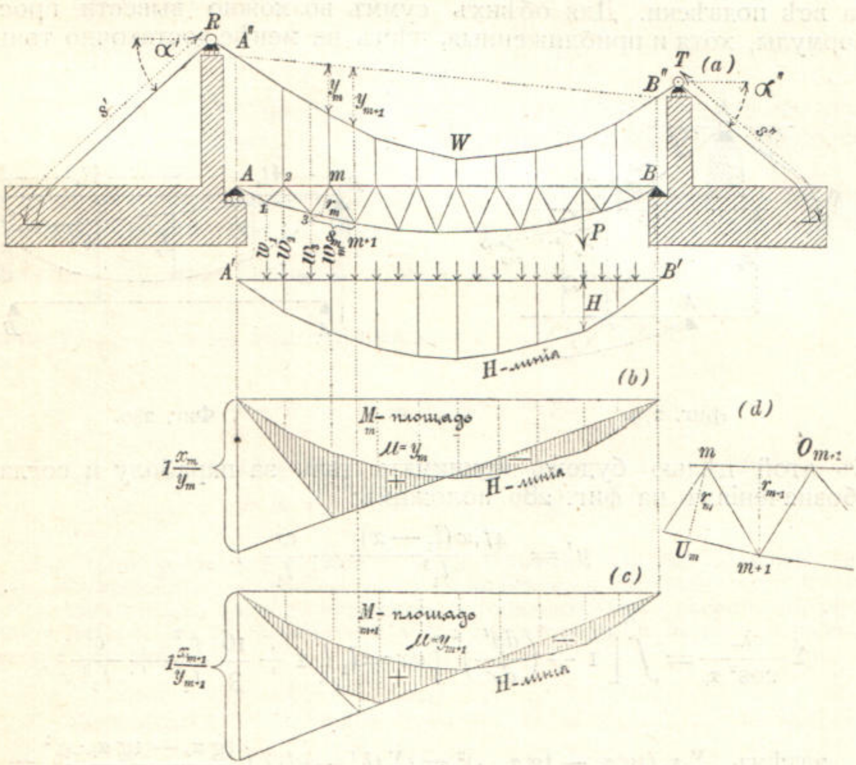
$$M_m = M_{0m} - Hy_m,$$

гдѣ $M_{0m}$ означаетъ величину $M_m$ для того случая, когда на балку, неподвѣшенную къ цѣпи, а свободно лежащую на опорахъ $A$ и $B$, дѣйствуютъ грузы $P$. Для состоянія $H = -1$ получаемъ $M'_m = y_m$, а отсюда слѣдуетъ, что вычисленіе горизонтальнаго напряженія $H$, вызываемаго дѣйствіемъ одного сосредоточеннаго груза $P$, отличается отъ опредѣленія величины $H$ для фермъ, изслѣдованныхъ въ предыдущемъ § (выпускъ VIII) только тѣмъ, что сумма $\Sigma \frac{S'^2 s}{EF}$,

*) По этому способу строился желѣзнодорожный мостъ у Мюнгстена съ пролетомъ въ 170 м. (См. Zeitschrift d. Ver. deutsch. Ing. 1898, № 47, 49, 50. и Н. Митинскій. Изв. Собр. Инж. Пут. Сообщ. 1899. № 7.

Примѣчаніе переводчиковъ.

входящая въ знаменатель общаго выраженія для $H$, будетъ зависѣть отъ вліянія удерживающихъ цѣпей. Усиліе въ лѣвой удерживающей цѣпи, наклоненной къ горизонту подъ угломъ $\alpha'$, равно $\frac{H}{\cos\alpha'}$ и при состояніи $H = -1$ принимаетъ значеніе $S' = -\frac{H}{\cos\alpha'}$. Такимъ образомъ, если длина этой цѣпи $= s'$, а сѣченіе ея $F = F_k \frac{1}{\cos\alpha'}$, гдѣ $F_k$ означаетъ сѣченіе, расчитанное по усилію $S = H_{max}$ для несущей цѣпи $RWT$ у вершины, то получимъ $\frac{S'^2 s}{EF} = \frac{s'}{EF_k \cos\alpha'}$; при этомъ предполагается, что всдѣ звенья уерживающей цѣпи на-




Фиг. 278.

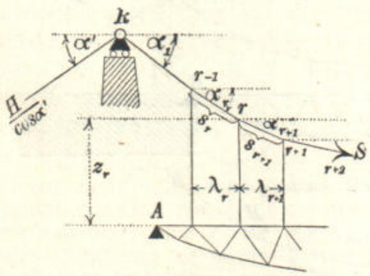
пряжены одинаково, т. е. что цѣпь имѣетъ опоры, показанныя на фиг. 164 (выпускъ VII). Обозначимъ буквами $s''$ и $\alpha''$ соотвѣтствующія значенія для правой удерживающей цѣпи, тогда предыдущія разсужденія приведутъ къ слѣдующему способу опредѣленія линіи вліянія для количества $H$.

*Вычислимъ изгибающіе моменты $M_m$ для простой балки $A'B'$, находящейся подъ дѣйствіемъ грузовъ $w_m = \frac{y_m s_m}{r_m^2} \cdot \frac{F_c}{F_m}$ (гдѣ* *подъ $F_c$ предполагается площадь сѣченія произвольная, но постоянная), и затѣмъ раздѣлимъ ихъ на количество*

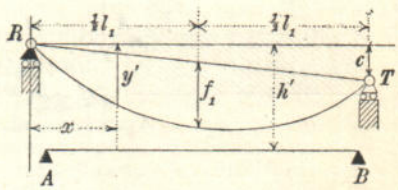
$$(1) \qquad \mathfrak{N} = \Sigma z_m + \frac{F_c}{F_k}\left(\Sigma \frac{\lambda_r}{\cos^2\alpha_r} + \frac{s'}{\cos\alpha'} + \frac{s''}{\cos\alpha''}\right) + \\ + \frac{F_c}{F_z}\, \Sigma z_r (\operatorname{tg}\alpha_r - \operatorname{tg}\alpha_{r+1})^2,$$

*гдѣ $z_m = y_m w_m$. Результатъ будетъ таковъ $H = \frac{M_w}{\mathfrak{N}}$ *).*

Суммированіе во второмъ членѣ уравненія (1) распространяется на всѣ звенья несущей цѣпи, суммированіе же въ третьемъ членѣ— на всѣ подвѣски. Для обѣихъ суммъ возможно вывести простыя формулы, хотя и приближенныя, тѣмъ не менѣе достаточно точныя.



Фиг. 279.



Фиг. 280.

Съ этой цѣлью будемъ принимать цѣпь за параболу и согласно обозначеніямъ на фиг. 280 положимъ:

$$y' = \frac{4f_1 x(l_1 - x)}{l_1^2} + \frac{cx}{l_1} \quad \text{и}$$

$$\Sigma \frac{\lambda_r}{\cos^2\alpha_r} = \int_0^{l_1} \left[1 + \left(\frac{dy'}{dx}\right)^2\right] dx = l_1\left(1 + \frac{16}{3}\frac{f_1^2}{l_1^2} + \frac{c^2}{l_1^2}\right),$$

$$\text{затѣмъ} \quad \Sigma z_r (\operatorname{tg}\alpha_r - \operatorname{tg}\alpha_{r+1})^2 = \lambda\Sigma(h' - y')\lambda\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha_r - \operatorname{tg}\alpha_{r+1}}{\lambda}\right)^2 =$$

$$\lambda = \int_0^{l_1}(h' - y')\,dx\left(\frac{d^2y'}{dx^2}\right)^2 = \lambda\left(\frac{8f_1}{l_1^2}\right)^2 \int_0^{l_1}(h' - y')\,dx$$

$$= \lambda\left(\frac{8f_1}{l_1^2}\right)^2 l_1\left(h' - \frac{2}{3}f_1 - \frac{c}{2}\right).$$

---

*) Обозначенія здѣсь оставлены тѣже, что и въ предыдущемъ § (см. выпускъ VIII); всѣ эти обозначенія нанесены на фиг. 278 и 279. Узлы балки и цѣпи обозначены нумерами, причемъ порядокъ нумеровъ для узловъ балки таковъ . . . . $m-1, m, m+1$ . . . . а для узловъ цѣпи . . . . $r-1, r, r+1$ . . .

Тогда получимъ

$$\mathfrak{N} = \Sigma z_m + \frac{F_c}{F_k} s_o + \frac{64 f^2_1 (3h' - 2f_1 - 2{,}5\, c)\lambda}{3 l^3_1} \frac{F_c}{F_z}, \text{ гдѣ} \tag{2}$$

$$s_0 = l_1 \left(1 + \frac{16}{3} \frac{f^2_1}{l^2_1} + \frac{c^2}{l^2_1}\right) + \frac{s'}{\cos\alpha'} + \frac{s''}{\cos\alpha''}. \tag{3}$$

Послѣднимъ членомъ въ выраженіи для $\mathfrak{N}$, зависящимъ отъ размѣровъ подвѣсокъ, обыкновенно пренебрегаютъ, такъ какъ вліяніе его ничтожно. При вычисленіи количествъ $w_m$ и $z_m$ можно принять одно и то же сѣченіе для всѣхъ стержней поясовъ. Поэтому положимъ

$$w_m = \frac{y_m s_m}{r_m{}^2}, \tag{4}$$

и подъ значеніемъ $F_c$, которое считалось до сихъ поръ произвольнымъ, будемъ понимать среднее значеніе площади поперечныхъ сѣченій поясовъ.

Если усиленіе цѣпи сдѣлано при помощи фермы съ параллельными поясами, высота которой $h$ (см. фиг. 287—стр. 19), то выраженіе $\frac{s_m}{r_m{}^2}$ при равныхъ паneляхъ будетъ имѣть постоянную величину $\frac{\lambda}{h^2}$. Тогда надо принять

$$w_m = y_m \text{ и } z_m = y_m w_m = y^2_m, \tag{5}$$

$$\mathfrak{N} = \Sigma y^2_m + \frac{h^2}{\lambda}\left[\frac{F_c}{F_k} s_0 + \frac{64 f^2_1 (3h' - 2f_1 - 1{,}5c)\lambda}{3 l^3_1} \frac{F_c}{F_z}\right]. \tag{6}$$

Для цѣпи, усиленной фермой съ параллельными поясами, возможно еще нѣкоторое упрощеніе, которое состоитъ въ примѣненіи параболической $H$—линіи. Изслѣдованіе это подобно опредѣленію горизонтальнаго распора въ двухшарнирной аркѣ, см. № 82 (выпускъ VIII). Разсмотримъ цѣпь какъ параболу, уравненіе которой

$$y = \frac{4fx(l - x)}{l^2}$$

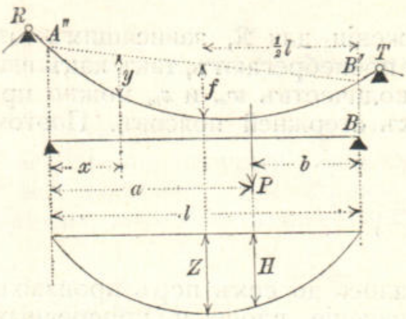
(фиг. 281), и замѣнимъ сосредоточенные грузы $w$ непрерывной нагрузкой, но такъ чтобъ элементъ балки $dx$ былъ бы нагруженъ грузомъ $2ydx$; при этомъ цифра 2 выражаетъ, что въ элементѣ $dx$ принимаются во вниманіе нагрузки *двухъ* узловъ (одного верхняго и другаго нижняго). Тогда въ точкѣ приложенія силы $P$ получимъ моментъ

$$M_w = \frac{2f}{3l^2}(al^3 - 2la^3 + a^4)\ ^{*)}$$

*) Ср. выраженіе для $M_w$ въ № 82 (стр. 20, выпускъ VIII). Вмѣсто $x$ здѣсь находится $a$; $f$ замѣнено черезъ $2f$; члены $\frac{F_o}{F_u}$ и $\frac{1}{2}\left(h_0 \frac{F_o}{F_u} - h_u\right) \cdot x(l - x)$ отброшены.

а затѣмъ найдемъ: $H = \frac{PM_w}{\mathfrak{N}}$, гдѣ

$$\mathfrak{N} = 2\int_0^l y^2 dx + h^2 \frac{F_c}{F_k} s_0 = 2\,\frac{8}{15} f^2 l + \frac{h^2 F_c}{F_k}\, s_0.$$




Фиг. 281.

Несущественнымъ вліяніемъ подвѣсокъ здѣсь пренебрежено. Если полученную такимъ образомъ $H$—линію замѣнить параболой (см стр. 20, № 82, выпускъ VIII), то стрѣлка послѣдней будетъ равняться:

(7) $$Z = \frac{3Pl\nu}{16f}, \text{ гдѣ}$$

(8) $$\nu = \frac{1}{1 + \frac{15}{16}\,\frac{h^2}{f^2}\cdot\frac{s_0}{l}\cdot\frac{F_c}{F_k}}.$$

Уравненіе параболы напишется такъ:

(9) $$H = \frac{3Pab\nu}{4fl}.$$

Количество $s_0$ надо вычислить по уравненію (3). $F_c$ означаетъ среднюю площадь поперечнаго сѣченія поясовъ, $F_k$ — сѣченіе цѣпи въ вершинѣ.

## 100. Горизонтальное напряженіе отъ измѣненія температуры.

Равномѣрное измѣненіе температуры установки моста на $t^0$ вызываетъ

(10) $$H_t = \frac{\varepsilon t \Sigma S' s}{\Sigma \frac{S'^2 s}{EF}} = \frac{\varepsilon E F_c t \Sigma S' s}{\Sigma S'^2 s \frac{F_c}{F}} = \frac{s E F_c t \Sigma S' s}{\mathfrak{N}},$$

гдѣ $\mathfrak{N}$ представляетъ количество, опредѣляемое по уравн. (1), стр. 8. Численныя вычисленія показываютъ, что вліяніе усилій $S'$ въ стержняхъ балки на сумму $\Sigma S' s$ совершенно ничтожно и что достаточно будетъ подставить въ числителѣ уравн. (10) значенія $S' s$, соотвѣтствующія только звеньямъ цѣпи и подвѣскамъ.

Подставимъ:

для несущей цѣпи: $$\Sigma S' s = -\Sigma \frac{s}{\cos\alpha'} = \Sigma \frac{\lambda}{\cos^2\alpha} =$$

$$= -l_1\left(1 + \frac{16}{3}\,\frac{f_1^2}{l_1^2} + \frac{c^2}{l_1^2}\right);$$

для удерживающихъ цѣпей: $$\Sigma S' s = -\left(\frac{s'}{\cos\alpha'} + \frac{s''}{\cos\alpha''}\right);$$

для подвѣсокъ: $\Sigma S's = -\Sigma z_r(\operatorname{tg}\alpha_r - \operatorname{tg}\alpha_{r+1}) =$

$$= -\Sigma(h'-y')\lambda\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha_r - \operatorname{tg}\alpha_{r+1}}{\lambda}\right) = +\int\limits_0^{l_1}(h'-y')\frac{d^2y}{dx^2}dx =$$

$$= -\left(\frac{8f_1}{l_1^2}\right)\int\limits_0^{l_1}(h'-y')\,dx = -\frac{8f_1}{l_1^2}l_1\left(h' - \frac{2}{3}f_1 - \frac{c}{2}\right)$$

и получимъ:

$$H_t = -\frac{\varepsilon EF_c t}{\mathfrak{N}}\left[s_0 + \frac{8f_1(3h' - 2f_1 - 1{,}5c)}{3l_1}\right], \tag{11}$$

гдѣ $\mathfrak{N}$ и $s_0$ надо вычислить по уравн. (2) и (3).

Знакъ указываетъ на то, что при возвышеніи температуры установки моста горизонтальное напряженіе цѣпи уменьшается.

Если цѣпь усиляется фермой съ параллельными поясами, то уравн. (11) возможно значительно упростить. Не принимая во вниманіе несущественнаго вліянія подвѣсокъ и введя среднее сѣченіе для поясовъ, мы замѣнимъ количество

$$\mathfrak{N} = \Sigma\frac{y^2{}_m s_m}{r^2{}_m} + \frac{F_c}{F_k}s_0$$

количествомъ

$$\mathfrak{N} = 2\int\limits_0^l\frac{y^2dx}{h^2} + \frac{F_c}{F_k}s_0 = \frac{16}{15}\frac{f^2l}{h^2} + \frac{F_c}{F_k}s_0$$

и тогда получимъ:

$$H_t = -\varepsilon EF_k t\,\frac{15}{16}\frac{h^2}{f^2}\frac{s_0}{l}\frac{F_c}{F_k}\frac{1}{1 + \frac{15}{16}\frac{h^2}{f^2}\frac{s_0}{l}\frac{F_c}{F_k}}$$

или послѣ простаго преобразованія

$$H_t = -\varepsilon EF_k t\,(1-\nu), \tag{12}$$

гдѣ $\nu$ опредѣляется по уравн. 8 (стр. 10).

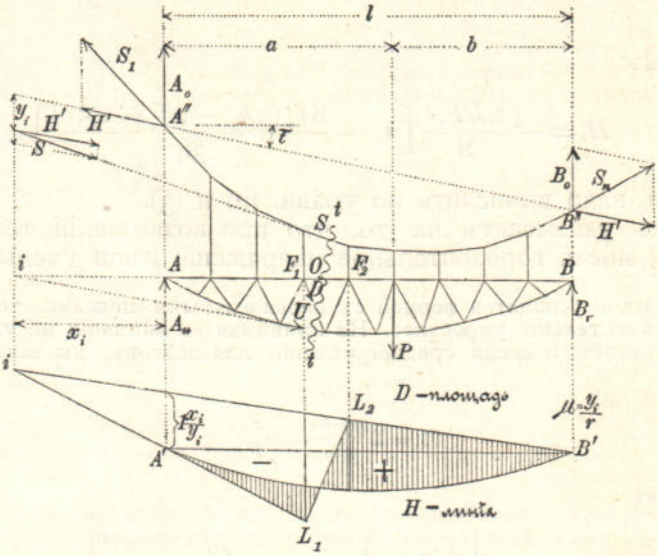
**101. Площади вліянія**. Площади вліянія для моментовъ

$$M_m = M_{om} - Hy_m \text{ и } M_{m+1} = M_{om+1} - Hy_{m+1}$$

построены на фиг. 278 b и 278 c (для того случая, когда грузы приложены къ узламъ верхняго пояса). Способъ построенія этихъ площадей не требуетъ никакихъ поясненій, такъ какъ это построеніе производится по правиламъ построенія $M$—площадей, описанныхъ въ §§ 7 и 8 (выпускъ VIII). Послѣ вычисленія моментовъ $M_m$, $M_{m+1}$ легко найдутся усилія въ поясахъ:

$$U_m = +\frac{M_m}{r_m};\ O_{m+1} = -\frac{M_{m+1}}{r_{m+1}} \text{ (ср. фиг. 278 d).}$$

Точно также опредѣленіе усилій въ промежуточныхъ стержняхъ производится подобно тому, какъ это было сдѣлано при изслѣдованіи двухшарнирныхъ арокъ и другихъ фермъ, описанныхъ въ § 9 (выпускъ VIII). Проводимъ черезъ $A$ и $B$ (фиг. 282) вертикальныя сѣченія, которыя пересѣкаютъ несущую цѣпь въ соотвѣтствующихъ точкахъ $A''$ и $B''$, разлагаемъ усилія $S_1$ и $S_n$ во внѣшнихъ




Фиг. 282.

звеньяхъ цѣпи на составляющія вертикальныя $A_0$, $B_0$ и на составляющія $H'$, совпадающія съ замыкающей линіею, и изъ уравненія моментовъ, взятыхъ относительно точки $B''$,

$$(A_0 + A_u)\, l - Pb = 0,$$

находимъ, что $A_0 + A_u$ равняется сопротивленію опоры $A = \frac{Pb}{l}$ простой балки $AB$ и что $B_0 + B_u = B = \frac{Pa}{l}$. Затѣмъ для опредѣленія усилія $D$ проводимъ сѣченіе $tt$, выбираемъ $i$—точку пересѣченія $O$ и $U$ за полюсъ, опредѣляемъ отрѣзокъ $y_i$, отсѣкаемый продолженіемъ звена цѣпи $S$ и замыкающей линіею $A''B''$ на вертикали точки $i$, разлагаемъ усиліе $S$ (перенесенное по его направленію, какъ показано на фиг. 282) на составляющія вертикальную и другую $H' = \frac{H}{\cos\tau}$, параллельную замыкающей линіи (гдѣ $\tau$ означаетъ уголъ наклоненія замыкающей линіи) и затѣмъ получаемъ уравненіе моментовъ

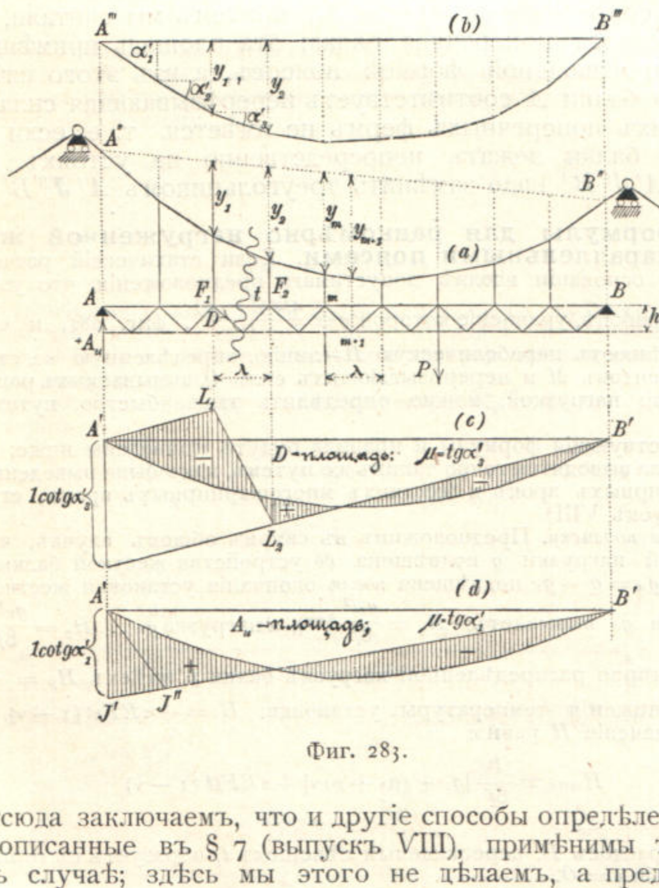
$$M_{0i} - Hy_i + Dr_i = 0. \tag{13}$$

Здѣсь $M_{0i}$ означаетъ изгибающій моментъ, взятый относительно точки $i$, для того случая, когда $AB$ представляетъ простую балку, не подвѣшенную къ цѣпи, т. е. балку, сопротивленія опоръ которой равны $A_0 + A_u = A$ и $B_0 + B_u = B$; $r_i$ — означаетъ плечо стержня $D$ относительно точки $i$. Уравненіе (13) имѣетъ ту же форму, что и уравн. 34 на стр. 22 (выпускъ VIII); а отсюда уже легко понять способъ опредѣленія на фиг. 282 площади вліянія для количества $D$. Слѣдуетъ сравнить для этого фигуры 223 до 226 (стр. 27, выпускъ VIII); относительно установленія знака надо замѣтить, что при принятомъ на фиг. 282 положеніи точки $i$ вліяніе количества $H$ на $D$ выражается членомъ $+H\frac{y_i}{r_i}$ (т. е. положительно), а въ случаѣ $H = 0$ уравненіе моментовъ

$$-(A_0 + A_u)\,x_i + Dr_i = 0$$

доставило бы также положительное значеніе:

$$D = +A\,\frac{x_i}{r_i}.$$




Фиг. 283.

Отсюда заключаемъ, что и другіе способы опредѣленія $D$—площадей, описанные въ § 7 (выпускъ VIII), примѣнимы также и въ данномъ случаѣ; здѣсь мы этого не дѣлаемъ, а предоставляемъ каждому самому исполнить эту легкую работу; укажемъ же только на одну важнѣйшую систему жесткой балки съ параллельными поясами, см. фиг. 283. Здѣсь усилія въ промежуточныхъ стержняхъ получаются извѣстнымъ образомъ изъ перерѣзывающихъ силъ $Q$, поэтому достаточно будемъ показать опредѣленіе площади вліянія для количества $Q$ въ какой нибудь панели $F_1F_2$ *).

Если $M_1$ и $M_2$ представляютъ изгибающіе моменты относительно узловъ $F_1$, $F_2$, то при дѣйствіи на балку только вертикальныхъ грузовъ, мы получимъ такое равенство:

$$Q = \frac{M_2 - M_1}{\lambda} = \frac{M_{02} - Hy_2 - M_{01} + Hy_1}{\lambda} = Q_0 - H\frac{y_2 - y_1}{\lambda},$$

гдѣ $Q_0$ означаетъ перерѣзывающую силу въ панели $F_1$ $F_2$ для простой балки $AB$, не подвѣшенной къ цѣпи.

Отложивъ ординаты $y_1\,y_2$, фиг. 283 b, отъ горизонтальной замыкающей линіи и обозначивъ углы наклоненія полученной такимъ образомъ цѣпной линіи черезъ $\alpha'$, мы найдемъ уравненіе

$$(14)\qquad Q = Q_0 - Htg\,\alpha' = \operatorname{tg}\alpha'\,(Q_0 \operatorname{cotg}\alpha' - H),$$

которое имѣетъ ту же форму, что уравненіе (3) на стр. 55 (выпускъ VIII); это уравненіе указываетъ на способъ построенія $Q$-площади, фиг. 283 c. Наконецъ на фиг. 283 d построена площадь вліянія для сопротивленія опоры $A_u$, причемъ мы считали, что въ узлѣ $A$ находится поперечная балка; эта площадь примѣнима для фермъ съ произвольной формой поясовъ, а изъ этого слѣдуютъ, что сѣченію балки $A$ соотвѣтствуетъ перерѣзывающая сила $Q = A_u$. Если крайнихъ поперечныхъ фермъ не имѣется. т. е. если первыя продольныя балки лежатъ непосредственно на устояхъ, то треугольникъ $A'J'B'$ надо замѣнить треугольникомъ $A'J''B'$ **).

**102. Формулы для равномѣрно нагруженной жесткой балки съ параллельными поясами.** Если статическій расчетъ производится на основаніи вполнѣ допустимаго предположенія, что узлы цѣпи лежатъ на параболѣ, уравненіе которой $y = \frac{4fx(l-x)}{l^2}$, фиг. 281, и если при расчетѣ примѣняютъ параболическую $H$—линію, опредѣленную на стр. 10, то величины моментовъ $M$ и перерѣзывающихъ силъ $Q$, вызываемыхъ равномѣрно распредѣленной нагрузкой, можно опредѣлить также быстро путемъ вычисленій.

Соотвѣтствующія формулы и правила будутъ приведены ниже; эти формулы и правила выводятся точно такимъ же путемъ, какъ были выведены законы для двухшарнирныхъ арокъ и жесткихъ многошарнирныхъ арокъ, стр. 51—52 и 61—63 (выпускъ VIII).

1. *Цѣпь и подвѣски.* Предположимъ въ самомъ общемъ случаѣ, что часть ($g_v$) постоянной нагрузки $g$ подвѣшена *до* устройства жесткой балки, остальная же часть $g_n = g - g_v$ подвѣшена *послѣ* окончанія установки жесткой балки.

Нагрузка $g_v$ вызываетъ: $H_1 = \frac{g_v l^2}{8f}$ ***), а нагрузка $g_n \ldots H_2 = \frac{g_n l^2 \nu}{8f}$. При полной равномѣрно распредѣленной нагрузкѣ балки $p$ имѣемъ $H_p = \frac{pl^2\nu}{8f}$, а вслѣдствіе пониженія температуры установки: $H_t = + \varepsilon EF_k t\,(1 - \nu)$, поэтому наибольшее значеніе $H$ равно:

$$(15)\qquad H_{max} = \frac{l^2}{8f}\,[g_v + (g_n + p)\,\nu] + \varepsilon EF_k t\,(1 - \nu).$$

---

*) Если раскосъ $D$, пересѣкаемый сѣченіемъ $t$, образуетъ съ горизонтомъ уголъ $\varphi$, то $D \sin\varphi = O$.

**) Опоры жесткихъ фермъ и первыхъ продольныхъ балокъ связываются между собой.

***) Здѣсь мы пренебрегаемъ тѣмъ обстоятельствомъ, что пролетъ цѣпи обыкновенно больше пролета балки.

Наибольшее усиліе въ звенѣ цѣпи, наклоненномъ подъ угломъ $\alpha$ къ горизонту, равняется поэтому:

(16) $$S_{max} = \frac{H_{max}}{\cos\alpha},$$

а наибольшее усиліе въ подвѣскѣ:

(17) $$Z_{max} = H_{max}(\operatorname{tg}\alpha_r - \operatorname{tg}\alpha_{r+1}) = H_{max}\frac{8f\lambda}{l^2}.$$

2. *Моменты и перерѣзывающія силы при полной загрузкѣ балки.* Если вся балка имѣетъ нагрузку $p$ единицъ на единицу длины, то для сѣченія $x$ моментъ равняется:

$$M_p = \frac{px(l-x)}{2} - H_p y = \frac{px(l-x)}{2} - \frac{pl^2}{8f}\nu\cdot\frac{4fx(l-x)}{l^2}, \text{ т. е.}$$

(18) $$M_p = \frac{px(l-x)}{2}(1-\nu),$$

а перерѣзывающая сила въ панели $F_1 F_2$ (фиг. 287), середина которой находится въ разстояніи $x''$ отъ середины фермы, равняется:

$$Q_p = \frac{pl}{2} - px - H_p \operatorname{tg}\alpha'' = px'' - \frac{px^2\nu}{8f}\operatorname{tg}\alpha''.$$

Уголъ $\alpha''$, образуемый звеномъ цѣпи разсматриваемой панели съ замыкающей линіей $A''B''$, приведенной сначала въ горизонтальное положеніе, равняется углу наклоненія касательной, проведенной въ точкѣ $x$ къ параболѣ, стрѣлка которой $f$, поэтому

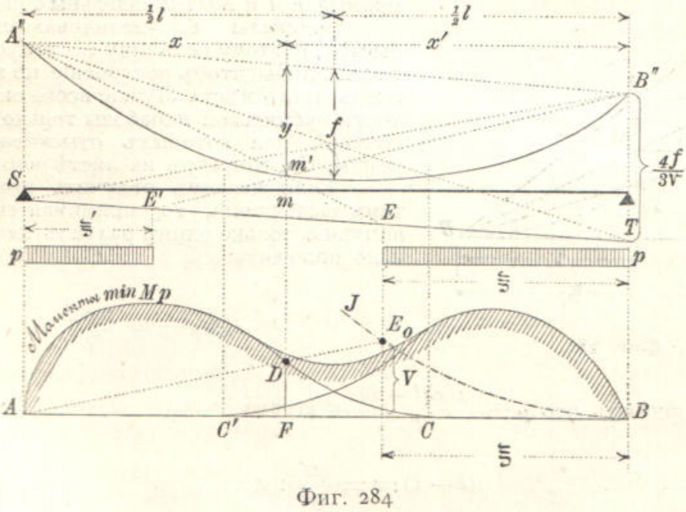
$$\operatorname{tg}\alpha'' = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{l^2}(l-2x) = \frac{8f}{l^2}\left(\frac{l}{2} - x\right) = \frac{8f}{l^2}x''$$

и

(19) $$Q_p = px''(1-\nu).$$

Такимъ образомъ количества $M_p$ и $Q_p$ равняются моменту и перерѣзывающей силѣ для сѣченія $x$ простой балки, которая лежитъ свободно на двухъ опорахъ $A$ и $B$ и не подвѣшена къ цѣпи и которая несетъ равномѣрно распредѣленную нагрузку $p(1-\nu)$.

Вліяніе постоянной нагрузки на количества $M_g$ и $Q_g$ получится, если замѣнить $p$ черезъ $g_n$.




Фиг. 284

3. *Предѣльныя значенія моментовъ отъ подвижной нагрузки.* Для того, чтобъ получить моментъ $_{min}M_{pm}$ относительно узла $m$ (верхняго или нижняго) въ сѣченіи $x$ (фиг. 284,—здѣсь ферма съ параллельными поясами замѣнена прямой линіей), откладываемъ $B''T = \frac{4f}{3^{\nu}}$, проводимъ $TS \parallel B''A''$, а черезъ точку цѣпи $m'$ (на вертикали точки $m$) проводимъ прямыя $A''E$ и $B''E'$ и затѣмъ нагружаемъ балку правѣе $E$ и лѣвѣе $E'$. Тогда получимъ (см. стр. 52—выпускъ VIII).

$$(20) \qquad {}_{min}M_p = -\frac{py^{\nu}}{8fl}(\xi^3 + \xi'^3),$$

загрузка же положительнаго участка $EE'$ вызываетъ

$$(21) \qquad {}_{max}M_p = +\frac{py^{\nu}}{8fl}(\xi^3 + \xi'^3) + \frac{px(l-x)}{2}(1-\nu),$$

такъ какъ $_{min}M_p + {}_{max}M_p = M_p$.

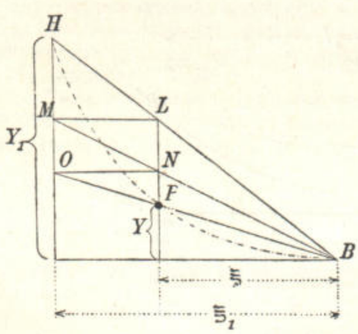
Рѣшеніе уравн. (20) можно изобразить наглядно графическимъ путемъ. На прямой $AB$ (фиг. 284) строимъ кубическую параболу $BJ$, уравненіе которой

$$Y = \frac{p\xi^3}{6l},$$

и соединяемъ съ точкой $A$ точку $E_0$ этой параболы, лежащую на вертикали точки $E$. Тогда прямая $AE_0$ отсѣчетъ на вертикали точки $m$ отрѣзокъ

$$FD = Y\frac{y}{\frac{4f}{3^{\nu}}} = \frac{py^{\nu}\xi^3}{8fl} \text{ (по абсолютной величинѣ),}$$

и поэтому точка $D$ будетъ принадлежать $_{min}M_p$—линіи при томъ впрочемъ предположеніи, что нами разсматривается только *одинъ* раздѣлъ нагрузки $E$. Опредѣливъ точки $D$ для всѣхъ сѣченій, лежащихъ между $A$ и $C$, которымъ соотвѣтствуетъ $\xi = 0$, вычертивъ затѣмъ зеркальное изображеніе $C'B$ полученной такимъ образомъ кривой и сложивъ наконецъ ординаты обѣихъ кривыхъ между $C'$ и $C$, мы получимъ конечную $_{min}M_p$—линію. Эта линія обозначена на фиг. 284 со штриховкой. Для построенія вспомогательной кубической параболы надо вычислить сначала для какой нибудь абсциссы $\xi_1$ ординату $Y_1 = \frac{p\xi_1^3}{6l}$ и привести уравненіе параболы къ такому виду: $Y = Y_1\frac{\xi^3}{\xi_1^3}$. Простое построеніе этого выраженія понятно изъ фиг. 285; прямыя $LM$ и $NO$ параллельны оси абсциссъ.



Фиг. 285.

Ординаты $Y$ увеличиваются весьма быстро, поэтому величину $\xi_1$ слѣдуетъ брать такой длины, чтобъ построеніе не заняло бы очень много мѣста. Лучше всего опредѣлить точки кубической параболы только для тѣхъ сѣченій, для которыхъ отыскиваются моменты. Ср. примѣръ на листѣ чертежей 5.

Если желаемъ получить моменты путемъ вычисленій, то, принимая сначала во вниманіе только одинъ раздѣлъ нагрузки $E$, надо положить:

$$_{min}M_p = -\frac{py^{\nu}\xi^3}{8fl};$$

кромѣ того имѣемъ, что $y = \frac{4fx(l-x)}{l^2}$ и затѣмъ

$$(l-\xi) : x = \frac{4f}{3^{\nu}} : y.$$

Тогда для кривой $ADC$ (фиг. 284) получаемъ уравненіе

$$ {}_{min}M_p = -\frac{px\,[3\cdot x' - l]^3}{54\nu^2 x'^2}, \tag{22}$$

гдѣ $x' = l - x$. Примѣненіе втораго раздѣла нагрузки производится подобно тому, какъ это было сдѣлано при графическомъ способѣ. Точка $C$ (фиг. 284) лежитъ у $x = l - \frac{l}{3\nu}$, а точка $C'$ — у $x = \frac{l}{3\nu}$.

4. *Моменты $M_t$ отъ измѣненія температуры* равняются:

$$ M_t = \mp H_t y = \mp \frac{8H_t f}{l^2}\,\frac{x(l-x)}{2}; \tag{23}$$

эти моменты равняются моментамъ простой, не подвѣшенной къ цѣпи балки $AB$, которая несетъ равномѣрно распредѣленную нагрузку $\mp \frac{8H_t f}{l^2}$ на единицу длины.

5. *Наибольшіе моменты*:

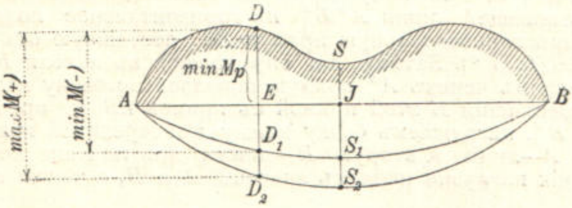
$$ {}_{min}M = {}_{min}M_p - H_t y + M_g $$

$$ {}_{max}M = {}_{max}M_p + H_t y + M_g = -\,{}_{min}M_p + M_p + H_t y + M_g $$

можно представить слѣдующимъ нагляднымъ чертежемъ.

Сначала строимъ (фиг. 286) линію $ADSB$, ординаты которой даютъ величины наибольшихъ отрицательныхъ моментовъ ${}_{min}M_p$; къ этимъ ординатамъ прибавляемъ ординаты параболы $AS_1B$, стрѣлка которой равняется

$$ \overline{S_1J} = -H_t f + \frac{g_n l^2}{8f}(1-\nu). $$




Фиг. 286.

Смотря по выраженію: $H_t f \gtrless \frac{g_n l^2}{8f}(1-\nu)$, эта парабола строится ниже или выше $AB$; ордината параболы для взятаго $x$ равняется

$$ \overline{ED_1} = -H_t y + g_n \frac{x(l-x)}{2}(1-\nu) = -H_t y + M_g; $$

поэтому получимъ: ${}_{min}M = -\,\overline{DD_1}$.

Теперь строимъ вторую параболу $AS_2B$, стрѣлка которой

$$ \overline{S_2J} = H_t f + (p + g_n)\frac{l^2}{8f}(1-\nu) $$

а ордината для взятаго $x$:

$$ \overline{ED_2} = H_t y + (p + g_n)\frac{x(l-x)}{2}(1-\nu) = H_t y + M_p + M_g; $$

поэтому получимъ: ${}_{max}M = +\,\overline{DD_2}$.

6. *Наибольшій изъ всѣхъ моментовъ для балки* получается около $x = {}^1/_4\, l$. Здѣсь разсматривался только *одинъ* раздѣлъ нагрузки, поэтому, при $y = {}^3/_4\, f$, получимъ:

$$ {}_{max}M = {}_{max}M_p + M_g + H_t y = - {}_{min}M_p + M_p + M_g + \frac{3H_t f}{4} = $$

$$ = \frac{px\,[3\nu x' - l]^3}{54\nu^2 x'^2} + \frac{pxx'}{2}(1-\nu) + \frac{g_n x x'}{2}(1-\nu) + \frac{3H_t f}{4}. $$

При $x = {}^1/_4\, l$ и $x' = {}^3/_4\, l$ это выраженіе обращается въ слѣдующее:

(24) $$ M = \frac{3pl^2}{32\nu^2}\left(\nu - \frac{4}{9}\right)^3 + \frac{3}{32}(p + g_n)\, l^2 (1-\nu) + \frac{3}{4} H_t f. $$

Для площади поперечнаго сѣченія поясовъ жесткой балки получимъ теперь для даннаго $x$ количество

$$ F = \frac{M}{h\sigma}, $$

гдѣ $\sigma$ означаетъ допускаемое напряженіе.

