

532

P-83





~~Ms.~~

232



83  
1910 2,00

Съ другой стороны, мы не можемъ не принимать во вниманіе тангенціальныхъ составляющихъ, не рискуя получить совершенно невѣрные результаты, при изслѣдованіи большинства случаевъ движенія жидкостей.

На основаніи отношенія жидкихъ тѣлъ къ усиліямъ нормальнымъ, а также къ измѣненіямъ температуры, ихъ можно раздѣлить на два класса: на жидкости капельныя и жидкости газообразныя.

И тѣ и другія жидкости не оказываютъ сопротивленія силамъ растягивающимъ. Точнѣе, капельныя жидкости оказываютъ едва замѣтное сопротивленіе, которымъ можно совершенно пренебрегать, а жидкости газообразныя имѣютъ стремленіе безгранично расширяться безъ всякаго внѣшняго воздѣйствія. Въ виду этого равновѣсіе послѣднихъ возможно лишь только въ совершенно замкнутомъ сосудѣ, когда ихъ поверхность совпадаетъ съ внутренней поверхностью сосуда, тогда какъ равновѣсіе первыхъ возможно въ отчасти открытомъ сосудѣ; та часть поверхности капельной жидкости, которою она не соприкасается съ внутренней поверхностью сосуда, называется свободной поверхностью.

Мы видѣли выше, что выдѣляя изъ находящейся въ равновѣсіи жидкой массы нѣкоторый объемъ, мы должны замѣнить внутреннія силы, дѣйствующія на этотъ объемъ со стороны остальной массы жидкости, силами нормальными къ поверхности объема. Имѣя въ виду отношеніе жидкостей къ усиліямъ растягивающимъ, легко заключить, что силы эти должны быть направлены непремѣнно по внутреннимъ нормалямъ, ибо иначе равновѣсіе жидкости было бы невозможно.

Отношеніе капельныхъ и газообразныхъ жидкостей къ силамъ сжимающимъ и измѣненіямъ температуры совершенно различно.

Капельныя жидкости почти несжимаемы, такъ что въ большинствѣ случаевъ ихъ сжатіемъ можно совершенно пренебрегать. Такъ напримѣръ, вода, при измѣненіи давленія на ея поверхности на одну атмосферу ( $10333 \text{ kgr./mtr.}^2$ ) измѣняетъ свой объемъ на 0,000046. Однако же и такимъ сжатіемъ при объясненіи нѣкоторыхъ явленій, гдѣ давленіе измѣняется въ широкихъ предѣлахъ, какъ напримѣръ, при явленіи гидравлическаго удара въ трубахъ, пренебрегать нельзя.

Расширеніе капельныхъ жидкостей съ возрастаніемъ температуры также весьма ничтожно.

Зависимость вѣса одного кубическаго метра воды, который мы будемъ обозначать черезъ  $\Delta$ , отъ температуры видна изъ слѣдующей таблицы:

|                 |     |           |                         |
|-----------------|-----|-----------|-------------------------|
| $\Delta = 1000$ | kg. | . . . . . | при $4^{\circ}\text{C}$ |
| " 930           | "   | . . . . . | " $0^{\circ}$           |
| " 999,72        | "   | . . . . . | " $10^{\circ}$          |
| " 995,73        | "   | . . . . . | " $30^{\circ}$          |
| " 957           | "   | . . . . . | " $100^{\circ}$         |

Отсюда слѣдуетъ, что при обыкновенныхъ температурахъ можно безъ большой погрѣшности считать  $\Delta = 1000$  kg.

Что касается до жидкостей газообразныхъ, то онѣ съ измѣненіемъ давленія и температуры въ широкихъ предѣлахъ измѣняютъ свой объемъ.

Для совершенныхъ газовъ зависимость между давленіемъ  $p$ , удѣльнымъ объемомъ  $v$  (объемомъ единицы вѣса) и температурой выражается закономъ Мариотта и Гей-Люссака:

$$pv = R (273^{\circ} + t^{\circ}\text{C})$$

гдѣ  $R$  — нѣкоторая постоянная, имѣющая для всякаго газа или для всякой смѣси газовъ вполнѣ опредѣленную величину.



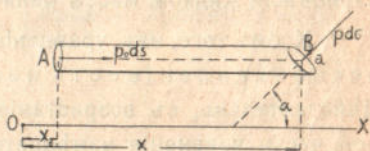
# Глава I-я.

## Равновѣсіе жидкихъ тѣлъ.

3. Гидростатическое давленіе и его свойства. Выдѣлимъ внутри находящейся въ равновѣсіи жидкой массы нѣкоторый объемъ и рассмотримъ внутреннія силы, приложенныя къ небольшому элементу его поверхности съ площадью  $\sigma$ , расположенному около нѣкоторой точки  $a$ . Такъ какъ по предыдущему силы эти имѣютъ направленіе внутреннихъ нормалей въ различныхъ точкахъ элемента, то въ виду незначительныхъ его размѣровъ мы можемъ считать ихъ параллельными между собою и ихъ равнодѣйствующую, т. е. ихъ алгебраическую сумму обозначимъ черезъ  $P$ . Взявъ отношеніе силы  $P$  къ площади  $\sigma$ , мы получимъ среднее давленіе на единицу площади элемента; предѣлъ же этого отношенія, когда  $\sigma$ , бесконечно убывая, обращается въ точку  $a$ , представитъ собою гидростатическое давленіе, т. е. давленіе на единицу поверхности въ данной точкѣ жидкой массы.

Но очевидно, что черезъ данную точку  $a$  жидкой массы мы можемъ провести бесконечно большое число различныхъ поверхностей, имѣющихъ въ данной точкѣ различно направленныя нормали; поэтому намъ нужно доказать, что гидростатическое давленіе не зависитъ отъ направленія нормали къ элементу поверхности, проведенному черезъ данную точку.

Вообразимъ въ жидкости, находящейся въ равновѣсіи, бесконечно тонкій цилиндръ  $AB$  (фиг. 1), ограниченный у  $A$  нормальнымъ сѣченіемъ съ площадью  $ds$  и у  $B$  косымъ сѣченіемъ, проведеннымъ черезъ точку  $a$  на оси цилиндра, съ площадью  $d\sigma$ , и допустимъ, что онъ отвердѣлъ. Такъ какъ



Фиг. 1.

онъ отвердѣлъ. Такъ какъ

цилиндръ будетъ оставаться въ равновѣсіи и въ твердомъ состояніи, то, очевидно, дѣйствующія на него силы должны удовлетворять условіямъ равновѣсія твердаго тѣла.

Составимъ сумму проекцій всѣхъ силъ на ось  $ox$ , которую мы возьмемъ параллельно образующей цилиндра, и приравняемъ ее нулю. На концѣ  $A$  дѣйствуетъ сила  $p_0 ds$ , (гдѣ  $p_0$  гидростатическое давленіе въ центрѣ тяжести сѣченія  $ds$ ), параллельная оси  $ox$  и имѣющая съ ней одинаковое направленіе; на концѣ  $B$  приложена сила  $p ds$ , гдѣ  $p$ —гидростатическое давленіе въ точкѣ  $a$ , которая даетъ по оси  $ox$  составляющую— $p \cos \alpha$ ; давленія на боковую поверхность цилиндра составляющихъ по оси  $ox$  не дадутъ, ибо они нормальны къ этой оси. Кромѣ силъ давленія на поверхность цилиндра надо принять во вниманіе силы, дѣйствующія на его массу. Таковыми силами могутъ быть сила тяжести, центробѣжная сила и т. п. Обозначая сумму составляющихъ такихъ силъ, отнесенныхъ къ единицѣ массы, по оси  $ox$  черезъ  $X$  и плотность черезъ  $\rho$ , найдемъ, что по оси  $ox$  на элементарный цилиндръ съ высотой  $dx$  дѣйствуетъ сила  $X \rho ds dx$ , а на весь цилиндръ

$AB$  сила  $\int_{x_0}^x X \rho ds dx$ . Такимъ образомъ имѣемъ:

$$p_0 ds - p ds \cos \alpha + \int_{x_0}^x X \rho ds dx = 0 \dots (1)$$

или, замѣтивъ, что  $ds \cos \alpha = ds$ ,

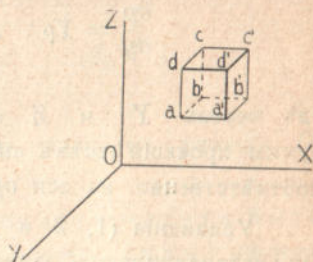
$$p = p_0 + \int_{x_0}^x X \rho ds dx \dots (2).$$

Изъ уравненія (2) ясно, что гидростатическое давленіе въ точкѣ  $a$  не зависитъ отъ направленія нормали къ проведенной черезъ нее элементарной площадкѣ. Такимъ образомъ, гидростатическое давленіе въ данной точкѣ находящейся въ равновѣсіи жидкой массы является вполнѣ опредѣленной величиной.

Кромѣ того, изъ уравненія (2) легко усмотрѣть, что гидростатическое давленіе есть непрерывная функція координатъ. Дѣйствительно, съ возрастаніемъ верхняго предѣла интеграль во второй части уравненія измѣняется непрерывно, слѣдовательно  $p$  есть непрерывная функція  $x$ ; то же самое, очевидно, имѣетъ мѣсто и для всякаго другого направленія.



4. Уравнения равновѣсія. Выдѣлимъ внутри жидкой массы прямоугольный безконечно малый параллелепипедъ съ ребрами, равными по величинѣ  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$  и направленными параллельно осямъ координатъ  $ox$ ,  $oy$  и  $oz$  (фиг. 2). Предположивъ, что параллелепипедъ отвердѣлъ, составимъ уравненія равновѣсія. Обозначая гидростатическое давление въ центрѣ тяжести параллелепипеда черезъ  $p$  и имѣя въ виду, что  $p$  есть непрерывная функція координатъ, найдемъ, что гидростатическое давление въ центрѣ тяжести грани  $abcd$  будетъ



Фиг. 2.