*Слѣдуетъ замѣтить, что полученную такимъ образомъ величину площади поперечнаго сѣченія надо положить въ основаніе расчета величины коэффиціента* $\nu$, *потому что моменты съ уменьшеніемъ* $\nu$ *увеличиваются, а поэтому для коэффиціента* $\nu$ *слѣдуетъ предварительно брать нѣсколько меньшія значенія, чѣмъ большія.* Такимъ образомъ мы полагаемъ:

(25) $$ F_c = \frac{3l^2}{32h\sigma}\left[\frac{p}{\nu^2}\left(\nu - \frac{4}{9}\right)^3 + (p + g_n)(1-\nu)\right] + \frac{3H_t f}{4h\sigma}. $$

7. *Предѣльныя значенія перерѣзывающихъ силъ отъ подвижной нагрузки.* Послѣ приведенія замыкающей линіи $A''B''$ въ горизонтальное положеніе (фиг. 283 и 287), проводимъ горизонтальную прямую $SS'$, отстоящую отъ $A''B''$ на разстояніи $S'B'' = 4f : 3\nu$ *). Затѣмъ, для опредѣленія въ панели $F_1F_2$ перѣзывающей силы проводимъ черезъ $A''$ прямую параллельно звену цѣпи $F'F''$, находимъ точку пересѣченія $E$ этой прямой съ прямой $SS'$ и, предполагая, что $E$ лежитъ лѣвѣе $B''$, нагружаемъ балку между $E$ и серединой панели. Построимъ теперь вторую $A$—линію и вторую $H$—линію, при помощи которыхъ мы для даннаго состоянія нагрузки найдемъ значенія $A$ и $H$, а также получимъ, что

(26) $$ {}_{max}Q = A - Htg\alpha'', $$

гдѣ $\alpha''$ означаетъ уголъ, образуемый $F'F''$ съ горизонтомъ. Вторая $A$—линія представляетъ параболу съ вершиной у $B_0$, вторая же $H$—линія опредѣляется точно такимъ же образомъ какъ и для двухшарнирныхъ балокъ (уравн. 46, стр. 49, выпускъ VIII); разница заключается только въ томъ, что количество $\nu$ принимаетъ здѣсь другое значеніе. Сравн. также задачу, рѣшенную на стр. 50 (выпускъ VIII). Если $E$ лежитъ правѣе $B_0$, то балку надо нагрузить отъ середины панели $F_1F_2$ до $B$.

Для вычисленія ${}_{min}Q_p$ можетъ служить окончательно уравненіе

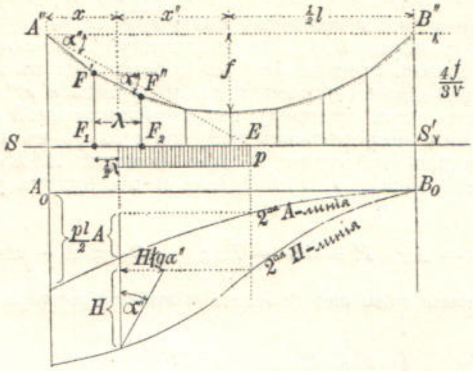
(27) $$ {}_{min}Q_p + {}_{max}Q_p = Q_p = px''(1-\nu). $$

Второй способъ опредѣленія ${}_{max}Q_p$ объясненъ на стр. 64 и 65 выпуска VIII; тамъ было предположено, что узловые грузы равны между собой, и что всѣ

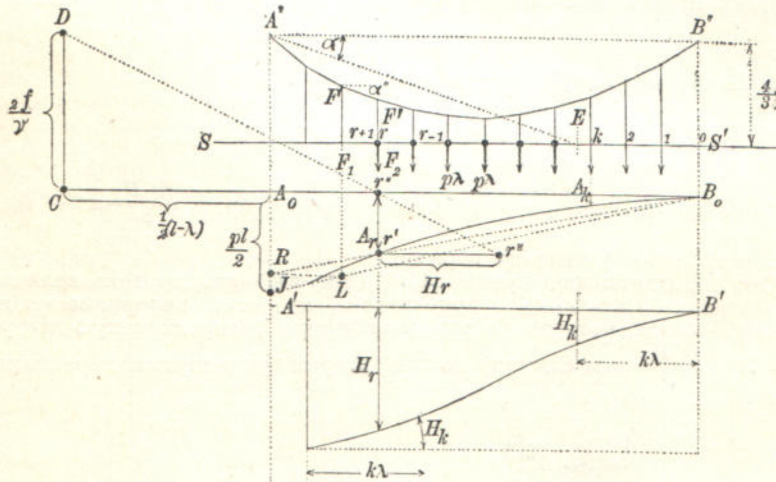
---

*) Для большей отчетливости чертежа 287 мы принимаемъ, что ось балки совпадаетъ съ прямой $SS'$.

панели одинаковы; третій способъ, также при равныхъ панеляхъ и одинаковыхъ узловыхъ грузахъ, заключается въ слѣдующемъ:




Фиг. 287.




Фиг. 288.

Если нагрузить $r$ узловъ, начачая съ $B$, фиг. 288, по $p\lambda$ единицъ, то получимъ:

$$A_r = \frac{pr\lambda\,(r+1)\,\lambda}{2l} \tag{28}$$

а по формулѣ 9, стр. 10, при $l = n\lambda$:

$$\left.\begin{aligned} H_r &= \frac{3p\lambda\nu}{4fl}\Big[1\,(n-1)+2\,(n-2)+3\,(n-3)+\ldots\ldots+r\,(n-r)\Big]\,\lambda^2 \\ &= \frac{p\lambda^3\nu}{8fl}\,r\,(r+1)\,(3n-2r-1), \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

поэтому, принимая во вниманіе уравн. 28, можемъ написать

$$H_r = A_r\,\frac{1{,}5l - 0{,}5\lambda - r\lambda}{2f}\,\nu. \tag{30}$$

Для графическаго опредѣлемія значеній $A_r$ и $H_r$ откладываемъ (на фиг. 288) $\overline{A_0 J} = \frac{pl}{2}$, находимъ точку $L$, лежащую на прямой $B_0 J$ и на вертикали подъ $r+1$, проводимъ $LR \parallel A_0 B_0$ и соединяемъ $R$ съ $B_0$. Прямыя $B_0 A_0$ и $B_0 R$ отсѣкаютъ на вертикали точки $r$ величину силы $\overline{r''r'} = A_r$.

Продолживъ теперь $B_0 A_0$ на величину $A_0 C = 0{,}5\,(l - \lambda)$, отложивъ $CD = 2f : \nu$ и продолживъ прямую $Dr''$ до пересѣченія въ точкѣ $r''$ съ горизонтальной прямой, проходящей черезъ $r$, мы получимъ $r' r''' = H_r$, каковое значеніе и откладываемъ какъ ординату отъ горизонтальной прямой $A' B'$.

При опредѣленіи перерѣзывающей силы ${}_{max}Q_p$ въ панели $F_1 F_2$ необходимо отыскать раздѣлъ нагрузки $E$ при помощи $A'' E \parallel F' F''$ и загрузить только узлы, лежащіе между $E$ и сѣченіемъ $tt$; это будутъ узлы $r, (r-1), \ldots . k$. Тогда получимъ:

$$A = A_r - A_k;\quad H = H_r - H_k;\quad {}_{max}Q_p = A - H \operatorname{tg} \alpha'' \;{}^{*})$$

8. *Перерѣзывающія силы отъ дѣйствія измѣненія температуры* таковы:

$$Q_t = \mp H_t \operatorname{tg} \alpha'' = \mp \frac{8 f H_t}{l^2}\, x'';$$

эти силы равновелики съ перерѣзывающими силами для простой не подвѣшенной къ цѣпи балки $AB$, которая несетъ нагрузку $\mp \frac{8 f H_t}{l^2}$ на единицу длины.

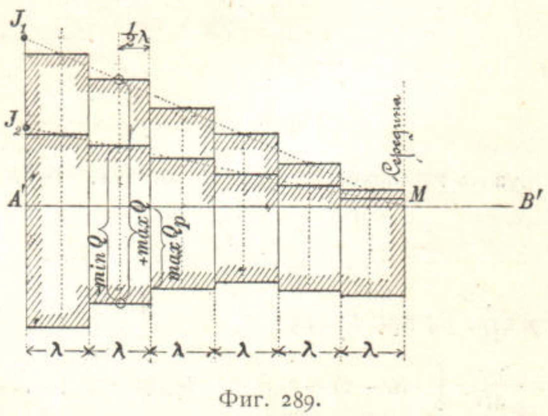
9. *Наибольшія перерѣзывающія силы*:

$$ {}_{max}Q = {}_{max}Q_p + \frac{8 f H_t}{l^2}\, x'' + Q_g \;{}^{**}) $$

$$ {}_{min}Q = {}_{min}Q_p - \frac{8 f H_t}{l^2}\, x'' + Q_g = - {}_{max}Q_p + Q_p - \frac{8 f H_t}{l^2}\, x'' + Q_g $$

можно построить слѣдующимъ образомъ.

Отъ горизонтальной прямой $A'B'$ (фиг. 289) откладываемъ величины перерѣзывающихъ силъ ${}_{max}Q_p$ и прибавляемъ къ нимъ перерѣзывающія силы для простой балки, которая несетъ равномѣрно распредѣленную нагрузку по $g_n (1 - \nu) + \frac{8 f H_t}{l^2}$ на единицу длины; вторыя упомянутыя перерѣзывающія




Фиг. 289.

---

*) Этотъ способъ, конечно, возможно примѣнить и къ двухшарнирнымъ аркамъ съ приблизительно постоянной высотой, а также къ жесткимъ балкамъ съ параллельными поясами, о которыхъ была рѣчь въ предыдущемъ § (см. выпускъ VIII).

**) $H_t$ означаетъ абсолютную величину горизонтальнаго напряженія отъ дѣйствія измѣненія температуры.

силы получаются извѣстнымъ образомъ, если проведемъ прямую $J_1M$, причемъ $\overline{A'M} = \frac{1}{2}\, l$ и $\overline{J_1A'} = g_n(1-\nu)\frac{l}{2} + \frac{4fH_t}{l}$. Результатъ будетъ таковъ:

$$_{max}Q_p + \overline{A'J_1}\frac{x''}{0{,}5\,l} = {}_{max}Q_p + \frac{8fH_t}{l^2}x'' + g_n(1-\nu)x'' = {}_{max}Q.$$

Если прямую $J_1M$ замѣнить прямой $J_2M$, опредѣляемой при помощи отрѣзка

$$\overline{A'J_2} = \frac{4fH_t}{l} - (g_n + p)(1-\nu)\frac{l}{2},$$

то получимъ:

$$_{max}Q_p + \overline{A'J_2}\frac{x''}{0{,}5\,l} = {}_{max}Q_p + \frac{8fH_t}{l^2}x'' - p(1-\nu)x'' - g(1-\nu)x'' =$$

$$= {}_{max}Q_p + \frac{8fH_t}{l^2}x'' - Q_p - Q_g = - {}_{min}Q.$$

На протяженіи панели количество $Q$ постоянно.

**103. Численный примѣръ.** (Листъ чертежей 5). Расчитаемъ жесткій висячій мостъ при слѣдующихъ данныхъ:

Пролетъ цѣпи $l_1 = 75$ м.; пролетъ балки $l = 72$ м.; стрѣлка цѣпи, измѣренная до замыкающей линіи $f = 9{,}0$ м. ($f_1 =$ около $9{,}7$ м.); длина удерживающей цѣпи, наклоненной подъ угломъ $\alpha' = 35^\circ$, равняется $s' = 27$ м.; высота жесткой балки $h = 2{,}0$ м.; длина панели $\lambda = 3$ м.

Постоянная нагрузка для каждой изъ обѣихъ главныхъ фермъ, несущихъ мостовое полотно, равняется $g = 2{,}8$ т./м., подвижная $p = 1{,}5$ т./м. Примемъ, что мостъ возводится сначала не жесткимъ (см. стр. 6), поэтому $g_v = g = 2{,}8$ т./м. и $g_n = 0$. Измѣненіе температуры пусть составляетъ $t = \pm 40^\circ$ C.

1. *Выборъ отношенія площадей поперечныхъ сѣченій* $F_c : F_k$ для вычисленія коэффиціента $\nu$ ($F_c$ = площадь поперечнаго сѣченія поясовъ балки, $F_k$ — тоже для цѣпи въ вершинѣ).

$$\frac{s_0}{l} = \frac{l_1}{l}\left[1 + \frac{16}{3}\frac{f_1^2}{l_1^2} + 2\frac{s'}{l}\;\frac{1}{\cos\alpha'}\right] = 2{,}09 \text{ и}$$

$$\nu = \frac{1}{1 + \frac{15}{16}\frac{h^2}{f^2}\frac{s_0}{l}\frac{F_c}{F_k}} = \frac{1}{1 + 0{,}0968\,\frac{F_c}{F_k}}.$$

Взявъ сначала $F_c : F_k = 0{,}40$ до $0{,}45$, получимъ $\nu = 0{,}962$ до $\nu = 0{,}957$, т. е. около $\nu = 0{,}96$. Изъ формулы

$$\sigma F_k = H_{max} = \frac{l^2}{8f}[g_v + (g_n + p)\nu] + \varepsilon EF_k t(1-\nu)$$

получаемъ теперь требуемую площадь поперечнаго сѣченія цѣпи въ вершинѣ

$$F_k = \frac{l^2[g_v + (g_n + p)\nu]}{8f[\sigma - \varepsilon Et(1-\nu)]};$$

если принять допускаемое напряженіе для цѣпи изъ сварочнаго полосоваго желѣза

$$\sigma = 1\,000 \text{ к/см}^2. = 10\,000 \text{ т/м}^2. \text{ и}$$

положить $\varepsilon E = 240$ т/м², то получимъ

$$F_k = \frac{72^2(2{,}8 + 1{,}5\cdot 0{,}96)}{8\cdot 9[10\,000 - 240\cdot 40\cdot 0{,}04]} = 0{,}0317 \text{ м}^2.$$

Уголъ наклоненія $\alpha$ крайняго звена для цѣпи, принимаемой за параболическую, опредѣляется изъ формулы

$$\frac{1}{\cos\alpha_1} = \sqrt{1 + \frac{4f^2}{l^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{16}} = \frac{1}{2}\sqrt{5},$$

поэтому площадь сѣченія цѣпи должна увеличиться до $\frac{F_k}{\cos\alpha_1} = \frac{0{,}0317}{2}\sqrt{5} = 0{,}0356$ м$^2$. Въ данномъ случаѣ рекомендуется дать всей цѣпи всюду одинаковое сѣченіе 0,0356 м$^2$, т. е. положить также $F_k = 0{,}0356$ м$^2$.

Горизонтальное напряженіе отъ дѣйствія измѣненія температуры будетъ теперь равняться

$$H_t = \varepsilon E F_k t (1 - \nu) = 240 \cdot 0{,}0356 \cdot 40 \cdot 0{,}04 = 13{,}7 \text{ т.},$$

а площадь поперечнаго сѣченія поясовъ балки по уравн. 25 (такъ какъ $g_n = 0$):

$$F_c = \frac{3l^2p}{32h\sigma}\left[\frac{1}{\nu^2}\left(\nu - \frac{4}{9}\right)^3 + (1-\nu)\right] + \frac{3H_tf}{4h\sigma}.$$

Принимая $\sigma = 750$ к/см$^2$. $= 7\,500$ т/м$^2$, получимъ:

$$F_c = \frac{3 \cdot 72^2 \cdot 1{,}5}{32 \cdot 2{,}0 \cdot 7\,500}\left[\frac{1}{0{,}96^2}\left(0{,}96 - \frac{4}{9}\right)^3 + 0{,}04\right] + \frac{3 \cdot 13{,}7 \cdot 9{,}0}{4 \cdot 2{,}0 \cdot 7\,500} = 0{,}0154.$$

Поэтому

$$\frac{F_c}{F_k} = \frac{0{,}0154}{0{,}0356} = 0{,}433 \text{ и } \nu = \frac{1}{1 + 0{,}0968 \cdot 0{,}433} = 0{,}9598,$$

т. е. $\nu = 0{,}96$ равняется прежде найденному значенію $\nu$. Повторенія расчета не требуется, поэтому дальнѣйшее изслѣдованіе жесткой балки можно произвести при $\nu = 0{,}96$.

Наибольшее горизонтальное напряженіе цѣпи равно

$$_{max}H = \frac{l^2}{8f}(g + p\nu) + H_t = \frac{72^2}{8 \cdot 9{,}0}(2{,}8 + 1{,}5 \cdot 0{,}96) + 13{,}7 = 319 \text{ т.},$$

а наибольшее растяженіе въ подвѣскѣ:

$$_{max}Z = H_{max}(\operatorname{tg}\alpha_m - \operatorname{tg}\alpha_{m+1}) = H_{max}\frac{8f\lambda}{l^2} = 319\frac{8 \cdot 9{,}0 \cdot 3{,}0}{72^2} = 14 \text{ т.}$$

Для удерживающей цѣпи получимъ:

$$S_{max} = \frac{H_{max}}{\cos 35^\circ} = 389 \text{ т.};$$

и для давленія на пилонъ:

$$H_{max}(\operatorname{tg}35^\circ + \operatorname{tg}\alpha_1)\ ^{*)} = 319\,[0{,}7 + 0{,}5] = 383 \text{ т.}$$

2. *Усилія въ поясахъ*, фиг. 290. Горизонтальная прямая $SS'$, служащая для опредѣленія точекъ раздѣла нагрузки, лежитъ въ разстояніи

$$\frac{4f}{3\nu} = \frac{4 \cdot 9{,}0}{3 \cdot 0{,}96} = 12{,}5 \text{ м.}$$

---

*) Достаточно точно $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{4f}{l}$.

Отъ прямой $A''B''$; точки пересѣченія ея $1_0, 2_0, 3_0, \ldots$ съ прямыми $A''1', A''2', A''3', \ldots$ опредѣляютъ точки раздѣла нагрузки, соотвѣтствующія узламъ 1, 2, 3, . . На фиг. 290 цѣпь имѣетъ параболическую форму. Отложимъ на вертикали точки $B''$ отрѣзокъ $B''O'' = 4f = 36$ м. и раздѣлимъ его на 24 равныя части. Лучи, проведенные изъ точекъ дѣленія $1'', 2'', 3'', \ldots$ въ точку $A''$, пересѣкаютъ вертикали точекъ 1, 2, 3, . . въ точкахъ цѣпи $1', 2', 3', \ldots$, а прямую $SS'$ въ точкахъ $1_0, 2_0, 3_0, \ldots$

Количества $\frac{M}{h}$ слѣдуетъ опредѣлить по способу, который примѣнялся на стр. 15—до 17 для отысканія моментовъ $M$. Точка $1_0$ лежитъ въ разстояніи $\xi_1 = 45{,}91$ м. отъ вертикали $B''B'$ а соотвѣтствующая этому ордината вспомогательной кубической параболы, построенной согласно фиг. 285, стр. 16, равняется:

$$\frac{p\xi_1^3}{6lh} = \frac{1{,}5 \cdot 45{,}91^3}{6 \cdot 72 \cdot 2{,}0} = 168{,}0 \text{ тоннъ.}$$

Стрѣлки обыкновенныхъ параболъ $A'L_1B'$ и $A'L_2B'$ соотвѣтственно равны (при этомъ $g_n = 0$):

$$\frac{H_t f}{h} = \frac{13{,}7 \cdot 9{,}0}{2{,}0} = 61{,}65 \text{ т.} = 62 \text{ тоннъ (округляя)}$$

$$\text{и} \quad \frac{H_t f}{h} + \frac{pl^2}{8h}(1-\nu) = 61{,}65 + \frac{1{,}5 \cdot 72^2 \cdot 0{,}04}{8 \cdot 2{,}0} = 81 \text{ тоннъ (округляя).}$$

Изъ чертежа получаемъ для узловъ 1, 2, 3, . . . . . 12:

$$_{max}\frac{M}{h} = +32;\ +59;\ +80;\ +97;\ +108;\ +115;\ +118;\ +118;\ +115;\ +111;$$
$$+109;\ +108 \text{ тоннъ.}$$

$$_{min}\frac{M}{h} = -29;\ -53;\ -72;\ -86;\ -95;\ -101;\ -102;\ -101;\ -97;\ -93;\ -90;$$
$$-89 \text{ тоннъ.}$$

Изъ этихъ количествъ опредѣляются значенія усилій въ поясахъ; результаты вписаны на фиг. 293.

3. *Усилія $D$ въ раскосахъ (діагоналяхъ).* Въ раскосѣ, наклоненномъ подъ угломъ $\varphi$ къ горизонту, развивается усиліе

$$D = \pm \frac{Q}{\sin\varphi},$$

гдѣ $Q$ означаетъ перерѣзывающую силу въ разсматриваемой панели. Верхній знакъ относится къ раскосу, подымающемуся влѣво, нижній знакъ къ раскосу, подымающемуся вправо. Такъ какъ уголъ $\varphi$ одинаковъ для всѣхъ раскосовъ $\left(\frac{1}{\sin\varphi} = 1{,}8028\right)$, то вмѣсто $Q$ можно построить количество $Q' = \frac{Q}{\sin\varphi}$, пользуясь способомъ, примѣнявшимся на стр. 19, фиг. 288 и 289, для опредѣленія силъ $Q$.

Такимъ образомъ ординаты второй $(A:\sin\varphi)$ — линіи, построенной для постоянныхъ узловыхъ грузовъ $p\lambda$, опредѣлятся отрѣзкомъ

$$\overline{A_0J} = \frac{pl}{2\sin\varphi} = \frac{1{,}5 \cdot 72 \cdot 1{,}8028}{2} = 97{,}35 \text{ т.}$$

Ординаты второй $(H:\sin\varphi)$ — линіи опредѣляются по ранѣе описанному способу (фиг. 288) изъ количествъ $A:\sin\varphi$, нанеся точку $D$ $\left[\text{при помощи отрѣзковъ } \overline{A_0C} = \frac{1}{2}(l-\lambda) = \frac{1}{2}(72-3) = 34{,}50 \text{ м. и } \overline{CD} = \frac{2f}{\nu} = \frac{2 \cdot 9{,}0}{0{,}96} = 18{,}75 \text{ м.}\right]$;

вспомогательныя линіи могутъ быть стерты. На листѣ чертежей 5 вмѣсто $A:\sin\varphi$ и $H:\sin\varphi$, ради краткости написано $A'$ и $H'$.

Пусть, напр., требуется найти ${}_{max}Q'_p$ для третьей панели; для этого проводимъ изъ $A''$ прямую параллельно звену цѣпи III, доводимъ ее до пересѣченія съ прямой $SS'$ въ точкѣ $\mathrm{III}_0$; тогда вертикаль точки $\mathrm{III}_0$, будетъ служить раздѣломъ нагрузки *). Затѣмъ прикладываемъ грузы $p\lambda$ къ узламъ 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, лежащимъ между разсматриваемою панелью и точкой $\mathrm{III}_0$, и находимъ для этого состоянія:

$$\frac{A}{\sin\varphi} = A'_3 - A'_{11};\quad \frac{H}{\sin\varphi} = H'_3 - H'_{11}, \text{ а также}$$

$$_{max}Q'_p = (A'_3 - A'_{11}) - (H'_3 - H'_{11})\,\mathrm{tg}\,\alpha_3.$$

На листѣ чертежей 5 количество $A'_3 - A'_{11}$ обозначено ради краткости черезъ $A_{III}$, а количество $(H'_3 - H'_{11})\,\mathrm{tg}\,\alpha_3$ черезъ $T_{III}$. Послѣдняя сила опредѣляется съ помощью прямою III', перпендикулярною къ звену цѣпи III.

Подобнымъ путемъ силы ${}_{max}Q'_p$ для всѣхъ панелей лѣвой половины балки можно представить въ такомъ видѣ:

$$_{max}Q'_{pI} = A_I - T_I;\quad {}_{max}Q'_{pII} = A_{II} - T_{II};\ \text{и т. д.}$$

при этомъ слѣдуетъ замѣтить, что раздѣлы нагрузокъ $\mathrm{I}_0$ . . . . $\mathrm{VIII}_0$ соотвѣтствуютъ только панелямъ I до VIII. Для IX-ой панели получаемъ ${}_{max}Q'_p$, когда будутъ вагружены всѣ узлы вправо отъ этой панели, поэтому $A_{IX} = A'_9$ и $T_{IX} = H_9\,\mathrm{tg}\,\alpha_9$, точно также найдемъ $A_X = A'_{10}$, $T_X = H'_{10}\,\mathrm{tg}\,\alpha_{10}$ и т. д.

Полученныя такимъ образомъ силы ${}_{max}Q'_p$ отложены на фиг. 292 отъ прямой $AM$ внизъ въ масштабѣ 1 мм. = 1 т., затѣмъ съ помощью ординаты

$$AJ_1 = \frac{4fH_t}{l\sin\varphi} = \frac{4\cdot 9{,}0\cdot 13{,}7}{72}\cdot 1{,}8028 = 12{,}35\ \text{т.}$$

проведена прямая $J_1M$; силы ${}_{max}Q'$ въ каждой панели опредѣляются по способу, указанному на фиг. 289, стр. 20.

Для опредѣленія ${}_{min}Q'$ прямую $J_1M$ слѣдовало бы замѣнить прямой $J_2M$, причемъ надо было бы отложить

$$AJ_2 = \frac{4fH_t}{l\sin\varphi} - p(1-\nu)\frac{l}{2\sin\varphi} = 11{,}96\ \text{т.}$$

Но ординаты обѣихъ прямыхъ $J_1M$ и $J_2M$ такъ мало отличаются другъ отъ друга, что въ данномъ случаѣ можно положить ${}_{min}Q' = -{}_{max}Q'$.

Результатъ будетъ таковъ:

$$\left.\begin{matrix} max \\ min \end{matrix}\right\} Q' = \pm 39\ \text{т.};\ 33;\ 29,\ 26;\ 24;\ 23;\ \cancel{23;\ 24};\ 25;\ 25;\ 25;\ 25\ \text{тон.}$$

Этимъ числамъ соотвѣтствуютъ усилія $D$, вписанныя на фиг. 293.

Сопротивленіе $A$ лѣвой опоры, когда отсутствуетъ крайняя поперечная ферма, равняется

$$A = D_1\sin\varphi,\ \text{откуда}\ {}_{max}A = +21{,}6\ \text{т.};\ {}_{min}A = -21{,}6\ \text{т.}$$

Положительное сопротивленіе направлено кверху, отрицательное должно уничтожиться сопротивленіемъ связи, скрѣпляющей ферму съ кладкой.

Когда имѣется крайняя поперечная ферма, то получаемъ

$$_{max}A = 21{,}6 + \frac{p\lambda}{2} = 21{,}6 + \frac{1{,}5\cdot 3{,}0}{2} = +24\ \text{т.};$$

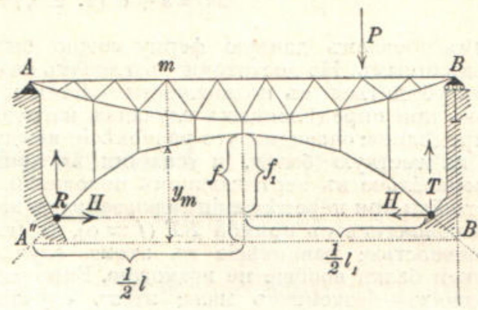
для силы же ${}_{min}A$ сохраняется прежнее значеніе, такъ какъ при нагрузкѣ, вызывающей ${}_{min}A$, узелъ $O$ остается ненагруженнымъ.

---

*) Если цѣпь параболическая, то прямыя, проведенныя изъ $A''$ черезъ точки 1'', 3'', 5'', 7'', . . . . , которыми раньше пользовались на фиг. 290, будутъ параллельны соотвѣтствующимъ звеньямъ цѣпи I, II, III, IV, . . . . .

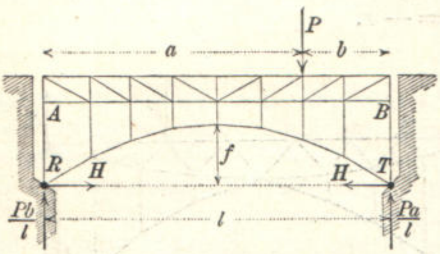
Весьма полезно было бы вычислить на основанiи данныхъ усилiй измѣненiя длины всѣхъ стержней и построить линiю влiянiя для количества $H$ какъ линiю прогибовъ для состоянiя $H = -1$ и затѣмъ построить площади влiянiя для нѣкоторыхъ моментовъ и перерѣзывающихъ силъ. Это болѣе точное построенiе $H$—линiи производится точно такимъ же образомъ, какъ было указано въ численномъ примѣрѣ въ § 96 (выпускъ VIII), а потому дальнѣйшiя разъясненiя здѣсь будутъ излишни.

**104. Шарнирная арка, усиленная сверху жесткой балкой,** фиг. 294, можетъ разсматриваться какъ опрокинутая жесткая цѣпь; изслѣдовать ее можно на основанiи только что описаннаго способа. Звенья такой арки и вертикальные промежуточные стержни, очевидно, испытываютъ *сжимающiя* усилiя; здѣсь для опредѣленiя точекъ $A''$ и $B''$ также необходимо продолжить внизъ внѣшнiя звенья арки, проходящiя черезъ $R$ и $T$. Наконецъ, когда вычисляемъ горизонтальный распоръ $H$ съ помощью формулы, выведенной раньше для горизонтальнаго напряженiя цѣпи, то длину $s'$ и $s''$ удерживающихъ цѣпей слѣдуетъ приравнять нулю.

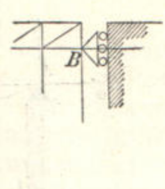


Фиг. 294.

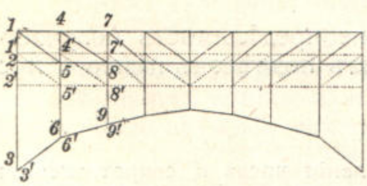
На фиг. 294 начерчена балка, опирающаяся на устои въ точкахъ $A$ и $B$; на фиг. 295 представлена жесткая рѣшетчатая ферма, соединенная своими концами съ опорными шарнирами при посредствѣ вертикальныхъ стоекъ. Первая система можетъ принимать грузы произвольнаго направленiя, послѣдняя же можетъ сопротив-



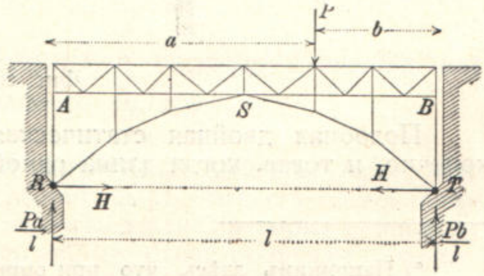
Фиг. 295.



Фиг. 295 a.



Фиг. 295 b.



Фиг. 296.

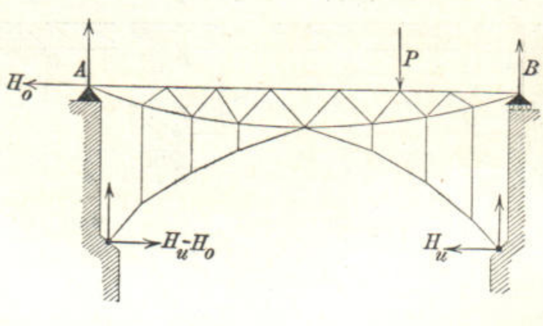
ляться только вертикальнымъ грузамъ. Чтобъ передать опорамъ горизонтальныя силы, дѣйствующія на эту систему, устраиваютъ *одинъ* изъ узловъ жесткой балки неподвижнымъ въ горизонтальномъ направленіи, какъ напр. показано на фиг. 295 a (узелъ $B$). Если же опустить балку до арки, фиг. 296, то получимъ рѣшетку, для которой достаточно имѣть опоры въ $R$ и $T$; получится, такимъ образомъ, система неизмѣняемая и простая статически неопредѣлимая.

Для фермы на фиг. 295 число узловъ $k = 27$, стержней $s = 50$ и составляющихъ сопротивленій опоръ $a = 4$ *), поэтому

$$2k = s + a \text{ (т. е. } 54 = 50 + 4);$$

такимъ образомъ данную ферму можно было бы причислить къ статически опредѣлимымъ. Но достаточно взглянуть на схему $F'$, нанесенную на фиг. 295 b, чтобъ убѣдиться въ подвижности системы, которая можетъ быть примѣнена только при опредѣленныхъ случаяхъ нагрузки, но тогда она будетъ статически неопредѣлима; очевидно, что равновѣсіе между горизонтальной силой, дѣйствующей на жесткую балку, и усиліями въ промежуточныхъ стойкахъ, бывшихъ первоначально въ вертикальномъ положеніи, можетъ существовать тогда, когда эти стойки при перемѣщеніи балки займутъ наклонное положеніе. Когда стержни арки совпадутъ съ прямой $RT$ ($f = 0$), то рѣшетка будетъ обладать конечною подвижностью; равновѣсіе въ этомъ случаѣ при горизонтальной нагрузкѣ жесткой балки вообще не возможно. Впрочемъ эта подвижность—при жесткихъ стержняхъ—безконечно мала; этотъ случай нами разсматривался въ № 21 (выпускъ VI).

Если арочный поясъ и жесткая балка имѣютъ общій узелъ и одна изъ опоръ жесткой балки сдѣлана неподвижной, то полученная ферма будетъ дважды статически неопредѣлима (фиг. 297). За статически неопредѣлимыя величины удобнѣе всего принять горизонтальныя составляющія сопротивленій опоръ $H_o$ и $H_u$; эти величины вычисляются по общему способу (см. § 5—выпускъ VII); линіи вліянія для $H_o$ и $H_u$ выводятся изъ линій прогибовъ для состояній $H_o = -1$ и $H_u = -1$.




Фиг. 297.

Подобная двойная статическая неопредѣлимость получается, конечно, и тогда, когда длина одной изъ подвѣсокъ цѣпнаго моста

---

*) Напомнимъ здѣсь, что при опредѣленіи числа $a$ сопротивленіе неподвижной опоры надо разложить на двѣ составляющія; подвижной опорѣ соотвѣтствуетъ $a = 1$.

съ жесткой балкой, фиг. 278, будетъ равняться нулю; отсюда можно сдѣлать заключеніе, что при слишкомъ короткой средней подвѣскѣ результаты, вычисленные въ предположеніи простой статической опредѣлимости, не могутъ быть совершенно точными; это обстоятельство объясняется тѣмъ, что уголъ наклоненія очень короткаго стержня можетъ значительно увеличиться или уменьшиться даже при незначительной деформаціи рѣшетки; а въ этомъ случаѣ нельзя принимать допущенія весьма малыхъ измѣненій угловъ.

---

# § 10.

## Простые статически неопредѣлимые арочные и висячіе мосты въ нѣсколько пролетовъ.

**105**. Въ этомъ параграфѣ мы займемся разсмотрѣніемъ цѣлаго ряда *простыхъ статически неопредѣлимыхъ арочныхъ и висячихъ мостовъ въ нѣсколько пролетовъ*, расчетъ которыхъ основывается на изслѣдованіяхъ предыдущаго параграфа. За статически неопредѣлимую величину мы будемъ принимать всюду горизонтальный распоръ (или горизонтальное напряженіе) $H$, причемъ для вычисленія $H$, происходящаго отъ дѣйствія груза $P_m$ на точку $m$, воспользуемся уравненіемъ

$$H = P_m \frac{\delta'_m}{\Sigma S'^2 s \frac{F_c}{F}},$$

гдѣ $\delta'$ означаетъ величину вертикальнаго перемѣщенія точки $m$ при воображаемомъ состояніи нагрузки $H = -1$, умноженнаго на $EF_c$; а $S'$ означаетъ усиліе въ стержнѣ для состоянія нагрузки $H = -1$. Разсматриваемыя системы можно разбить на двѣ группы; въ одной группѣ основная статически опредѣлимая система состоитъ изъ ряда *отдѣльныхъ балокъ*, въ другой же группѣ эта система при $H = 0$ обращается въ *балку Гербера*.

### a. Основная статически опредѣлимая система состоитъ изъ ряда отдѣльныхъ балокъ.

**106**. **Многопролетный арочный мостъ**. Арки, опирающіяся своими концами на средній быкъ, имѣютъ общій опорный шарниръ, который можетъ перемѣщаться по горизонтальному направленію; такимъ образомъ подобные быки получаютъ только вертикальныя давленія. По концамъ крайнихъ пролетовъ помѣщены неподвижные опорные шарниры, фиг. 298.

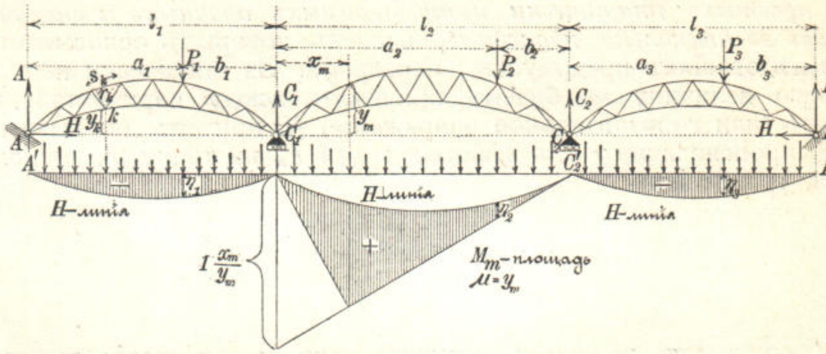
Когда всѣ шарниры находятся на одной прямой, то вертикальныя реакціи опоръ $A$, $B$, $C$ не зависятъ отъ $H$; эти реакціи таковы, какъ и для системы, состоящей изъ отдѣльныхъ балокъ $AC_1$, $C_1C_2$, . . . . Такъ напр. при нагрузкѣ, принятой на фиг. 298, получаемъ:

$$A = P_1\frac{b_1}{l_1}; \quad C_1 = P_1\frac{a_1}{l_1} + P_2\frac{b_2}{l_2}; \quad C_2 = P_2\frac{a_2}{l_2} + P_3\frac{b_3}{l_3}; \quad B = \frac{P_3 a_3}{l_3}.$$

Для построенія $H$—линіи надо вычислить сначала величины моментовъ $M_w$ какъ бы для простой балки, находящейся подъ дѣйствіемъ грузовъ $w = \frac{ys}{r^2}\frac{F_c}{F}$, т. е. *совершенно подобно тому, что мы это дѣлали для двухшарнирной арки* (№ 77, выпускъ VIII), и затѣмъ раздѣлить эти количества на величину суммы $\Sigma z = \Sigma yw$, распространенной на узлы всѣхъ пролетовъ. Для $P = 1$ получаемъ

$$H = \frac{M_m}{\Sigma z}.$$

Изъ $H$-линій, положительныхъ для всѣхъ пролетовъ, можно вывести остальныя линіи вліянія подобно тому, какъ это было сдѣлано для двухшарнирныхъ арокъ.




Фиг. 298.

На фиг. 298 построена, напр., площадь вліянія для момента $M_m$ относительно узла $m$ средняго пролета $C_1C_2$; эта площадь отличается отъ площади вліянія для момента $M_m$ въ двухшарнирной аркѣ $C_1C_2$ (кромѣ меньшей величины ординатъ $H$—линіи) только тѣмъ, что величина ея увеличивается влѣво отъ $C_1$ и вправо отъ $C_2$ на величину добавочныхъ $H$—площадей, принимаемыхъ за отрицательныя площади. Дѣйствительно, грузы, лежащіе внѣ пролета $C_1C_2$, вліяютъ на второй членъ выраженія

$$M_m = M_{om} - Hy_m.$$

Величина горизонтальнаго распора отъ равномѣрнаго возвышенія температуры на $t^0$ опредѣляется выраженіемъ (см. № 78, выпускъ VIII)

$$H_t = \frac{\varepsilon E t F_c \Sigma l}{\Sigma z_m},$$

гдѣ $\Sigma l$ означаетъ сумму величинъ всѣхъ пролетовъ.

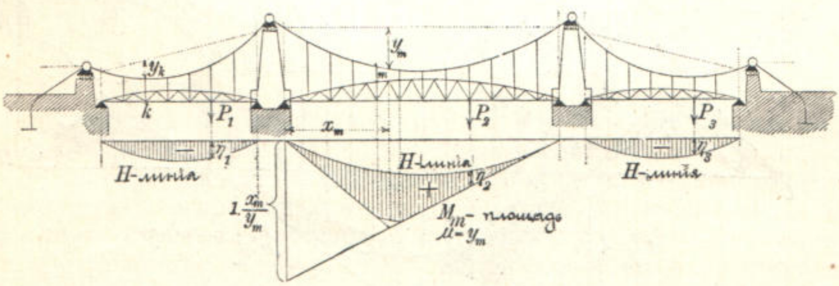
**107. Многопролетный висячій мостъ.** Арочному мосту, разобранному въ № 106, можно противопоставить висячій мостъ, усиленный отдѣльными жесткими балками, фиг. 299. При построеніи $H$—линіи и здѣсь требуется также вычислить для каждаго пролета моменты $M_w$, соотвѣтствующіе простой балкѣ, которая находится подъ дѣйствіемъ силъ $w = \frac{ys}{r^2} \frac{F_c}{F}$, и затѣмъ раздѣлить эти моменты на выраженіе

$$\mathfrak{N} = \Sigma z + \frac{F_c}{F_k}\left(\Sigma \frac{\lambda_r}{\cos^2 \alpha_r} + \frac{s'}{\cos \alpha'} + \frac{s''}{\cos \alpha''}\right) + \\ + \frac{F_c}{F_z} \Sigma z_r (\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1})^2,$$

гдѣ знаки суммъ распространяются на всѣ пролеты. Для $P = 1$ получаемъ:

$$H = \frac{M_w}{\mathfrak{N}}.$$

Изъ $H$—линій, положительныхъ для всѣхъ пролетовъ, можно вывести остальныя линіи вліянія, согласно сказанному въ § 9, № 101. На фиг. 299 для примѣра построена площадь вліянія для момента $M_m$ относительно узла средняго пролета.