$p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}$  и въ центрѣ тяжести грани  $a'b'c'd'$  будетъ  $p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}$ ; полное

давленіе на грань  $abcd$  будетъ, очевидно, равно  $dydz \left( p - \right.$

$\left. - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right)$ , приложено въ центрѣ тяжести грани и направлено

параллельно оси  $ox$  въ сторону положительную, а на грань  $a'b'c'd'$  —

равно  $dydz \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right)$ , приложено въ центрѣ тяжести этой грани

и направлено также параллельно оси  $ox$ , но въ сторону обратную.

Обозначая далѣе по предыдущему черезъ  $X$  отнесенную къ единицѣ

массы сумму проекцій всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на массу параллеле-

пипеда, и черезъ  $\rho$  плотность, мы найдемъ, что на всю массу параллеле-

пипеда по направленію  $ox$  будетъ дѣйствовать сила  $X\rho dx dy dz$ . Въ

виду того, что давленія на грани, перпендикулярныя къ осямъ  $oy$  и

$oz$ , составляютъ съ осью  $ox$  прямые углы, ихъ проекціи на эту по-

слѣдную равны нулю. Такимъ образомъ, мы нашли всѣ силы, дѣйствую-

щія по оси  $ox$ ; если параллелепипедъ находится въ равновѣсіи, то сумма

всѣхъ этихъ силъ равна нулю, слѣдовательно:

$$-\left( p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydz + \left( p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydz + X\rho dx dy dz = 0,$$

откуда находимъ:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = X\rho \dots (1).$$

Подобнымъ же образомъ для осей  $oy$  и  $oz$  найдемъ:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = Y\rho . . . (2) \quad \text{и} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = Z\rho . . . (3),$$

гдѣ черезъ  $Y$  и  $Z$  обозначены отнесенныя къ единицѣ массы суммы проекцій всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на массу параллелепипеда, соотвѣтственно на оси  $oy$  и  $oz$ .

Уравненія (1, 2 и 3) суть основныя уравненія гидростатики. Они устанавливають зависимость между внѣшними силами, давленіемъ и плотностью. Если жидкость имѣетъ свободную поверхность, для равновѣсія кромѣ того необходимо, чтобы гидростатическое давленіе на поверхности было равно внѣшнему давленію; что касается до давленій на стѣнки сосуда, то каковы бы они ни были, они всегда будутъ уравновѣшиваться сопротивленіями стѣнокъ.

При выводѣ уравненій (1, 2 и 3) мы воспользовались только тремя уравненіями равновѣсія и не принимали во вниманіе, что сумма моментовъ всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на параллелепипедъ, относительно каждой изъ осей  $ox$ ,  $oy$  и  $oz$ , равна нулю. Но легко видѣть, что эти послѣднія уравненія обращаются въ тождества. Дѣйствительно, такъ какъ равнодѣйствующая сила, дѣйствующая на массу, приложена въ центрѣ тяжести параллелепипеда, а давленія на грани направлены по нормалямъ къ нимъ и приложены соотвѣтственно въ ихъ центрахъ тяжести, то всѣ силы, приложенныя къ параллелепипеду при продолженіи пересѣкутся въ одной точкѣ и равнодѣйствующей пары не дадутъ.

**5. Поверхность уровня.** Если мы умножимъ уравненія (1, 2 и 3) предыдущаго параграфа соотвѣтственно на  $dx$ ,  $dy$ , и  $dz$  и сложимъ, то получимъ:

$$dp = \rho (Xdx + Ydy + Zdz) . . . (1).$$

Такъ какъ  $dp$  есть полный дифференціалъ отъ  $p$ , то необходимо должна существовать функція координатъ  $U$ , удовлетворяющая условіямъ:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \rho X, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \rho Y \quad \text{и} \quad \frac{\partial U}{\partial z} = \rho Z . . . (2),$$

ибо вторая часть уравненія (1) должна быть также полнымъ дифференціаломъ нѣкоторой функціи координатъ.



Такъ какъ для капельной жидкости  $\rho = const.$ , то вмѣсто уравненій (2) мы будемъ имѣть:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Y \quad \text{и} \quad \frac{\partial U}{\partial z} = Z \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Какъ извѣстно, удовлетворяющая этимъ условіямъ функція  $U$  есть силовая функція.

Отсюда слѣдуетъ, что капельныя жидкости могутъ быть въ равновѣсіи только подъ дѣйствіемъ силъ, имѣющихъ силовую функцію.

Умножая уравненія (3) соответственно на  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$  получимъ:

$$Xdx + Ydy + Zdz = dU.$$

На основаніи этого уравненіе (1) для капельныхъ жидкостей приметъ слѣдующій видъ:

$$dp = \rho dU \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Интегрируя это уравненіе, получимъ:

$$p = \rho U + c \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

гдѣ  $c$  есть нѣкоторое произвольное постоянное количество. Давая  $U$  постоянныя значенія, мы получимъ, какъ извѣстно, рядъ поверхностей уровня; но при постоянномъ  $U$  изъ уравненія (5) мы получимъ и для  $p$  постоянное значеніе. Отсюда слѣдуетъ, что поверхность уровня для капельныхъ жидкостей есть въ то же время и поверхность равнаго давленія.