Фиг. 299.

Для горизонтальнаго напряженія, происходящаго отъ измѣненія температуры, получимъ выраженіе согласно стр. 10 и 11:

$$H_t = \frac{\varepsilon E F_c t \Sigma S' s}{\mathfrak{N}} = -\frac{\varepsilon E F_c t}{\mathfrak{N}}\left[\Sigma \frac{\lambda_r}{\cos^2 \alpha} + \frac{s'}{\cos \alpha'} + \frac{s''}{\cos \alpha''} + \right. \\ \left. + \Sigma z_r (\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1}\right].$$

Выраженія для суммъ, входящихъ въ предыдущія формулы, можно вычислить по слѣдующимъ формуламъ:

$$\Sigma \frac{}{\cos^2 \alpha} = l_1\left(1 + \frac{16}{3}\frac{f_1^2}{l_1^2} + \frac{c^2}{l_1^2}\right)$$

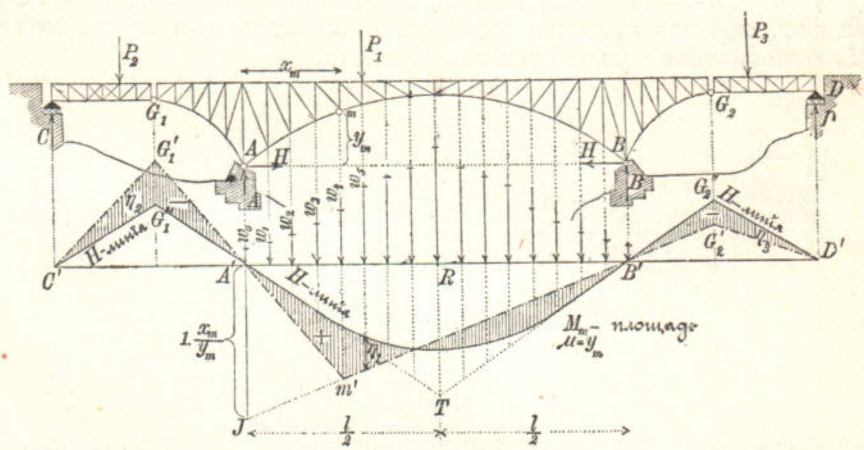
$$\Sigma z_r (\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1})^2 = \frac{64 f_1^2 (3h' - 2f_1 - 1{,}5\,c)\lambda}{3 l_1^3}$$

$$\Sigma z_r (\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \sigma_{r+1}) = \frac{8 f_1 (3h_1 - 2f_1 - 1{,}5\,c)}{3 l_1}.$$

Упрощенія, сдѣланныя въ § 9 для жесткихъ балокъ съ параллельными поясами, могутъ имѣть мѣсто также и въ висячихъ многопролетныхъ мостахъ.

## *b. Основная статически опредѣлимая система представляетъ балку Гербера.*

**108. Консольно-арочный мостъ въ три пролета.** Система на фиг. 300 состоитъ изъ двухшарнирной арки $AB$ съ консолями $AG_1$ и $BG_2$, служащими для поддержки отдѣльныхъ балокъ $CG_1$ и $G_2D$. Если обратить одну изъ обѣихъ неподвижныхъ опоръ $A, B$ въ подвижную по горизонтальному направленію, то получится балка Гербера (состояніе нагрузки $H=0$), изгибающіе моменты для которой обозначимъ буквой $M_0$, а вертикальныя составляющія реакій опоръ буквами $A$, $B$, $C$, $D$. Отъ добавленія реакціи $H$ вертикальныя реакціи, а также и усилія во внѣшнихъ пролетахъ $CA$ и $BD$ не измѣнятся. Только въ средней части $AB$ усилія $S$ будутъ зависѣть отъ $H$; эти усилія можно выразить въ такой формѣ:




Фиг. 300.

$S = S_0 - S' H$, гдѣ $S_0$ означаетъ усиліе $S$ для состоянія нагрузки $H=0$, а $S'$ усиліе отъ состоянія $H=-1$.

Для построенія $H$—линіи опять воспользуемся выраженіемъ:

$$H = P \frac{\delta'}{\Sigma S'^2 s \dfrac{F_c}{F}}$$

гдѣ $\delta'$ представляетъ ординату линіи прогибовъ для состоянія $H=-1$, умноженную на $EF_c$. Эта линія прогибовъ состоитъ между $A$ и $B$ изъ многоугольника, который опредѣляется совершенно также, какъ и для двухшарнирной арки $AB$, а затѣмъ изъ прямыхъ $A'G_1''$, $G''_1C'$ и $B'G'_2$, $G'_2D'$, соотвѣтствующихъ консолямъ и отдѣльнымъ балкамъ, которые не испытываютъ напряженій отъ дѣйствія нагрузки $H=-1$. Если линія прогибовъ для части фермы $AB$ построена съ помощью веревочнаго многоугольника, то прямыя $A'G''_1$ и $B'G''_1$ получаются какъ внѣшніе бока этого многоугольника. Въ большинствѣ случаевъ $H$—линія опредѣляется вычисленіемъ по формулѣ

$$H = \frac{M_w}{\Sigma z} \text{ (см. § 7, выпускъ VIII)},$$

что гораздо проще. При опредѣленіи продолженій $H$—линій внѣ опоръ $A'$ и $B'$ въ данномъ случаѣ слѣдуетъ соединить всѣ грузы $w$ въ сумму $\Sigma w$, вычислить моментъ $\Sigma w \dfrac{l}{4}$, вызываемый этимъ грузомъ въ серединѣ простой балки $A'B'$, затѣмъ отложить отрѣзокъ $\overline{RT} = \dfrac{\Sigma wl}{4\Sigma z}$, перпендикулярный къ линіи $A'B'$, и провести прямыя $TA'$ и $TB'$. Тогда $A'G''_1$ будетъ продолженіемъ прямой $TA'$ и $B'G''_2$ — продолженіемъ прямой $TB'$. Грузы $P$, лежащіе лѣвѣе $A'$ или правѣе $B$, вызываютъ *отрицательный* горизонтальный распоръ $H$.

Если, напр., средняя часть $AB$ имѣетъ размѣры, приведенные на фиг. 212 (№ 81, выпускъ VIII) для двухшарнирной арки, то между $A$ и $B$ можно сохранить $H$—линію, вычерченную на фиг. 212, безъ всякаго измѣненія. Мы получили бы тогда $\Sigma w = [w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4]\, 2 + w_5 = [0{,}33\,^{*)} + 0{,}88 + 2{,}35 + 15{,}00]\, 2 + 20{,}00 = 57{,}12$, а затѣмъ

$$\overline{RT} = \frac{\Sigma wl}{4 \cdot \Sigma z} = \frac{57{,}12 \cdot 20}{4 \cdot 183{,}356} = 1{,}56.$$

Горизонтальный распоръ отъ измѣненія температуры для всей системы равняется распору для двухшарнирной арки $AB$.

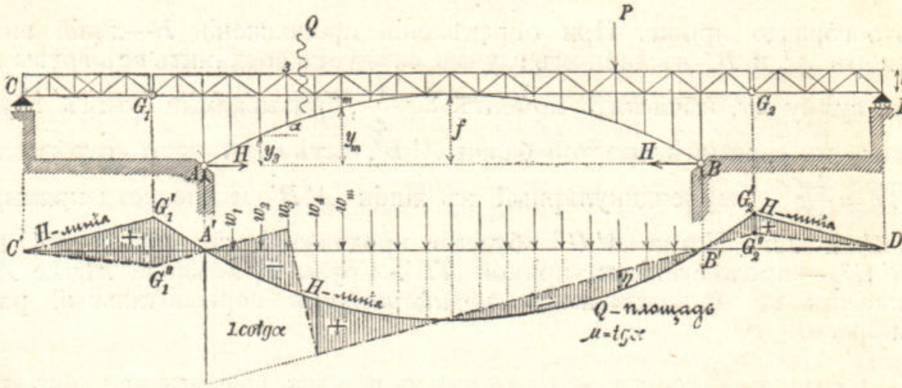
При построеніи остальныхъ линій вліяній изъ $H$—линіи необходимо помнить, что средній пролетъ при отсутствіи нагрузки на боковыхъ пролетахъ находится въ одинаковыхъ условіяхъ съ обыкновенной двухшарнирной аркой. Такъ напр., для построенія площади вліянія для $M_m$ откладываемъ (также какъ и раньше на фиг. 221, стр. 26, вынускъ VIII) отрѣзокъ $\overline{A'J} = 1\, \dfrac{x_m}{y_m}$, проводимъ $JB'$, опредѣляемъ точку $m'$ на вертикали подъ $m$, соединяемъ $m'$ съ $A'$ и вычитаемъ площадь вліянія для $H$ изъ площади треугольника $A'm'B'$, представляющаго площадь вліянія для количества $\dfrac{M_{om}}{y_m}$. Разность между обѣими площадями будетъ площадью вліянія для момента $M_m$ въ двухшарнирной аркѣ $AB$; множитель будетъ $= y_m$. Продолживъ прямыя $m'A'$ и $m'B'$ до пересѣченія ихъ въ точкахъ $G'_1$, $G'_2$ съ вертикалями точекъ $G_1$, $G_2$ и проведя наконецъ прямыя $G'_1C'$, $G'_2D'$, мы получимъ, что многоугольникъ $C'G'_1A'm'B'G'_2D'$, отнесенный къ $A'B'$, какъ къ нулевой оси, представитъ линію вліянія для количества $\dfrac{M_{om}}{y_m}$ для балки Гербера $CABD$; площадь же,

---

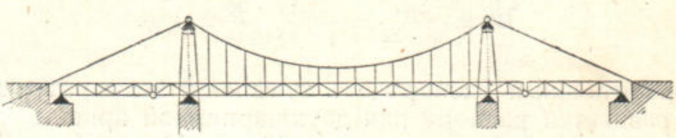
*) Значеніемъ $w_0 = \dfrac{h_0}{h_0^2} = \dfrac{1}{3{,}0} = 0{,}33$ мы раньше не пользовались, такъ какъ оно не имѣло вліяніе на моменты $M_w$.

заштрихованная на фиг. 300 между этой линіей и $H$—линіей, представитъ искомую площадь вліянія для количества $M_m$.

**109. Шарнирная арка, усиленная балкой Гербера.** Подобно предыдущему изслѣдуются системы, представленныя на фиг. 301 и 302. Сначала строятъ линіи вліянія для средняго про-



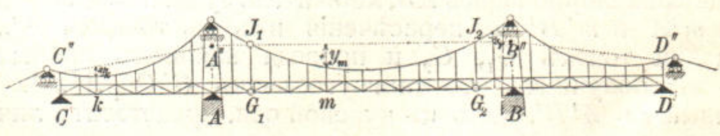

Фиг. 301.



Фиг. 302.

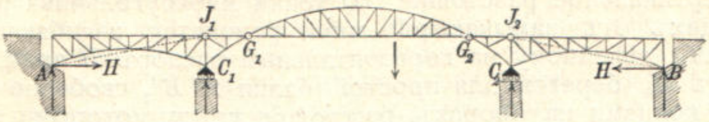
лета, считая, что боковыхъ пролетовъ какъ будто не существуетъ; затѣмъ уже эти линіи вліянія продолжаютъ въ сторону отъ $A'$ и $B'$ по правиламъ, описаннымъ въ предыдущемъ №. На фиг. 301 построена площадь вліянія для количества $Q$.

**110. Задачи для упражненія.** Можно посовѣтовать читателю заняться изслѣдованіемъ системъ, представленныхъ на фиг. 303 и 304. Жесткая цѣпь, усиленная балкой Гербера (шар-




Фиг. 303.

ниры находятся въ среднемъ пролетѣ), была изслѣдована уже въ № 68 (выпускъ VII); здѣсь слѣдуетъ найти $H$—линію съ помощью грузовъ $w_m = y_m$ и затѣмъ опредѣлить значенія моментовъ изъ формулы, выведенной въ № 208 (выпускъ V, томъ I): $M_m = M_{om} - Hy_m$.




Фиг. 304

Арочная ферма на фиг. 304 расчитывается совершенно также, какъ и ферма, изслѣдованная въ № 67 и 73 (выпускъ VII). Вмѣсто ломанной линіи $AEC_1D_1FB$ на фиг. 183d (тамъ же) придется воспользоваться для вычисленія $y_m$ ломанной линіей $AJ_1J_2B$, проведенной черезъ шарниры $G_1$ и $G_2$.

## § 11.

## Рѣшетчѣтыя арки съ задѣланными концами.

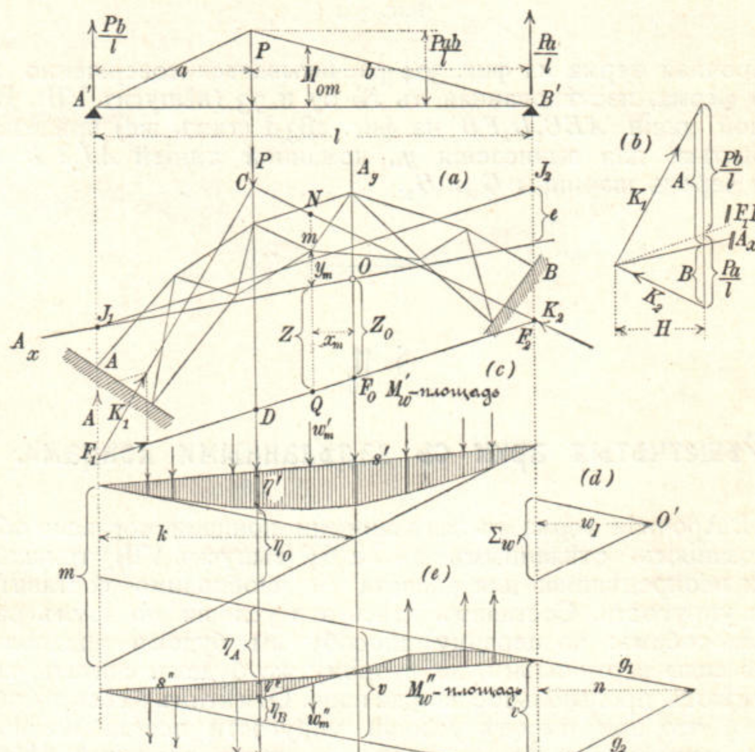
111. Арочная ферма съ задѣланными концами согласно общимъ изслѣдованіямъ, сдѣланнымъ въ № 64 (выпускъ VII), трижды статически неопредѣлима; для расчета ея необходимо составить три условія упругости. Составимъ здѣсь эти условія по двумъ различнымъ способамъ; по первому способу мы будемъ предполагать, что всѣ силы вертикальны, по второму же будемъ считать, что всѣ силы имѣютъ произвольное направленіе. Отмѣтимъ здѣсь то обстоятельство, что при выводѣ условій упругости всегда можно пренебречь измѣненіями длины промежуточныхъ стержней. Дѣйствительно, въ аркахъ съ закрѣпленными концами вліяніе измѣненій температуры настолько значительны (а измѣненія температуры мы можемъ установить только приблизительно), что слишкомъ точное опредѣленіе вліянія остальныхъ причинъ здѣсь будетъ еще менѣе умѣстно, чѣмъ въ двухшарнирныхъ аркахъ.

При расчетѣ разсматриваемыхъ арокъ слѣдуетъ также принять всюду равное сѣченіе для поясовъ ($F_o = F_u = \text{const.}$), что упрощаетъ расчетъ.

### *a. Первый способъ.*

**112. Вліяніе вертикальнаго сосреточеннаго груза** (фиг. 305). Сосредоточенный грузъ $P$ вызываетъ въ опорахъ сопротивленія $K_1$ и $K_2$, которыя пересѣкаются съ силой $P$ въ точкѣ $C$; пусть эти сопротивленія пересѣкаютъ вертикали внѣшнихъ опорныхъ точекъ $A$ и $B$ въ точкахъ $F_1$ и $F_2$. Ломанная линія $F_1CF_2$ называется *многоугольникомъ равнодѣйствующихъ*, а прямая $F_1F_2$—*замыкающей линіей*.

Вертикальное разстояніе $NQ$ точки многоугольника равнодѣйствующихъ отъ замыкающей линіи равняется изгибающему моменту $M_o$, дѣленному на горизонтальный распоръ $H$ арки, причемъ моментъ $M_o$ берется для простой балки $A'B'$, свободно лежащей своими концами на опорахъ, разстояніе между которыми $= l$ *).



Фиг. 305.

Поэтому будемъ имѣть:

$$\overline{CD} = \frac{Pab}{l\,H};$$

такимъ образомъ треугольникъ $F_1CF_2$ и направленія $K_1$ и $K_2$ опредѣлятся только тогда, когда будетъ задана замыкающая линія $F_1F_2$ и величина горизонтальнаго распора $H$.

Отнесемъ арочную ферму къ осямъ координатъ вертикальной $A_y$ и наклонной $A_x$. Наклонъ оси $A_x$ и положеніе начала координатъ $O$ возьмемъ предварительно произвольными. Положеніе замы-

*) Мы разсматриваемъ здѣсь фигуру $F_1CF_2$ какъ площадь моментовъ по Кульману для простой балки $A'B'$.

кающей линіи опредѣлимъ заданіемъ точки пересѣченія ея $F_o$ съ осью $A_y$, т. е. заданіемъ отрѣзка $z_0$, фиг. 305 а, и другаго отрѣзка $e$, который отсѣкается на вертикали точки $B$ прямой $J_1J_2$, проведенной параллельно замыкающей линіи.

При опредѣленіи изгибающаго момента $M_m$ для какого нибудь узла $m$ проведемъ черезъ $m$ вертикальное сѣченіе, которое пересѣчетъ направленіе опорнаго сопротивленія (здѣсь $K_2$) въ точкѣ $N$, и затѣмъ разложимъ это сопротивленіе въ точкѣ $N$ на составляющія вертикальную и горизонтальную; тогда получимъ:

$$M_m = H \cdot \overline{Nm}.$$

Пусть $y_m$ вертикальное и $x_m$ горизонтальное разстояніе между точкой $m$ и осями $A_x$ и $A_y$, тогда будемъ имѣть:

$$\overline{Nm} = \overline{NQ} - y_m - z,$$

$$\frac{z - z_0}{x_m} = \frac{e}{l}, \text{ или } z = \frac{e}{l} x_m + z_0,$$

а затѣмъ, такъ какъ $H \cdot NQ = M_{om}$, найдемъ

(1) $$M_m = M_{om} - Hy_m - \frac{He}{l} x_m - Hz_0.$$

Введемъ слѣдующія обозначенія:

(2) $$Hz_0 = X'; \quad \frac{He}{l} = X''; \quad H = X''',$$

тогда получимъ уравненіе

(3) $$M_m = M_{om} - X' - X''x_m - X'''y_m,$$

по которому можно вычислить моменты $M_m$, если только будутъ найдены *три статически неопредѣлимыя величины* $X'$, $X''$, $X'''$.

Для вычисленія величинъ $X$ можно воспользоваться уравненіями (V) (стр. 68, выпускъ VII). Предположимъ, что опоры несжимаемы, т. е. возьмемъ $L' = 0$, $L'' = 0$, $L''' = 0$.

Деформаціями промежуточныхъ стержней можно также пренебречь.

Усиліе въ стержнѣ пояса, лежащаго противъ узла $m$, равняется

(4) $$S = \mp \frac{M_m}{r_m},$$

причемъ верхній знакъ относится къ верхнему поясу, нижній къ нижнему. Состояніямъ нагрузки $X' = -1$, $X'' = -1$, $X''' = -1$ соотвѣтствуютъ моменты:

(5) $$M'_m = +1; \quad M''_m = +x_m; \quad M'''_m = +y_m$$

и усилія:

(6) $$S' = \mp \frac{1}{r_m}; \quad S'' = \mp \frac{x_m}{r_m}; \quad S''' = \mp \frac{y_m}{r_m}.$$

Если выбрать оси координатъ $A_x$, $A_y$ такимъ образомъ, чтобъ суммы

$$\Sigma S' S'' \frac{s}{EF}; \quad \Sigma S' S''' \frac{s}{EF}; \quad \Sigma S' S''' \frac{s}{EF}\ ^{*)}$$

изчезли, т. е., чтобъ были удовлетворены условія

$$(7) \qquad \Sigma \frac{x_m s_m}{EF_m r_m^2} = 0; \quad \Sigma \frac{y_m s_m}{EF_m r_m^2} = 0; \quad \Sigma \frac{x_m y_m s_m}{EF_m r_m^2} = 0,$$

тогда уравненія (V) для *одного* сосредоточеннаго груза $P$ обратятся въ слѣдующія:

$$(8) \qquad \begin{cases} X' \Sigma \dfrac{s_m}{EF_m r_m^2} = P\delta' + \Sigma S' \varepsilon t s \\ X'' \Sigma \dfrac{x^2{}_m s_m}{EF_m r_m^2} = P\delta'' + \Sigma S'' \varepsilon t s \\ X''' \Sigma \dfrac{y^2{}_m s_m}{EF_m r_m^2} = P\delta''' + \Sigma S''' \varepsilon t s, \end{cases}$$

гдѣ $\delta'$, $\delta''$, $\delta'''$ означаютъ ординаты подъ грузомъ $P$ линій прогибовъ, соотвѣтствующихъ состояніямъ $X' = -1$, $X'' = -1$, $X''' = -1$.

Для дальнѣйшаго упрощенія расчета примемъ для всѣхъ стержней поясовъ одно и тоже поперечное сѣченіе $F$ (среднее значеніе $F_m$) и предположимъ, что количества $E$, $\varepsilon$, $t$ постоянны. Умножимъ уравненіе (8) на $EF$ и, введя обозначеніе $\frac{s_m}{r_m^2} = w'_m$ **) найдемъ выраженія, опредѣляющія вліяніе сосредоточеннаго груза $P$:

$$(9) \qquad X' = P \frac{EF\delta'}{\Sigma w'_m}; \quad X'' = P \frac{EF\delta''}{\Sigma x_m^2 w'_m}; \quad X''' = P \frac{EF\delta'''}{\Sigma y_m^2 w'_m},$$

и затѣмъ вліяніе равномѣрнаго нагрѣванія на $t^0$:

$$(10) \qquad X_t' = \frac{\varepsilon EFt \Sigma S' s}{\Sigma w'_m}; \quad X_t'' = \frac{\varepsilon EFt \Sigma S'' s}{\Sigma x_m^2 w'_m}; \quad X_t''' = \frac{\varepsilon EFt \Sigma S''' s}{\Sigma y_m^2 w'_m}.$$

Условія, которыя должны быть удовлетворены соотвѣтственнымъ выборомъ положенія осей $A_x$, $A_y$, таковы:

$$(11) \qquad \Sigma x_m w'_m = 0, \quad \Sigma y_m w'_m = 0, \quad \Sigma x_m y_m w'_m = 0.$$

Если приложить къ узлу $m$ грузъ $w'_m$, то уравненія (11) потребуютъ:

1) совпаденія начала $O$ съ центромъ силъ для грузовъ $w'$,
2) и проведенія направленія оси $A_x$ такъ, чтобъ центробѣжный моментъ грузовъ $w'$ равнялся нулю.

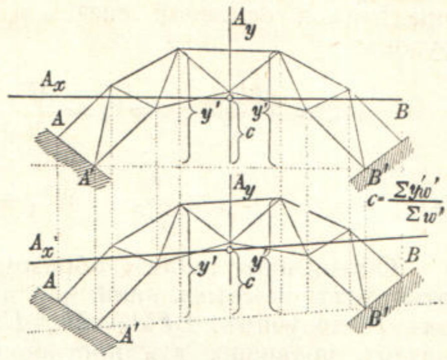
---

*) Въ указанныхъ уравненіяхъ (V) $\rho = \frac{s}{EF}$.

**) Когда поперечныя сѣченія $F_m$ взяты разными, то надо положить $w'_m = \frac{S_m}{r^2_m} \frac{F}{F_m}$.

Обыкновенно употребляются арки, симметричныя относительно вертикальной оси. Тогда ось $A_y$ совпадаетъ съ осью симметріи, а ось $A_x$ съ горизонтальною осью, проходящею черезъ центръ силъ $w'$.

При нѣсколько наклоненныхъ аркахъ, когда разница въ высотахъ опоръ невелика, поступаютъ какъ при симметричныхъ аркахъ, фиг. 306, т. е. придаютъ соотвѣтствующимъ узламъ обѣихъ половинъ арки равные грузы $w'$ *). Такимъ образомъ получаемъ, что ось $A_y$ совпадетъ со среднею вертикальною прямою, а ось $A_x$ направится по оси, проходящей черезъ центръ силъ $w'$ и параллельной линіи $A'B'$.

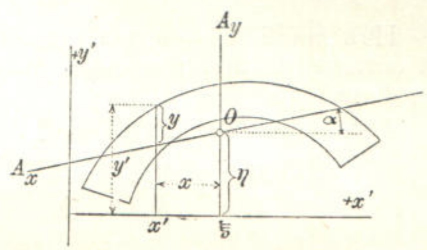


Фиг. 306.

Въ общемъ случаѣ оси $A_x$, $A_y$ опредѣляются слѣдующимъ образомъ. Сначала относимъ арку къ произвольнымъ прямоугольнымъ осямъ координатъ $x'$, $y'$ съ горизонтальной осью $x'$ (фиг. 307) и вычисляемъ суммы:

$$\Sigma w', \ \Sigma w' x', \ \Sigma w' y', \ \Sigma w' x'^2, \ \Sigma w' y'^2; \ \Sigma w' x' y';$$

обозначимъ буквами $\xi$, $\eta$ координаты точки $O$ относительно осей $x'$, $y'$, буквой $\alpha$ уголъ наклоненія $A_x$ къ оси $x'$, тогда получимъ:



Фиг. 307.

$$x = \xi - x'.$$
$$y = y' - x' \operatorname{tg} \alpha - (\eta - \xi \operatorname{tg} \alpha).$$

Изъ уравненій $\Sigma w' x = 0$, $\Sigma w' y = 0$, $\Sigma w' xy = 0$ найдемъ:

$$(12) \qquad \begin{cases} \xi = \dfrac{\Sigma w' x'}{\Sigma w'}, \quad \eta = \dfrac{\Sigma w' y'}{\Sigma w'} \\[2ex] \operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\xi \Sigma w' y' - \Sigma w' x' y'}{\xi \Sigma w' x' - \Sigma w' x'^2}. \end{cases}$$

Наконецъ опредѣлимъ еще выраженія:

$$\Sigma w' x^2 = \Sigma w' x'^2 - \xi^2 \Sigma w'$$
$$\Sigma w' y^2 = \Sigma w' y'^2 - \eta^2 \Sigma w' - \operatorname{tg}^2 \alpha \, \Sigma w' x^2.$$

Опредѣленіе $\operatorname{tg} \alpha$, основанное на построеніи моментовъ втораго порядка, можно выполнить, конечно, и графически (см. § 5—7, выпускъ I, томъ I).

Проведя оси $A_y$, $A_x$, опредѣлимъ числители выраженій (9) для количествъ $X'$, $X''$, $X'''$ слѣдующимъ образомъ.

Примемъ во вниманіе, что состояніямъ нагрузокъ $X' = -1$, $X'' = -1$, $X''' = -1$ соотвѣтствуютъ моменты:

$$(13) \qquad M'_m = 1; \quad M''_m = \frac{x_m}{r_m}; \quad M'''_m = \frac{y_m}{r_m}$$

*) Это предположеніе настолько же допустимо, какъ и положеніе $F : F_m = 1$

и что величины прогибовъ $\delta'$, $\delta''$, $\delta'''$, умноженныя на $EF$, можно разсматривать какъ моменты для простой балки $A'B'$ (статически опредѣлимой основной системы), находящейся подъ дѣйствіемъ грузовъ:

$$w'_m = \frac{M'_m s_m}{r_m^2}; \quad w''_m = \frac{M''_m s_m}{r_m^2}; \quad w''' = \frac{M'''_m s_m}{r_m^2} \text{ *)}, \text{ т. е.}$$

$$(14) \qquad w'_m = \frac{s_m}{r_m^2}; \quad w''_m = \frac{x_m s_m}{r_m^2}; \quad w'''_m = \frac{y_m s_m}{r_m}.$$

Обозначивъ такимъ образомъ буквами $M'_w$, $M''_w$, $M'''_w$ ординаты этихъ простыхъ линій для моментовъ, [измѣренныя подъ грузомъ $P$, получимъ: $EF\delta' = M'_w$; $EF\delta'' = M''_w$; $EF\delta''' = M'''_w$ и затѣмъ найдемъ уравненія для построенія линій вліянія для количествъ $X'$, $X''$, $X'''$:

$$(15) \qquad X' = P\frac{M'_w}{\Sigma w'}; \quad X'' = P\frac{M''_w}{\Sigma x_m w''_m}; \quad X''' = P\frac{M'''_w}{\Sigma y_m w'''_m} \text{ **)}.$$

Изъ линій вліянія для количествъ $X'$, $X''$, $X'''$ можно получить всѣ остальныя линіи вліянія; исполнить это можно нѣсколькими способами.

1) Съ помощью уравненій

$$\frac{M_m}{h_m} = \frac{M_{om}}{h_m} - \frac{X'}{h_m} - X''\frac{x_m}{h_m} - X'''\frac{y_m}{h_m}$$

опредѣляемъ линіи вліянія для количествъ $(M:h)$, а отсюда (по стр. 23 и 24, выпускъ VIII) линіи вліянія для усилій въ стержняхъ.

Вмѣсто $\frac{X'}{h_m}$ напишемъ $\frac{X'}{d}\frac{d}{h_m}$, гдѣ $d$ означаетъ произвольный отрѣзокъ. Умноженіе количества $\frac{X'}{d}$, $X''$, $X'''$ на $\frac{d}{h_m}$, $\frac{x_m}{h_m}$, $\frac{y_m}{h_m}$ производится (по № 71, выпускъ VII) при помощи угла, тангенсъ котораго равняется множителю.

2) Опредѣляемъ многоугольникъ равнодѣйствующихъ $F_1CF_2$ (фиг. 305) для различныхъ положеній сосредоточеннаго груза $P = 1$ и пользуемся имъ для вычисленія ординатъ линіи вліянія для количествъ $(M:h)$.

3) Построивъ линіи вліянія для усилій въ поясахъ, опредѣляемъ линіи вліянія для усилій въ промежуточныхъ стержняхъ (по № 72, выпускъ VII).

---

*) См. стр. 92 (выпускъ VII), уравненіе (2), гдѣ принято $\frac{F_c}{F_m} = 1$.

**) Уравненіе для $H = X'''$ соотвѣтствуетъ формулѣ, полученной въ § 7 (выпускъ VIII) для вычисленія горизонтальнаго распора двухшарнирной арки. Здѣсь только $y$ взято относительно другой оси. Обратимъ здѣсь еще разъ вниманіе на разныя преобразованія и сокращенія, сдѣланныя въ § 7 для различныхъ частныхъ случаевъ: тоже самое можно примѣнить и къ арочнымъ фермамъ съ задѣланными концами.

4) Прикладываемъ единицу груза $P$ по порядку къ каждой точкѣ прикрѣпленія поперечной балки, строимъ отдѣльно для каждаго такого состоянія нагрузки діаграмму усилій Кремоны и съ помощью этихъ діаграммъ опредѣляемъ линіи вліянія для усилій въ стержняхъ.

**113.** Построеніе многоугольника равнодѣйствующихъ $F_1CF_2$ (фиг. 305) производится съ помощью опредѣленія значеній $z_0 = \frac{X'}{H}$ и $e = \frac{X''}{H} l$; кромѣ того эту задачу можно разрѣшить еще слѣдующимъ образомъ.

Соединяя грузы $w'$ и $w''$ веревочными многоугольниками (фиг. 305), для которыхъ взяты полюсныя разстоянія $w_I$ и $w_{II}$ *), и проведя замыкающія линіи $s'$, $s''$, мы получимъ моменты

$$M'_w = w_I \eta'; \quad M''_w = w_{II} \eta'' \text{ (фиг. 305 c и e).}$$

Внѣшніе бока перваго веревочнаго многоугольника пересѣкаются на оси $A_y$, такъ какъ эта прямая представляетъ вертикальную ось, проходящую черезъ центръ силъ $w'$; мы найдемъ здѣсь:

$$\Sigma w' : w_I = m : k \text{ или } \Sigma w' = w_I \frac{m}{k} \text{ и (по уравн. 15).}$$

$$X' = P \frac{\eta' k}{m}.$$

Внѣшніе бока втораго веревочнаго многоугольника отсѣкаютъ на оси $A_y$ отрѣзокъ $v = \frac{\Sigma x w''}{w_{II}}$; эти бока между собой параллельны, потому что сумма грузовъ $w'$ (а именно $\Sigma w'' = \Sigma x w'$) равна нулю, а поэтому равнодѣйствующая силъ $w''$ безконечно мала и лежитъ въ безконечности. По уравн. (15) находимъ:

$$X'' + P \frac{\eta''}{v},$$

а если единица груза $P$ измѣряется отрѣзкомъ $v$, то получаемъ:

$$X'' = \eta''; \; X' = \frac{vk}{m} \eta' = n\eta',$$

гдѣ $n$ (на фиг. 305) опредѣляется съ помощью прямыхъ $g_1$ и $g_2$, проведенныхъ параллельно внѣшнимъ бокамъ перваго веревочнаго многоугольника (фиг. 305 e).

Разложимъ опорныя сопротивленія $K_1$ и $K_2$ по вертикальному направленію и по направленію оси $A_x$ и обозначимъ вертикальныя составляющія буквами $A$ и $B$ (фиг. 305 b), тогда легко найдемъ:

$$A : H = \left(\overline{CD} + \frac{e}{l} a\right) : a, \text{ гдѣ } CD = \frac{Pab}{lH},$$

*) Для перваго веревочнаго многоугольника на фиг. 305 d соотвѣтствующій многоугольникъ силъ вычерченъ только частью.

поэтому

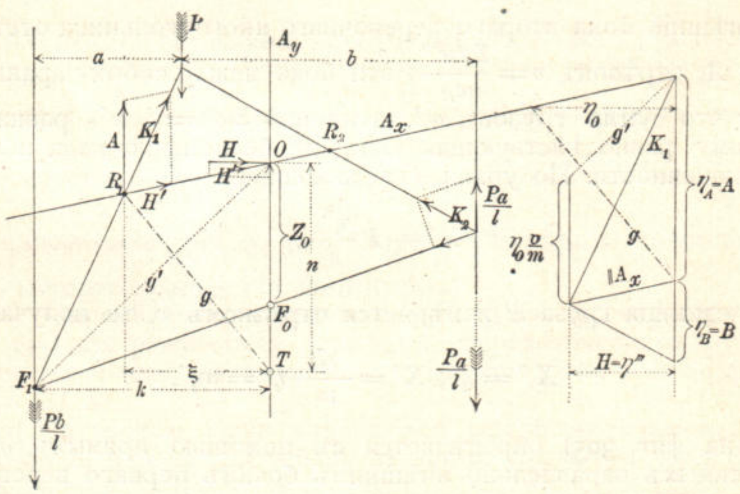
$$A = \frac{Pb}{l} + \frac{He}{l} = \frac{Pb}{l} + X'' = \frac{vb}{l} + \eta'',$$

а отсюда слѣдуетъ, что веревочный многоугольникъ для грузовъ $w''$ раздѣляетъ на двѣ части

$$\eta_A = A \text{ и } \eta_B = B$$

тотъ отрѣзокъ $v = P$, который получается на направленіи груза $P$ при пересѣченіи его внѣшними боками этого веревочнаго многоугольника. Если такимъ образомъ отрѣзокъ $\eta'''$ представляетъ величину горизонтальнаго распора $H$, опредѣленнаго съ помощью веревочнаго многоугольника, соединяющаго грузы $w'''$ (это возможно сдѣлать, потому что по уравн. 15 сила $X''' = H$ пропорціональна $\eta'''$), то мы будемъ въ состояніи опредѣлить сопротивленія опоръ по величинѣ и направленію; остается только опредѣлить еще одну точку многоугольника $F_1CF_2$ (фиг. 308).

Въ особенности легко опредѣляются точки пересѣченія $R$ опорныхъ сопротивленій съ осью $A_x$. Обозначимъ буквой $\xi$ разстояніе точки $R_1$ отъ $A_y$ и вычислимъ этотъ отрѣзокъ, приравнявъ нулю сумму моментовъ силъ $K_1$, $K_2$, $P$, находящихся въ равновѣсіи, относительно точки $F_0$. Но раньше этого замѣнимъ силу $P$ двумя ея составляющими $\frac{Pb}{l}$ и $\frac{Pa}{l}$, приложенными къ точкамъ $F_1$ и $F_2$, разложимъ $K_1$ и $K_2$, какъ показано на фиг. 308, перенесемъ составляющую силы $K_1$, совпадающую съ осью $A_x$, въ точку $O$ и




Фиг. 308.

разложимъ ее тамъ по горизонтальному и вертикальному направленіямъ. Вышеупомянутое уравненіе моментовъ напишется такъ:

$$A\xi + Hz_0 - \frac{Pb}{l}k = 0, \text{ т. е.}$$

$$\eta_A\xi + n\eta_1' - v\frac{b}{l}k = 0;$$

такъ какъ $v\frac{k}{m}=n$, то изъ него получимъ:

$$\xi=\frac{n}{\eta_A}\left(b\frac{m}{l}-\eta'\right)=\frac{n\eta_0}{\eta_A},$$

гдѣ $\eta_0$ означаетъ на фиг. 305 отрѣзокъ, отсѣкаемый на направленіи груза $P$ веревочнымъ многоугольникомъ для грузовъ $w'$ и послѣднимъ его бокомъ. Вытекающее отсюда графическое опредѣленіе точки $R_1$ показано на фиг. 308; прямая $TR_1$, проведенная изъ точки $T$, взятой на постоянномъ разстояніи $n$ отъ точки $O$, будетъ параллельна прямой $g$.

Также легко найти и точку $F_1$. Для этого откладываемъ кверху отъ нижней конечной точки сопротивленія $K_1$ отрѣзокъ $\eta_0\frac{v}{m}$, проводимъ прямую $g'$ и затѣмъ $OF_1 \parallel g'$. Доказать это не трудно.

Въ особенности просто производится двойное опредѣленіе положенія сопротивленія $K_2$, если только произвольное полюсное разстояніе для веревочнаго многоугольника $II$ выбрать такъ, чтобъ $v=m$ (что легко сдѣлать съ помощью двойнаго построенія веревочнаго многоугольника). Тогда будемъ имѣть $\eta_0\frac{v}{m}=\eta_0$ и $n=k$.

**114.** Примѣнимъ только что описанный способъ къ симметричной арочной фермѣ, фиг. 309 a., причемъ будемъ пользоваться правилами построенія моментовъ высшихъ степеней параллельнныхъ силъ, описанными въ I томѣ (№ 20, фиг. 26, выпускъ I).

Примемъ грузы $w'=\frac{s}{r^2}$, опредѣляемые непосредственнымъ вычисленіемъ, за вертикальныя силы и свяжемъ ихъ въ такомъ порядкѣ $w'_1, w'_2, w'_3, \ldots$ веревочнымъ многоугольникомъ $I$ (полюсъ $O_I$, полюсное разстояніе $w_I$).

Полюсное разстояніе $w_I$ можно взять произвольнымъ. Бока веревочнаго многоугольника $I$ отсѣкаютъ на оси $A_y$ отрѣзки $\frac{w'x}{w_I}$, пропорціональные грузамъ $w''$; эти отрѣзки положительны для узловъ лѣвой половины фермы и отрицательны для узловъ правой половины. Разсматривая эти отрѣзки какъ вертикальныя силы, замѣняющія силы $w'$, соединяя ихъ веревочнымъ многоугольникомъ $II$ (полюсъ $O_{II}$, произвольное полюсное разстояніе $=w_{II}$) и измѣряя отрѣзки $\eta_A$, $\eta_B$, $v$, отсѣкаемые веревочнымъ многоугольникомъ $II$ и его внѣшнями боками на вертикали груза $P$, получимъ:

$$\eta_A:\eta_B:v=A:B:P,$$

а въ масштабѣ силъ $P=v$:

$$\eta_A=A;\quad \eta_B=B.$$

Такъ какъ ось $-x$-овъ горизонтальна, то $A$ и $B$ будутъ вертикальными реакціями опоръ.