Рѣшая уравненіе (5) относительно  $U$ , получимъ:

$$U = \frac{p - c}{\rho}$$

Отсюда слѣдуетъ, что если свободная поверхность находится подъ постояннымъ давленіемъ, то она также есть одна изъ поверхностей уровня.

Покажемъ далѣе, что если двѣ разнородныя капельныя жидкости, находясь въ равновѣсіи, соприкасаются между собою, то поверхность ихъ раздѣла должна также быть поверхностью уровня.

Дѣйствительно, если обозначимъ плотность одной жидкости черезъ  $\rho$ , а другой черезъ  $\rho_1$ , то давленіе первой жидкости на какой-нибудь элементъ поверхности раздѣла  $d\sigma$  будетъ равно

$$pd\sigma = \rho U d\sigma + c d\sigma,$$

а давленіе второй жидкости на тотъ же элементъ:

$$p_1 d\sigma = \rho_1 U_1 d\sigma + c_1 d\sigma.$$

Очевидно, что при равновѣсіи давленія эти, будучи направлены въ противоположныя стороны, должны быть равны между собою, такъ что

$$\rho U + c = \rho_1 U_1 + c_1.$$

Такъ какъ значеніе силовой функціи для даннаго элемента зависитъ только отъ его положенія, то  $U = U_1$  и тогда мы изъ предыдущаго уравненія получимъ:

$$U = \frac{c_1 - c}{\rho - \rho_1}.$$

Какой бы мы элементъ поверхности ни взяли, мы получимъ, очевидно, то же самое значеніе для силовой функціи, откуда и слѣдуетъ, что поверхность раздѣла двухъ капельныхъ жидкостей есть поверхность уровня.

Если газообразная жидкость, подчиняющаяся закону Мариотта и Гей-Люссака, во всѣхъ точкахъ имѣетъ одинаковую температуру, то для нея будутъ справедливы всѣ тѣ выводы, которые мы получили для жидкостей капельныхъ. Дѣйствительно, изъ характеристическаго уравненія имѣемъ:

$$v = \frac{R(273^0 + t^0)}{p}.$$

Такъ какъ  $v = \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\rho g}$ , гдѣ  $g$  ускореніе тяжести, то

$$\rho = \frac{p}{gR(273^0 + t^0)} = kp \dots (6).$$

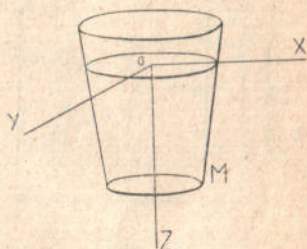
Очевидно, что при одной и той же температурѣ во всѣхъ точкахъ массы,  $k$  имѣетъ постоянное значеніе. Имѣя это въ виду, изъ уравненія (1) получимъ:

$$\frac{d \lg p}{k} = X dx + Y dy + Z dz \dots (7).$$



Такъ какъ первая часть этого уравненія есть полный дифференціалъ, то и вторая часть также должна быть полнымъ дифференціаломъ. Это условіе, какъ было показано, ведетъ къ заключенію, что силы, дѣйствующія на массу, должны имѣть силовую функцію. Отсюда легко сдѣлать и всѣ дальнѣйшія заключенія, къ которымъ мы пришли по отношенію къ капельнымъ жидкостямъ. Слѣдуетъ еще замѣтить, о въ разсматриваемомъ случаѣ поверхность уровня есть не только поверхность равнаго давленія, но, что легко видѣть изъ уравненія (6) есть въ то же время и поверхность равной плотности.

**6. Равновѣсіе капельной жидкости подѣ дѣйствіемъ силы тяжести.** Пусть капельная жидкость, помѣщенная въ сосудѣ *M* (фиг. 3), находится въ равновѣсіи подѣ дѣйствіемъ силы тяжести. Возьмемъ начало координатъ въ какой-нибудь точкѣ *o* свободной поверхности и направимъ ось *oz* вертикально внизъ, а оси *ox* и *oy* расположимъ какъ-нибудь въ горизонтальной плоскости, проходящей черезъ точку *o*. Сила тяжести, отнесенная къ единицѣ массы, даетъ по осямъ составляющія:



Фиг. 3.