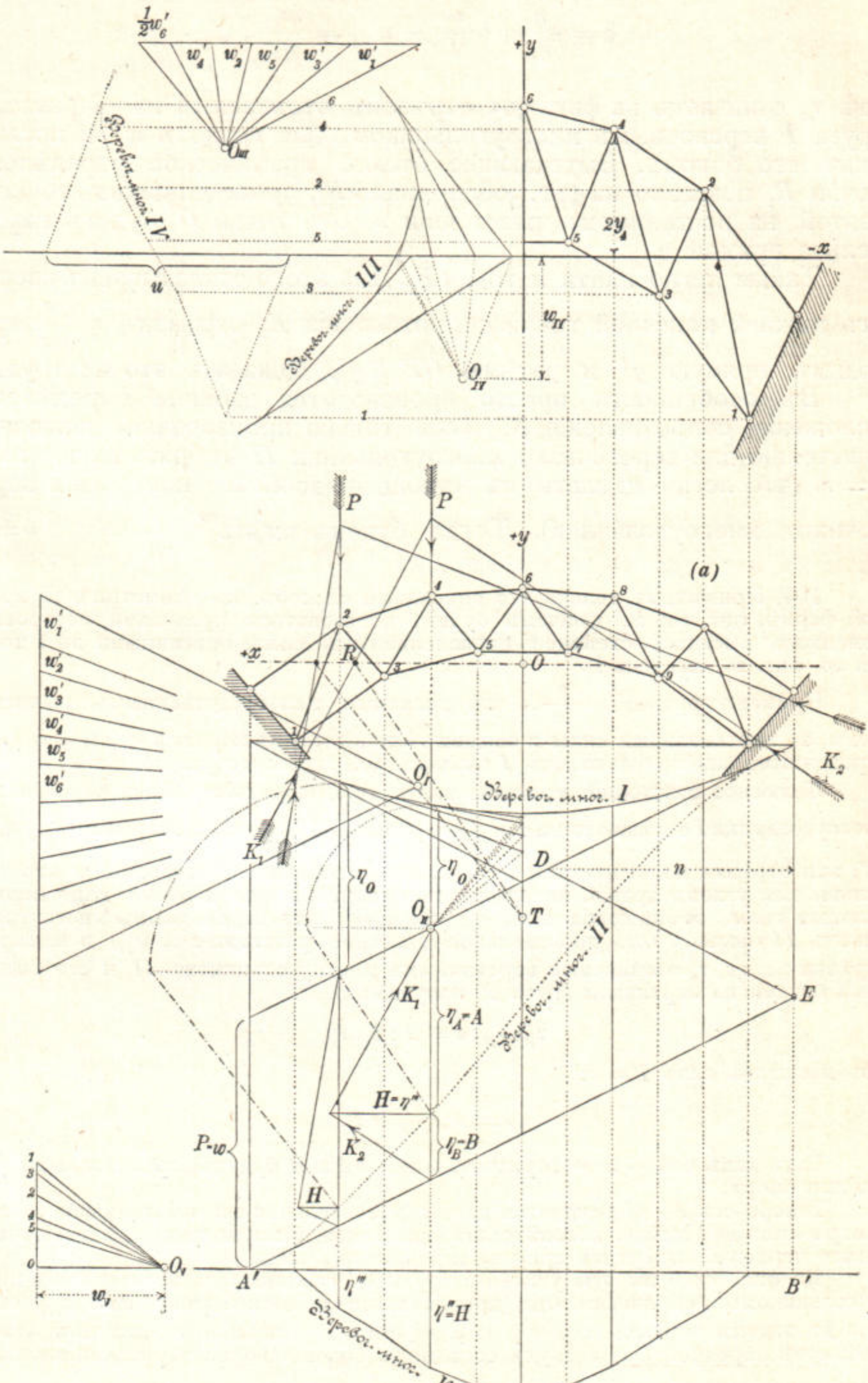
Теперь ось $A_x$ опредѣлится какъ горизонтальная ось, проходящая черезъ центръ силъ $w'$. Можно посовѣтовать при этомъ, ради полученія болѣе отчетливаго чертежа, вычертить арку въ искаженномъ видѣ.

На фиг. 309 b высоты удвоены; грузы $w'$ соединяются веревочнымъ многоугольникомъ $III$ (полюсъ $O_{III}$, произвольное полюсное разстояніе $w_{III}$) сначала въ такомъ порядкѣ $w'_1$, $w'_3$, $w'_2$, $w'_4$, $1/2\, w'_6$ *); сдѣлано это для того, чтобъ избѣгнуть перекрещиванія двухъ сосѣднихъ боковъ. Точка пересѣченія внѣш-

---

*) Взято $1/2\, w'_6$, потому что разсматривается только половина симметричной арки.

нихъ боковъ опредѣлитъ ось $A_x$; на этой оси бока веревочнаго многоугольника отсѣкают отрѣзки $\frac{w' \, 2y}{w_{III}}$, пропорціональные грузамъ $w'''$; эти отрѣзки надо




Фиг. 309.

считать положительными или отрицательными, смотря по тому соотвѣтствуютъ ли они узламъ, лежащимъ выше или ниже оси $A_x$. Эти отрѣзки принимаемъ (вмѣсто $w'$) за горизонтальныя силы, а силы связываемъ веревочнымъ многоугольникомъ $IV$ (полюсъ $O_{IV}$, произвольное полюсное разстояніе $w_{IV}$), внѣшніе бока котораго отсѣкутъ на оси $A_x$ отрѣзокъ $u$, который удовлетворяетъ такому равенству:

$$u w_{IV} = \Sigma \frac{w' \, 2y}{w_{III}} 2y.$$

Отсюда получаемъ для половины арки $\Sigma w' y^2 = {}^1/_4\, w_{III}\, w_{IV} u$ и для всей фермы:

$$\Sigma w' y^2 = {}^1/_2\, w_{III}\, w_{IV}\, u.$$

Для опредѣленія моментовъ $M_w'''$, входящихъ въ искомое выраженіе для

$$H = X''' = P \frac{M_w'''}{\Sigma w' y^2},$$

принимаемъ отрѣзки $\dfrac{2yw'}{w_{III}}$ (вмѣсто $w'$) за вертикальныя силы и связываемъ ихъ веревочнымъ многоугольникомъ $V$ (полюсъ $O_V$, полюсное разстояніе $w_V$), но теперь уже въ такомъ порядкѣ 1, 2, 3, . . *). Если $\eta'''$ будетъ ординатой этого веревочнаго многоугольника, то изгибающій моментъ для балки $A'B'$, находящейся подъ дѣйствіемъ грузовъ $\dfrac{2yw'}{w_{III}}$, равняется $w_V\, \eta'''$; поэтому для балки, находящейся подъ дѣйствіемъ грузовъ $w''' = w' y$, получимъ:

$$M_w''' = {}^1/_2\, w_{III}\, w_V\, \eta''', \text{ а затѣмъ}$$

$$H = P \frac{w_V \eta'''}{w_{IV} u} = \frac{v\, w_V}{w_{IV}\, u}\, \eta'''.$$

Если выбрать $w_V = \dfrac{w_{IV} \cdot u}{v}$ (напр. $w_{IV} = {}^1/_2\, v$ и $w_V = {}^1/_2\, u$, какъ это сдѣлано на фиг. 309 **), то найдемъ

$$H = \eta''',$$

а теперь мы уже въ состояніи опредѣлить сопротивленія опоръ $K_1$ и $K_2$ для каждаго сосредоточеннаго груза. Для того чтобъ найти положеніе этихъ силъ, опредѣляемъ съ помощью прямой $ED$, параллельной первому боку веревочнаго многоугольника $I$, отрѣзокъ $n$ и откладываемъ его по оси $A_y$ отъ $O$ внизъ до $T$ (фиг. 308). Повернемъ теперь влѣво на 90° отрѣзокъ $\eta_0$, отсѣкаемый на направленіи силы $P$ веревочнымъ многоугольникомъ $I$ и его послѣднимъ бокомъ, соединимъ конечную точку этого отрѣзка съ концемъ отрѣзка $\eta_A$ прямою линіею (пунктирною) и проведемъ къ ней параллельную изъ точки $T$; послѣдняя пересѣчетъ ось $A_x$ въ точкѣ, черезъ которую пройдетъ направленіе $K_1$.

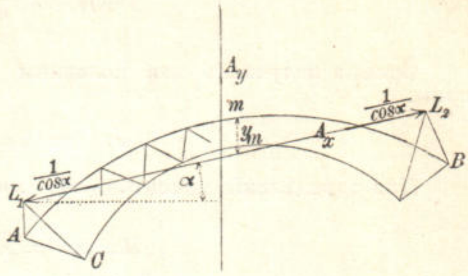
**115. Вліяніе измѣненія температуры.** Для вычисленія значеній $X$, зависящихъ отъ измѣненія температуры, можно было бы воспользоваться уравненіями (10) и (6); больше же преимуществъ имѣетъ слѣдующій пріемъ.

---

*) Въ соотвѣтствующей діаграммѣ порядокъ лучей указанъ цифрами.

**) Единственное полюсное разстояніе — $w_V$, которое взято не произвольно, а выведено въ зависимости отъ предыдущихъ полюсныхъ разстояній. Масштабъ, въ которомъ отложено $w'$, пока рѣчь идетъ о вліяніи грузовъ (но не измѣненія температуры), можетъ быть произвольнымъ.

Представимъ себѣ, что двѣ равныя, но противоположно другъ отъ друга направленныя силы $\frac{1}{\cos\alpha}$ (фиг. 310) вызываютъ усилія $S''' = \mp 1 \frac{y_m}{r_m}$; силы эти совпадаютъ съ осью $A_x$ (уголъ наклоненія которой $= \alpha$), а точки приложенія ихъ $L_1$ и $L_2$ соединены съ концами арки жесткими стержнями *). Тогда подъ $\frac{1}{\cos\alpha}$ мы будемъ подразумѣвать усиліе (а именно *сжатіе*), которое существуетъ отъ какой либо причины въ стержнѣ, соединяющемъ узлы $L_1$ и $L_2$; примѣнимъ теперь къ такой свободной рѣшеткѣ (безъ опоръ), подверженной дѣйствію внутреннихъ силъ, законъ возможныхъ перемѣщеній, приписывая длинѣ стержней $s$ измѣненія длины $\omega \cdot s$, гдѣ $\omega$ имѣетъ постоянное значеніе. Мы получимъ тогда уравненіе работы




Фиг. 310.

$$\Sigma S''' \omega s + \Sigma_1 S''' \omega s - \frac{1}{\cos\alpha} \cdot \omega\, \overline{L_1 L_2} = 0,$$

гдѣ первый членъ относится къ стержнямъ арки, второй къ добавленнымъ жесткимъ стержнямъ, за исключеніемъ стержня $L_1L_2$, и, наконецъ, третій относится къ стержню $L_1L_2$. Сокративъ уравненіе на $\omega$ и выбравъ точки $L_1L_2$ такъ, чтобъ $\Sigma_1 S''' s = 0$, получимъ

$$\Sigma S''' s = \overline{L_1 L_2} \frac{1}{\cos\alpha};$$

затѣмъ легко получаемъ выраженіе

$$X_t''' = \frac{\varepsilon EFtl'''}{\cos\alpha \cdot \Sigma y_m w''_m}, \tag{16}$$

гдѣ $l'''$ означаетъ длину отрѣзка $L_1L_2$.

Для опредѣленія точки $L_1$ обозначимъ длину стержней $AL_1$, $CL_1$, $AC$ буквами $a$, $b$, $c$, а усилія, вызываемыя въ этихъ стержняхъ силою $\frac{1}{\cos\alpha}$, буквами $S_a'''$, $S_b'''$, $S_c'''$ и постараемся удовлетворить уравненію

$$S_a''' a + S_b''' b + S_c''' c = 0.$$

*) Эти силы вызываютъ изгибающій моментъ $M_m = \frac{1}{\cos\alpha}(y_m \cos\alpha) = y_m$ и усилія $S'''_m = \mp \frac{y_m}{r_m}$. Эта формула примѣнима также и къ промежуточнымъ стержнямъ; вмѣсто узловъ $m$ надо взять опредѣленныя точки вращенія, относительно которыхъ составляются уравненія моментовъ по Риттеру.

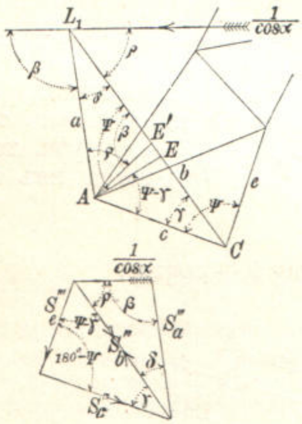
Когда первый промежуточный стержень рѣшетчатой арочной фермы проходитъ черезъ точку $A$, то получимъ дiаграмму усилiй, фиг. 311, гдѣ $S_e'''$ означаетъ усилiе въ первомъ стержнѣ нижняго пояса. Обозначимъ буквами углы на фиг. 311, причемъ проведемъ $AE$ и $AE'$ такъ, чтобъ $\angle L_1EA = \psi$ и $\angle L_1E'A = \beta$, тогда получимъ:

$$\frac{-S_e'''}{S_b'''} = \frac{\sin(\psi - \gamma)}{(\sin 180^\circ - \psi)} = \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CE}}{c},$$

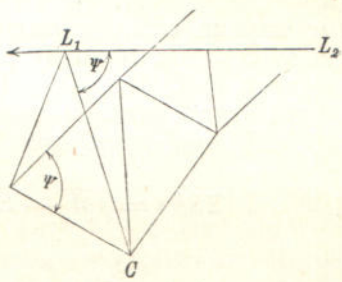
$$\frac{-S_a'''}{S_b'''} = \frac{\sin\rho}{\sin\beta} = \frac{\overline{L_1E'}}{\overline{AL_1}} = \frac{L_1E'}{a},$$

а отсюда:

$$S_a'''a + S_b'''(CE + L_1E') + S_e'''c = 0.$$



Фиг. 311.



Фиг. 312.

Выше написанное условiе будетъ удовлетворено поэтому тогда когда $CE + L_1E' = b$, т. е. когда $\beta = \psi$.

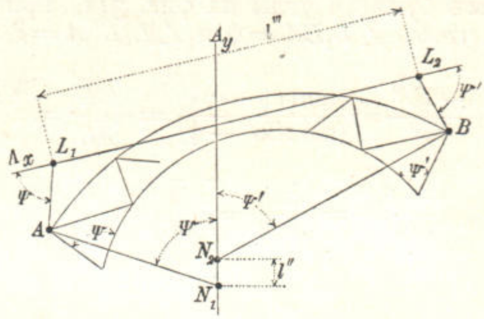
Подобно этому можемъ вывести заключенiе и для другаго случая, когда первый промежуточный стержень проходитъ черезъ $C$ (фиг. 312); тогда для удовлетворенiя условiю $aS_a''' + bS_b''' + cS_c''' = 0$ уголъ $L_2L_1C$ долженъ равняться $\psi$.

Такимъ же точно способомъ находится точка $L_2$; слѣдовательно, длина отрѣзка $\overline{L_1L_2} = l'''$ опредѣлена. Слѣдуетъ разсмотрѣть еще фиг. 313, гдѣ крайнiе промежуточные стержни проходятъ черезъ $A$ и $B$.

Цѣлый рядъ подобныхъ заключенiй позволяетъ найти значенiе суммы, входящей въ числитель выраженiя для $X''$:

(17) $$\Sigma S''s = l'', \text{ а затѣмъ и } X_t'' = \frac{\varepsilon EFtl''}{\Sigma x_m w_m''},$$

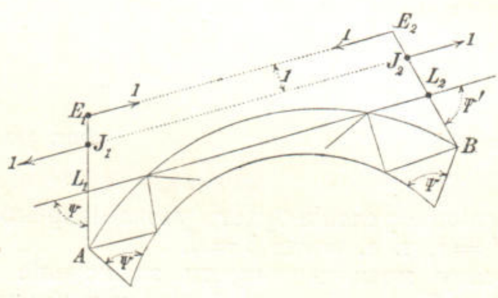
гдѣ $l''$ означаетъ взаимное разстоянiе между точками $N_1$ и $N_2$, лежащими на оси $A_y$; эти точки получаются при проведенiи изъ $A$ и $B$ прямыхъ, образующихъ съ осью $A_y$ углы $\psi$ и $\psi'$.




Фиг. 313.

Наконецъ, чтобъ вычислить по возможности проще сумму $\Sigma S' s$, представимъ себѣ моменты $M' = 1$ и усилiя $S'_m = \mp \frac{1}{r_m}$, вызываемые парами силъ, приложенными къ концамъ арки, причемъ силы для этихъ паръ равны 1 и направлены параллельно оси $A_x$, плечо же ихъ $= 1$, фиг. 314. Пусть $E_1, E_2$, $J_1$, $J_2$ будутъ точками пересѣченiя этихъ силъ съ прямыми $AL_1$ и $BL_2$; тогда изъ предыдущихъ изслѣдованiй получимъ

$$\Sigma S'' s = \overline{J_1 J_2} - \overline{E_1 E_2} = \operatorname{cotg} \psi + \operatorname{cogt} \psi',$$




Фиг. 314.

а затѣмъ

$$(18) \qquad X_t' = \frac{\varepsilon EFt (\operatorname{cotg} \psi + \operatorname{cotg} \psi')}{\Sigma w'_m}.$$

Для арки симметричной относительно средней вертикали, $l'' = 0$, а поэтому и $X_t'' = 0$. Въ большинствѣ случаевъ уголъ $\psi = \psi' = 90^\circ$ (или приблизительно $= 90^\circ$), тогда $\operatorname{cotg} \psi = \operatorname{cotg} \psi' = 0$, а отсюда слѣдуетъ, что $X' = 0$, а такъ какъ $\alpha = 0$, то

$$(19) \qquad X_t''' = H_t = \frac{\varepsilon EFtl'''}{\Sigma y_m w_m'''},$$

гдѣ $l'''$ означаетъ горизонтальное разстояніе между тѣми точками пятъ арки, откуда исходятъ крайніе промежуточные стержни *). Такимъ образомъ въ этомъ важномъ случаѣ измѣненіе температуры вызываетъ два сопротивленія опоръ, равныя $H_t$ и совпадающія по направленію съ осью $A_x$.

Если форма арки съ легкимъ уклономъ опредѣляется изъ основной симметричной формы (фиг. 306), то возможно допустить, что сопротивленіе опоръ отъ дѣйствія измѣненія температуры совпадаетъ съ осью $A_x$. Такъ какъ $K_t = \frac{H_t}{\cos\alpha} = \frac{X_t'''}{\cos\alpha}$, то величина сопротивленія равняется:

$$K_t = \frac{\varepsilon EFtl'''}{\cos\alpha \cdot \Sigma y_m w_m}. \tag{20}$$

Если вліяніе нагрузки опредѣлено по № 114 съ помощью веревочныхъ многоугольниковъ, то выраженія для суммъ, входящихъ въ знаменатели количествъ $X_t'$, $X_t''$, $X_t'''$, вычисляются съ помощью этихъ же веревочныхъ многоугольниковъ. Здѣсь необходимо только обращать вниманіе на единицы разсматриваемыхъ величинъ. Напр. для фермы взятой на фиг. 309 имѣемъ:

$$H_t = \frac{\varepsilon EFtl'''}{\Sigma y_m w_m'''} = \frac{\varepsilon EFtl'''}{\Sigma y^2_m w_m}$$

и $\Sigma y^2_m w_m = {}^1/_2\, w_{III} w_{IV} u$, поэтому

$$H_t = 2\,\frac{\varepsilon EFtl'''}{w_{III} w_{IV} u}.$$

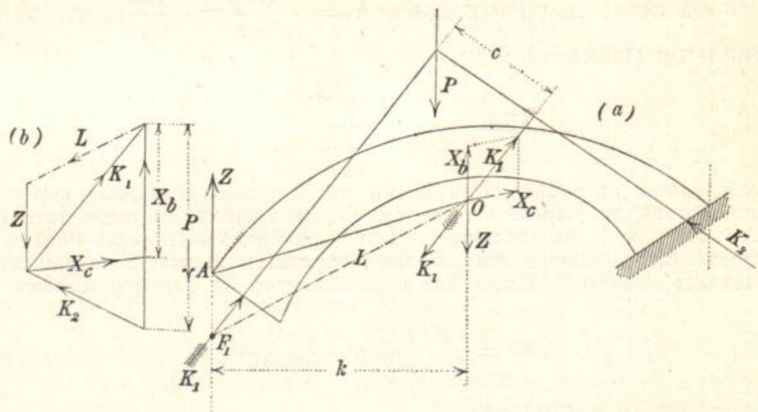
Количество $w'_m = \frac{s_m}{r^2_m}$ представляетъ изъ себя значеніе, обратное длинѣ, а $\Sigma y^2_m w_m$ представляетъ длину, поэтому одинъ изъ трехъ отрѣзковъ $w_{III}$, $w_{IV}$, $u$ (безразлично какой) долженъ быть измѣренъ въ томъ масштабѣ, въ какомъ нанесены были величины $w'$, два же другихъ отрѣзка должны быть измѣрены въ масштабѣ разстояній чертежа.

## b. Второй способъ.

**116.** Изслѣдуемъ еще одинъ способъ, который позволяетъ опредѣлить вліяніе наклонныхъ грузовъ и который основывается строго на общемъ рѣшеніи вопроса, описанномъ въ № 65 (выпускъ VII). Съ этой цѣлью замѣнимъ лѣвую опору жесткой фигурой (фиг. 315 a) и приложимъ къ точкѣ $O$ этой фигуры (точка взята предварительно произвольною) двѣ взаимно уничтожающіяся силы $K_1$, которыя имѣютъ то же направленіе и ту же величину, что и сопротивленіе лѣвой опоры $K_1$. Одна изъ этихъ силъ образуетъ съ сопротивленіемъ опоры $K_1$ пару силъ, моментъ которой $K_1c$ мы обозначимъ черезъ $X_a$; другую силу разложимъ на $X_b$ (вертикальную составляющую) и на $X_c$ (по направленію, взятому предварительно произвольно). Примемъ $X_a$, $X_b$, $X_c$ за величины статически неопредѣли-

*) Для фермы на фиг. 306 $l''' = \overline{A'B'}$.

мыя. Если эти величины будутъ извѣстны, то $K_1$ найдется слѣдующимъ образомъ. Сначала опредѣляемъ съ помощью треугольника силъ $X_c$, $X_b$ величину и направленіе $K_1$, фиг. 315 b. Затѣмъ находимъ на фиг. 315 a вертикальныя силы $Z$, образующія пару, равноцѣнную парѣ силъ $(K_1, K_1)$, съ помощью условія $Zk = X_a$. Наконецъ, прибавляя вспомогательную силу $L$, возстановляемъ въ точкѣ $O$ равновѣсіе между силами $K_1$ и $Z$ и проводимъ изъ $O$ прямую, па-




Фиг. 315.

раллельную $L$, которая пересѣкаетъ вертикаль точки $A$ въ точкѣ, лежащей на направленіи сопротивленія опоры $K_1$.

При составленіи условій упругости будемъ обозначать точку $O$ указателемъ $b$ или $c$, смотря по тому какъ мы будемъ разсматривать точку $O$, какъ точку приложенія силы $X_b$ или какъ точку приложенія силы $X_c$. Для опредѣленія вліянія произвольно направленнаго груза $P_m$, приложеннаго къ точкѣ $m$, мы воспользуемся уравненіями:

$$(21) \qquad X_a = P_m \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}}, \qquad X_b = P_m \frac{\delta_{mb}}{\delta_{bb}}, \qquad X_c = P_m \frac{\delta_{mc}}{\delta_{cc}},$$

гдѣ подъ $\delta$ подразумѣваются значенія, объясненныя нами въ № 59 (выпускъ VII); примѣнимость этихъ уравненій основана на предположеніи, что точка приложенія силъ $X_b$, $X_c$ и направленіе $X_c$ опредѣлены по правиламъ, даннымъ въ № 64 (примѣръ 1—выпускъ VII). (Результаты $\delta_{ab} = \delta_{ba} = 0$; $\delta_{ac} = \delta_{ca} = 0$; $\delta_{bc} = \delta_{cb} = 0$).

Разсмотримъ шарнирный многоугольникъ 0 — 1 — 2 — 3 — 4 . . . 8 — 9 (фиг. 316) съ неподвижной стороной 0 — 1 и примкнемъ къ нему точку $O \equiv 10$ (заранѣе неопредѣленную) посредствомъ жесткихъ стержней 9 — 10 и 8 — 10. Треугольникъ 8 — 9 — 10 будетъ тогда жесткимъ тѣломъ, замѣняющимъ лѣвую опору. Обозначимъ длину стержней буквами $d_1$, $d_2$, $d_3$ . . . . , а углы между двумя смежными стержнями, измѣряемые въ одну и ту же сторону, буквами $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ . . . .

Если пренебречь деформаціями промежуточныхъ стержней, что всегда возможно сдѣлать, то перемѣщенія узловъ вполнѣ опредѣляются въ зависимости отъ измѣненія угловъ $\alpha$ *). Причемъ, согласно прежнимъ обозначеніямъ $s_m$ и $r_m$, имѣемъ

$$(22)\qquad \Delta\alpha_m = +\frac{\Delta s_m}{r_m} \text{ и соотвѣтственно } \Delta\alpha_m = -\frac{\Delta s_m}{r_m},$$

смотря по тому представляетъ ли $\alpha_m$ уголъ въ треугольникѣ или нѣтъ.

Изгибающему моменту $M^m$ соотвѣтствуютъ

$$S_m = \mp\frac{M_m}{r_m} \text{ и } \Delta s_m = \mp\frac{M_m s_m}{r_m EF_s},$$

причемъ верхній знакъ относится къ верхнему поясу, нижній къ нижнему.

Если $\alpha$ есть уголъ треугольника, то $s$ относится къ стержню нижняго пояса, въ противномъ случаѣ къ стержню верхняго пояса, такъ что вообще

$$(23)\qquad \Delta\alpha_m = +\frac{M_m s_m}{r_m^2 EF_m} \text{ и } EF\Delta\alpha_m = \frac{M_m s_m}{r_m^2}\,\frac{F}{F_m},$$

гдѣ $F$ означаетъ среднее значеніе площади поперечнаго сѣченія пояса.

Если вычислить количества

$$(24)\qquad \Delta\alpha_m = \frac{s_m}{r_m^2}\,\frac{F}{F_m}\,M_m,$$

то мы получимъ перемѣщенія, увеличенныя въ $EF$ разъ; это увеличеніе не оказываетъ вліянія на результатъ, полученный изъ уравненій 21, такъ какъ въ эти уравненія входятъ только отношенія перемѣщеній. Если принять рекомендуемое нами положеніе о равенствѣ всюду площадей поперечныхъ сѣченій и сдѣлать $F:F_m = 1$, то получимъ $\Delta\alpha_m = \frac{s_m}{r_m^2} M_m$.

Состояніямъ $X_a = -1, X_b = -1, X_c = -1$ соотвѣтствуютъ моменты:

$$M_m' = -1,\ M_m'' = x_m,\ M_m''' = y_m$$

и зависящія отъ нихъ измѣненія угловъ:

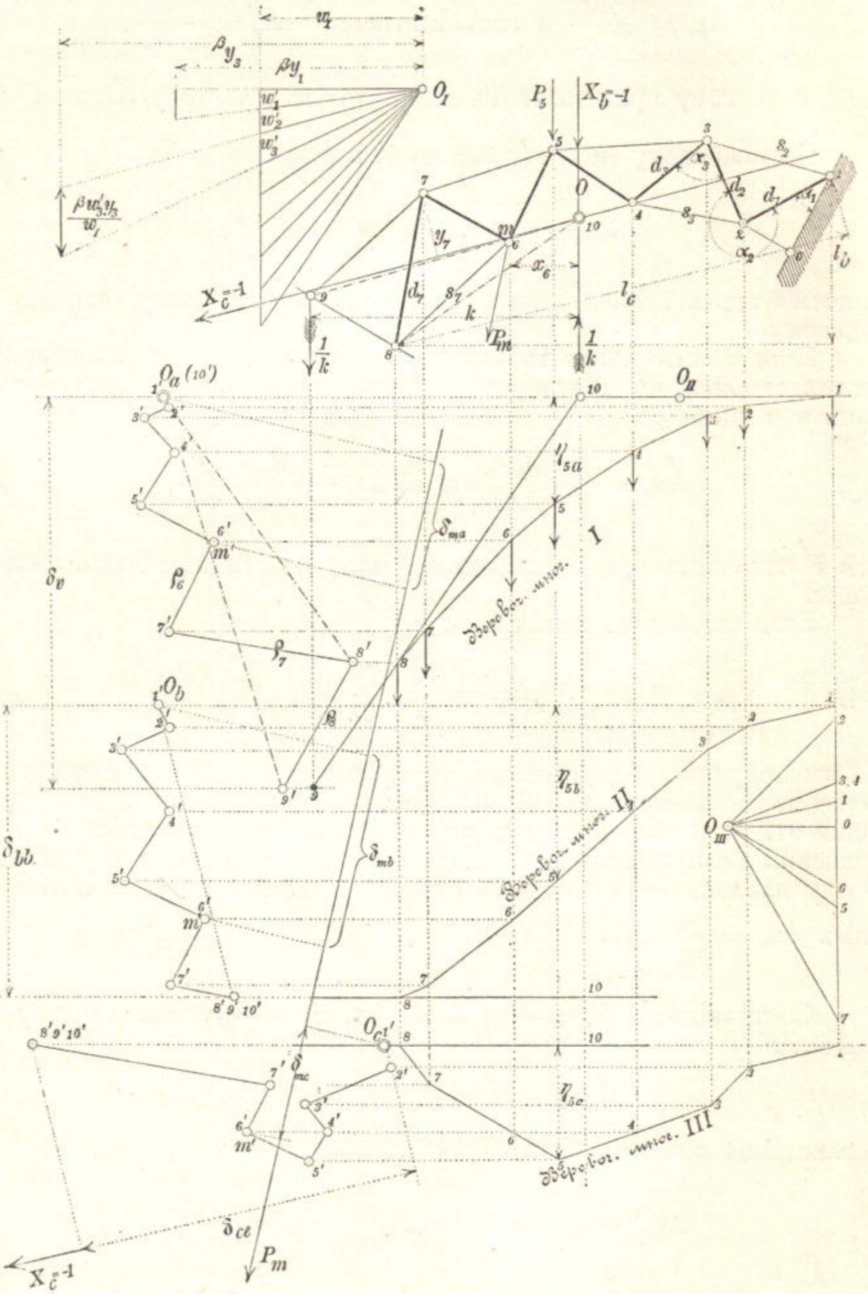
$$\Delta\alpha_m' = -\frac{s_m}{r_m^2};\ \Delta\alpha_m'' = x_m\frac{s_m}{r_m^2};\ \Delta\alpha_m''' = \frac{y_m s_m}{r_m^2},$$

абсолютныя значенія которыхъ равны грузамъ $w_m'$, $w_m''$, $w_m'''$, взя-

---

*) Если желаемъ принять во вниманіе эти измѣненія длины, то для опредѣленія деформацій надо примѣнить способъ Вилліо.

тымъ въ первомъ способѣ; при этомъ надо помнить, что теперь $y$ должно измѣряться по перпендикуляру къ $X_c$ *).



Фиг. 316.

*) Дальше мы докажемъ, что направленіе $X_c$ совпадаетъ съ направленіемъ оси $A_x$ на фиг. 305. Если за статитически неопредѣлимую величину принять горизонтальную проекцію силы $X^c$ (т. е. $H$), то получили бы полное соотвѣтствіе между $\Delta'''\alpha$ и ранѣе взятыми $w'''$.

Построеніе діаграммъ перемѣщеній производится слѣдующимъ способомъ.

*I. Діаграмма перемѣщеній для состоянія $X_a = 1$.* Будемъ разсматривать измѣненія угловъ $-\Delta\alpha_m = s_m : r_m{}^2$ какъ вертикальныя силы, направленныя сверху внизъ, и соединимъ ихъ веревочнымъ многоугольникомъ I, первый бокъ котораго взятъ горизонтальнымъ и полюсное разстояніе для котораго $w_I$ можетъ быть выбрано произвольнымъ.

Черезъ точки веревочнаго многоугольника, соотвѣтствующія узламъ 1, 2, 3, . . . 9 шарнирнаго многоугольника, проводимъ горизонтальныя прямыя $g_1$, $g_2$, $g_3$, . . . и изъ произвольной точки $1'$, взятой на прямой $g_1$, чертимъ ломанную линію $1'\ 2'\ 3'\ 4'$ . . . $9'$, участки которой перпендикулярны соотвѣтствующимъ сторонамъ шарнирнаго многоугольника 1—2—3—4— . . . 9. Лучи, проведенные къ точкамъ $2'$, $3'$, $4'$ . . . изъ полюса $O_a$, совпадающаго съ точкой $1'$, представятъ тогда по величинѣ и направленію перемѣщенія узловъ 2, 3, 4 . . . ; поэтому значеніе $\delta_{ma}$, соотвѣтствующее одному сосредоточенному грузу $P_m$, найдется какъ проекція луча $O_a m'$ на направленіе $P_m$, измѣренная въ масштабѣ, взятомъ сначала безотносительно, а теперь въ зависимости отъ полюснаго разстоянія $w_I$ и отъ значеній $E$, $F$. Такъ какъ точка $O$ (имѣющая обозначеніе 10) должна остаться въ покоѣ, то $10'$ должно совпасть съ $O_a$, а поэтому положеніе точки 10 опредѣлится съ помощью условій: $9 - 10 \perp 9' - 10'$, $8 - 10 \perp 8' - 10'$; очевидно также, что точка 10 должна лежать на вертикальной оси, проходящей черезъ центръ силъ $-\Delta\alpha' = w'$, а этимъ доказывается совпаденіе $X_b$ съ ранѣе взятой осью $A_y$.

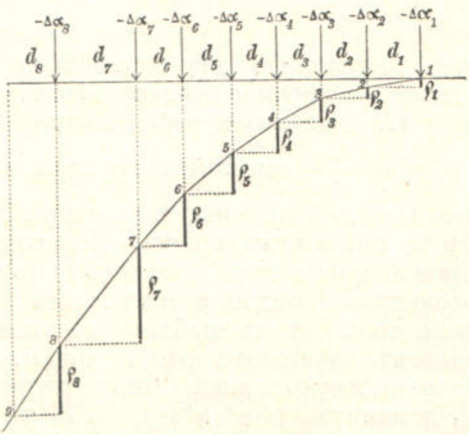
Второй способъ построенія ломанной $1'\ 2'\ 3'$ . . . состоитъ въ вычисленіи угловъ вращеній $\psi$ и значеній $\rho = \psi d$ для отдѣльныхъ стержней $d_1$, $d_2$, . . . Мы получимъ:

$$\psi_1 = \Delta\alpha_1;\ \psi_2 = \psi_1 + \Delta\alpha_2;\ \psi_3 = \psi_2 + \Delta\alpha_3; \ldots .$$
$$\rho_1 = d_1\psi_1;\ \rho_2 = d_2\psi_2;\ \rho_3 = d_3\psi_3; \ldots .$$

и затѣмъ откладываемъ.

$$1' - 2' = \rho_1;\ 2' - 3' = \rho_2;\ 3' - 4' = \rho_3; \ \ldots$$

Третій способъ основывается на томъ обстоятельствѣ, что отрѣзки $\rho$ зависятъ только отъ $\Delta\alpha$ и $d$, но не зависятъ отъ формы шарнирнаго многоугольника. Такимъ образомъ, если отложить по горизонтальной прямой длину стержней $d$, другъ за другомъ, какъ это показано въ маломъ масштабѣ на фиг. 317, то значенія $\rho$ найдутся какъ разности двухъ сосѣднихъ ординатъ веревочнаго многоугольника, построеннаго для грузовъ $-\Delta\alpha$.



Фиг. 317.

Наконецъ, по четвертому способу можно было бы найти точки $1'$, $2'$, $3'$ .... съ помощью діаграммы перемѣщеній по Виллiо.

Первый способъ оказывается непригоднымъ, когда шарнирный многоугольникъ имѣетъ вертикальные стержни; неточные результаты получаются и тогда, когда направленія стержней лишь немного отклоняются отъ вертикальнаго направленія.

Вообразимъ, напр., что стержень 7—8 приближается къ вертикальному положенію; мы сейчасъ же увидимъ, что точное опредѣленіе точки $8'$ при полученномъ остромъ пересѣченіи становится весьма затруднительнымъ. Тогда можно вычислить величину $\rho_7$ или же построить на фиг. 317 ту часть веревочнаго многоугольника 6—7—8, которая опредѣлена величинами $\rho$ и $\Delta\alpha_7$. Когда нѣсколько стержней имѣютъ такое положеніе, то отъ примѣненія перваго способа лучше отказаться. Нагляднѣе всего, конечно, опредѣленіе величинъ $\rho$ съ помощью фиг. 317.

По опредѣленіи количества $\delta_{ma}$ находимъ вліяніе силы $P_m$ на количество $X_a$ съ помощью перваго уравненія изъ групы 21, въ которомъ величина $\delta_{aa}$ означаетъ уголъ вращенія ($\psi$) части 8—9—10 для разсматриваемаго состоянія нагрузки $X_a = -1$. Теперь стержню 9—10 соотвѣтствуетъ значеніе $\rho = 9' - 10'$, т. е. уголъ вращенія $\psi = \frac{9' - 10'}{9 - 10} = \frac{\delta_v}{k}$, поэтому получимъ:

$$X_a = P_m \delta_{ma} \frac{k}{\delta_v},$$

а для силы $Z$, опредѣляемой изъ уравненія $Zk = X_a$, значеніе:

$$Z = P_m \frac{\delta_{ma}}{\delta_v}.$$

Грузу $P_5$, приложенному къ узлу 5, соотвѣтствуетъ значеніе

$$Z = \frac{P\eta_{5a}}{\delta_v},$$

т. е. то значеніе, для опредѣленія котораго было бы достаточно одного построенія веревочнаго многоугольника $I$.

*II. Діаграмма перемѣщеній для состоянія* $X_b = -1$. Грузы $-\Delta\alpha' = \frac{s_m}{r^2_m}$ замѣнимъ грузами $-\Delta\alpha'' = -\frac{s_m x_m}{r^2_m}$ (которые вправо отъ $O$ положительны, т. е. направлены внизъ) и затѣмъ повторимъ ранѣе описанный пріемъ. Веревочный многоугольникъ $II$, связывающій новые грузы, можетъ быть полученъ изъ веревочнаго многоугольника $I$ подобно тому, какъ это сдѣлано на фиг. 309. Необходимо только такъ выбрать положеніе полюса $O_{II}$ (при произвольно взятомъ полюсномъ разстояніи $w_{II}$), чтобъ первый бокъ веревочнаго многоугольника былъ горизонталенъ. Построивъ изъ полюса $O_b$ ломанную $1'\ 2'\ 3'$ .... $8'\ 9'$, найдемъ значеніе $\delta_{mb}$, соотвѣтствующее наклонному положенію груза $P_m$, какъ проекцію величины $O_b m'$ на направленіе $P_m$, и перемѣщеніе $\delta_{bb}$ точки приложенія $b \equiv 10$ силы $X_b$, какъ проекцію луча $O_b 10'$ на направленіе $X_b = -1$. Вслѣдствіе этого опредѣляемъ вліяніе наклоннаго груза $P_m$:

$$X_b = P_m \frac{\delta_{mb}}{\delta_{bb}}$$

и вліяніе вертикальнаго груза $P_5$:

$$X_b = P_5 \frac{\eta_{5b}}{\delta_{bb}} .$$

Для опредѣленія послѣдняго значенія можно было бы ограничиться построеніемъ веревочнаго многоугольника *II*.

Изъ условій совпаденія точекъ 8', 9', 10' можно вывести еще заключеніе, что всѣ точки части 8—9—10 при состояніи нагрузки $X_b = -1$ получаютъ одно и тоже перемѣщеніе $O_b 8' = O_b 9' = O_b 10'$, или, иначе говоря, уголъ вращенія $\delta_{ab}$ получается $= 0$, условіе, съ которымъ извѣстнымъ образомъ связана примѣнимость уравненій (21).

*III. Діаграмма перемѣщеній для состоянія* $X_c = -1$. Такъ какъ перемѣщеніе $\delta_{cb}$, получаемое точкой приложенія $c$ силы $X_c$ въ направленіи $X_b$ при дѣйствіи причины $X_b = -1$, должно равняться нулю, то направленіе $X_c$ должно быть принято перпендикулярнымъ къ лучу $O_b 10'$ только что построенной діаграммы перемѣщеній. Если это сдѣлано, то этимъ самымъ опредѣляются грузы $\Delta''' \alpha_m = y_m \frac{s_m}{r^2_m} = y_m w'_m$ (по абсолютной величинѣ); или же, что гораздо удобнѣе, лучше опредѣлить тѣ грузы, которые пропорціональны значеніямъ $y_m w'_m$, напр. грузы на фиг. 3 (въ многоугольникѣ силъ $w'$), представленные отрѣзками $\frac{\beta}{w_I} y_m w'_m$, гдѣ $\beta$ означаетъ произвольное цѣлое число. Алгебраическая сумма этихъ грузовъ частью положительныхъ, частью отрицательныхъ, должна равняться нулю (что служитъ весьма точной провѣркой правильности чертежа!). Такъ какъ направленіе $X_c$ опредѣляется условіемъ $\delta_{cb} = 0$, то по теоремѣ Максуелля должно быть $\delta_{bc} = 0$, т. е. перемѣщеніе точки приложенія $b$ силы $X_b$ по направленію $X_b$, вызванное причиною $X_c = -1$, должно равняться нулю. Но отсюда слѣдуетъ, что $O_c 10' \perp X_b$; а это можетъ случиться тогда, когда внѣшніе бока веревочнаго многоугольника *III* совпадутъ.