$$X = 0, \quad Y = 0 \quad \text{и} \quad Z = g.$$

На основаніи этого уравненіе (1, § 3) приметъ слѣдующій видъ:

$$dp = gpdz = \Delta dz$$

откуда по интеграции находимъ:

$$p = \Delta z + c \dots (1).$$

Положимъ, что на свободной поверхности въ точкѣ *o* гидростатическое давленіе, равное гидростатическому давленію внѣшней среды, напримѣръ, давленію атмосферы, равно  $p_0$ , тогда

$$p = \Delta z + p_0 \dots (2).$$

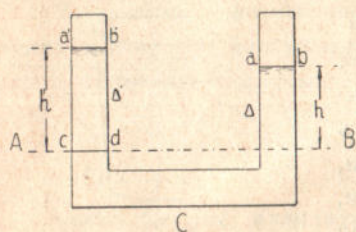
Отсюда мы видимъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ гидростатическое давленіе совершенно не зависитъ отъ размѣровъ и формы сосуда и что поверхности уровня будутъ представлять собою горизонтальныя плоскости, ибо придавая въ уравненіи (2)  $p$  постоянное значеніе, получимъ:

$$z = const.,$$



а это и есть уравненіе горизонтальной плоскости, такъ какъ мы расположили оси  $ox$  и  $oy$  въ горизонтальной плоскости. Очевидно, что и свободная поверхность, есть также горизонтальная плоскость, если только для всѣхъ ея точекъ  $p_0 = const$ . Замѣтимъ, что наши выводы справедливы до тѣхъ поръ, пока, вслѣдствіе незначительности размѣровъ сосуда, мы можемъ считать силу тяжести во всѣхъ точкахъ жидкости параллельной оси  $oz$ .

Положимъ, что двѣ разнородныя капельныя жидкости находятся въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ силы тяжести въ двухъ сообщающихся сосудахъ (фиг. 4). Болѣе тяжелая жидкость расположится при этомъ въ обоихъ сосудахъ и займетъ объемъ  $cdCab$ , а болѣе



Фиг. 4.

легкая—въ одномъ сосудѣ и займетъ объемъ  $cd a'b'$ . Предположимъ, что на свободную поверхность обѣихъ жидкостей дѣйствуетъ атмосферное давленіе. Обозначая въсь единицы объема болѣе тяжелой жидкости черезъ  $\Delta$  и болѣе легкой черезъ  $\Delta'$  и разстоянія ихъ свободныхъ поверхностей отъ поверхности соприкосновенія  $AB$ , которая на основаніи предыдущаго должна

быть горизонтальной плоскостью,—соотвѣтственно черезъ  $h$  и  $h'$ , легко найдемъ, что гидростатическое давленіе первой жидкости въ любой точкѣ плоскости раздѣла будетъ:

$$p = \Delta h + p_0,$$

а второй:

$$p_1 = \Delta' h' + p_0.$$

Такъ какъ при равновѣсіи давленія эти должны быть равны между собою, то отсюда имѣемъ:

$$\frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{h'}{h} \dots \dots (3),$$

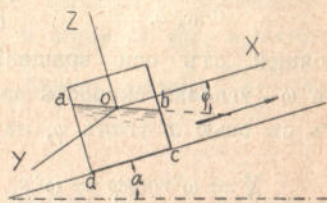
т. е. жидкости расположатся такъ, что высоты ихъ свободныхъ поверхностей надъ поверхностью раздѣла будутъ обратно пропорціональны ихъ плотностямъ.

**7. Относительное равновѣсіе капельной жидкости, находящейся подъ дѣйствіемъ силы тяжести.** Для того чтобы относительное равновѣсіе можно было разсматривать какъ абсолютное, какъ



извѣстно, надо къ дѣйствующимъ силамъ прибавить силы инерціи, соотвѣтствующія ускоренію переноснаго движенія. Такъ какъ при нашихъ изслѣдованіяхъ мы относили силы, дѣйствующія на массу, къ единицѣ массы, то при подсчетѣ  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  кромѣ составляющей ускоренія тяжести  $g$  по осямъ мы должны принимать во вниманіе составляющія ускоренія переноснаго движенія, взятаго съ обратнымъ знакомъ. Пояснимъ сказанное на примѣрахъ.

Примѣръ 1. Сосудъ, наполненный жидкостью, движется поступательно по наклонному направленію вверхъ равномѣрно ускореннымъ движеніемъ съ ускореніемъ  $j$  (фиг. 5). Допустимъ, что жидкость займетъ положеніе  $abcd$ . Возьмемъ начало прямоугольныхъ осей координатъ въ какой-нибудь точкѣ  $o$  на свободной поверхности, оси  $x$  дадимъ направленіе движенія, ось  $z$  направимъ перпендикулярно перемѣщенію въ вертикальной плоскости и ось  $y$  — горизонтально. Легко видѣть, что:



Фиг. 5.

$$X = -g \sin \alpha - j, \quad Y = 0 \quad \text{и} \quad Z = -g \cos \alpha$$

Такимъ образомъ, на основаніи уравненія (1, § 3), имѣемъ:

$$dp = -\rho(g \sin \alpha + j)dx - \rho g \cos \alpha dz,$$

откуда, предполагая, что на свободную поверхность давить атмосфера,

$$p = -\rho(g \sin \alpha + j)x - \rho g \cos \alpha z + p_0 \dots (1),$$

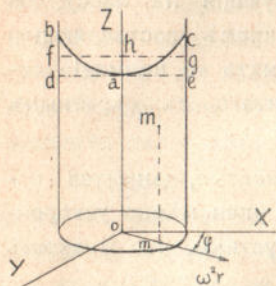
гдѣ  $p_0$  давленіе атмосферы на единицу площади.