Наконецъ для наклоннаго груза $P_m$ и для вертикальнаго — $P_5$ получаемъ соотвѣтственно:

$$X_c = P_m \frac{\delta_{mc}}{\delta_{cc}} \text{ и } X_c = P_{m5} \frac{\eta_{5c}}{\delta_{cc}} ,$$

гдѣ $\delta_{cc}$ означаетъ проекцію $O_c 10'$ на направленіе $X_c$.

Поставленная задача такимъ образомъ разрѣшена; здѣсь необходимо еще упомянуть, что отрѣзки $\rho$, опредѣляющіе ломанныя $O_b 2' 3' \ldots 10'$ и соотвѣтственно $O_c 2' 3' \ldots 10'$, могутъ быть найдены по способу, описанному при построеніи діаграммы перемѣщеній для состоянія $X_a = -1$, или путемъ расчета, или же съ помощью проведеннаго шарнирнаго многоугольника (фиг. 317), или при помощи діаграммы Вилліо; наконецъ, слѣдуетъ упомянуть, что эта перемѣна требуется иногда и въ способѣ, примѣненномъ на фиг. 317.

Необходимо обратить вниманіе на то, чтобъ съ особенною тщательностью было сдѣлано опредѣленіе положенія точки $O$ и направленія силы $X_c$. Случающіяся при этомъ чертежныя ошибки имѣютъ большое вліяніе. Желая разрѣшить эту задачу вычисленіемъ, мы должны замѣтить, что вслѣдствіе равенства $\Sigma yw' = 0$ точка $O$ совпадаетъ съ центромъ грузовъ $w'$, а сила $X_c$ совпадаетъ съ ранѣе взятой осью $A_x$; поэтому здѣсь примѣнимы формулы, выведенныя на стр. 37; количества $y$ могутъ быть при этомъ измѣрены сначала по вертикальному направленію.

Съ другой стороны только что построенныя діаграммы перемѣщеній представляютъ добавленіе къ ученію о центрѣ тяжести и о моментахъ втораго порядка. Съ помощью многоугольника $O_a\,1'\,2'\,.\,.\,.$ (который будетъ тогда повернутъ влѣво на 90°) можно опредѣлить центръ тяжести $O$ группы точекъ, нагруженныхъ грузами $w'$; многоугольники же $O_b\,1'\,2'\,.\,.\,.$, $O_c\,1'\,2'\,.\,.$ могутъ служить для опредѣленія моментовъ инерціи $\Sigma w'x^2$ и $\Sigma w'y^2$. А именно, мы найдемъ:

$$\delta_{bb} = \Sigma\frac{w'x}{w_I}\cdot\frac{x}{w_{II}};\quad \delta_{cc} = \Sigma\frac{w'y\beta}{w_I}\cdot\frac{y}{w_{III}},$$

или при $w_I = w_{II} = w_{III} = 1$ и $\beta = 1$:

$$\delta_{bb} = \Sigma w'x^2;\quad \delta_{cc} = \Sigma w'y^2.$$

*IV. Вліяніе измѣненія температуры.* Мы находимъ изъ формулъ:

$$(25)\qquad X_{at} = 1\frac{\delta_{at}}{\delta_{aa}};\quad X_{bt} = 1\frac{\delta_{bt}}{\delta_{bb}};\quad X_{ct} = 1\frac{\delta_{ct}}{\delta_{cc}},$$

гдѣ $\delta_{at}$ означаетъ уголъ вращенія части 8—9—10 отъ измѣненія температуры, а $\delta_{bt}$ и $\delta_{ct}$ означаютъ вызываемыя этой причиной перемѣщенія точки 10 въ направленіи $X_a$ и соотвѣтственно $X_b$.

Примемъ равномѣрное нагрѣваніе фермы и сдѣлаемъ, ради упрощенія расчета, одно предположеніе, что участки 1—0 и 8—9 могутъ расширяться въ той же мѣрѣ, какъ и стержни рѣшетки.

Тогда всѣ измѣненія угловъ будутъ $= 0$, и уголъ вращенія $\delta_{at}$ будетъ $= 0$. Шарнирный многоугольникъ 1—2—4 . . . . 8 приметъ форму, подобную первоначальной. Потомъ получимъ $\delta_{at} = 0$ и затѣмъ

$$\delta_{bt} = \varepsilon t l_b,\quad \delta_{ct} = \varepsilon t l_c,$$

такъ какъ перемѣщенія точки 10 соотвѣтствуютъ перемѣщеніямъ точки 8; здѣсь $l_b$ и $l_c$ означаютъ проекціи отрѣзка 8—1 на направленіяхъ $X_b$ и $X_c$. Поэтому получается:

$$X_{at} = 0;\quad X_{bt} = \frac{\varepsilon t l_b}{\delta_{bb}};\quad X_{ct} = \frac{\varepsilon t l_c}{\delta_{cc}}.$$

Если сюда требуется подставить отрѣзки $\delta_{bb}$ и $\delta_{cc}$, взятые изъ фиг. 316, то необходимо обратить вниманіе на то, что эти діаграммы перемѣщеній даютъ перемѣщенія, увеличенныя въ $EF$ — разъ; поэтому числитель выраженій для $X_{bt}$, $X_{ct}$ надо умножить на $EF$. Дальнѣйшія преобразованія обусловлены тѣмъ, что полюсныя разстоянія веревочныхъ многоугольниковъ *II*, *III* (представляющихъ линіи прогибовъ для состояній $X_b = -1$ и $X_c = -1$) равны не 1, а $-w_{II}$ и соотвѣтственно $= w_{III}$, поэтому соотвѣтствующія перемѣщенія надо умножить еще на $w_{II}$ или на $w_{III}$. Наконецъ грузы $w'' = xw'$ и $w''' = yw'$ были замѣнены грузами $\frac{xw'}{w_I}$ и соотвѣтственно $\frac{\beta yw'}{w_I}$, что влечетъ за собой дальнѣйшее умноженіе на $w_I$ и соотвѣтственно на $\frac{w_I}{\beta}$. Поэтому получимъ:

$$X_{bt} = \frac{\varepsilon EFl_b t}{w_I w_{II} \delta_{bb}} \quad \text{и} \quad X_{ct} = \beta \frac{\varepsilon EFl_c t}{w_I w_{III} \delta_{cc}}.$$

Изъ трехъ отрѣзковъ ($w_I$, $w_{II}$, $\delta_{bb}$ или $w_I$, $w_{III}$, $\delta_{cc}$), входящихъ въ эти знаменатели, каждые два должны быть измѣрены въ масштабѣ разстояній (напр. $w_{II}$ и $\delta_{bb}$ и соотвѣтственно $w_{III}$ и $\delta_{cc}$), а третій изъ нихъ (а именно въ обоихъ знаменателяхъ $w_I$) въ томъ же масштабѣ, въ которомъ отложены грузы $w'$ *).

Если діаграммы перемѣщеній строятся по способу Вилліо, то подъ усиліями $S_a$, $S_b$, $S_c$, соотвѣтствующими состояніямъ $X_a = -1$, $X_b = -1$, $X_c = -1$, подразумѣваются числа. Тогда измѣненія длины

$$\Delta s_a = S_a s_a, \quad \Delta s_b = S_b s_b, \quad \Delta s_c = S_c s_c,$$

умноженныя на $EF$, представятъ собою разстоянія, которыя наносятся въ отдѣльномъ масштабѣ, независящемъ отъ масштаба чертежа; по этому же масштабу измѣряются также отрѣзки $\delta_{bb}$, $\delta_{cc}$. Тогда получаемъ:

$$X_{bt} = \varepsilon EFt \frac{l_b}{\delta_{bb}}; \quad X_{ct} = \varepsilon EFt \frac{l_c}{\delta_{cc}}.$$

## § 12.

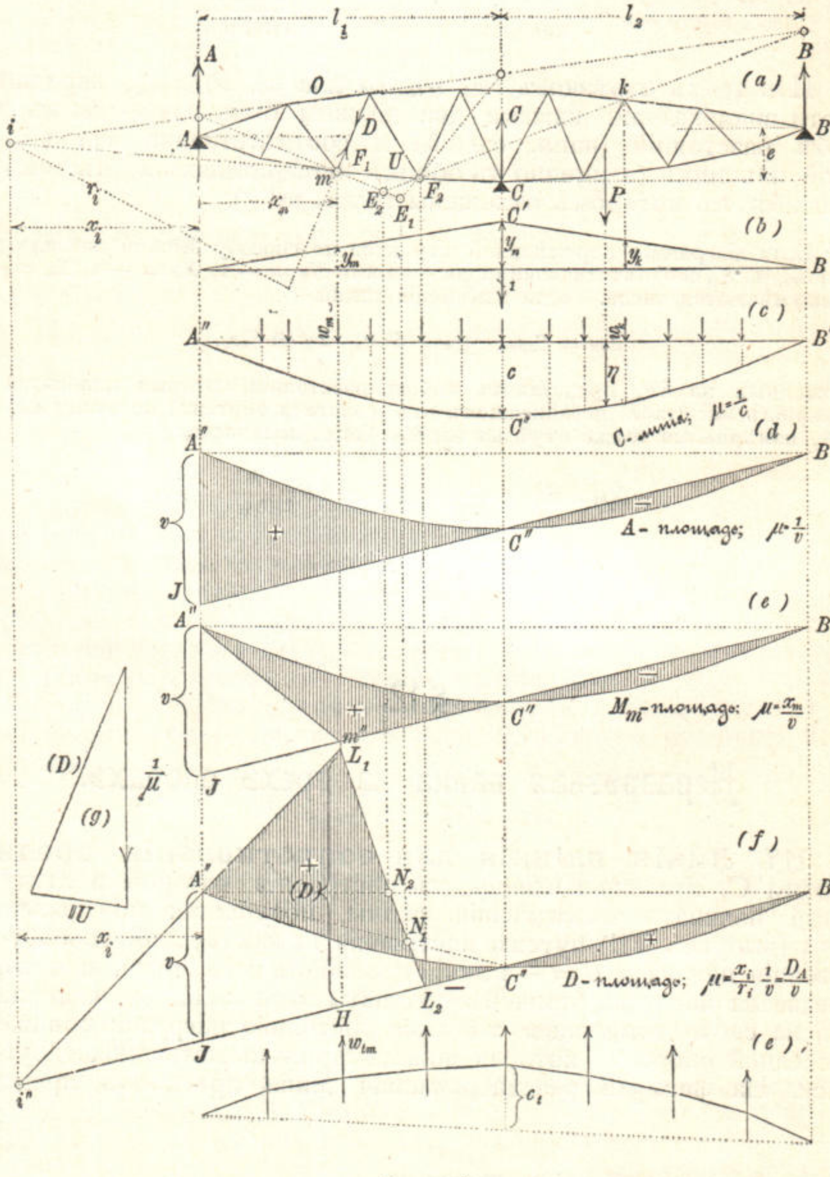
## Неразрѣзная балка на трехъ опорахъ.

**117. Линія вліянія для сопротивленія средней опоры C.** Эта линія вліянія, съ построенія которой и слѣдуетъ всегда начинать изслѣдованіе фермы, получается по правиламъ № 55 (выпускъ VII) путемъ построенія по какому либо способу для состоянія нагрузки $C = -1$ линіи прогибовъ того пояса, на который передается нагрузка, причемъ ординаты этой линіи ($\eta$) надо раздѣлить на соотвѣтствующее тому же состоянію нагрузки пониженіе ($c$) средней опоры $C$, которая можетъ принадлежать также другому поясу. На фиг. 318 разсматриваемая линія прогибовъ представ-

*) См. заключеніе въ № 115, стр. 47.

ляетъ веревочный многоугольникъ для грузовъ $w$. Треугольникъ $A'C'B'$ представляетъ площадь моментовъ для простой балки при дѣйствіи на нее силы $C = -1$; пусть $y_m$ будетъ моментомъ относительно точки $m$. Тогда, пренебрегая деформаціями промежуточныхъ стержней, что всегда допустимо, мы получимъ $w_m \frac{y_m s_m}{r^2 EF_m}$; при постоянномъ $E$ можно будетъ положить

$$w_m = \frac{y_m s_m}{r^2_m} \frac{F_c}{F_m},$$




Фиг. 318.

гдѣ подъ $F_c$ подразумѣвается произвольная площадь поперечнаго сѣченія. Это измѣненіе количества $w$ не оказываетъ вліянія на результатъ

$$C = P\frac{\eta}{c},$$

который зависитъ только отъ отношенія $\frac{\eta}{c}$, а отсюда заключаемъ, что какъ высота треугольника моментовъ $A''C''B''$, такъ и полюсное разстояніе веревочнаго многоугольника могутъ быть выбраны произвольными.

Изъ $C$—линіи теперь уже легко получить и остальныя линіи вліянія.

*Примѣчаніе.* Грузы $w$ представляются здѣсь въ той же формѣ, что и для двухшарнирныхъ арокъ, § 7 (выпускъ VIII); преобразованія количествъ $w$, указанныя раньше для нѣкоторыхъ родовъ рѣшетокъ, возможно примѣнить, конечно, и къ неразрѣзнымъ балкамъ. Рекомендуется принимать отношеніе $F_c : F_m = 1$. Въ фермахъ съ параллельными поясами надо положить $w_m = y_m$.

Замѣтимъ здѣсь, что на фиг. 318 с, въ виду мелкаго масштаба, веревочный многоугольникъ не удалось замѣнить вписаннымъ многоугольникомъ, вершины котораго лежали бы подъ поперечными фермами.

**118. Площадь вліянія для сопротивленія лѣвой опоры A** (фиг. 318 d) получится какъ разность между площадью треугольника $B''JA''$, сторона котораго $B''J$ проходитъ черезъ $C''$, и площадью вліянія для $C$; множитель этой площади $\mu = \frac{1}{v}$, гдѣ $v$ равно отрѣзку $A''J$. Если бы балка была подперта только въ точкахъ $A$ и $B$, то площадь вліянія для $A$ состояла бы изъ одного треугольника $A''JB''$, высота котораго $\overline{A''J} = 1$; теперь же изъ этого треугольника надо вычесть ту часть, которая представляетъ вліяніе силы $C$, причемъ грузу, приложенному въ точкѣ опоры $C$, должна соотвѣтствовать ордината $A = 0$. Множитель $\frac{1}{v}$ необходимъ, потому что здѣсь $\overline{A''J} = v$, вмѣсто $\overline{A''J} = 1$.

**119. Площадь вліянія для количества** $M_m$ (фиг. 318 e) получается путемъ опредѣленія на прямой $B''C''$ точки $m''$, лежащей на вертикали подъ $m$, и проведенія прямой $A''m''$. Если бы было $A''J = x_m$, то треугольникъ $A''m''B''$ представилъ бы площадь вліянія для количества $M_m$ въ простой балкѣ $AB$, а треугольникъ $A''m''C''$ — площадь вліянія для количества $M_m$ въ простой балкѣ $AC$. Такъ какъ $\overline{A''J} = v$, то необходимо ввести множитель $\mu = x_m : v$. Къ этому же результату приводитъ насъ то положеніе, что грузы, лежащіе вправо отъ $m$, вызываютъ моментъ $M_m = Ax_m$, вслѣдствіе чего площадь вліянія для $M_m$ вправо отъ $m$ отличается отъ площади вліянія для $A$ только множителемъ. Усилія въ поясахъ опредѣляются изъ моментовъ.

**120. Площадь вліянія для усилія** $D$ (фиг. 318 f) получается на основаніи тѣхъ же разсужденій, что были приведены въ № 118 и 119. Ломанная линія $A''L_1L_2B''$, отнесенная къ линіи $A''B''$ какъ къ нулевой оси, представляетъ линію вліянія для усилія $D$ въ простой балкѣ $AB$, а ломанная $A''L_1L_2C''$, отнесенная къ нулевой оси $A''C''$, представляетъ линію вліянія для усилія $D$ въ простой балкѣ $A''C''$. Поэтому прямыя $A''L_1$ и $B''L_2$ должны пересѣкаться на вертикали, проходящей черезъ точку встрѣчи $i$ поясныхъ стержней $O$ и $U$; точки же $N_1$, $N_2$, въ которыхъ прямыя $A''B''$ и $A''C''$ пересѣкаются прямой $L_1L_2$, должны лежать на вертикаляхъ подъ точками раздѣла нагрузки $E_1$ и $E_2$; эти послѣднія точки легко получить, если мы будемъ разсматривать стержень $D$, какъ промежуточный стержень простой балки $AC$ и соотвѣтственно простой балки $AB$. Такимъ образомъ точку $L_1$ можно опредѣлить тремя способами. Когда грузы лежатъ вправо отъ $r$, то влѣво отъ сѣченія, проведеннаго черезъ стержни $O$, $D$, $U$, будетъ дѣйствовать только одна вертикальная сила $A$, поэтому уравненіе моментовъ относительно точки $i$ напишется такъ:

$$-Dr_i - Ax_i = 0,$$

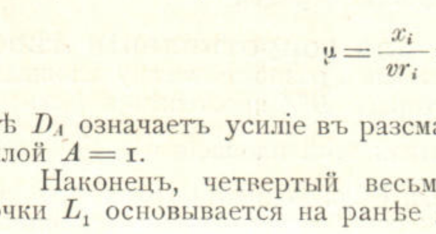
откуда получаемъ $D = -A\frac{x_i}{r_i}$; теперь легко понять построеніе площади вліянія для $D$, фиг. 318 f. Множитель этой площади равняется, очевидно,

$$\mu = \frac{x_i}{vr_i} = \frac{D_A}{v},$$

гдѣ $D_A$ означаетъ усиліе въ разсматриваемомъ стержнѣ, вызываемое силой $A = 1$.

Наконецъ, четвертый весьма простой способъ опредѣленія точки $L_1$ основывается на ранѣе доказанномъ положеніи, что отрѣзокъ $L_1H$ при $\mu = 1$ долженъ равняться составляющей $\left[D\right]$, полученной при разложеніи силы $P = 1$ по направленіямъ $U$ и $D$ *); если же ввести множитель $\mu$, то этотъ отрѣзокъ будетъ равняться составляющей отъ разложенія груза $\frac{1}{\mu}$ (фиг. 318 g).

**121. Площадь вліянія для перерѣзывающей силы** $Q$ въ панели $F_1F_2$ показана на фиг. 319; построеніе этой площади вліянія слѣдуетъ дѣлать въ фермахъ съ параллельными поясами, такъ какъ въ этомъ случаѣ усилія опредѣляются перерѣзывающими силами $Q$. Для этого проведемъ сначала линію $B''J$, а потомъ $A''L_1 \parallel B''L_2$. Множитель будетъ $= 1 : v$. Доказательство такое же какъ и раньше въ № 120.



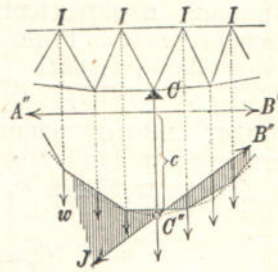

Фиг. 319.

Масштабъ для силъ на фиг. 318 и 319 надо такъ выбрать, чтобъ единица грузовъ изображалась отрѣзкомъ, равнымъ $v$. Тогда множитель площадей

*) См. стр. 104, фиг. 198 (выпускъ VII). При ѣздѣ поверху разложеніе дѣлается по направленіямъ $O$ и $D$.

вліянія для количествъ $A$ и $Q$ будетъ $= 1$, множитель площади вліянія для $M_m$ равенъ $= x_m$ и для $D_A$ — площади $= D_A$.

**122.** Если точка опоры $C$ принадлежитъ ненагруженному поясу, то точка $C''$ не принадлежитъ $C$ — линіи, вписанной въ веревочный многоугольникъ $A''C''B''$. Прямая же $B''J$ проходитъ, какъ и раньше, черезъ точку $C''$ и отрѣзокъ $c$ означаетъ и здѣсь разстояніе между точкой $C''$ и замыкающей линіей $A''B''$; см. фиг. 320, гдѣ представлена часть площади вліянія для количества $A$.



Фиг. 320.

**123. Вліяніе измѣненія температуры** на сопротивленіе опоры выражается въ общемъ видѣ формулой

$$C_t = 1\,\frac{\delta_{ct}}{\delta_{cc}},$$

гдѣ $\delta_{ct}$ и $\delta_{cc}$ означаютъ пониженія (прогибы) точки $C$ простой балки $AB$ отъ нагрѣванія и соотвѣтственно отъ дѣйствія нагрузки $C = -1$. Предполагая равномѣрное возвышеніе температуры установки и обозначая буквой $e$ разстояніе точки $C$ отъ горизонтальной прямой $AB$, мы получимъ $\delta_{ct} = \varepsilon te$. Для $\delta_{cc}$ надо подставить значеніе

$$\delta_{cc} = c\,\frac{1}{EF_c}\,w_P \cdot \frac{l_1 l_2}{y_n(l_1 + l_2)},$$

гдѣ подъ $w_P$ подразумѣвается полюсное разстояніе веревочнаго многоугольника $A''C''B''$. Ординату $c$ веревочнаго многоугольника, построеннаго для состоянія нагрузки $C = -1$, необходимо умножить на $1 : EF_c$, потому что мы пользуемся грузами $w$, увеличенными въ $EF_c$ — разъ, затѣмъ надо умножить еще на $w_P$, потому что полюсное разстояніе было взято не равнымъ 1, и наконецъ умножить на $\frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2} : y_n$, потому что высота треугольника моментовъ $A'C'B'$ для состоянія $C = -1$ взята равной $\frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2}$, вмѣсто $= y_n$. Вслѣдствіе этого получаемъ величину сопротивленія опоры

$$C_t = \frac{\varepsilon E F_c e y_n (l_1 + l_2)}{c l_1 l_2 w_P}\,t, \tag{1}$$

вліяніе котораго на усилія въ стержняхъ слѣдуетъ опредѣлить съ помощью діаграммы Кремоны. Въ предыдущей формулѣ $w_P$ означаетъ *число*, причемъ это количество должно быть измѣрено въ томъ же масштабѣ, въ какомъ откладывались *числа* $w = \frac{ys}{r^2}$. Отрѣзки $e$, $y_n$, $l_1$, $l_2$, $c$ надо измѣрить въ линейномъ масштабѣ чертежа.

Обыкновенно при изслѣдованіи неразрѣзныхъ фермъ пренебрегаютъ вліяніемъ измѣненія температуры и считаютъ вліяніе это незначительнымъ. Незначительное вліяніе получается только при равномѣрномъ нагрѣваніи, поэтому здѣсь необходимо будетъ разсмотрѣть тотъ важный случай, когда верхній поясъ приметъ отъ дѣйствія солнечныхъ лучей температуру на $\Delta t$ градусовъ большую, чѣмъ нижній поясъ. Достаточно точно можно принять, если нижнему поясу и промежуточнымъ стержнямъ припишемъ температуру установки и опредѣлимъ удлиненія въ стержняхъ верхняго пояса (сначала для $\varepsilon = 1$) по формулѣ $\Delta s = s\Delta t$. Вычислимъ теперь грузы $w_t = -\frac{\Delta s}{r} = -\frac{s\Delta t}{r}$ для узловъ нижняго пояса, свяжемъ ихъ веревочнымъ многоугольникомъ (полюсное разстояніе $= w_{tP}$) и измѣримъ подъ точкой $C$ ординату $c_t$ (фиг. 318 e).

Тогда найдемъ $\delta_{ct} = -\varepsilon w_{tP} c_t$ и

$$C_t = -\frac{\varepsilon E F_c c_t y_n (l_1 + l_2)}{c l_1 l_2} \frac{w_{tP}}{w_P} \Delta t;$$

$w_{tP}$ означаетъ число, которое должно быть измѣрено въ томъ же масштабѣ, въ которомъ отложены числа $w_t$ *). Когда верхній поясъ получаетъ температуру на $\Delta t$ ниже нижняго пояса, то получается положительная величина для $C$.

## § 13.

## Неразрѣзная балка на четырехъ опорахъ.

**124. Сопротивленія крайнихъ опоръ.** За статически неопредѣлимыя величины примемъ сопротивленія крайнихъ опоръ $X_a = A$ и $X_b = B$; точки приложенія ихъ обозначимъ указателями $a$ и $b$ и напишемъ согласно обозначеніямъ, объясненнымъ въ № 59 (выпускѣ VII), слѣдующія равенства:

$$(1) \qquad \begin{cases} \delta_a = P_m \delta_{ma} - A\delta_{aa} - B\delta_{ab} + \delta_{at} \\ \delta_b = P_m \delta_{mb} - A\delta_{ba} - B\delta_{bb} + \delta_{bt}, \end{cases}$$

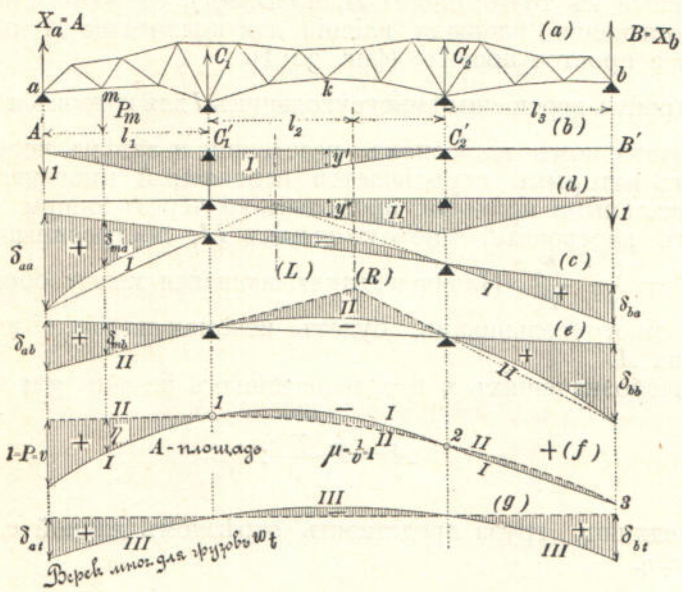
гдѣ $\delta_a$, $\delta_b$ означаютъ вертикальныя перемѣщенія, испытываемыя точками $a$ и $b$ отъ осадки опоръ относительно прямой, соединяющей среднія опорныя точки; обыкновенно допускаютъ, что эти перемѣщенія равны нулю.

Статически опредѣлимая главная система (состояніе $A = 0$, $B = 0$) представляетъ собою балку съ двумя консолями, свѣшивающимися за опорами $C'_1 C'_2$; линіи прогибовъ для этой системы, построенныя для состояній $A = -1$, $B = -1$, доставятъ намъ перемѣщенія $\delta_{ma}$, $\delta_{aa}$, $\delta_{ba}$, $\delta_{mb}$, $\delta_{ab}$, $\delta_{bb}$.

---

*) Обыкновенно для относительно большихъ грузовъ $w_t$ слѣдуетъ выбрать другой масштабъ, чѣмъ для грузовъ $w$.

Площадь моментовъ для состоянія $A = -1$ состоитъ изъ треугольника $I$ (фиг. 321 b), имѣющаго высоту $-1 \cdot l_1$, при помощи котораго вычисляются грузы $w$ точно такимъ же образомъ, какъ это было сдѣлано въ предыдущихъ параграфахъ. Напр., если пренебречь деформаціей промежуточныхъ стержней, то грузъ узла $k$ будетъ равняться: $wk' = -\frac{y'_k s_k}{r^2_k} \frac{F_c}{F_k}$. Грузы $w'$ отрицательны; этимъ грузамъ соотвѣтствуетъ веревочный многоугольникъ $I$ *), правая часть котораго представляетъ линію прогибовъ для не на-




Фиг. 321.

пряженной части фермы $C'_2B'$, такъ какъ эта часть получаетъ только вращеніе, но не деформацію. Прочертивъ замыкающую линію, проходящую черезъ опорныя точки $C'_1C'_2$, получимъ на фиг. 321 с, заштрихованную площадь, которая представляетъ площадь прогибовъ для состоянія $A = -1$; она намъ доставитъ перемѣщенія $\delta_{ma}$, $\delta_{aa}$, $\delta_{ba}$. Совершенно подобнымъ же путемъ получается площадь прогибовъ для состоянія $B = -1$, откуда находимъ перемѣщенія $\delta_{bb}$, $\delta_{mb}$, $\delta_{ab}$ (при правильности построеній должны получить $\delta_{ab} = \delta_{ba}$); такимъ образомъ теперь мы имѣемъ всѣ значенія, коими опредѣляется вліяніе груза $P_m$.

Объ этомъ вліяніи имѣемъ сужденіе изъ равенствъ

$$(2) \quad \begin{cases} 0 = P_m\delta_{ma} - A\delta_{aa} - B\delta_{ab} \\ 0 = P_m\delta_{mb} - A\delta_{ba} - B\delta_{bb} \end{cases}$$

---

*) На фиг. 321, ради упрощенія чертежа, построена веревочная кривая.

причемъ $A$ и $B$ выражаются линейными функціями перемѣнныхъ $\delta_{ma}$, $\delta_{mb}$. Напримѣръ, будемъ имѣть

(3) $$A = K_a\delta_{ma} + K_b\delta_{mb},$$

гдѣ $K_a$ и $K_b$ означаютъ постоянныя величины, независящія отъ положенія груза $P$, поэтому можно также написать: $A = K_a(\delta_{ma} + K'\delta_{mb})$, гдѣ $K'$ новая постоянная. Такъ какъ теперь по этой формулѣ $A$ пропорціонально ординатѣ $\delta_{ma}$, увеличенной на величину $K'\delta_{mb}$, затѣмъ, такъ какъ грузу $P$, приложенному въ точкѣ опоры $C_1$ или $C_2$, соотвѣтствуетъ значеніе $A = 0$, и такъ какъ, наконецъ, грузъ $P$, приложенный къ точкѣ опоры $A$, вызываетъ сопротивленіе $A = P$, то для построенія площади вліянія для количества $A$ получается слѣдующее простое правило (фиг. 321 f).

Построимъ веревочный многоугольникъ $I$ для грузовъ $w' = \frac{y's}{r^2}\frac{F_c}{F}$ при произвольномъ полюсномъ разстояніи и затѣмъ черезъ точки 1, 2, 3, въ которыхъ пересѣкается веревочный многоугольникъ $I$ съ вертикальными прямыми, проходящими черезъ опоры $C_1$, $C_2$, $B$, проведемъ веревочный многоугольникъ $II$, построенный для грузовъ $w'' = \frac{y''s}{r^2}\frac{F_c}{F}$. Площадь, заключающаяся между обоими веревочными многоугольниками, будетъ искомая площадь вліянія для количества $A$.

При обозначеніяхъ $\eta$ и $v$, нанесенныхъ на фиг. 321 f, имѣемъ

(4) $$A = P\frac{\eta}{v};$$

если же единицу груза представить отрѣзкомъ длиной $v$, то получимъ $A = \eta$.

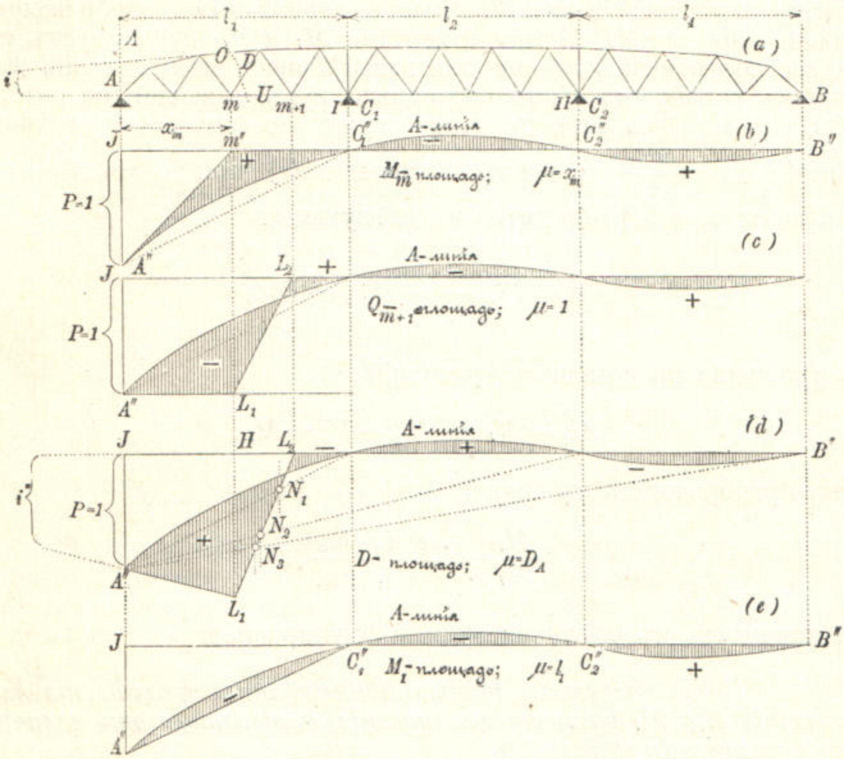
**125. Измѣненіями температуры** при изслѣдованіи неразрѣзныхъ балокъ обыкновенно пренебрегаютъ. Если же требуется принять во вниманіе дѣйствіе солнечныхъ лучей на верхній поясъ, тогда придется построить веревочный многоугольникъ ($III$) для грузовъ $w_t = \frac{s\Delta t}{r}$ (см. № 123), фиг. 321 g, провести замыкающую линію и измѣрить подъ $A$ и $B$ ординаты $\delta_{at}$ и $\delta_{bt}$. Для вычисленія $A_t$ и $B_t$ послужатъ тогда равенства, выведенныя изъ равенствъ 1:

(5) $$\left|\begin{aligned} 0 &= -A_t\delta_{aa} - B_t\delta_{ab} + \varepsilon E F_c \delta_{at}\frac{w_{tP}}{w_P} \\ 0 &= -A_t\delta_{ba} - B_t\delta_{bb} + \varepsilon E F_c \delta_{bt}\frac{w_{tP}}{w_P}, \end{aligned}\right.$$

причемъ предполагается, что веревочные многоугольники $I$, $II$ на фиг. 321 c, e построены при одномъ и томъ же полюсномъ разстояніи $w_P$, а веревочный многоугольникъ $III$ при полюсномъ разстояніи $w_{tP}$. Количества $w_P$ и $w_{tP}$ измѣряются тѣми же масштабами, которыми были измѣрены величины $w'$, $w''$ и соотвѣтственно $w_t$ *).

*) См. примѣчаніе на стр. 60.

**126. Изслѣдованіе боковаго пролета.** Изъ линіи вліянія для количества $A$ можно получить всѣ площади вліянія, необходимыя для расчета перваго пролета; дѣлается это совершенно подобно тому, какъ было сдѣлано въ § 12 для фермы на трехъ опорахъ; линію вліянія для $A$ слѣдуетъ построить съ горизонтальною нулевою осью ($JC''_1C''_2B''$, фиг. 322). Фиг. 322 b, c, d понятны безъ дальнѣйшихъ объясненій, если только будемъ помнить, что вліяніе грузовъ, лежащихъ вправо отъ сѣченія $tt$, на величины момента $M_m$,



Фиг. 322.

перерѣзывающей силы $Q_{m+1}$ и усилія $D$ пропорціонально сопротивленію опоры $A$, потому что влѣво отъ $tt$ будетъ дѣйствовать только внѣшняя сила $A$, и что всѣ площади вліянія будутъ соотвѣтствовать простой балкѣ $AC_1$, если только ломанную линію вліянія для $A$ замѣнить прямою $A''C''_1$ (т. е. линіей вліянія для количества $A$ въ простой балкѣ $AC_1$).

Для полученія *площади вліянія для количества* $M_m$ находимъ $m''$ подъ $m$ и проводимъ прямую $A''m''$. Множитель $= x_m$.

*Площадь вліянія для количества* $Q$ въ панели $m - (m + 1)$ получается при проведеніи прямой $L_2L_1$. Множитель $= 1$.

Точка $L_1$ *площади вліянія для усилія* $D$, фиг. 322 d, можетъ быть быть опредѣлена четырьмя способами, а именно съ помощью условія, что точка пересѣченія $i''$ линій $L_1A''$ и $B''J$ лежитъ на вертикали точки встрѣчи $i$ стержней $O$ и $U$, или съ помощью нулевыхъ точекъ $N_1$, $N_2$, $N_3$, соотвѣтствующихъ простымъ балкамъ $AC_1$, $AC_2$, $AB$ *). Наконецъ можно было бы опредѣлить отрѣзокъ $HL_1$ съ помощью количества $\left[D\right]$, см. фиг. 318 f и g.

На фиг. 322 e построена еще съ помощью линіи вліянія для $A$ площадь вліянія для момента $M_{c1}$ (*опорный моментъ*), который мы, краткости ради, обозначаемъ черезъ $M_I$; множитель будетъ $= l_1$; подобнымъ же путемъ можно съ помощью линіи вліянія для $B$ построить площадь вліянія для опорнаго момента $M_{c2} = M_{II}$. Въ большинствѣ случаевъ мы имѣемъ дѣло съ симметричными фермами, поэтому линія вліянія для $M_{II}$ будетъ зеркальнымъ изображеніемъ линіи вліянія для $M_I$. Между моментами $M_I$ и $M_{II}$ существуетъ слѣдующее соотношеніе, важное для дальнѣйшихъ изслѣдованій. Если возьмемъ вправо отъ $C_2$ только одинъ грузъ, лежащій на разстояніи $\xi$ отъ $C_2$ (фиг. 322), то этому грузу по фиг. 321 c отвѣчаетъ значеніе $\delta_{m1} = \frac{\xi\delta_{ba}}{l_3}$, и первое уравненіе (1) при $\delta_a = 0$, $\delta_{at} = 0$ (и такъ какъ $\delta_{ab} = \delta_{ba}$) обратится въ слѣдующее:

$$0 = P\delta_{ba}\frac{\xi}{l_3} - A\delta_{aa} - B\delta_{ba};$$

это уравненіе съ помощью уравненій

$$Al_1 = M_I \text{ и } Bl_3 - P\xi = M_{II}$$

легко преобразовать въ такое:

$$\frac{M_{II}}{M_I} = -\frac{l_3}{l_1}\frac{\delta_{aa}}{\delta_{ba}},$$

что приводитъ къ слѣдующему важному правилу:

*Когда нагруженъ только одинъ крайній пролетъ, то отношеніе $M_{II} : M_I$ принимаетъ значеніе, независящее отъ величины и положенія грузовъ* **).

Линія моментовъ для пролета $l_2$, если нагруженъ только пролетъ $l_3$, выражается такимъ образомъ прямой линіей, проходящей черезъ постоянную точку $L$; положеніе этой точки можетъ быть опредѣлено по способу, указанному на фиг. 323; а именно, мы находимъ:

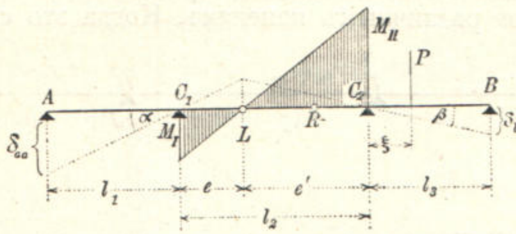
$$-M_{II} : M_I = e' : e = \operatorname{cotg}\beta : \operatorname{cotg}\alpha = \left(\frac{l_3}{\delta_{ba}}\right) : \left(\frac{l_1}{\delta_{aa}}\right).$$

---

*) Вспомогательныя линіи на фиг. 322 удалены; см. также фиг. 318 a и f.

**) Зная такимъ образомъ вѣтвь $M_I$ — линіи, соотвѣтствующей пролету $l_3$, мы можемъ тотчасъ же построить соотвѣтствующую вѣтвь для $M_{II}$ — линіи, или обратно. Если нагрузка внутри пролета $l_3$ расположена такимъ образомъ, что $M_I$ получаетъ наибольшее (по абсолютной величинѣ) значеніе, то этому положенію нагрузки будетъ соотвѣтствовать также и наибольшее значеніе $M_{II}$.

Совершенно такимъ же путемъ мы можемъ съ помощью величинъ $\delta_{bb}$ и $\delta_{ab}$ опредѣлить постоянную точку $R$, черезъ которую при нагрузкѣ одного пролета $l_1$ проходитъ прямая линія моментовъ.




Фиг. 323.

Точки $L$ и $R$ называются *постоянными точками* *); вертикальныя прямыя, опредѣляющія ихъ положеніе, нанесены на фиг. 321 с и е пунктиромъ и обозначены буквами ($L$), ($R$).

Отношенія между отрѣзками, на которые дѣлится пролетъ $l_2$ постоянными точками, будемъ обозначать дальше такъ:

$$\frac{e'}{e} = \frac{\overline{LC_2}}{\overline{LC_1}} = \varkappa; \quad \frac{\overline{RC_1}}{\overline{RC_2}} = \varkappa'.$$

Смотря потому какой пролетъ нагруженъ правый или только лѣвый, мы получимъ:

$$M_{II} = -\varkappa M_I \text{ и соотвѣтственно } M_I = -\varkappa' M_{II}.$$

**127. Изслѣдованіе средняго пролета**, фиг. 324. Предположимъ сначала, что средній пролетъ раздѣленъ узловыми точками на равныя панели, и покажемъ, какъ можно вывести всѣ линіи вліянія изъ одной линіи, ординаты которой даютъ значенія $\frac{1}{l_2}(M_{II} - M_I)$, соотвѣтствующія различнымъ положеніямъ груза. Эта вспомогательная линія, простирающаяся отъ $A''$ до $B''$, фиг. 324, отнесена къ горизонтальной нулевой линіи $A''B''$; опредѣляется она при помощи линій вліяній для количествъ $M_I$ и $M_{II}$, построенныхъ уже въ предыдущихъ изслѣдованіяхъ; эта линія строится такимъ образомъ, чтобъ множитель ея былъ $= 1$ **).

Начнемъ *съ перерѣзывающихъ силъ* $Q$ и найдемъ для $m$-ой панели (см. томъ I, выпускъ II, № 82, уравн. 2):

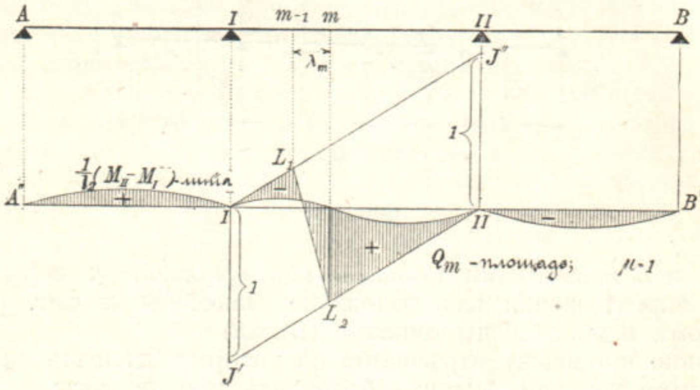
$$Q_m = Q_{om} + \frac{M_{II} - M_I}{l_2}, \tag{6}$$

гдѣ $Q_{om}$ означаетъ перерѣзывающую силу въ панели $(m-1)-m$ простой балки $I-II$. Площадь вліянія для $Q_m$, получаемая изъ раз-

*) Постоянныя точки перегиба.

**) Заштрихованную площадь на фиг. 322 е слѣдуетъ принять за площадь вліянія для количества $M_I : l_1$ ($\mu = 1$) и затѣмъ ординаты ея умножить графически на $l_1 : l_2$. Такимъ же способомъ опредѣляется $M_{II} : l_2$.

смотрѣнія ур. 6, построена на фиг. 324; это построеніе не нуждается въ поясненіяхъ: очевидно, что всѣ площади вліянія для $Q$ опредѣляются двумя постоянными прямыми $IJ''$ и $IIJ'$ и линіей количествъ $(M_{II} - M_I):l_2$. Для насъ необходимо провести только прямыя $L_1L_2$, соотвѣтствующія различнымъ панелямъ. Когда это сдѣлано, то мы



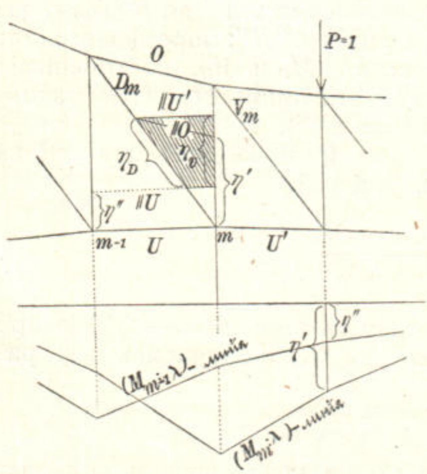

Фиг. 324.

имѣемъ возможность построить по очереди *площади вліянія* для $M:\lambda$ по уравненію

$$\frac{M_m}{\lambda} = \frac{M_{m-1}}{\lambda} + Q_m, \tag{7}$$

исходя изъ построенія площади вліянія для $M_I:\lambda$, опредѣленной раньше при помощи площади вліянія для $M_I:l_1$. Когда крайнія значенія количествъ $M:\lambda$ опредѣляются съ помощью линій вліянія, то крайнія значенія усилій въ поясахъ найдутся уже весьма просто по извѣстному намъ способу.

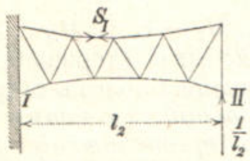
Точно также линіи вліянія для *промежуточныхъ* стержней можно быстро построить съ помощью линій вліянія для $M:\lambda$, примѣняя способъ Циммермана (см. томъ I, выпускъ IV—№ 164 и выпускъ V—№ 185). На фиг. 325, представляющей часть рѣшетки со стойками съ ѣздой поверху, показано, какъ изъ ординатъ $\eta'$ и $\eta''$ линій вліянія для количествъ $M_m:\lambda$ и $M_{m-1}:\lambda$ опредѣляются ординаты $\eta_D$ и $\eta_V$ линій вліянія для усилій $D_m$ и $V_m$, соотвѣтствующія какому нибудь положенію груза $P$. Теперь слѣдуетъ построить только части линій вліянія, лежащія между опорами $I$ и $II$, чтобъ воспользоваться ими для опредѣленія вліянія гру-



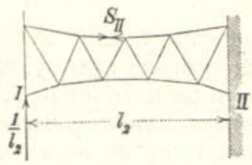

Фиг. 325.

зовъ, лежащихъ на среднемъ пролетѣ *). Вліяніе нагрузки, лежащей на боковыхъ пролетахъ, на усилія въ стержняхъ средняго пролета можно опредѣлить весьма быстро по слѣдующимъ правиламъ.

Полагаемъ, что $M_{II} = 0$ и $M_I = 1$, и для этого случая (см. фиг. 326, гдѣ свободная ферма съ лѣваго конца закрѣплена, а съ праваго конца несетъ силу $= \frac{1}{l_2}$) опредѣляемъ усилія $S_I$ для всѣхъ стержней средняго пролета—напр., при помощи діаграммы Кремоны.



Фиг. 326.



Фиг. 327.

Затѣмъ подобнымъ же путемъ изслѣдуемъ состояніе нагрузки $M_I = 0$, $M_{II} = 1$, которое доставляетъ усилія $S_{II}$, фиг. 327. Тогда вліяніе опорныхъ моментовъ на какое нибудь усиліе $S$ выразится въ такой формѣ

$$S' = S_I M_I + S_{II} M_{II}; \tag{6}$$

теперь мы будемъ въ состояніи опредѣлить дѣйствіе грузовъ, лежащихъ на боковыхъ пролетахъ. Если нагрузить сначала только *правый боковой пролетъ*, то по № 126 (стр. 65) будемъ имѣть $M_I = -\frac{1}{\varkappa} M_{II}$ **); отсюда получимъ

$$S' = M_{II}\left(-\frac{S_I}{\varkappa} + S_{II}\right),$$

т. е. то выраженіе, наибольшее значеніе котораго можетъ быть опредѣлено съ помощью линіи вліянія для $M_{II}$. Точно такимъ же путемъ изслѣдуется случай *загрузки одного лѣваго боковаго пролета.* Количество $S'$ приводится здѣсь съ помощью выраженія $M_{II} = -\frac{1}{\varkappa'} M_I$ къ такой формѣ:

$$S' = M_I\left(S_I - \frac{S_{II}}{\varkappa'}\right), \tag{7}$$

которое вычисляется съ помощью линіи вліянія для количества $M_I$.

---

*) Впрочемъ часто случается, что при загрузкѣ положительнаго или отрицательнаго протяженія средняго пролета часть поѣзда придется на крайнихъ пролетахъ (томъ I, выпускъ II, фиг. 126); вліяніемъ этой части поѣзда слѣдуетъ пренебречь; основанія къ этому были высказаны въ № 89, выпускъ II, томъ I).

**) Мы выражаемъ величину $M_I$ въ зависимости отъ $M_{II}$, потому что линія вліянія для количества $M_{II}$ имѣетъ въ предѣлахъ разсматриваемаго пролета бóльшія ординаты, чѣмъ линія вліянія для $M_I$; поэтому опредѣленіе наибольшихъ значеній $M_{II}$ даетъ болѣе точный результатъ.

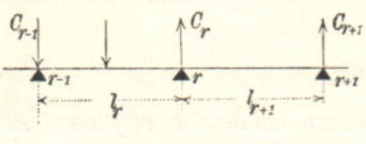
Найденныя такимъ путемъ оба значенія $S'$ имѣютъ обыкновенно разные знаки. Одно изъ значеній надо прибавить къ $S_{max}$, другое къ $S_{min}$.

Замѣтимъ еще, что усиліями $S_I$ и $S_{II}$ можно воспользоваться для того, чтобъ весьма простымъ способомъ вывести линіи вліянія для усилія $S$ изъ линій вліяній для $M_I$ и $M_{II}$. Съ этой цѣлью пользуемся такимъ выраженіемъ

$$S = S_0 + S_I M_I + S_{II} M_{II}, \tag{8}$$

гдѣ $S_0$ означаетъ усиліе для состоянія $M_I = 0$ и $M_{II} = 0$, т. е. для того случая, когда при удаленіи поясныхъ стержней, лежащихъ противъ опорныхъ точекъ $C_1$ и $C_2$, средній пролетъ обращается въ простую балку. *Этотъ способъ самый общій; въ этомъ его преимущество, такъ какъ съ нимъ не связано предположеніе о равенствѣ панелей.*

**128. Сопротивленія среднихъ опоръ.** Пусть $r-1$, $r$, $r+1$ будутъ три рядомъ стоящія опоры балки, лежащей на произвольномъ числѣ опоръ. $M_{r-1}$, $M_r$, $M_{r+1}$ опорные моменты, $C_{r-1}$, $C_r$, $C_{r+1}$ сопротивленія опоръ. Пусть $C_{or}$ означаетъ ту величину сопротивленія $C_r$, когда всѣ опорные моменты равны нулю, или иначе говоря, когда части фермы $l_r$ и $l_{r+1}$ обращаются въ простыя балки. Если простыя балки $l_r$ и $l_{r+1}$ производятъ на опору $r$ соотвѣтственно давленія $B_r$ и $A_{r+1}$, то получимъ




Фиг. 328.

$$C_{or} = B_r + A_{r+1}.$$

Перерѣзывающая сила для сѣченія неразрѣзной балки, взятаго влѣво или вправо отъ $r$, опредѣлится по формуламъ

$$Q_1 = -B_r + \frac{M_{r-1} - M_r}{l_r} \text{ и соотвѣтств. } Q_2 = +A_{r+1} + \frac{M_{r+1} - M_r}{l_{r+1}},$$

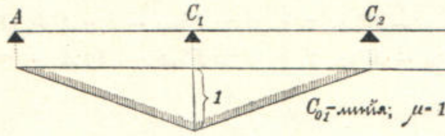
а такъ какъ $Q_2 = Q_1 - C_r$, то мы получимъ общее выраженіе:

$$C_r = C_{or} + \frac{M_{r-1} - M_r}{l_r} + \frac{M_{r+1} - M_r}{l_{r+1}}.$$

Такимъ образомъ для сопротивленія опоры $C_1$ въ трехпролетной фермѣ (моментъ $M$ для крайней опоры $= 0$) получимъ выраженіе

$$C_1 = C_{01} - \frac{M_I}{l_1} + \frac{M_{II} - M_I}{l_2};$$

поэтому линія вліянія для количества $C_1$ опредѣляется линіей вліянія для $C_{01}$, фиг. 329, и ранѣе построенными линіями вліянія для количествъ $M_I : l_1$ и $(M_{II} - M_I) : l_2$. Подобнымъ же образомъ опредѣляется линія вліянія для количества $C_2$.



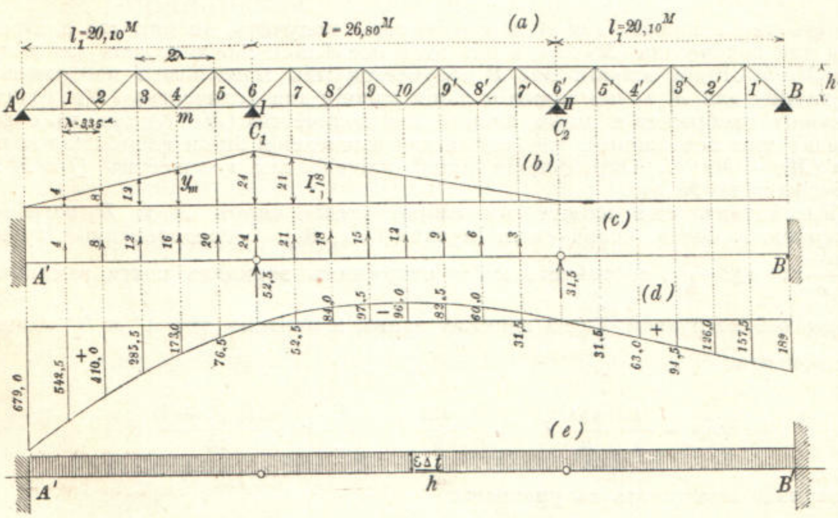

Фиг 329.

**129.** При примѣненіи способа, описаннаго въ этомъ §, слѣдуетъ обратить вниманіе на то, чтобъ линіи вліянія для $A$ и для опорныхъ моментовъ были вычерчены повозможности точнѣе и не въ маломъ масштабѣ. Въ особенности рекомендуется опредѣлить ординаты этихъ линій аналитически, а для этого слѣдуетъ замѣтить, что площади прогибовъ на фиг. 321 можно представить какъ площади моментовъ для балки съ двумя задѣланными концами ($A$ и $B$), которая обращена въ статически определимую систему путемъ введенія двухъ шарнировъ, лежащихъ на вертикаляхъ точекъ $C_1$ и $C_2$.

Разъяснимъ это на *численномъ примѣрѣ*.—Имѣемъ симметричную ферму съ параллельными поясами; пролеты ея 20,10 м., 26,80 м., 20,10 м., фиг. 330. Всѣ панели одинаковы $\lambda = 3{,}35$ м., высота $h = 3{,}0$ м.

Грузы $w$ могутъ быть взяты равными ординатамъ $y$ треугольниковъ моментовъ $I$ и $II$, изъ которыхъ на фиг. 330 построенъ только первый (см. примѣчаніе на стр. 57); высоты треугольниковъ надо такъ выбрать, чтобъ для всѣхъ грузовъ $w$ получились круглыя числа. Возьмемъ высоту $= 24$.

Фиг. 330 c представляетъ балку $A'B'$ съ двумя задѣланными концами, въ которой ради статической опредѣлимости введены два шарнира; площадь моментовъ для этой балки, фиг. 330 d (построенная въ произвольномъ масштабѣ, что не играетъ никакой роли), можетъ разсматриваться какъ площадь прогибовъ для состоянія $A = -1$; часть фермы, лежащая между шарнирами и нагру-




Фиг. 330.

женная грузами 21,18, . . . . 3, можетъ разсматриваться какъ простая балка; эта балка производитъ на шарниры давленія 52,5 и 31,5, направленныя снизу вверхъ.

При вычисленіи моментовъ для фермы $A'B'$ можно принять, что длина панелей $= 1$; тогда получатся числа, вписанныя въ фиг. 330 d, а именно: $\delta_{aa} = 679{,}0$, $\delta_{ba} = 189{,}0$; напр., для узла $4$ : $\delta_{ma} = 173{,}0$. Площадь прогибовъ для состоянія $B = -1$ будетъ зеркальнымъ изображеніемъ фиг. 330 d; изъ нея получимъ: $\delta_{ab} = 189{,}0$, $\delta_{bb} = 679{,}0$, $\delta_{mb} = 63{,}0$ *).

Вычислимъ теперь ординаты линіи вліянія для количества $A$ съ помощью уравненій:

$$0 = P\delta_{ma} - A\delta_{aa} - B\delta_{ab}, \text{ т. е. } 0 = P\delta_{ma} - 679\,A - 189\,B$$

$$0 = P\delta_{mb} - A\delta_{ba} - B\delta_{bb}, \text{ т. е. } 0 = P\delta_{mb} - 189\,A - 679\,B.$$

При $P = 1$ получимъ:

$$A = \frac{679\,\delta_{ma} - 189\,\delta_{mb}}{425\,320},$$

напр. для узла 4:

$$A = \frac{679 \cdot 173{,}0 - 189 \cdot 63}{425\,320} = 0{,}2482$$

Вычисленныя подобнымъ путемъ ординаты сведены въ слѣдующую таблицу:

| Узлы. | $A$ | Узлы. | $A$ | Узлы. | $A$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | + 1,0000 | 7 | — 0,0698 | 6′ | 0 |
| 1 | + 0,7961 | 8 | — 0,1074 | 5′ | + 0,0163 |
| 2 | + 0,5985 | 9 | — 0,1190 | 4′ | + 0,0237 |
| 3 | + 0,4138 | 10 | — 0,1106 | 3′ | + 0,0240 |
| 4 | + 0,2482 | 9′ | — 0,0884 | 2′ | + 0,0190 |
| 5 | + 0,1081 | 8′ | — 0,0585 | 1′ | + 0,0104 |
| 6 | 0 | 7′ | — 0,0270 | 0′ | 0 |

Изъ линіи вліянія для $A$ можно теперь получить, по фиг. 322 e, линію вліянія для количества $(M_I : l_1)$, а изъ этой послѣдней линію вліянія для количества $M_I : \lambda$. Линія вліянія для $B$ получается изъ зеркальнаго изображенія линіи вліянія для $A$, точно также и линія вліянія для количества $(M_{II} : l_1)$ изъ зеркальнаго изображенія линіи вліянія для количества $(M_I : l_1)$; такимъ образомъ извѣстны всѣ данныя, требуемыя для вычисленія линіи вліянія для количества $(M_{II} - M_I) : l$. Опредѣленіе линій вліяній для количествъ $Q$ и $M : \lambda$ производится по № 127.

Изслѣдуемъ еще вліяніе на сопротивленія опоръ $A$ и $B$ нагрѣванія верхняго пояса солнечными лучами ($A_t$, $B_t$). Сосредоточенные грузы $w_t = \frac{\varepsilon \Delta t s}{r} = \varepsilon \Delta t \, \frac{2\lambda}{h}$, соотвѣтствующіе стержнямъ верхняго пояса, замѣнимъ непрерывной нагрузкой $\frac{\varepsilon \Delta t}{h}$ на единицу длины и найдемъ для $A'$ и $B'$ одинаковые моменты:

$$\delta_{at} = \delta_{bt} = \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon \Delta t}{h}\,l \cdot l_1 + \frac{\varepsilon \Delta t}{h}\,l_1 \cdot \frac{l_1}{2} = \frac{\varepsilon \Delta t l_1 (l_1 + l)}{2h},$$

которые надо подставить въ уравненія:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} 0 = \delta_{at} - A_t\,\delta_{aa} - B_t\,\delta_{ab} \\ 0 = \delta_{bt} - A_t\,\delta_{ba} - B_t\,\delta_{bb}. \end{cases}$$

*) См. также фиг. 321 e.

Но для $\delta_{aa} = \delta_{bb}$ и $\delta_{ab} = \delta_{ba}$ нельзя принять раньше найденныя значенія 679 и 189; необходимо обратить здѣсь вниманіе на то, что грузы $w = \frac{ys}{r^2EF} = \frac{y \cdot 2\lambda}{h^2EF}$ были замѣнены грузами $w = y$, затѣмъ высота треугольника моментовъ $I$ была взята не $l_1 = 20{,}10$, а $= 24{,}0$ и наконецъ, что для моментовъ на фиг. 330 была принята длина панелей $= 1$. На этомъ основаніи въ уравненія I надо ввести значенія:

$$\delta_{aa} = \delta_{bb} = 679 \frac{2\lambda}{h^2EF} \frac{l_1}{24} \cdot \lambda; \ \delta_{ab} = \delta_{ba} = 189 \frac{2\lambda}{h^2EF} \frac{l_1}{24} \lambda,$$

тогда получимъ (при $A_t = B_t$):

$$\frac{\varepsilon \Delta t l_1 (l_1 + l)}{2h} = A_t \frac{2\lambda}{h^2EF} \frac{l_1}{24{,}0} \lambda (679 + 189).$$

Если $l_1 = 20{,}10$, $l = 26{,}60$, $\lambda = 3{,}35 = \frac{1}{14}(l_1 + l)$, $h = 3{,}0$, $\Delta t = 20°$ Cels., $\varepsilon E = 240$ т/м²., то получимъ

$$A_t = 416\,F,$$

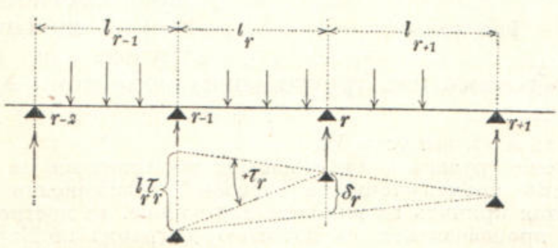
гдѣ $F$ означаетъ среднюю площадь поперечнаго сѣченія. Такъ напр. при $F = 130$ см². $= 0{,}013$ м². имѣли бы $A_t = 416 \cdot 0{,}013 = 5{,}4$ т.

---

## § 14.

## Неразрѣзная балка на многихъ опорахъ.

**130. Условія упругости.** Балка, лежащая на $(n+1)$ опорахъ, непрерываемая шарнирами, будетъ $(n-1)$ разъ статически неопредѣлима, потому что для обращенія этой фермы въ статически опредѣлимую систему необходимо устранить $(n-1)$ опоръ. Произведемъ сначала общее изслѣдованіе этой балки, не входя въ разсмотрѣніе того, будетъ ли она рѣшетчатая или сплошная. Обозначимъ три рядомъ лежащія опоры по порядку номерами $r-1$, $r$, $r+1$; пусть горизонтальныя разстоянія между ними будутъ $l_r$, $l_{r+1}$, фиг. 331. Прямыя $r-(r-1)$ и $r-(r+1)$, которыя соединяютъ точку $r$ съ сосѣдними опорными точками, назовемъ *парою прямыхъ съ номеромъ* $r$, а уголъ, образуемый ими при осадкѣ опоръ, обо-




Фиг. 331.

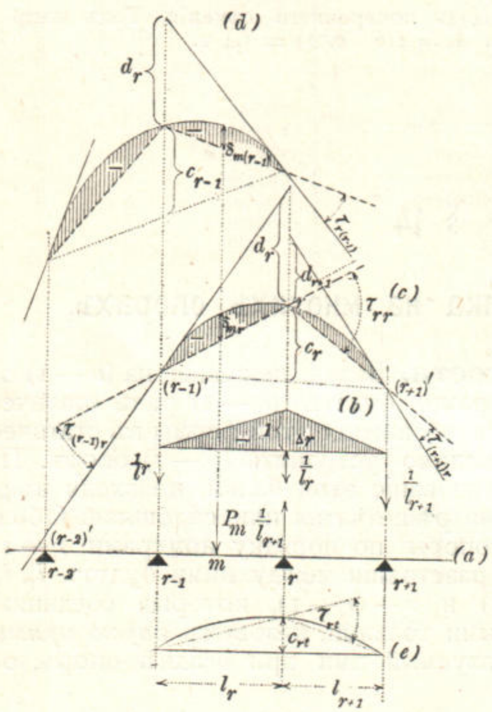
значимъ черезъ $\tau_r$. Пусть $\delta_r$ означаетъ вертикальное перемѣщеніе опорной точки $r$ относительно точекъ $(r-1)$ и $(r+1)$ (перемѣщеніе кверху считается положительнымъ), тогда получимъ уравненіе

$$(1) \qquad l_r\tau_r = \delta_r \frac{l_{r+1}+l_r}{l_{r+1}}, \text{ или } \tau_r = \delta_r \frac{l_{r+1}+l_r}{l_r+l_{r+1}},$$

изъ котораго при наблюденномъ перемѣщеніи $\delta_r$ можно получить величину угла вращенія $\tau_r$. Выразивъ теперь величину $\tau_r$ въ зависимости отъ силъ, дѣйствующихъ на балку, и отъ измѣненія температуры, мы получимъ условіе упругости; послѣдовательное повтореніе этого способа доставитъ столько условій, сколько имѣется среднихъ опоръ, въ общемъ получимъ $(n-1)$ условій.

За статически наопредѣлимыя величины слѣдуетъ принять опорные моменты $M_1, M_2, \ldots M_{r-1}, M_r, M_{r+1}, \ldots M_{n-1}$; сначала потребуется построить линіи прогибовъ для состояній

$$M_1 = -1,\ M_2 = -1, \ldots\ M_r = -1,\ M_{n+1} = -1,$$



Фиг. 332.

и опредѣлить взаимныя вращенія паръ прямыхъ, соотвѣтствующихъ среднимъ опорамъ $1, 2, \ldots r-1, r, r+1, \ldots n-1$. Обозначимъ при этомъ буквой $\tau_{pq}$ уголъ поворота пары прямыхъ номера $p$ отъ дѣйствія причины $M_q = -1$ и припомнимъ кстати о зависимости, полученной изъ теоремы Максуелля

$$(2) \qquad \tau_{pq} = \tau_{qp}.$$

На фиг. 332 b показана площадь моментовъ для состоянія $M_r = -1$, вызываемаго единичной нагрузкой пары прямыхъ съ номеромъ $r$, причемъ эта нагрузка состоитъ изъ четырехъ силъ $\left(\frac{1}{l_r}, \frac{1}{l_{r+1}}\right)$ *). На фиг. 332 c построена соотвѣтствующая линія прогибовъ, т. е. веревочный многоугольникъ для грузовъ $w$, вычисленныхъ извѣстнымъ образомъ изъ треугольника моментовъ $\Delta_r$ **); внѣшніе

*) См. № 16 и 17, выпускъ VI.

**) Вычисленіе грузовъ $w$ для рѣшетки производится по правиламъ § 12, № 117. Вліяніемъ промежуточныхъ стержней обыкновенно пренебрегаютъ; если же требуется принять во вниманіе это вліяніе, то построеніе линій прогибовъ должно производиться съ помощью діаграммъ по Виллiо. Вычисленіе грузовъ $w$ для сплошныхъ балокъ, къ которымъ примѣнимы выше приведенныя равенства, будетъ показано во второмъ отдѣлѣ этого тома (см. выпускъ X).

бока веревочнаго многоугольника будутъ представлять линіи прогибовъ для частей балки, лежащихъ влѣво отъ $r-1$ и вправо отъ $r+1$, которыя не испытываютъ напряженій отъ состоянія $M_r = -1$: отсюда слѣдуетъ, что разсматриваемый случай нагрузки имѣетъ вліяніе только на взаимное вращеніе паръ прямыхъ съ номерами $(r-1)$, $r$ и $(r+1)$, а потому получаемъ

$$(3)\qquad \begin{cases} \tau_{(r-2)r} = 0, \quad \tau_{(r-3)r} = 0, \; . \; . \; . \; . \; . \\ \tau_{(r+2)r} = 0, \quad \tau_{(r+3)r} = 0, \; . \; . \; . \; . \; . \end{cases}$$

Выразивъ поэтому вращеніе $\delta_r$ въ зависимости отъ грузовъ $P$, статически неопредѣлимыхъ величинъ $M$ и измѣненій температуры и, принявъ во вниманіе уравненіе (3), получимъ условіе упругости, соотвѣтствующее опорѣ $r$:

$$(4)\qquad \tau_r = \Sigma P_m\delta_{mr} - \tau_{r(r-1)}M_{r-1} - \tau_{rr}M_r - \tau_{r(r+1)}M_{(r+1)} + \tau_{rt},$$

гдѣ $\tau_{rt}$ означаетъ вліяніе измѣненія температуры.

Значенія $\delta_{mr}$, $\tau_{r(r-1)} = \tau_{(r-1)r}$, $\tau_{rr}$, $\tau_{r(r+1)} = \tau_{(r+1)r}$ опредѣляются линіей прогибовъ на фиг. 332 c; величину же $\tau_{rt}$ можно представить съ помощью веревочнаго многоугольника для грузовъ $w$ (фиг. 332 e) въ такой формѣ

$$(5)\qquad \tau_{rt} = c_{rt}\,\frac{l_{r+1} + l_r}{l_{r+1}l_r}.$$

Если здѣсь ввести еще такія соотношенія, имѣющія мѣсто для случая весьма малыхъ деформацій, которыми мы исключительно и занимаемся, а именно:

$$(6)\qquad \tau_{r(r-1)} = \frac{d_r}{l_r}; \quad \tau_{rr} = c_r\,\frac{l_{r+1} + l_r}{l_{r+1}l_r}; \quad \tau_{r(r+1)} = \frac{d_{r+1}}{l_{r+1}},$$

то равенства (4) обратятся въ слѣдующія:

$$(7)\qquad M_{r-1}\frac{d_r}{l_r} + M_r\left(\frac{c_r}{l_r} + \frac{c_r}{l_{r+1}}\right) + M_{r+1}\frac{d_{r+1}}{l_{r+1}} = N_r, \text{ гдѣ}$$

$$(8)\qquad N_r = -\left\{\Sigma P_m\delta_{mr} + \frac{l_r + l_{r+1}}{l_r l_{r+1}}(\delta_r + c_{rt})\right\}.$$

Причемъ знакъ передъ членомъ $\Sigma P_m\delta_{mr}$ взятъ обратный, *потому что теперь подъ $\delta_{mr}$ должна подразумѣваться всегда абсолютная величина разсматриваемой ординаты линіи прогибовъ.*

Уравненія числомъ $(n-1)$, составленныя по формѣ уравненія 7, называются *основными уравненіями*; впослѣдствіи мы будемъ писать ихъ въ болѣе удобной формѣ:

$$(9)\qquad \alpha_r M_{r-1} + \beta_r M_r + \alpha_{r+1}M_{r+1} = N_r,$$

гдѣ

$$(10)\qquad \alpha_r = \tau_{(r-1)r} = \tau_{r(r-1)}; \quad \beta_r = \tau_{rr}; \quad \alpha_{r+1} = \tau_{(r+1)r} = \tau_{r(r+1)}.$$

Прежде чѣмъ перейти къ разрѣшенію этихъ уравненій, обратимъ вниманіе на то предположеніе, которое мы дѣлали, а именно, что линіи прогибовъ были построены при полюсномъ разстояніи $= 1$ и что грузы $w$ вычислялись изъ измѣненій длины стержней рѣшетки. Если теперь взять полюсное разстояніе $= w_P$ и придать треугольнику $\Delta_r$ произвольно выбранную, но постоянную для всѣхъ опорныхъ точекъ высоту $y_c$ и положить, наконецъ, $w = \frac{ys}{r^2} \frac{F_c}{F}$ вмѣсто $w = \frac{ys}{r^2 EF}$ (стр. 56), то мы должны будемъ умножить количества $d$, $c$ и $\delta_{mr}$ еще на $w_P : EFy_c$ или — что одно и тоже — раздѣлить на это же выраженіе членъ $\delta_r + c_{rt}$. Если кромѣ того грузы $w_t$ были вычислены для $\varepsilon = 1$ (стр. 60), то величину $c_t$ въ уравн. (8) надо умножить еще на $\varepsilon$, и тогда, если полюсное разстояніе веревочнаго многоугольника для грузовъ $w_t$ было взято $= w_{tP}$, получимъ:

$$(11) \qquad N_r = -\left\{ \Sigma P_m \delta_{mr} + \frac{EF_c (l_r + l_{r+1}) y_c}{w_P l_r l_{r+1}} \left( \delta_r + \varepsilon c_{rt} \frac{w_{tP}}{w_P} \right) \right\}.$$

Отрѣзки $\delta_{mr}$, $y_c$, $\delta_r$, $c_{rt}$, $l_r$, $l_{r+1}$ надо измѣрить въ одномъ и томъ же линейномъ масштабѣ; $w_P$ и $w_{tP}$ (также какъ и $w$) представляютъ числа. $EF_c$ представляетъ силу, $N_r$ — моментъ.

Перемѣщеніями опорныхъ точекъ большею частью пренебрегаютъ ($\delta_r = 0$); также пренебрегаютъ обыкновенно и вліяніемъ измѣненія температуры ($c_{rt} = 0$), хотя нагрѣваніе верхняго пояса солнечными лучами можетъ оказать существенное вліяніе на напряженія мостовыхъ фермъ. Если же изслѣдуется только вліяніе грузовъ $P$, то необходимо обратить вниманіе на слѣдующее, а именно, чтобъ всѣ треугольники моментовъ $\Delta$ имѣли одну и туже высоту $y_c$ и чтобъ всѣ веревочные многоугольники были построены при одномъ и томъ полюсномъ разстояніи $w_P$; тогда величины $y_c$ и $w_P$ не будутъ играть никакой роли.

**131. Постоянныя точки $L$ и $R$. Первый способъ разрѣшенія уравненій упругости.** Мы займемся теперь изслѣдованіемъ только вліянія грузовъ $P$, т. е. примемъ, что $\delta_r = 0$ и $c_{rt} = 0$; предположимъ также, что силы $P$ приложены только внѣ пролетовъ $l_r$, $l_{r+1}$. Линіи моментовъ для частей балки $l_r$, $l_{r+1}$ будутъ состоять тогда изъ двухъ прямыхъ, опредѣляемыхъ опорными моментами $M_{r-1}$, $M_r$, $M_{r+1}$ съ нулевыми точками $L_r$, $L_{r+1}$, причемъ для этихъ трехъ моментовъ будутъ имѣть мѣсто уравненія

$$(12) \qquad \alpha_r M_{r-1} + \beta_r M_r + \alpha_{r+1} M_{r+1} = 0$$

$$(13) \qquad M_{r-1} = -M_r \frac{a}{b}\,; \quad M_{r+1} = -M_r \frac{b'}{a'} \quad \text{(см. фиг. 333)},$$

изъ которыхъ получается простая зависимость такого рода

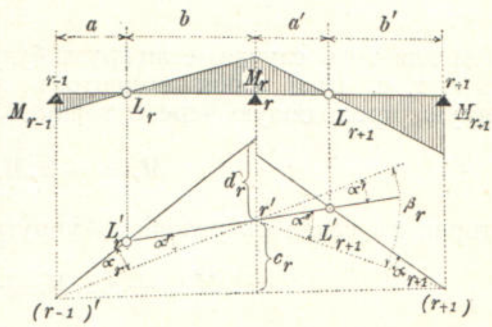
$$\beta_r = \alpha_r \frac{a}{b} + \alpha_{r+1} \frac{b'}{a'}.$$

Съ помощью этой формулы легко опредѣлить положеніе одной изъ нулевыхъ точекъ, если только будетъ задано положенiе другой. Если довести вертикали точекъ $L_r$ и $L_{r+1}$ до пересѣченiя въ точкахъ $L'_r$ и $L'_{r+1}$ съ внѣшними сторонами линiи прогибовъ, построенной для случая нагрузки $M_r = -1$, то получимъ:

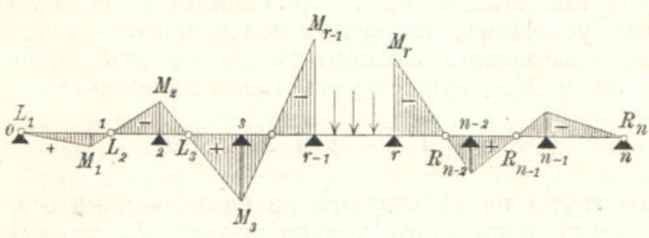
$$\angle L'_r r'(r-1)' = \alpha' = \alpha_r \frac{a}{b} \text{ *)}; \quad \angle L'_{r+1} r'(r+1)' = \alpha'' = \alpha_{r+1} \frac{b'}{a'},$$

или $\beta_r = \alpha' + \alpha''$; а отсюда слѣдуетъ, что *три точки* $L'_r$, $r'$ и $L'_{r+1}$ *лежатъ на одной прямой* **).

Предположимъ, что нагруженъ только пролетъ номера $r$ и что опорные моменты $M_{r-1}$, $M_r$ найдены по тому или другому способу. На протяженiи не нагруженнаго пролета линiя моментовъ состоитъ изъ прямой, фиг. 334. Пусть нулевыя точки этой прямой будутъ: влѣво отъ нагруженнаго пролета $L_1$, $L_2$, $L_3$ . . . . вправо отъ него $R_n$, $R_{n-1}$, $R_{n-2}$, . . . . Точка $L_1$ совпадаетъ съ точкой опоры 0; такимъ образомъ ея положенiе опредѣлено, а вмѣстѣ съ этимъ опредѣлится по порядку, по только что доказанному предложенiю, положенiе точекъ




Фиг. 333.




Фиг. 334.

$L_2$, $L_3$, . . . . Подобнымъ же путемъ мы можемъ, исходя отъ $R_n$, найти по порядку всѣ точки $R_{n-1}$, $R_{n-2}$, . . . .

Положенiе точекъ $L$ и $R$ совершенно не зависитъ отъ нагрузки балки; положенiе ихъ вполнѣ опредѣляется изъ линiй прогибовъ, соотвѣтствующихъ состоянiямъ $M_1 = -1$, $M_2 = -1$, . . . . Поэтому точки эти и называются *постоянными* точками; опредѣленiе ихъ составляетъ первую работу, которую слѣдуетъ произвести

*) Вспомнимъ, что здѣсь идетъ рѣчь о весьма малыхъ деформацiяхъ. На фиг. 333 построены только точки $(r-1)'$, $r'$, $(r+1)'$ и внѣшнiя стороны разсматриваемой линiи прогибовъ: ср. также фиг. 322 с.

**) Особенный случай подобной зависимости былъ описанъ уже раньше въ § 13.

при изслѣдованіи многопролетной балки. Зная точки $L$ и $R$, мы легко можемъ опредѣлить по фиг. 334 вліяніе нагрузки какого нибудь пролета на моменты всѣхъ остальныхъ пролетовъ, если только будутъ найдены моменты для опорныхъ точекъ, ограничивающихъ этотъ нагруженный пролетъ.

Обозначимъ буквами $a_r$, $b_r$ и соотвѣтственно $a'_r$, $b'_r$ отрѣзки, на которые дѣлится пролетъ $l_r$ постоянными точками $L_r$ и $R_r$, фиг. 335, и положимъ, что

(14) $$\frac{b_r}{a_r} = \varkappa_r, \quad \frac{b'_r}{a_r} = \varkappa';$$

тогда для того случая, если грузы будутъ приложены только вправо отъ $r$, т. е. если линія моментовъ для пролета $l_r$ представляетъ прямую, проходящую черезъ точку $L_r$, получимъ формулу

$$M_r = -\varkappa_r M_{r-1},$$

которая въ связи съ условіемъ упругости

$$\alpha_{r-1}M_{r-2} + \beta_{r-1}M_{r-1} + \alpha_r M_r = 0$$

приводитъ къ уравненію

(15) $$\alpha_{r-1}M_{r-2} + \beta_{r-1}M_{r-1} = \varkappa_r\alpha_r M_{r-1};$$

это уравненіе можетъ быть примѣнено и тогда, когда грузы лежатъ между $r-1$ и $r$, потому что эти грузы не вліяютъ на отношенія между моментами $M_{r-2}$ и $M_{r-1}$. Примѣнимость уравн. (15) связана только тѣмъ условіемъ, что ферма между 0 и $r-1$ остается ненагруженною; совершенно подобнымъ же путемъ можно показать, что между $M_r$ и $M_{r+1}$ существуетъ такая зависимость:

(16) $$\alpha_{r+1}M_{r+1} + \beta_r M_r = \varkappa'_r\alpha_r M_r,$$

если только грузы не дѣйствуютъ на балку вправо отъ $r$. Такимъ образомъ, когда нагруженъ только пролетъ $l_r$, то имѣютъ мѣсто уравн. (15) и (16), два же условія упругости

$$\alpha_{r-1}M_{r-2} + \beta_{r-1}M_{r-1} + \alpha_r M_r = -\Sigma P_m\delta_{m(r-1)}$$
$$\alpha_r M_{r-1} + \beta_r M_r + \alpha_{r+1}M_{r+1} = -\Sigma P_m\delta_{mr}$$

примутъ такой видъ

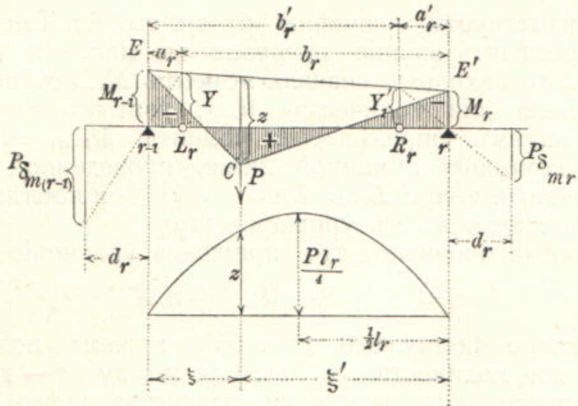
(17) $$\left|\begin{aligned} &\varkappa_r M_{r-1} + M_r = -\Sigma P_m\frac{\delta_{m(r-1)}}{\alpha_r} = -\Sigma P_m\frac{\delta_{m(r-1)}}{d_r}l_r \\ &M_{r-1} + \varkappa'_r M_r = -P_m\frac{\delta_{mr}}{\alpha_r} = -\Sigma P_m\frac{\delta_{mr}}{d_r}l_r; \end{aligned}\right.$$

эти выраженія приводятъ къ слѣдующему весьма простому изображенію моментовъ $M_{r-1}$ и $M_r$.