Уравненіе (1) даетъ намъ законъ измѣненія давленія внутри жидкости. Давая  $p$  постоянныя значенія, мы получимъ рядъ поверхностей уровня. Очевидно, что поверхности уровня въ данномъ случаѣ представляютъ собою плоскости, параллельныя оси  $y$ , слѣдь которыхъ на плоскости  $zox$  образуетъ съ осью  $ox$  уголъ  $\varphi$ , опредѣляемый изъ соотношенія:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{g \sin \alpha + j}{g \cos \alpha} \dots (2).$$

Для опредѣленія положенія свободной поверхности надо знать форму и размѣры сосуда, а также и объемъ жидкости.

Примѣръ 2. Сосудъ съ жидкостью вращается равномерно около вертикальной оси (фиг. 6). Не дѣлая пока никакихъ предположеній относительно формы сосуда, возьмемъ начало координатъ въ какой-нибудь точкѣ  $o$  внутри сосуда на оси вращенія, ось  $oz$  направимъ вертикально вверхъ по оси вращенія, а оси  $ox$  и  $oy$  расположимъ въ горизонтальной плоскости. Принимая во вниманіе кромѣ силы тяжести силу инерціи переноснаго движенія, которая въ данномъ случаѣ есть не что иное, какъ сила центробѣжная, равная въ нѣкоторой точкѣ, отстоящей отъ оси вращенія на разстояніе  $r$ , на единицу массы  $\omega^2 r$ ,



Фиг. 6.

гдѣ  $\omega$ —угловая скорость вращенія сосуда, и предполагая, что  $r$  образуетъ съ осью  $x$  уголъ  $\varphi$ , найдемъ:

$$X = \omega^2 r \cos \varphi = \omega^2 x, \quad Y = \omega^2 r \sin \varphi = \omega^2 y \quad \text{и} \quad Z = -g,$$

гдѣ  $x$  и  $y$  координаты точки  $m$ .

Такимъ образомъ имѣемъ:

$$dp = \rho (\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz).$$

Откуда, по интеграціи находимъ:

$$p = \rho \omega^2 \frac{x^2 + y^2}{2} - g \rho z + c.$$

Предполагая, что точка пересѣченія свободной поверхности съ осью вращенія находится отъ начала координатъ  $o$  на разстояніи  $z_0$  и что на свободную поверхность давитъ атмосфера, давленіе которой на единицу площади равно  $p_0$ , имѣемъ:

$$p = \frac{\rho \omega^2}{2} (x^2 + y^2) + g \rho (z_0 - z) + p_0 \dots (3).$$

Это уравненіе даетъ намъ законъ распредѣленія давленія. Придавая  $p$  постоянныя значенія, мы получимъ рядъ поверхностей уровня, которыя въ данномъ случаѣ представляютъ собою, очевидно, параболоиды вращенія около оси  $oz$ . Полагая въ уравненіи (3)  $p = p_0$ , мы получимъ уравненіе свободной поверхности:

$$\frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) = g (z - z_0) \dots (4).$$



Предположимъ, что сосудъ представляетъ собою цилиндрическую трубку съ осью, совпадающей съ осью вращения, и опредѣлимъ разстояніе между вершиной параболоида *bac* и уровнемъ жидкости *fg*, который она имѣла до начала вращения. Для этого сравнимъ объемы *dfge* и *bdaec*, которые, въ виду несжимаемости жидкости, должны быть равны между собою. Обозначая длину *ha* черезъ  $\delta$  и радіусъ основанія трубки черезъ *r*, легко найдемъ:

$$\text{объемъ } (dfge) = \pi r^2 \delta . . . (5).$$

Чтобы найти выраженіе для второго объема, разобьемъ его цилиндрами, соосными съ трубкой, на безконечно большое число безконечно тонкихъ слоевъ. Объемъ одного такого слоя, имѣющаго основаніемъ кольцо съ среднимъ радіусомъ равнымъ *x*, и шириной *dx*, и высоту, какъ легко найти изъ уравненія (4),  $\frac{\omega^2}{2g} x^2$ , будетъ равенъ  $\frac{\pi x^3 \omega^2}{g} dx$ ; такимъ образомъ,

$$\text{объемъ } (bdaec) = \frac{\pi \omega^2}{g} \int_0^r x^3 dx = \frac{\pi \omega^2 r^4}{4g} . . . (6).$$

Сравнивая между собой выраженія (5) и (6), получимъ:

$$\delta = \frac{\omega^2 r^2}{4g} = \frac{\pi^2 n^2 r^2}{3600g} . . . (7),$$

гдѣ *n*—число оборотовъ трубки въ минуту.

Подсчитавъ для даннаго ряда значеній *n* рядъ значеній  $\delta$  и отмѣтивъ ихъ на внѣшней поверхности стеклянной трубки отъ уровня *fg* (фиг. 6), можно такой трубкой пользоваться какъ тахометромъ.

**8. Равновѣсіе газообразной жидкости, находящейся подъ дѣйствіемъ силы тяжести. Барометрическое нивелированіе.** Предполагая, что ось *z* направлена вертикально вверхъ, а оси *x* и *y* расположены въ какой-нибудь горизонтальной плоскости, и что температура всей массы газа имѣетъ постоянную величину, по уравненію (7, § 5) найдемъ:

$$lgr = -kgz + c . . . (1).$$

Полагая, что гидростатическое давленіе въ началѣ координатъ равно  $p_0$ , получимъ:

$$p = p_0 e^{-kgz} . . . (2),$$

гдѣ *e*—основаніе натуральныхъ логарифмовъ.

Изъ уравненій (1) и (2) видно, что поверхности уровня представляютъ собой въ данномъ случаѣ горизонтальныя плоскости.

Формулой (1) можно пользоваться для опредѣленія разности высотъ двухъ пунктовъ земной поверхности по показаніямъ въ нихъ барометра, т. е. для барометрическаго нивелированія. Обозначая высоту верхняго пункта надъ какимъ-нибудь уровнемъ черезъ  $z_2$ , а нижняго надъ тѣмъ же уровнемъ—черезъ  $z_1$ , и давленія въ нихъ соответственно черезъ  $p_2$  и  $p_1$ , изъ уравненія (1) найдемъ:

$$\lg \frac{p_2}{p_1} = kg(z_2 - z_1) \dots (3).$$

Имѣя въ виду, что уравненіе (1) выведено въ предположеніи постоянства температуры, мы должны при вычисленіи величины  $k$  по форм. (6, § 5) подразумѣвать подъ  $t^0$  среднюю арифметическую изъ показаній термометра въ обоихъ пунктахъ. Такъ какъ можно принять, что

$$k = \frac{1}{gR(273^0 + t^0)} = \frac{1}{287,4(273^0 + t^0)},$$

если давленіе выражается въ килограммахъ на квадратный метръ, и

такъ какъ  $\lg \frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{0,4343} \lg_{10} \frac{p_2}{p_1}$ , изъ уравненія (3) имѣемъ:

$$(z_2 - z_1) \text{ метр.} = 18399,2 \left( 1 + \frac{t^0}{273^0} \right) \lg_{10} \frac{p_2}{p_1} \dots (4).$$

Замѣтимъ при этомъ, что показанія барометра, по которымъ опредѣляются давленія  $p_2$  и  $p_1$ , должны быть приведены къ нулю градусовъ Цельсія. Если высота барометра въ верхнемъ пунктѣ будетъ  $h''$ , а въ нижнемъ  $h'$ , то тогда, очевидно,

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{h'' \Delta_2}{h' \Delta_1} \dots (5),$$

гдѣ  $\Delta_2$  и  $\Delta_1$  вѣса единицы объема ртути при температурѣ  $t^0_2$  и  $t^0_1$ , обозначая вѣсъ единицы объема ртути при нулѣ градусовъ черезъ  $\Delta_0$ , будемъ имѣть:

$$\Delta_2 = \Delta_0 (1 - \beta t^0_2) \text{ и}$$

$$\Delta_1 = \Delta_0 (1 - \beta t^0_1),$$

гдѣ  $\beta$  коэффициентъ кубическаго расширенія ртути при измѣненіи температуры ея на одинъ градусъ Цельсія, равный приблизительно  $\frac{1}{5509}$ .



Такимъ образомъ, изъ уравненія (5) найдемъ:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{h''(1 - \beta t_2^0)}{h'(1 - \beta t_1^0)} = \frac{h_2}{h_1}$$

Въ виду этого уравненіе (4) можетъ быть переписано въ такомъ видѣ:

$$(z_2 - z_1) \text{ метр.} = 18399,2 \left( 1 + \frac{t^0}{273^0} \right) \lg_{10} \frac{h_2}{h_1} \dots (6).$$

Формула эта примѣнима до тѣхъ поръ, пока разность высотъ будетъ ничтожна по сравненію съ радіусомъ земли; въ послѣднемъ случаѣ слѣдуетъ принять во вниманіе измѣненіе съ высотой ускоренія силы тяжести.

**9. Давленіе тяжелой капельной жидкости на плоскую стѣнку сосуда.** Давленіе на элементъ стѣнки  $df$ , центръ тяжести котораго находится на глубинѣ  $h_1$  подъ свободной поверхностью, равно, очевидно, (§ 6)

$$dP_1 = df (h_1 \Delta + p_0) \dots (1),$$

гдѣ  $p_0$ —давленіе атмосферы на единицу площади.

Равнодѣйствующая этого давленія и давленія атмосферы на внѣшнюю поверхность элемента будетъ:

$$dP_2 = df \Delta h_1 \dots (2).$$

Оба эти выраженія можно привести къ одному виду; дѣйствительно, полагая  $p_0 = \Delta h_0$ , гдѣ  $h_0$  есть не что иное, какъ высота столба жидкости, соотвѣтствующая атмосферному давленію (для воды  $h_0 = 10,33$  метр.), и полагая  $h_1 + h_0 = h$ , можно вообще написать:

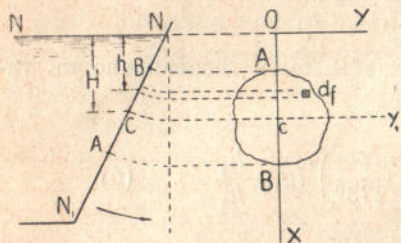
$$dP = df \Delta h \dots (3),$$

подразумѣвая въ первомъ случаѣ подъ  $h$  разстояніе центра тяжести элемента площади отъ, такъ называемой, приведенной поверхности, которую мы получимъ, откладывая отъ свободной поверхности высоту  $h_0$ ,—а во второмъ случаѣ—разстояніе центра тяжести элемента отъ свободной поверхности.