Отложимъ отъ точекъ $(r-1)$ и $r$ величины $M_{r-1}$ и $M_r$, какъ ординаты, фиг. 335, и соединимъ конечныя точки ихъ прямою; ординаты этой прямой для точекъ $L_r$ и $R_r$ будутъ равняться

$$Y = M_{r-1}\frac{b_r}{l_r} + M_r\frac{a_r}{l_r} = \frac{a_r}{l_r}(M_{r-1}\varkappa_r + M_r)$$

$$Y' = \frac{a'_r}{l_r}M_r\varkappa'_r + M_{r-1}),$$




Фиг. 335.

откуда, принимая во вниманіе уравн. (17), получимъ:

$$(18) \qquad Y = -\frac{a_r}{d_r}\Sigma P_m\delta_{m(r-1)}; \quad Y' = -\frac{a'_r}{d_r}\Sigma P_m\delta_{mr},$$

а эти значенія легко опредѣлить графически. Напр., на фиг. 335 показано опредѣленіе величинъ $Y$ и $Y'$ для того случая, когда дѣйствуетъ только одинъ сосредоточенный грузъ $P$; такимъ образомъ задача по построенію части $(r-1)-r$ линіи вліянія для $M_{r-1}$ и $M_r$ разрѣшена.

Желая опредѣлить вліяніе груза $P=1$ не только на величины $M_{r-1}$ и $M_r$, но и на всѣ моменты для пролета $l_r$, мы должны построить площадь моментовъ, заштрихованную на фиг. 335; эта площадь опредѣляется ординатой $z = P\frac{\xi\xi'}{l_r}$, потому что треугольникъ $ECE'$ представляетъ площадь моментовъ для простой балки $l_r$. Отрѣзокъ же $z$ получается какъ ордината параболы со стрѣлкой $= 0{,}25\,Pl_r$.

Теперь всѣ вопросы по изслѣдованію балки рѣшаются подобно тому, какъ это было сдѣлано для балки на 4 опорахъ, изслѣдованной въ § 13. Съ этой цѣлью потребуется построить для каждаго опорнаго момента только тѣ обѣ вѣтви линіи вліянія, которыя принадлежатъ двумъ пролетамъ, смежнымъ съ разсматриваемой опорой. Такимъ образомъ линію вліянія для $M_1$ надо строить отъ опоры 0 до опоры 2, линію вліянія для $M_2$ — только между 1 и 3, и т. д.

Пусть напр. требуется изслѣдовать пролетъ $l_r$, причемъ этотъ пролетъ имѣетъ равныя панели $\lambda$; для этого строимъ между $(r-1)$ и $r$ линію вліянія для количества $(M_r - M_{r-1}) : l_r$; изъ нея получаемъ всѣ линіи вліянія для $Q$ и затѣмъ, исходя изъ линіи вліянія для $M_r : \lambda$, находимъ всѣ линіи вліянія для $M : \lambda$ и наконецъ (по стр. 66, фиг. 325) линіи вліянія для усилій въ промежуточныхъ стержняхъ. Вліяніе нагрузки въ остальныхъ пролетахъ на усилія въ стержняхъ пролета $l_r$ находимъ съ помощью уравненія

$$(19) \qquad S = S_{r-1} M_{r-1} + S_r M_r,$$

которое соотвѣтствуетъ уравненію (6). см. стр. 67. Такъ напр., если требуется опредѣлить вліяніе нагрузки въ пролетѣ $l_v$. лежащемъ вправо отъ $l_r$, то находимъ сначала моментъ $M_{v-1}$ съ помощью вѣтвей линіи вліянія для количества $M_{v-1}$, взятыхъ между опорами $(v-1)$ и $v$, затѣмъ опредѣляемъ моменты $M_{v-2}$, $M_{v-3}$, . . . . , $M_r$. $M_{r-1}$ съ помощью ломанной линіи, проведенной на фиг. 334 черезъ постоянныя точки $L_{v-2}$, $L_{v-3}$, . . . . , и послѣднія значенія моментовъ подставляемъ въ уравненіе (19).

Точно также очевидно, что, примѣняя уравненіе

$$S = S_0 + S_{r-1} M_{r-1} + S_r M_r$$

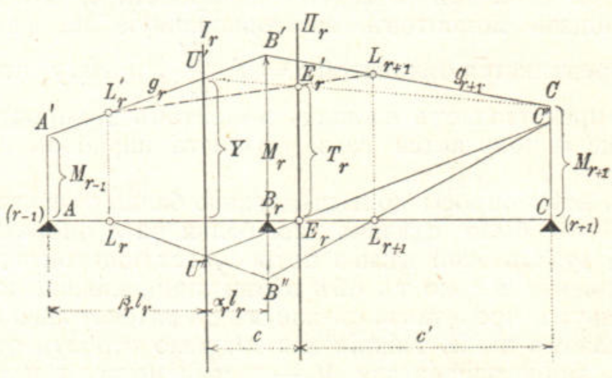
(соотвѣтствующее формулѣ 8, стр. 68), можемъ получить вѣтви линій вліянія для количества $S$. лежащія между $(r-1)$ и $r$; этотъ способъ не связанъ съ условіемъ равенства всѣхъ панелей.

Въ особенности просто изслѣдованіе крайняго пролета. Такъ напр. всѣ линіи вліянія, относящіяся до пролета $l_1$, могутъ быть выведены по способу, описанному въ № 126, изъ линіи вліянія для сопротивленія $A$ крайней опоры, которая строится съ помощью линіи вліянія для количества $M_1$. Здѣсь требуется рѣшить задачу, обратную задачѣ въ № 126, гдѣ линія вліянія для $M_1$ была выведена изъ линіи вліянія для $A$.

## 132. Второй способъ ршенѣія основныхъ уравненій.

$$(19) \qquad \alpha_r M_{r-1} + \beta_r M_r + \alpha_{r+1} M_{r+1} = N_r.$$

Разсмотримъ произвольное состояніе нагрузки и состояніе температуры, отложимъ на фиг. 336 опорные моменты какъ орди-




Фиг. 336.

наты, соединимъ ихъ концы прямыми $g_1$, $g_2$, . . . и назовемъ полученную подобнымъ путемъ ломанную линію *многоугольникомъ количествъ* $M$. На фиг. 336 представлены $(r-1)$-ая и $r$-ая панели этого многоугольника. Если провести вертикаль $I_r$ такъ, что отсѣкаемыя части пролета $l_r$ относились другъ къ другу какъ $\alpha_r$ къ $\beta_r$, то ордината, отсѣкаемая прямой $g_r$ на вертикали $I_r$, равняется:

$$Y = \frac{M_{r-1}\alpha_r + M_r\beta_r}{\alpha_r + \beta_r}, \tag{20}$$

поэтому основное уравненіе номера $r$ можно написать въ такой формѣ:

$$(\alpha_r + \beta_r)\, Y + \alpha_{r+1} M_{r+1} = N_r. \tag{21}$$

Если провести теперь вертикаль $II_r$ такъ, чтобъ отрѣзокъ $l_{r+1} + \alpha_r l_r$ дѣлился на части по такой пропорціи

$$c' : c = (\alpha_r + \beta_r) : \alpha_{r+1}, \tag{22}$$

то прямая $U'C'$, соединяющая конечныя точки $Y$ и $M_{r+1}$, отсѣкаетъ на вертикали $II_r$ ординату

$$T_r = \frac{Yc' + M_{r+1}c}{c' + c} = \frac{Y(\alpha_r + \beta_r) + M_{r+1}\alpha_{r+1}}{\alpha_r + \beta_r + \alpha_{r+1}}, \tag{23}$$

а изъ сравненія этого выраженія съ выраженіемъ (21) можно вывести такое правило:

*Прямая $U'C'$, опредѣленная съ помощью вертикали $I_r$, отсѣкаетъ на вертикали $II_r$ величину даннаго момента*:

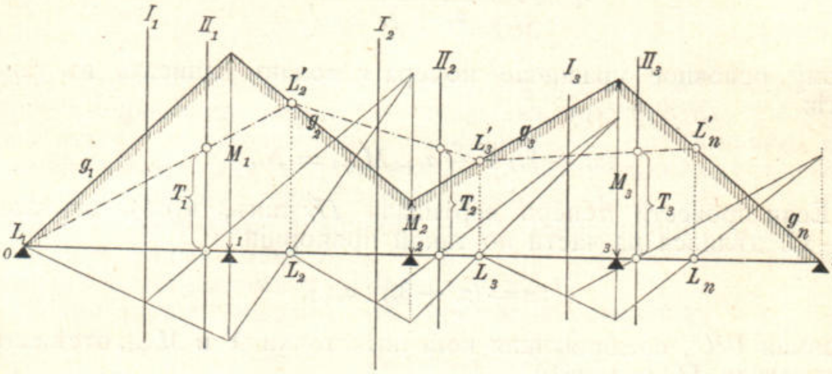
$$\overline{E_r E'_r} = T_r = \frac{N_r}{\alpha_r + \beta_r + \alpha_{r+1}}. \tag{24}$$

Теперь примемъ, что точка $L'_r$ прямой $g_r$ задана. Вообразимъ, что черезъ точку $L'_r$ проходятъ различныя прямыя; для каждой изъ этихъ прямыхъ можно найти соотвѣтствующую прямую $g_{r+1}$, если изъ точки $U'$, въ которой пересѣкаются прямыя $g_r$ и $I_r$, провести черезъ постоянную точку $E'_r$ прямую $U'E'_rC'$ и соединить $C'$ съ $B'$. Всѣ прямыя $g_{r+1}$, котоыря могутъ быть построены такимъ образомъ по отношенію къ различнымъ прямымъ $g_r$, пересѣкаются въ точкѣ $L'_{r+1}$; эта точка лежитъ на прямой, опредѣленной точками $L'_r$ и $E'_r$; находится же эта точка, какъ точка пересѣченія прямой $L'_rE'_r$ съ прямой $g_{r+1}$, проведенной къ соотвѣтствующей произвольной прямой $g_r$ *).

---

*) Это слѣдуетъ изъ слѣдующаго извѣстнаго предложенія геометріи положенія: если вершины ($U'$, $B'$, $C'$) треугольника перемѣщаются по тремъ лучамъ ($I_r$, $B'B'$, $C'C$) одного пучка лучей, причемъ двѣ стороны треугольника ($g_r$ и $U'C'$) проходятъ черезъ постоянныя точки ($L'_r$ и $E'_r$), то третья сторона ($g_{r+1}$) должна пройти также черезъ постоянную точку ($L'_{r+1}$), которая съ двумя другими постоянными точками лежитъ на одной прямой.

Нагляднѣе будетъ опредѣленіе точки $L_{r+1}$, если начать построеніе съ точки $L_r$, лежащей на вертикали подъ $L''_r$. Проводимъ черезъ $L_r$ произвольную прямую, которая пересѣкаетъ вертикали $I_r$ и $B'B$ въ точкахъ $U''$ и соотвѣтственно $B''$, затѣмъ черезъ $U''$ и $E_r$ проводимъ прямую до $C''$ — точки пересѣченія съ вертикалью точки $C$ и наконецъ наносимъ прямую $C''B''$. Послѣдняя прямая и опредѣлитъ точку $L_{r+1}$.




Фиг. 337.

Съ помощью предыдущихъ изслѣдованій мы имѣемъ возможность построить многоугольникъ количествъ $M$. Прямая $g_1$, фиг. 337, проходитъ черезъ точку опоры о (такъ какъ $M_0 = 0$); такимъ образомъ точка $L_1$ совпадаетъ съ о. Изъ положенія точки $L_1$ опредѣляемъ по предыдующимъ правиламъ положеніе точки $L_2$, а затѣмъ положеніе точекъ $L_3$, $L_4$, . . . и строимъ ломанную $L_1'L'_2L'_3$ . . . , стороны которой отсѣкаютъ на вертикаляхъ $II_1$, $II_2$, $II_3$, . . . . данные моменты $T_1$, $T_2$, $T_3$, . . . Теперь въ каждомъ пролетѣ извѣстна одна точка $L'$ многоугольника количествъ $M$, а такъ какъ прямая $g_n$ должна пройти не только черезъ $L'_n$, но также и черезъ точку опоры $n$, то ломанная линія $g_n$, $g_{n-1}$, . . . . $g_1$ такимъ образомъ вполнѣ опредѣлена.

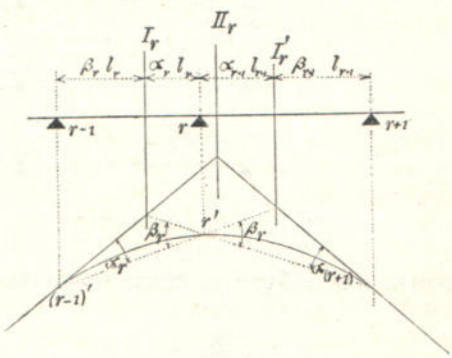
Можно было бы, конечно, поступить такимъ образомъ, чтобъ начать построеніе не съ точки $L_1$, а съ точки $R_n$ послѣдняго пролета, совпадающей съ точкой опоры $n$; для чего пришлось бы опредѣлить сначала въ предыдущихъ пролетахъ точки $R_{n-1}$, $R_{n-2}$, . . . $R_1$ подобно тому, какъ опредѣляли раньше точки $L_2$, $L_3$, . . . , затѣмъ построить съ помощью количествъ $T_{n-1}$, $T_{n-2}$, . . . ломанную линію $R'_{n-1}R'_{n-2}$ и наконецъ провести прямую $g_1$ черезъ $L_1$ и $R'_1$. Для опредѣленія точки $R$ необходимо провести вертикаль $I'_r$ (вмѣсто $I_r$) которая дѣлитъ $l_{r+1}$ въ отношеніи $\alpha_{r+1}:\beta_r$, фиг. 338.

Легко убѣдиться, что точки $L$ и $R$ совпадаютъ съ опредѣленными раньше постоянными точками $L$ и $R$. Съ этой цѣлью нагрузимъ только одинъ пролетъ и зачеркнемъ въ выраженіи $T$ членъ, зависящій отъ измѣненій температуры и отъ осадки опоръ. Тогда прямыя $g$ для пролетовъ, лежащихъ влѣво отъ нагруженнаго пролета, проходятъ черезъ точку $L$, а прямыя $g$ для правыхъ пролетовъ проходятъ черезъ точку $R$. Отсюда слѣдуетъ, что оба описанныхъ здѣсь способа опредѣленія опорныхъ моментовъ можно соединить въ одинъ, причемъ точки $L$ и $R$ будутъ опредѣляться по ранѣе указанному способу съ помощью линій прогибовъ, а многоугольникъ количествъ $M$ построится изъ моментовъ $T$. Этотъ путь слѣдуетъ примѣнять при изслѣдованіи вліянія измѣненія температуры на ферму, для которой остальныя изслѣдованія производились съ помощью линій вліянія по правиламъ № 131. Моменты $T$ опредѣлятся здѣсь по такой формулѣ

$$T_r = \frac{-1}{\alpha_r + \beta_r + \alpha_{r+1}} \frac{\varepsilon E F_c (l_r + l_{r+1})}{l_r l_{r+1}} \frac{y_c}{w_{tP}} c_{rt}.$$

Если отрицательныя значенія $T$ откладывались на фиг. 337 кверху отъ оси $o - n$, то опорные моменты, когда они изображаются ординатами, лежащими выше $o - n$, будутъ тоже отрицательны.

На фиг. 338 показано еще, какъ съ помощью линіи прогибовъ для состоянія $M_r = -1$ могутъ быть найдены вертикали $I_r$, $II_r$, $I'_r$. Вертикаль $II_r$ проходитъ черезъ точку пересѣченія внѣшнихъ боковъ веревочнаго многоугольника, вертикали $I_r$ и $I'_r$ проходятъ черезъ точки, въ которыхъ пересѣкаются крайніе бока съ замыкающими линіями $(r+1)' - r'$ и $(r-1)' - r'$. Доказать это весьма легко.




Фиг. 338.

Наконецъ укажемъ на то, что второй способъ разрѣшенія условій упругости гораздо общнѣе, чѣмъ графическое толкованіе уравненій, имѣющихъ ту же форму, что и уравненіе

$$\alpha_r M_{r-1} + \beta_r M_r + \alpha_{r+1} M_{r+1} = N_r;$$

уравненія этого рода весьма часто примѣняются на практикѣ при статическихъ расчетахъ. Весьма важное примѣненіе этого будетъ сдѣлано при изслѣдованіи дополнительныхъ напряженій, которымъ будетъ посвящена третья часть этого сочиненія.

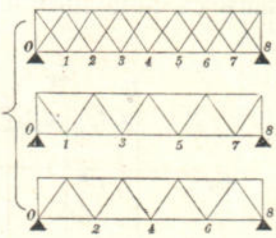
---

## § 15.

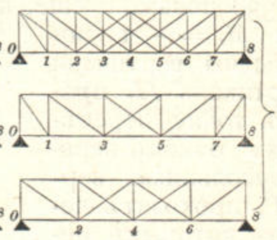
# Сложныя статически неопредѣлимыя рѣшетчатыя балки на двухъ опорахъ.

**133**. Рѣшетки съ панелями, длина которыхъ по отношенію къ высотѣ невелика, устраиваютъ часто съ двумя или нѣсколькими пересѣченіями раскосовъ, дабы избѣгнуть крутаго расположенія одиночныхъ раскосовъ. Если число пересѣченій раскосовъ $n$, то рѣшетка будетъ называться сложною съ $n$ пересѣченіями раскосовъ

Подобныя системы вообще статически неопредѣлимы *); расчетъ такихъ рѣшетокъ производится обыкновенно такимъ образомъ, что сложная рѣшетка съ *n* пересѣченіями раскосовъ разбивается на *n* простыхъ статически опредѣлимыхъ рѣшетокъ (фиг. 339, 340) и каждая изъ нихъ расчитывается на $\frac{1}{n}$ часть нагрузки; затѣмъ простыя рѣшетки соединяются опять въ одну сложную, причемъ усилія въ стержняхъ или въ частяхъ стержней, совпадающихъ одинъ съ другимъ, складываются. При полигональныхъ поясахъ подобное разложеніе приводитъ къ изогнутымъ стержнямъ, которые, конечно, нужно замѣнить прямолинейными. Такъ напр. при расчетѣ промежуточныхъ стержней, фиг. 341, вмѣсто поясовъ *abc* и *bcd* вводятся стержни *ac* и *bd*. Усилія $O$ и $U$ слѣдуетъ опредѣлять при

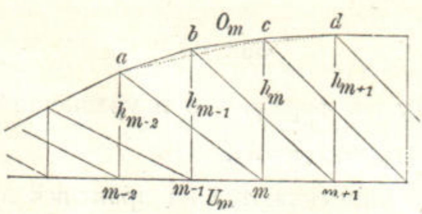


Фиг. 339.



Фиг. 340.

этомъ, какъ будетъ сказано дальше, по наибольшимъ изгибающимъ моментамъ $M$ для нагрузки, *недѣленной на части*. Для стержня *bc*, разсматриваемаго какъ стержень части рѣшетки *bd* $(m+1)$ надо положить



Фиг. 341.

$$O_m = -\frac{1}{2}\,\frac{M_{m+1}}{h_{m+1}\cos\beta_m},$$

а для того же стержня, но разсматриваемаго какъ стержень части рѣшетки *acm*, получимъ:

$$O_m = -\frac{1}{2}\,\frac{M_m}{h_m\cos\beta_m},$$

а въ суммѣ найдемъ:

$$O_m = -\frac{1}{2}\left(\frac{M_m}{h_m} + \frac{M_{m+1}}{h_{m+1}}\right)\cdot\frac{1}{\cos\beta_m},$$

гдѣ подъ $\beta_m$ подразумѣвается уголъ наклоненія стержня *bc*.

Подобнымъ же путемъ найдемъ для горизонтальнаго стержня $U_m$:

$$U_m = +\frac{1}{2}\left(\frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} + \frac{M_{m-2}}{h_{m-2}}\right).$$

---

*) Задачи на сложныя статически опредѣлимыя рѣшетки находятся въ I томѣ (выпускъ III, № 148) и въ § 6 II-го тома (выпускъ VII).

Усилія, полученныя по этому способу согласуются иногда вполнѣ хорошо съ результатами, основанными на точной теоріи, которая была изложена въ § 5 (выпускъ VII); но очень часто согласованіе это настолько неудовлетворительно, что инженеру, мало знакомому съ точнымъ расчетомъ, можно посовѣтовать не примѣнять сложныхъ рѣшетокъ, тѣмъ болѣе, что основаній для предпочтенія этихъ рѣшетокъ другимъ, кажется не существуетъ.

Покажемъ здѣсь на частномъ примѣрѣ примѣнимость правилъ, описанныхъ въ § 5 (выпускъ VII), и сравнимъ результаты точнаго расчета съ результатами, полученными при раздѣленіи рѣшетки на нѣсколько составныхъ. Кромѣ того опишемъ еще одинъ приблизительный способъ и провѣримъ его примѣнимость.

**134. Численный примѣръ** (фиг. на листѣ чертежей 6). Изслѣдуемъ рѣшетчатую ферму, показанную на фиг. 342. Пролетъ 36 м., высота по рединѣ 6 м., по концамъ 2 м., длина панели 3,6 м. Узлы поясовъ лежатъ на параболахъ. Ферма представляетъ *простую* статически неопредѣлимую систему. За статически неопредѣлимую величину можно принять усиліе $X$ въ стержнѣ $ll'$.

На фиг. 345 опредѣлены сначала усилія ($S_l$) для состоянія $X = -1$ и построены съ этой цѣлью многоугольники силъ по порядку для узловъ $l$, $l'$, $k$, $k'$, $i$, $i'$. . . . Растягивающія усилія вычерчены синимъ, сжимающія—краснымъ. Усилія въ поясахъ мѣняютъ знакъ черезъ панель, также мѣняютъ знакъ и усилія въ раскосахъ. Достаточно построить усилія для лѣвой половины фермы; вправо отъ середины усилія получаютъ тѣже величины, но мѣняютъ свои знаки. Результатъ вписанъ на фиг. 347 (синія числа).

Слѣдующая работа состоитъ въ построеніи линіи прогибовъ для состоянія $X = -1$. Если обозначить буквами:

$\delta_{ll}$ — взаимное перемѣщеніе пары точекъ по направленію $X = -1$ и отъ причины $X = -1$,

$\delta_{ml}$ — перемѣщеніе точки приложенія $m$ груза $P_m$ въ направленіи $P_m$ и отъ причины $X = -1$,

то вліяніе силы $P_m$ на величину $X$ будетъ таково:

$$X = P_m \frac{\delta_{ml}}{\delta_{ll}}. \tag{1}$$

Когда единица грузовъ измѣряется отрѣзкомъ длиною $\delta_{ll}$, то грузъ, равный единицѣ, приложенный къ узлу $m$, вызываетъ въ лишнемъ стержнѣ усиліе $X = \delta_{ml}$. Разсматриваемая линія прогибовъ будетъ тогда служить линіей вліянія для $X$; для опредѣленія ея необходимо установить выборъ поперечныхъ сѣченій, причемъ необходимо принять только взаимное отношеніе поперечныхъ сѣченій, такъ какъ въ уравн. (1) входитъ только отношеніе между двумя ординатами линіи прогибовъ. На этомъ же основаніи можно принять $E = 1$, если $E$ имѣетъ одно и тоже значеніе для всѣхъ стержней, что здѣсь и предполагается. Числа въ лѣвой половинѣ фиг. 346 означаютъ длину стержней въ *дециметрахъ*, въ правой половинѣ—выбранныя отношенія поперечныхъ сѣченій; красныя числа на фиг. 347 означаютъ измѣненія длины стержней, вычисленныя для состоянія $X = -1$. Напр. раскосу въ третьей панели соотвѣтствуетъ значеніе

$$\Delta s_l = \frac{S_l s}{EF} = + \frac{0{,}50 \cdot 61}{1 \cdot 0{,}6} = + 5{,}1.$$

Въ какихъ единицахъ выражено это—совершенно безразлично, такъ какъ мы имѣемъ въ виду только отношенія $\delta_{ml} : \delta_{ll}$. Построеніе линіи прогибовъ дѣлается съ помощью діаграммы перемѣщеній по Вилліо. Сначала принимаются неподвижными точка $a$ и направленіе стержня $aa'$ и $aa'$ берется равнымъ измѣненію длина $\Delta o$ стержня o. Къ $a$ и $a'$ присоединяется $b$ съ помощью $\Delta 1$ и $\Delta 2$, а затѣмъ опредѣляется точка $b'$, лежащая симметрично точкѣ $b$ относительно горизонтальной прямой, проходящей черезъ середину $aa'$; потомъ опредѣляютъ точку $c$ посредствомъ $\Delta 3$ и $\Delta s$, и точку $c'$, какъ симметричную точкѣ, и т. д. *). (Сравни подробное описаніе способа Вилліо въ § 1, а именно изслѣдованіе въ № 34, фиг. 39,— выпускъ VI,—гдѣ объясненъ способъ полученія линіи прогибовъ изъ діаграммы перемѣщеній. Сплошная зигзагообразная линія на фиг. 343 представляетъ линію прогибовъ *при ѣздѣ понизу,* пунктирная линія—*при ѣздѣ по верху*; обѣ отнесены къ прямой $al$, какъ къ нулевой оси. Такъ какъ въ діаграммѣ перемѣщеній точка $l'$ лежитъ выше точки $l$ (точно также какъ и въ рѣшеткѣ), то взаимное перемѣщеніе $\delta_{ll}$ пары точекъ $l, l'$ положительно, поэтому по уравненію (1) положительному перемѣщенію $\delta_{ml}$, т. е. направленному внизъ, соотвѣтствуетъ также положительное значеніе $X$. На фиг. 343 наглядно выдѣлены синей и красной штриховкой положительныя и отрицательныя вѣтви линіи вліянія для $X$, разсматриваемой какъ линія прогибовъ. Такъ какъ отрѣзокъ $\delta_{ll}$ получается равнымъ $\delta_{ll} = 42{,}7$ мм., то масштабъ для линіи вліянія для количества $X$ будетъ: 1 т. $= 42{,}7$ мм.

Линіи вліянія для остальныхъ усилій легко опредѣляются, если только построена линія вліянія для $X$. Сдѣлаемъ изслѣдованіе только для одного раскоса и для одного стержня пояса.

1. *Опредѣленіе усилія $D$ въ раскосѣ $h'g$, фиг. 348.* Обозначимъ буквой $D_0$ то усиліе въ раскосѣ $D$, когда рѣшетка при удаленіи стержня $ll'$ обратится въ статически опредѣлимую систему; для всякаго состоянія нагрузки будетъ тогда имѣть мѣсто уравненіе

$$D = D_0 - S_l X = D_0 + 0{,}43\, X. \tag{2}$$

Для опредѣленія линіи вліянія для $D_0$ воспользуемся первымъ способомъ, описаннымъ въ § 6 (выпускъ VII), а съ этой цѣлью статически опредѣлимую главную систему обратимъ въ кинематическую цѣпь, путемъ устраненія стержня $h'g$. Примемъ сначала жесткую сочлененную часть $aa'g'hga$ за неподвижную, сообщимъ точкѣ $h'$ произвольную по величинѣ скорость и опредѣлимъ по способу Вилліо по порядку скорости точекъ $i, i$ и т. д. Точки $g, g', h$ діаграммы скоростей на фиг. 349 а совпадаютъ съ полюсомъ; $g'h'$ будетъ перпендикулярно къ направленію стержня $g'h'$, точно также будетъ $h'i \perp h'i$, $hi \perp hi$ и т. д. Сплошная зигзагообразная линія на фиг. 349 b, отнесенная къ нулевой оси $la$, доставляетъ вертикальныя составляющія скоростей для точекъ нижняго пояса рѣшетки; пунктирная же линія—для точекъ верхняго пояса. Если, напр., точкѣ $i$ соотвѣтствуетъ ордината $\delta_i$, а буквой $\delta$ обозначена проек-

---

*) Вспомогательныя линіи, за исключеніемъ служащихъ для опредѣленія точки $a$, могутъ быть стерты. Масштабъ выбирается такъ, чтобъ измѣненіе длины $\Delta s = 10$ измѣрялось отрѣзкомъ длиною въ 5 мм.

ція скорости $g'h'$ на направленіе раскоса $D$, то вліяніе груза, равнаго 1 тоннѣ и приложеннаго въ точкѣ $i$, на усиліе $D_0$ опредѣлится изъ уравненія

$$D_0 \delta + 1 \cdot \delta_i = 0,$$

и при масштабѣ силъ 1 т. $= \delta$ получимъ

$$D_0 = -\delta_i.$$

Обѣ ломанныхъ линіи на фиг. 349 b представятъ такимъ образомъ линіи вліянія для $D_0$, сплошная при *ѣздѣ понизу*, пунктирная при *ѣздѣ поверху*. Вправо отъ $g$, $g'$ обѣ линіи вліянія совпадаютъ. Положительныя и отрицательныя вѣтви этихъ линій отмѣчены синей или красной штриховкой. Масштабъ былъ принятъ: 25 мм. = 1 тон.

На фиг. 350 а и 351 а построены линіи вліянія для количествъ $D$, выведенныя изъ линій вліяній для $D_0$ съ помощью уравненія (2). Опредѣленіе при этомъ значенія 0.43 $X$ было сдѣлано съ помощью прямой, которая наносится на фиг. 343 b слѣдующимъ образомъ: черезъ верхнюю крайнюю точку отрѣзка $\delta_{ii}$ проводимъ прямую параллельно нулевой оси и откладываемъ на ней, начиная съ вертикали точки $a$, величину усилія $S_i = 0{,}43$, соотвѣтствующаго стержню $h'g$. Это усиліе берется изъ діаграммы. построенной для состоянія $X = -1$ также въ масштабѣ 25 мм. = 1 тон., фиг. 345. Различіе въ масштабахъ линій вліянія для $X$, фиг. 343, и линій вліянія для $D$, исправляется расчетомъ; здѣсь ординаты линій вліянія для $D_0$ можно прямо сложить съ ординатами линій вліянія для 0.43 $X$ (принимая во вниманіе знакъ!). Напримѣръ, по абсолютной величинѣ

$$\eta_i = \delta_i - \delta'_i \text{ (фиг. 350 а, 349 а и 343 b)};$$

$\eta_i$ — отрицательно, потому что $\delta_i > \delta'_i$ *).

Рядомъ съ точнымъ способомъ приведемъ здѣсь также и *приближенный способъ*. Предположимъ, что раскосъ $hg'$ не напряженъ и что такимъ образомъ вертикальное сѣченіе, проведенное черезъ $h'g$, встрѣтитъ только три напряженныхъ стержня. Линія вліянія будетъ тогда состоять, какъ при *ѣздѣ понизу*, такъ и при *ѣздѣ поверху*, изъ трехъ прямыхъ $AL_1$, $L$, $L_2$, $L_2B$ (фиг. 350 b и 351 b); для построенія этихъ прямыхъ откладывается отрѣзокъ $AJ$, равный усилію $D_A$ въ разсматриваемомъ раскосѣ, вызываемому сопротивленіемъ опоры $A = 1$; затѣмъ откладывается отрѣзокъ $L_2H$, равный составляющей $\left[D\right]$, которая получается при разложеніи единицы нагрузки по направленіямъ $U$ и $D$. Опредѣленіе $D_A$ сдѣлано на фиг. 352 по способу Кульмана; для чего точки пересѣченія стержней ($U$, $A$) и ($O$, $D$), фиг. 348, соединяются прямой ($L$), затѣмъ сила $A = 1$ т. разлагается по направленіямъ $U$ и $L$, и наконецъ $L$—разлагается по направленіямъ $O$ и $D$. Когда такимъ образомъ ломанная линія $AL_1L_2B$ опредѣлена, тогда дѣлаютъ предположеніе, что грузы, ко-

---

*) При ѣздѣ поверху ординаты линіи вліянія для $D$ въ точкахъ $l'$ на не равны нулю; эти ординаты настолько малы, что могутъ быть приняты равными нулю (авторомъ былъ сдѣланъ чертежъ въ двойномъ масштабѣ и всетаки эти ординаты получились очень малыми).

торые приложены въ узлахъ $k$, $i'$, $h$, $g'$, $f$, $e'$, $d$, $c'$, $b$ ломанной линіи, не содержащей въ себѣ разсматриваемаго раскоса $D$, не оказываютъ никакого вліянія на усиліе $D$, т. е. предполагаютъ, что эти грузы дѣйствуютъ извѣстнымъ образомъ на другую часть рѣшетки; на основаніи этого предположенія получаются приблизительныя площади вліянія для усилія $D$, заштрихованныя на фиг. 350 b и 351 b*).

Сравнимъ теперь результаты точнаго и приближеннаго способовъ; возьмемъ поѣздъ—разстоянія между осями и нагрузка на ось показаны на фиг. 350 а. Средняя ось тендера отстоитъ отъ средней оси локомотива на разстояніи двойной длины панели, предположеніе—весьма невыгодное для расчета. Для положеній поѣзда, показанныхъ на чертежахъ, имѣемъ слѣдующія значенія:

| | *Ѣзда понизу*: | *Ѣзда поверху.* |
|---|---|---|
| точно | $_{max}D_p = \underset{+}{\Sigma} P\eta = +31$ т. | $_{max}D_p = +24$ т. |
| | $_{min}D_p = -\underset{-}{\Sigma} P\eta = -11$ т. | $_{min}D_p = -19$ т. |
| приблизительно | $_{max}D_p = +25{,}5$ т. (ошибка 21%) | $_{max}D_p = +19$ т. (ошибка 21%) |
| | $_{min}D_p = -11$ т. | $_{min}D_p = 20$ т. |

Пусть постоянная нагрузка $g = 1{,}74$ т./м., т. е. по $1{,}74 \cdot 3{,}6 = 6{,}3$ т. на каждый узелъ. Въ этомъ случаѣ какъ точный, такъ и приближенный способъ даютъ сходные результаты, а именно

при *ѣздѣ понизу* $D_g = 6.3 \cdot 0{,}62 = 4$ т.
при *ѣздѣ поверху* $D_g = 0$.

2. *Усиліе въ стержнѣ пояса.* Методъ изслѣдованія останется такой же, какой былъ принятъ при изслѣдованіи раскосовъ. Устранивъ стержень $i'h'$, для котораго требуется опредѣлить усиліе $O$ (фиг. 353), мы обратимъ статически опредѣлимую главную систему въ кинематическую цѣпь; затѣмъ построимъ съ помощью діаграммы Вилліо линіи вліянія для усилій $O_0$ въ обоихъ случаяхъ, какъ при *ѣздѣ понизу*, такъ и при *ѣздѣ поверху*. Скорость $hi'$ точки $i'$ выберемъ такъ, чтобъ проекція $hi'$ на направленіе $O$ равнялась 25 мм. Тогда масштабъ силъ къ линіямъ вліянія для $O$ будетъ такой: 1 т. = 25 мм.

Стержню $i'h'$ соотвѣтствуетъ $S_t = -0{,}30$, поэтому

$$O = O_0 - S_t X = O_0 + 0{,}30\, X;$$

такимъ образомъ линія вліянія для $O$ опредѣлена: эта линія вліянія построена въ меньшемъ масштабѣ (1 т. = 12,5 мм.) — *при ѣздѣ понизу* на фиг. 355 а, и *при ѣздѣ поверху* на фиг. 356 а **).

---

*) Впервые подобнымъ путемъ изслѣдовалъ сложныя рѣшетки съ параллельными поясами Френкель (Fränkel).

**) Для перехода отъ масштаба 1 т. = 25 мм. къ масштабу 1 т. = 12,5 мм. можно воспользоваться вспомогательнымъ угломъ (выше, см. фиг. 345).

На фиг. 355 b и 356 b нанесены результаты приближенной теоріи; здѣсь достаточно будетъ описать построеніе фиг. 355 a. Разсматриваемый стержень пояса лежитъ въ одной изъ обѣихъ составныхъ рѣшетокъ противъ узла $h$, въ другой—противъ узла $i$. Пусть $M_h$ и $M_i$ будутъ изгибающіе моменты относительно узловъ $h$ и $i$, а $r_r$ и $r_i$ перпендикуляры, опущенные изъ $h$ и $i$ на $O$, тогда. смотря потому какое изъ усилій въ стержнѣ $ih'$ или въ стержнѣ $i'h$ будетъ принято равнымъ нулю, получимъ:

$$-O = \frac{M_h}{r_h} \text{ или } -O = \frac{M_i}{r_i}.$$

Линія влiянія для $(M_h : r_h)$ состоитъ изъ прямыхъ $A'H$ и $HB'$ эта линія вліянія опредѣляется съ помощью отрѣзка

$$\overline{HH'} = \frac{x_h x'_h}{l r_i} = \frac{(3 \cdot 3{,}6)(7 \cdot 3{,}6)}{(10 \cdot 3{,}6) \cdot 5{,}34} = 1{,}42,$$

линія же вліянія для количества $(M_i : r_i)$, состоящая изъ прямыхъ $A'J$ и $JB'$, опредѣляется съ помощью отрѣзка

$$\overline{J'J} = \frac{z_i x'_i}{l r_i} = \frac{(2 \cdot 3{,}6)(8 \cdot 3{,}6)}{(10 \cdot 3{,}6) \cdot 4{,}51} = 1{,}28.$$

Линія вліянія для количества $(M_h : r_h)$ даетъ возможность опредѣлить вліяніе грузовъ, приложенныхъ къ узламъ $k$. $h$, $f$, $d$, $b$; линія же вліянія для количества $(M_i : r_i)$ опредѣляетъ вліяніе остальныхъ узловыхъ грузовъ; остается затѣмъ соединить концы, опредѣленныхъ такимъ образомъ ординатъ прямыми линіями. Фиг. 356 b построена подобнымъ же путемъ. Положеніямъ поѣзда, показаннымъ на чертежахъ и постоянной нагрузкѣ $g = 1{,}74$ т. соотвѣтствуютъ слѣдующія значенія:

| | *Ѣзда понизу.* | *Ѣзда поверху.* |
|---|---|---|
| точно | $O_p = -\Sigma P\eta = -125$ т. | $O_p = -\Sigma P\eta = -114$ т. |
| | $O_g = -g\lambda\Sigma\eta = -43$ т. | $O_g = -g\lambda\Sigma\eta = -41$ т. |
| приблизительн. | $O_p = -119$ т. (ошибка $5^0/_0$) | $O_p = -112$ т. |
| | $O_g = -43$ т. | $O_g = -42$ т. |

Такимъ образомъ результаты приближеннаго расчета весьма близко согласуются съ результатами точнаго расчета.

Обыкновенное разложеніе на двѣ простыхъ рѣшетки, изъ которыхъ каждая расчитывается на половинную нагрузку, приводитъ къ слѣдующей формулѣ

(3) $$O = -\frac{1}{2}\left(\frac{M_i}{r_i} + \frac{M_h}{i_h}\right),$$

причемъ для стержня пояса $i'h'$ сохранено дѣйствительное направленіе его; дабы избѣгнуть здѣсь излишней точности примемъ, что количества $M_i$ и $M_h$ получаютъ свои наибольшія значенія одновременно, не смотря на то, что эти значенія соотвѣтствуютъ различнымъ положеніямъ поѣзда. Въ № 77—выпускъ II (томъ I) было получено *):

$$M_i = 702 \text{ тм.}; \quad M_h = 918 \text{ тм., откуда}$$

$$O = -\frac{1}{2}\left(\frac{702}{4{,}51} + \frac{918}{5{,}34}\right) = -164 \text{ т.} = -U;$$

раньше же получили

*при ѣздѣ понизу*: $O = -125 - 43 = -168$ т.

*при ѣздѣ поверху*: $O = -114 - 41 = -155$ т.

Такимъ образомъ формула 3 можетъ быть принята для опредѣленія поперечныхъ сѣченій во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда требуется болѣе точное изслѣдованіе. По мнѣнію автора уравненіе 3 можетъ служить и для окончательнаго расчета.

Совсѣмъ иное получается съ раскосами. Приближенный способъ не давалъ вполнѣ удовлетворительныхъ результатовъ; еще меньшею точностью обладаетъ способъ расчета, основанный на разложеніи фермы на простыя рѣшетки, на которыя дѣйствуютъ половинныя нагрузки.

Разсмотримъ, напр., опредѣленіе усилія ${}_{max}D_p$ въ стержнѣ $h'g$ простой рѣшетки $lk'ih'g$ . . , фиг. 357. Пусть поѣздъ будетъ продвинутъ до $h'$; нагрузкой въ узлѣ $i$, которая вызываетъ въ раскосѣ $D$ сжатіе, можно пренебречь,— во всякомъ случаѣ это предположеніе очень невыгодное. Сопротивленіе лѣвой опоры будетъ тогда равняться $A = 26$ т. **); примѣняя кинематическій способъ, описанный въ № 162 (выпускъ III, томъ I), получимъ

$${}_{max}D_p = +22 \text{ т.},$$

тогда какъ раньше было получено ${}_{max}D_p = +31$ т. Такимъ образомъ ошибка составляетъ 41%.

Слѣдуетъ упомянуть здѣсь, что линіи вліянія для всѣхъ количествъ, когда уже построена линія вліянія для количества $X$, могутъ быть опредѣлены и по другимъ способамъ, а не только по только что описанному. Такъ напримѣръ, линія вліянія для усилія $D$ могла бы быть опредѣлена послѣ построенія линій вліянія для усилій $O$ и $U$ по способу, описанному въ № 170 (томъ I, выпускъ IV), а также по правиламъ, приведеннымъ на стр. 80 (выпускъ VII). Наконецъ, въ третьихъ, линіи вліянія для усилій въ стержняхъ 19', 20', 19, 20, и т. д. могли бы быть опредѣлены по порядку съ помощью составленія условій равновѣсія для узловъ $l'$, $l$, $k'$, $k$, . . . .

Четвертый способъ заключается въ томъ, чтобъ, приложивъ единицу нагрузки по порядку къ каждому изъ узловъ, построить діаграмму усилій для всей рѣшетки и для каждаго изъ этихъ случаевъ нагрузки. Полученныя подобнымъ путемъ діаграммы будутъ

---

*) Эти наибольшіе моменты были вычислены для балки въ 36 м. съ панелями по 3,6 м., причемъ $g = 1{,}74$ т./м. Желѣзнодорожный поѣздъ въ примѣрѣ выпуска II не вполнѣ соотвѣтствуетъ поѣзду, принятому въ данномъ примѣрѣ; если же примѣняется уравн. 3, то поѣздъ слѣдуетъ взять съ обыкновенно употребительными разстояніями между осями, а не съ тѣми, которыя взяты на листѣ чертежей VI.

**) По таблицѣ, помѣщенной на стр. 74 (выпускъ IV, томъ I), для даннаго положенія поѣзда имѣемъ: $A\lambda = 185{,}82$, откуда $A = \frac{185{,}82}{3{,}6} = 52$ т.; такимъ образомъ для простой рѣшетки надо принять 26 т. Конечно величину $A$ можно было бы получить также изъ многоугольника опорныхъ сопротивленій $A$.

содержать всѣ ординаты и для всѣхъ линій вліянія. На фиг. 344 (листъ чертежей 6) построена часть такой діаграммы, которой соотвѣтствуетъ грузъ = 1, приложенный къ узлу $h$.

---

## § 16.

## Построеніе линій прогибовъ изъ линій моментовъ.

**135.** Закончимъ наше изслѣдованіе плоской рѣшетки слѣдующимъ предложеніемъ: опредѣлить линіи прогибовъ изъ линій моментовъ такимъ образомъ, чтобъ для построенія прогибовъ для ряда нагрузокъ требовалось каждый разъ только новое построеніе линіи моментовъ, причемъ всѣ величины, зависящія отъ размѣровъ поперечныхъ сѣченій и отъ длины стержней, должны быть вычислены всего одинъ разъ.

Для этого положимъ, что усилія въ зависимости отъ моментовъ . . . $M_{m-1}$, $M_m$, $M_{m+1}$, . . . , взятыхъ относительно узловъ . . . . $(m-1)$, $m$, $(m+1)$ . . . . , выражаются въ такой формѣ

$$(1)\qquad S = \ldots + \psi_{m-1}M_{m-1} + \psi_m M_m + \psi_{m+1}M_{m+1} + \ldots ,$$

гдѣ подъ $\psi$ подразумѣваются значенія, не зависящія отъ взятыхъ состояній нагрузокъ. Тогда по стр. 21 (выпускъ VII) вліяніе измѣненія $\Delta s$ длины стержня $s$ на грузы $w$ будетъ таково:

$$(2)\qquad \ldots ; \; w_{m-1} = \psi_{m-1}\Delta s; \; w_m = \psi_m \Delta s; \; w_{m+1} = \psi_{m+1}\Delta s; \ldots$$

или, подставивъ $\Delta s = \frac{Ss}{EF}$ и $S$, опредѣленное изъ уравненія (1), получимъ:

$$w_{m-1} = \frac{\psi_{m-1}s}{EF}\left( \ldots \psi_{m-1}M_{m-1} + \psi_m M_m + \psi_{m+1}M_{m+1} \ldots \right)$$

$$w_m = \frac{\psi_m s}{EF}\left( \ldots \psi_{m-1}M_{m-1} + \psi_m M_m + \psi_{m+1}M_{m+1} \ldots \right).$$

Образовавъ такимъ образомъ тѣ доли грузовъ $w$, которыя соотвѣтствуютъ отдѣльнымъ стержнямъ, мы получимъ окончательно выраженія такого вида:

$$w_m = \ldots + \frac{M_{m-1}}{a_{(m-1)m}} + \frac{M_m}{a_{m \cdot m}} + \frac{M_{m+1}}{a_{(m+1)m}} + \ldots ,$$

гдѣ значенія $a$ зависятъ отъ формы рѣшетки, отъ размѣровъ поперечныхъ сѣченій, но не отъ состояній нагрузокъ.

Теперь вмѣсто того, чтобъ опредѣлять прогибы съ помощью веревочнаго многоугольника, построеннаго для грузовъ $w$ съ полюснымъ разстояніемъ, равнымъ *единицѣ*, можно поступить слѣдующимъ образомъ: грузъ $w_m$ (а также и всѣ остальные грузы $w$) замѣнить грузами

$$. \; . \; . \; M_{m-1}, \; M_m, \; M_{m+1}, \; . \; . \; .$$

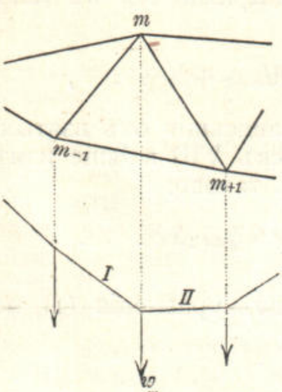
лежащими на разстояніяхъ

$$. \; . \; . \; a_{(m-1)m}, \; a_{mm}, \; a_{(m+1)m} \; . \; . \; .$$

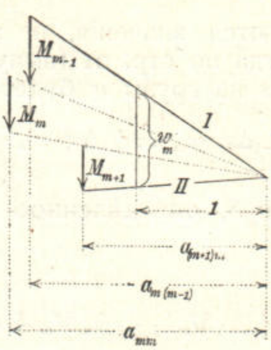
отъ полюса $O$. Дѣйствительно, лучи, проведенные къ конечнымъ точкамъ грузовъ . . . $M_{m-1}$, $M_m$, $M_{m+1}$ . . . разлагаютъ $w_m$ на части:

$$. \; . \; . \; , M_{m-1} \frac{1}{a_{(m-1)m}}, \; M_m \frac{1}{a_{mm}}, \; M_{m+1} \frac{1}{a_{(m+1)m}}, \; . \; . \; . \; . \; ,$$

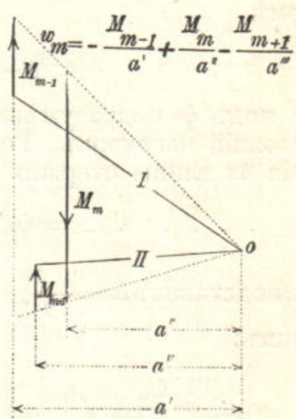
см. фиг. 358 b, гдѣ разсматривается одинъ изъ грузовъ $w$, зависящій отъ трехъ моментовъ. Когда имѣемъ отрицательныя $a$, то соотвѣтствующія $M$ разсматриваются какъ отрицательные грузы, какъ это, напр., показано на фиг. 358 c.




Фиг. 358 a.




Фиг. 358 b.




Фиг. 358 c.

Такимъ образомъ описанныя измѣненія въ многоугольникахъ силъ приводятъ насъ къ поставленной цѣли. Значенія $a$, не зависящія отъ грузовъ, вычисляются разъ навсегда; изслѣдованіе новаго состоянія нягрузки потребуетъ только одного построенія новой линіи моментовъ. Пояснимъ это на частномъ примѣрѣ.

**186. Численный примѣръ.** Разсмотримъ главную ферму желѣзнодорожнаго моста пролетомъ въ 36 м. съ 10 панелями, фиг. 360.

Усиліе въ стержнѣ верхняго пояса равняется (фиг. 359):

$$O_m = - \frac{M_m}{r_m};$$

измѣненіе длины стержня $O_m$ оказываетъ вліяніе только на количество $w_m$; это измѣненіе вызываетъ:

$$w_m = -\frac{\Delta o_m}{r_m} = -\frac{O_m o_m}{EF_m r_m} = \pm \frac{M_m o_m}{EF_m r^2_m};$$

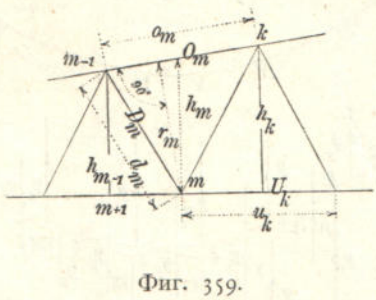
въ нижеслѣдующей таблицѣ вписаны данные размѣры поперечныхъ сѣченій и соотвѣтствующія доли грузовъ $w_1$, $w_3$, $w_5$, вычисленныя сначала для $E = 1$:

| Стержни | $o_m$ | $r_m$ | $F_m$ | |
|---|---|---|---|---|
| $o_1$ | 7,31 | 3,58 | 0,0160 | $w_1 = 35{,}64\ M_1$ |
| $o_2$ | 7,23 | 4,58 | 0,0320 | $w_3 = 10{,}77\ M_3$ |
| $o_3$ | 7,20 | 4,92 | 0,0320 | $w_5 = 9{,}30\ M_5$ |
| | метр. | | мтр². | |

Стержню нижняго пояса $u_r$ соотвѣтствуетъ (при $r_k = h_k$):

$$w_k = \frac{M_k u_k}{EF_k h_k^2}\text{, т. е.}$$

| Стержни. | $u_k$ | $r_k$ | $F_k$ | |
|---|---|---|---|---|
| $u_2$ | 7,20 | 4,28 | 0,0240 | $w_2 = 16{,}38\ M_2$ |
| $u_4$ | 7,20 | 4,92 | 0,0320 | $w_4 = 9{,}30\ M_4$ |




Фиг. 359.

Для раскоса въ $m$-ой панели получимъ:

$$D_m = \left(\pm \frac{M_m}{h_m} \mp \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}\right) \frac{d_m}{\lambda_m},$$

гдѣ верхній знакъ относится къ раскосу, подымающемуся влѣво, нижній—къ раскосу, подымающемуся вправо. Изъ уравненія для $D_m$ имѣемъ:

$$w_m = \pm \frac{\Delta d_m}{h_m} \cdot \frac{d_m}{\lambda_m} = \pm \frac{D_m d_m}{EF_m h_m} \cdot \frac{d_m}{\lambda_m} = \frac{d_m^3}{EF_m \lambda_m^2 h_m^2} M_m - \frac{d_m^3}{EF_m \lambda_m^2 h_{m-1} h_m} M_{m-1}$$

$$w_{m-1} = \mp \frac{\Delta d_m}{h_{m-1}} \frac{d_m}{\lambda_m} = \mp \frac{D_m d_m}{EF_m h_{m-1}} \frac{d_m}{\lambda_m} = -\frac{d_m^3}{EF_m \lambda_m^2 h_{m-1} h_m} M_m + \frac{d_m^3}{EF_m \lambda_m^2 h^2_{m-1}} M_{m-1}$$

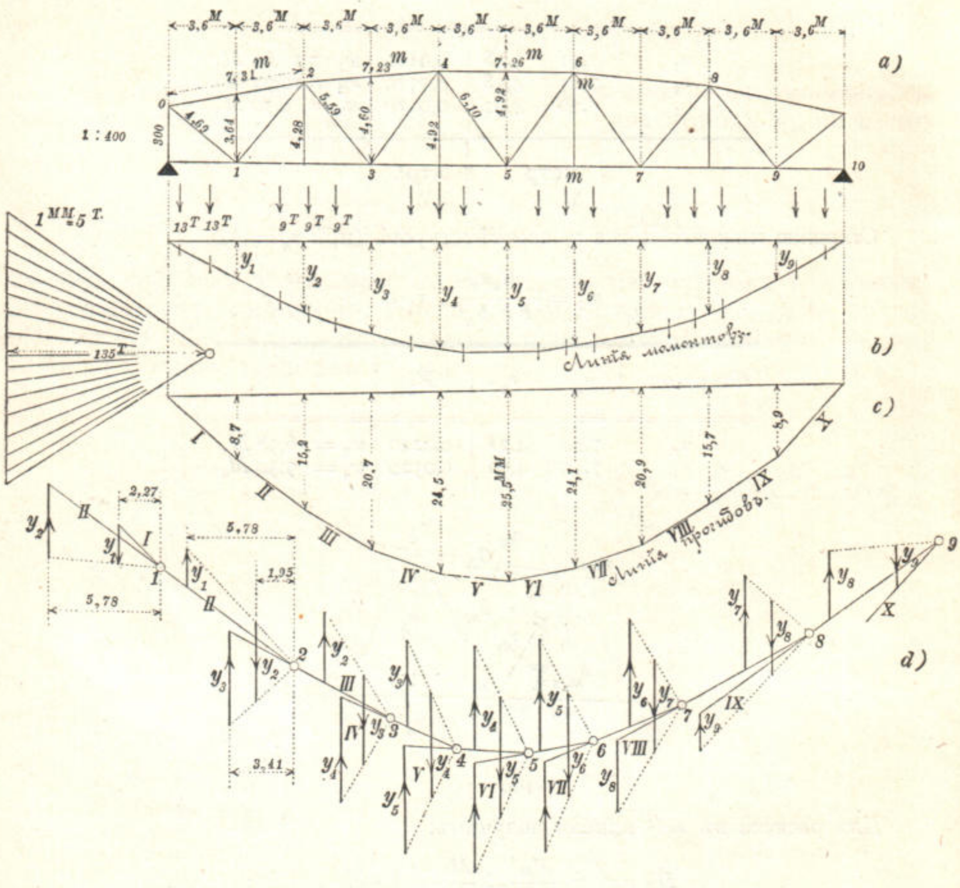
| Стержни | $d_m$ | $F_m$ | |
|---|---|---|---|
| $d_1$ | 4,69 | 0,0210 | $w_1 = 28{,}61\ M_1$ |
| $d_2$ | 5,59 | 0,0150 | $w_2 = 49{,}05\ M_2 - 57{,}68\ M_1;\ w_1 = -57{,}68\ M_2 + 67{,}82\ M_1$ |
| $d_3$ | 5,59 | 0,0070 | $w_3 = 90{,}99\ M_3 - 97{,}80\ M_2;\ w_2 = -97{,}80\ M_3 + 105{,}11\ M_2$ |
| $d_4$ | 6,10 | 0,0060 | $w_4 = 120{,}59\ M_4 - 128{,}98\ M_3;\ w_3 = -128{,}98\ M_4 + 137{,}95\ M_3$ |
| $d_5$ | 6,10 | 0,0060 | $w_5 = 120{,}59\ M_5 - 120{,}59\ M_4;\ w_4 = -120{,}59\ M_5 + 120{,}59\ M_4$ |

Для лѣвой крайней стойки получимъ:

$$V_0 = -\frac{M_1}{\lambda}, \text{ т. е. } w_1 = -\frac{\Delta h_0}{\lambda} = -\frac{V_0 h_0}{EF_0 \lambda} = +\frac{M_1 h_0}{EF_0 \lambda^2},$$

а при $F_0 = 0{,}0160$ м$^2$. найдемъ

$$w_1 = 14.47\, M_1.$$



Фиг. 360.

Для стойки $mm$, фиг. 360 а, получимъ

$$V_m = +K_m = Q_{m+1} - Q_m = \frac{M_{m+1} - M_m}{\lambda} - \frac{M_m - M_{m-1}}{\lambda},$$

гдѣ $K_m$ означаетъ нагрузку узла $m$, а также найдемъ

$$w_{m+1} = \frac{\Delta h_m}{\lambda}, \; w_m = -\frac{2}{\lambda}\Delta h_m, \; w_{m-1} = +\frac{\Delta h_m}{\lambda}$$

гдѣ надо положить:

$$\Delta h_m = \frac{V_m h_m}{EF} = \frac{h_m}{EF\lambda}(M_{m+1} - 2M_m + M_{m-1}).$$

Подобное сложное изслѣдованіе измѣненій длины $\Delta h$ промежуточныхъ стоекъ становится въ данномъ примѣрѣ излишнимъ. Представимъ себѣ, что эти стойки устранены, и тогда построимъ линію прогибовъ, которая намъ дастъ вертикальныя перемѣщенія узловъ 1, 3, 5, 7, 9 нижняго пояса и узловъ 2, 4, 6, 8, 10 верхняго пояса; наконецъ, обратимъ вниманіе на то, что перемѣщенія узловъ, связанныхъ однимъ стержнемъ, отличаются на измѣненіе длины этого стержня (см. стр. 9—выпускъ VII).

При сложеніи грузовъ $w$, дѣйствующихъ на одни и тѣже узлы, получаемъ:

$$w_1 = 35{,}64\,M_1 + 28{,}61\,M_1 - 57{,}68\,M_2 + 67{,}82\,M_1 + 14{,}47\,M_1, \text{ т. е.}$$
$$w_1 = 146{,}55\,M_1 - 57{,}68\,M_2 \text{ и точно также:}$$
$$w_2 = -57{,}68\,M_1 + 170{,}54\,M_2 - 97{,}80\,M_3$$
$$w_3 = -97{,}80\,M_2 + 239{,}71\,M_3 - 128{,}98\,M_4$$
$$w_4 = -128{,}98\,M_3 + 250{,}48\,M_4 - 120{,}59\,M_5$$
$$w_5 = -120{,}59\,M_4 + 250{,}48\,M_5 - 120{,}59\,M_6 \text{ *)};$$

эти значенія примѣнимы при $E = 1$. Если же взять $E = 1\,800\,000$ к/см². = = 18 000 000 т/м²., то всѣ количества $w$ придется раздѣлить на 18 000 000.

Моменты $M$ удобнѣе всего представить съ помощью веревочнаго многоугольника въ формѣ

$$M_m = H y_m,$$

гдѣ $H$—означаетъ полюсное разстояніе. Если $H$ выражено въ тоннахъ, то величины $y$ надо измѣрить по линейному масштабу для фермы и выразить въ метрахъ. Грузы $w$ представляютъ собою числа.

Въ нашемъ примѣрѣ приняты масштабы для фермы 1 : 400, для прогибовъ 1 : 1 и затѣмъ $H = 135$ т. Тогда въ выраженія, найденныя для грузовъ $w$, мы должны подставить

$$M_m = \frac{135 \cdot y_m}{18\,000\,000} \cdot \frac{400}{1} = \frac{3y_m}{1000};$$

сдѣлавъ это, получимъ:

$$w_1 = 146{,}55\,\frac{3 \cdot y_1}{1000} - 57{,}68\,\frac{3y_2}{1000} = \frac{y_1}{2{,}27} - \frac{y_2}{5{,}78}$$

и подобнымъ же образомъ:

$$w_2 = -\frac{y_1}{5{,}78} + \frac{y_2}{1{,}95} - \frac{y_3}{3{,}41}$$
$$w_3 = -\frac{y_2}{3{,}41} + \frac{y_3}{1{,}39} - \frac{y_4}{2{,}58}$$
$$w_4 = -\frac{y_3}{2{,}58} + \frac{y_4}{1{,}33} - \frac{y_5}{2{,}76}$$
$$w_5 = -\frac{y_4}{2{,}76} + \frac{y_5}{1{,}33} - \frac{y_6}{2{,}76}$$
$$w_6 = -\frac{y_5}{2{,}76} + \frac{y_6}{1{,}33} - \frac{y_7}{2{,}76}$$
$$w_7 = -\frac{y_6}{2{,}58} + \frac{y_7}{1{,}39} - \frac{y_8}{2{,}58}$$
$$w_8 = -\frac{y_7}{3{,}41} + \frac{y_8}{1{,}95} - \frac{y_9}{3{,}41}$$
$$w_9 = -\frac{y_8}{5{,}78} + \frac{y_9}{2{,}27}.$$

Числа въ знаменателяхъ представляютъ полюсныя разстоянія $a$ для грузовъ $y$ въ метрахъ; эти разстоянія отложены въ масштабѣ 1 : 400.

Окончивъ эти предварительныя вычисленія, которыя необходимо сдѣлать для каждой рѣшетки одинъ разъ навсегда, мы можемъ теперь построить линію прогибовъ *I*, *II*, *III*, . . . . для какого нибудь состоянія нагрузки, выводя ее изъ веревочнаго многоугольника, представляющаго линію моментовъ.

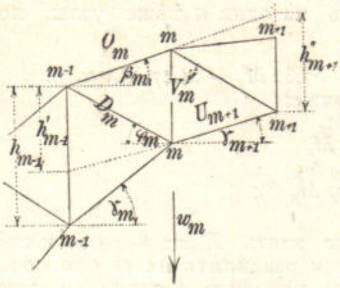
Направленіе стороны *I* выбирается сначала произвольнымъ. Съ помощью $y_1$ и $y_2$ опредѣляется направленіе стороны *II*, затѣмъ съ помощью $y_1$, $y_2$, $y_3$ направленіе *III* и т. д. Ср. фиг. 360 d, которая получена путемъ послѣдовательнаго примѣненія способа, показаннаго на фиг. 358 c; дальнѣйшихъ разъясненій эта фигура не требуетъ.

---

*) Вычисленіе $w_6$ потребуется для опредѣленія вліянія усилія $D_6$.

Точки 1, 2, 3, . . этой фигуры взяты другъ отъ друга на такомъ большомъ разстояніи, что многоугольники силъ $y_{m-1}$, $y_m$, $y_{m+1}$ для соотвѣтствующихъ узловъ получаются вполнѣ отчетливыми.

**137.** Описанный способъ опредѣленія линіи прогибовъ можетъ быть примѣненъ также просто и къ случаю внѣшнихъ силъ, произвольно направленныхъ, потому что примѣненіе это требуетъ только опредѣленія усилій съ помощью изгибающихъ моментовъ.



Фиг. 361.

Такъ напр., когда имѣемъ рѣшетку со стойками, фиг. 361, то изъ изгибающихъ моментовъ $M^o$ и $M^u$ относительно узловъ верхняго или нижняго пояса найдемъ слѣдующія количества въ самой общей формѣ *).

$$(1)\quad O_m = -\frac{M^u{}_m}{h_m \cos\beta_m}\,;\; U_m = +\frac{M^o{}_{m+1}}{h_{m-1}\cos\gamma_m}$$

$$(2)\quad D_m \cos\varphi_m = \frac{M^o{}_m}{h_m} - \frac{M^o{}_{m-1}}{h_{m-1}} = \frac{M^u{}_m}{h_m} - \frac{M^u{}_{m-1}}{h_{m-1}}$$

примѣнимы при ѣздѣ поверху и при ѣздѣ понизу.

$$(3)\quad V_m = \frac{M^o{}_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{M^o{}_m h'{}_{m-1}}{\lambda_m h_m} \text{ (ѣзда поверху).}$$

$$(4)\quad V_m = \frac{M^u{}_m h''{}_{m-1}}{\lambda_{m+1} h_m} - \frac{M^u{}_{m+1}}{\lambda_{m+1}} \text{ (ѣзда понизу).}$$

Отрѣзки $h'_{m-1}$ и $h''_{m+1}$ опредѣляются съ помощью измѣненій длины стержней $O_m$ и $U_{m+1}$. Изъ уравненій 1—4 получаемъ слѣ-

---

*) Эти уравненія, 1 до 3, были выведены нами на стр. 22 (выпускъ VIII). Въ данномъ исчисленіи подъ $H$ подразумѣвается равнодѣйствующая внѣшнихъ горизонтальныхъ силъ, приложенныхъ лѣвѣе сѣченія, проведеннаго черезъ рѣшетку. Мы узнаемъ тогда, что разсматриваемыя уравненія могутъ быть примѣнены въ самомъ общемъ случаѣ. Уравненіе (4) получается такимъ же путемъ, какъ и уравн. (3). Мы приведемъ здѣсь еще одинъ способъ полученія этого уравненія (4); проведемъ на фиг. 362 сѣченіе $tt$ и приравняемъ нулю сумму моментовъ силъ, дѣйствующихъ влѣво отъ $tt$, относительно нижняго узла $(m+1)$. Плечи $O_m$ и $V_m$ будутъ: $h''_{m+1}\cos\beta_m$ и $\lambda_{m+1}$; поэтому получимъ

Фиг. 362.

$$M^u_{m+1} + O_m h''{}_{m+1}\cos\beta_m + V_m\lambda_{m+1} = 0,$$

а отсюда, подставляя $O_m\cos\beta_m = -M^u_m : h_m$, найдемъ для $V_m$ значеніе, опредѣляемое уравненіемъ (4). Подобнымъ же путемъ можемъ получить также уравненія 2 и 3. Термины „ѣзда поверху", „ѣзда понизу" означаютъ, что грузы $P$ приложены или къ узламъ только верхняго или только нижняго пояса.

дующія выраженія измѣненій длины, служащія для опредѣленія вліянія ихъ на количества $\Delta o_m$, $\Delta u_m$, $\Delta d_m$, $\Delta h_m$.

$$\left.\begin{aligned} w_m &= -\frac{\Delta o_m}{h_m \cos\beta_m}; \quad w_{m-1} = +\frac{\Delta u_m}{h_{m-1}\cos\gamma_m} \\ w &= \frac{\Delta d_m}{h_m}; \quad w_{m-1} = -\frac{\Delta d_m}{h_{m+1}} \end{aligned}\right|$$ Примѣнимо для линіи прогибовъ верхняго и нижняго поясовъ.

$$\left.\begin{aligned} w_{m-1} &= +\frac{\Delta h_m}{\lambda_m} \\ w_m &= -\frac{\Delta h_m}{\lambda_m}\,\frac{h'_{m-1}}{h_m}. \end{aligned}\right|$$ Примѣнимо только для линіи прогибовъ верхняго пояса.

$$\left.\begin{aligned} w_m &= +\frac{\Delta h_m h''_{m+1}}{\lambda_{m+1} h_m} \\ w_{m+1} &= -\frac{\Delta h_m}{\lambda_{m+1}} \end{aligned}\right|$$ Примѣнимо только для линіи прогибовъ нижняго пояса.

Съ помощью этихъ уравненій мы можемъ выразить грузы $w$ въ зависимости отъ моментовъ $M^o$ и $M^u$.

## Литература ко II-му отдѣлу.

(ВЫПУСКИ VIII и IX)

**Mohr,** *Beitrag zur Theorie des Fachwerks.* Zeitschr. des Archit. u. Ing.-Ver. zu Hannover, 1874, стр. 509 и 1875 стр. 17. Основная работа, которая уже упоминалась въ литературѣ къ I отдѣлу.

**Fränkel,** *Anwendung der Theorie des augenblicklichen Drehpunktes auf die Bestimmung der Formänderung von Fachwerken* и т. д. Civilingenieur, 1875, стр. 121.

**Winkler,** *Beitrag zur Theorie der Bogenträger.* Zeitschr. des Archit. u. Ing.-Ver. zu Hannover, 1879, стр. 199.

**Mohr,** *Beitrag zur Theorie der Bogenfachwerkträger.* Zeitschr. des Archit. u. Ing.-Ver. zu Hannover, 1881, стр. 243.

**Müller-Breslau,** *Theorie der durch einen Balken versteiften Kette.* Zeitschr. des Archit u. Jng.-Ver. zu Hannover, 1881, стр. 57 и 1883, стр. 347. Содержитъ впервые точную теорію этой системы.

**Müller-Breslau,** *Theorie des durch einen Balken verstärkten steifen Bogens.* Civilingenieur 1883, стр. 13. Отдѣльный оттискъ изданія Arthur Felix въ Лейпцигѣ.

**Müller-Breslau,** *Influenzlinien für continuirliche Träger mit drei Stützpunkten.* Wochenblatt f. Archit. u. Ing. 1883, стр. 353.

**Müller-Breslau**, *Zur Theorie der Versteifung labiler und flexibler Bogenträger*. Zeitschr. f. Bauwesen, 1883, стр. 312.

**Swain**, *On the application of the principle of virtual velocities to the determination of the deflection and stresses of frames*. Journal of the Franklin Institute, 1883, Февр. до Апрѣля, стр. 102, 194, 250.

**Stelzel**, *Berechnung der Ferdinandsbrücke in Graz*. Находится въ сочиненiи v. Gabriely и Winter'a, Ferdinandsbrücke in Graz, Mittheilungen des Polytechnischen Klubs in Graz, 1883.

**Müller-Breslau**, *Beitrag zur Theorie des durch einen Balken versteiften Bogens*. Zeitschr. f. Bauwesen, 1884, стр. 323.

**Krohn**, *Der Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen und Anwendung desselben zur Berechnung statisch unbestimmter Fachwerkträger*. Zeitschr. des Archit. u. Ing.-Ver. zu Hannover 1884, стр. 269. Примѣненiе теоремы Максуелля въ связи съ дiаграммой перемѣщенiй по Виллiо.

**Müller-Breslau**, *Vereinfachung der Theorie der statisch unbestimmten Bogenträger*. Zeitschr. des Archit. u. Ing.-Ver. zu Hannover, 1884, стр. 575. Отдѣльный оттискъ изданъ у Schmorl и von Seefeld въ Ганноверѣ.

**Melan**, *Beitrag zur Berechnung statisch unbestimmter Stabsysteme*. Zeitschr. des österr. Archit. u. Ing.-Ver., 1884, стр. 100.

**Melan**, *Theorie der eisernen Bogenbrücken*, см. Handbuch der Ingenieurwissenschaften, II Band, IV Abtheilung, 1888.

**Land**, *Ueber die Ermittlung und die gegenseitigen Beziehungen der Einflusslinien für Träger*. Здѣсь между прочимъ показано опредѣленiе постоянныхъ точекъ неразрѣзной балки съ помощью линiй прогибовъ (стр. 75, фиг. 333 этого выпуска). Предложенная нами на фиг. 182 (выпускъ VII) общая теорема выведена Land'омъ только для частнаго случая. Zeitsch. f. Bauwesen, 1890, стр. 165.

**Müller-Breslau**, *Ueber einige Aufgaben der Statik, welche auf Gleichungen der Clapeyronschen Art führen*. Содержитъ рѣшенiе уравненiй $\alpha_r M_{r-1} + \beta_r M_r + \alpha_{r+1} M_{r+1} = N_r$, приведенное въ № 132 этого выпуска, а также и различныя примѣненiя этого уравненiя. Centralblatt d. Bauverwalt. 1891 Отдѣльный оттискъ у Ernst u. Sohn, Berlin *).

---

*) См. также:

**Müller-Breslau**, *Ueber die Berechnung statisch unbestimmter Auslegerbrücken*, Centralblatt der Bauverwaltung, 1897 (въ русскомъ переводѣ Г. Кривошеина въ Извѣст. Собран. Инжен. Пут. Сообщ. 1898, № 8).

**Bruno Schulz**, *Ueber die Berechnung mehrfach statisch unbestimmter Systeme*, Zeitschr. f. Archit. u. Ing., 1898, Heft. II (въ русскомъ переводѣ Г. Кривошеина въ Извѣст. Собр. Инжен, Пут. Сообщ. 1898, № 10).

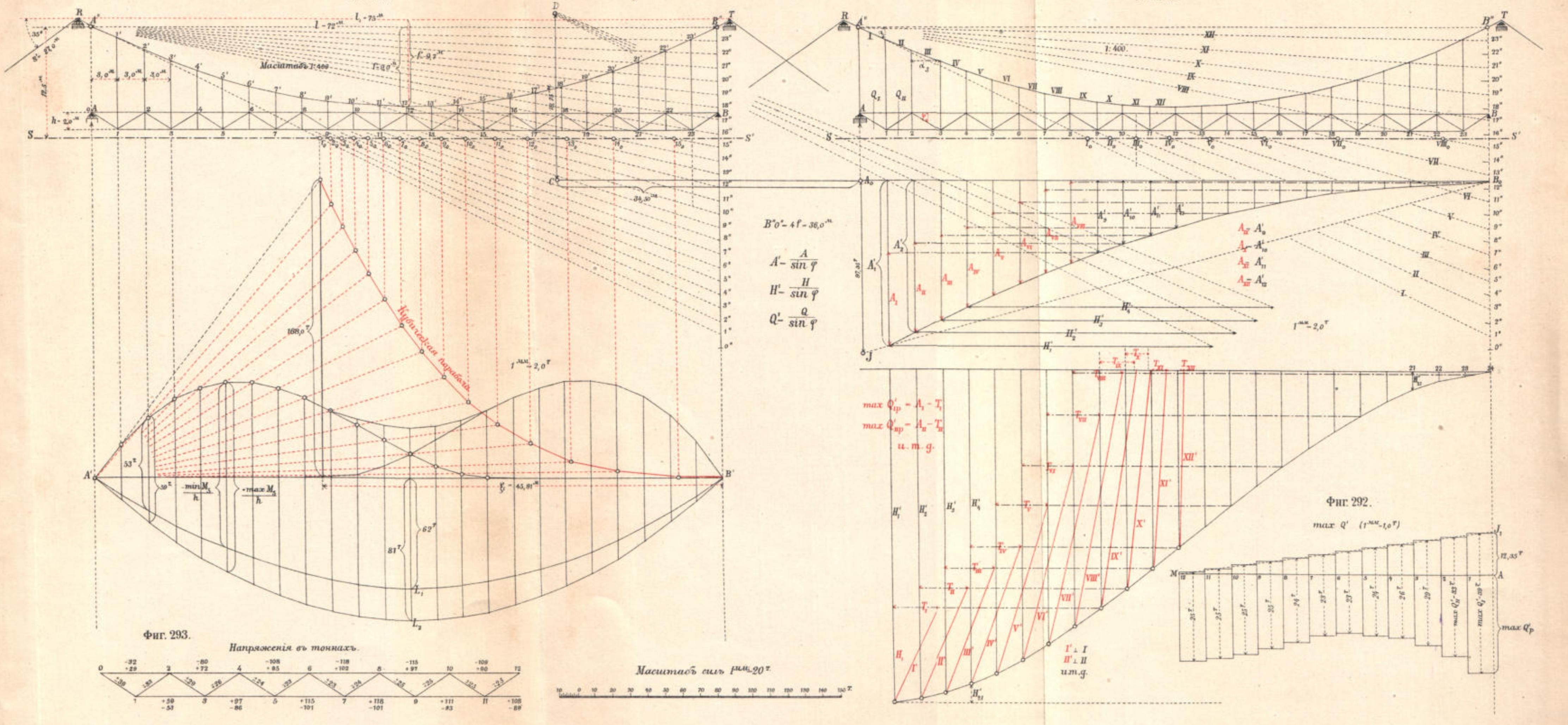
**Bruno Schulz**, *Ueber die Berechnung mehrfach statisch unbestimmter Systeme*, Zeitschr. f. Archit. u. Ing. 1898, Heft 2, 3.

Примѣч. перевод.

# Цѣпь, усиленная жесткой балкой (№ 103).



Фиг. 290. Фиг. 291.



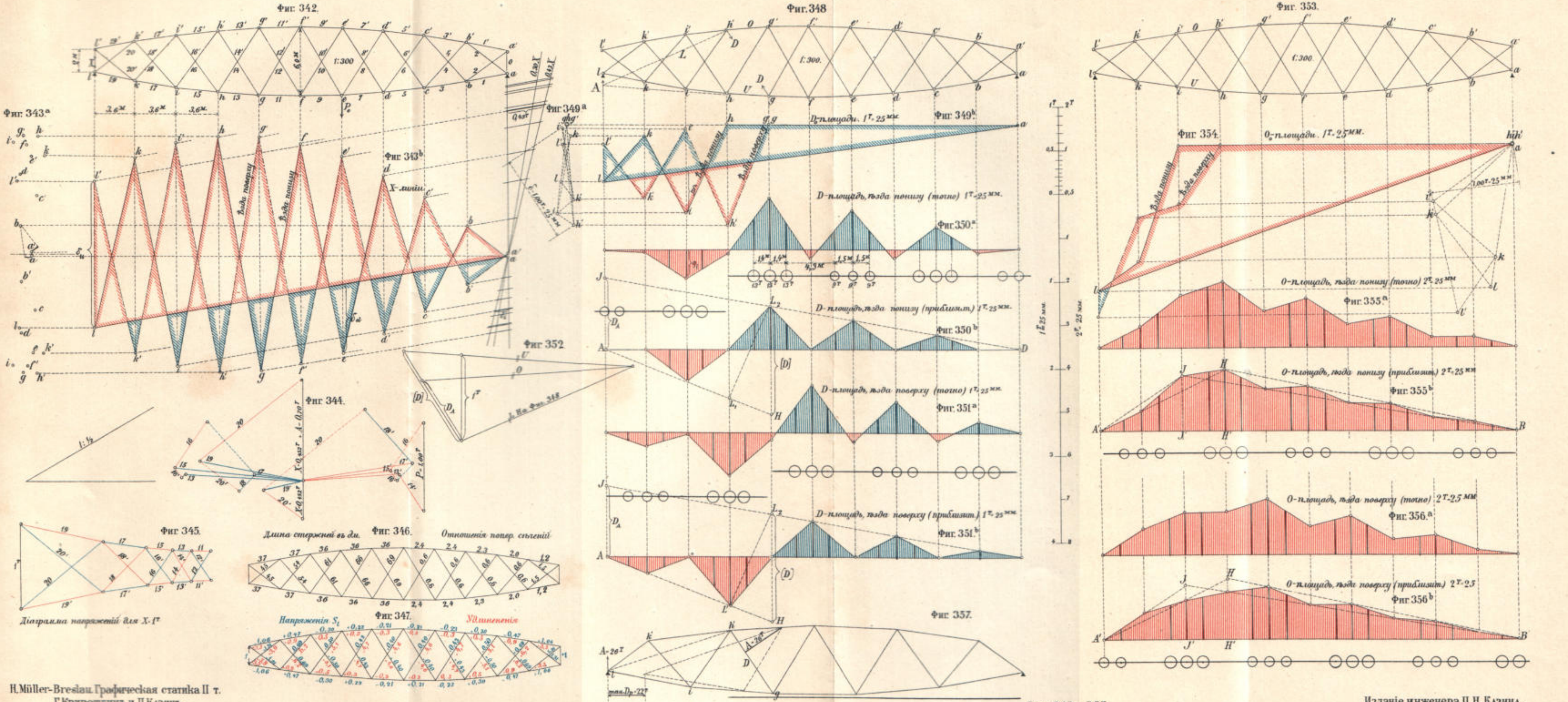

H. Müller-Breslau. Графическая статика, II т.
Г. Кривошеинъ и П. Казинъ.

ЛИТ. А. ГАКШТЕТТЕРА С.П.Б.

Фиг. 290, 291 и 292.

Изданіе Инженера П. Н. Казина.

## Желѣзнодорожный мостъ со сложной рѣшеткой (N 134).




H. Müller-Breslau. Графическая статика II т.
Г. Кривошеинъ и П. Казинъ.

Типо-Лит. Гакштеттеръ С.П.Б.

Фиг. 342—357.

Изданіе инженера П. Н. Казина.

77

# ЦѢНА ПОЛНАГО ИЗДАНІЯ

2 тома—10 выпусковъ, объемъ около 65 печатныхъ листовъ съ 1000 чертежами въ текстѣ и 16 литографированными таблицами)

по подпискѣ въ книжныхъ магазинахъ—**12** рублей.

Для гг. студентовъ техническихъ заведеній по подпискѣ у издателя—(С.-Петербургъ, Фонтанка 24, кв. 9)—**8** рублей.

За пересылку по вѣсу и разстоянію налагается платежъ.

**Отдѣльные выпуски продаваться не будутъ.**

НАПЕЧАТАНЫ СЛѢДУЮЩІЕ ВЫПУСКИ: I, II, III, IV, V (томъ I),
VI, VII, VIII, IX (томъ II).

Послѣдній (десятый) выпускъ выйдетъ въ сентябрѣ 1900 года.

Дозволено цензурой. С.-Петербургъ, 27 Іюля 1900 г.