Переходя къ опредѣленію давленія на плоскую стѣнку конечныхъ размѣровъ, замѣтимъ, что это давленіе будетъ равно алгебраической суммѣ элементарныхъ давленій, ибо всѣ элементарныя давленія нормальны къ поверхности стѣнки и, слѣдовательно, представляютъ собою систему параллельныхъ силъ.



Положимъ, что мы ищемъ полное давленіе на часть  $AB$  (фиг. 7) плоской стѣнки  $N_1N$ , наклоненной къ горизонту подъ угломъ  $\alpha$ .  $NN$ — свободная или приведенная поверхность жидкости, смотря по тому, какое давленіе мы ищемъ. На основаніи сказаннаго выше



Фиг. 7.

т. е. давленіе на часть плоской стѣнки сосуда равно вѣсу столба жидкости, основаніемъ которому служитъ площадь разсматриваемой части стѣнки, а высотой разстояніе ея центра тяжести отъ свободной или приведенной поверхности жидкости. Иначе: давленіе на часть плоской стѣнки сосуда равно площади этой части, умноженной на гидростатическое давленіе въ ея центрѣ тяжести.

$$P = \Delta HF . . . (5),$$

т. е. давленіе на часть плоской стѣнки сосуда равно вѣсу столба жидкости, основаніемъ которому служитъ площадь разсматриваемой части стѣнки, а высотой разстояніе ея центра тяжести отъ свободной или приведенной поверхности жидкости. Иначе: давленіе на часть плоской стѣнки сосуда равно площади этой части, умноженной на гидростатическое давленіе въ ея центрѣ тяжести.

Но отсюда еще не слѣдуетъ, что давленіе  $P$  приложено въ центрѣ тяжести площади  $AB$ . Это будетъ такъ только въ случаѣ горизонтальной стѣнки, ибо въ этомъ случаѣ  $h$  (уравненіе 3) имѣетъ постоянное значеніе для всѣхъ элементовъ стѣнки и потому элементарныя давленія будутъ пропорціональны площадямъ соответствующихъ элементовъ.

Чтобы найти точку приложенія давленія  $P$ , которую называютъ обыкновенно центромъ давленія, въ случаѣ наклонной стѣнки, сравнимъ моментъ  $P$  съ суммой моментовъ элементарныхъ давленій. Отнесемъ площадь  $AB$  къ прямоугольнымъ осямъ координатъ ( $xoy$ ), причемъ выберемъ за ось  $y$  линію пересѣченія плоскости стѣнки съ плоскостью  $NN$ , а ось  $x$  направимъ по стѣнкѣ  $N_1N$ , перпендикулярно къ  $oy$ . Тогда, обозначая координаты центра тяжести элемента  $df$  черезъ  $x$  и  $y$ , координаты центра давленія черезъ  $x_0$  и  $y_0$  и координаты центра тяжести площади  $AB$  черезъ  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ , получимъ:

$$Px_0 = \Delta \int h dfx \text{ и } Py_0 = \Delta \int h dfy.$$

$$P = \Delta \int_{AB} h df . . . (4).$$

Отсюда, обозначая площадь  $AB$  черезъ  $F$  и глубину погруженія ея центра тяжести черезъ  $H$ , найдемъ:



Такъ какъ, очевидно, что

$$h = x \sin \alpha \text{ и } H = \bar{x} \sin \alpha,$$

то, имѣя въ виду уравненіе (5), найдемъ:

$$x_0 = \frac{\int dfx^2}{F_x} \dots (6) \text{ и } y_0 = \frac{\int dfxy}{F_x} \dots (7).$$

Разсмотримъ оба эти выраженія отдѣльно.

Числитель въ выраженіи (6) есть не что иное, какъ моментъ инерціи площади  $AB$  относительно оси  $oy$ , а знаменатель ея—статическій моментъ относительно той же оси, поэтому понятнымъ будетъ слѣдующее положеніе: координата  $x$  центра давленія равна моменту инерціи площади  $AB$  относительно линіи пересѣченія свободной или приведенной поверхности съ плоскостью стѣнки, дѣленному на статическій моментъ ея относительно той же прямой.

Выраженію (6) можно придать другой видъ. Обозначая моментъ инерціи площади  $AB$  относительно оси  $oy_1$  (фиг. 7), проведенной через ея центръ тяжести  $c$  параллельно  $oy$ , черезъ  $J$ , будемъ имѣть:

$$\int dfx^2 = J + F\bar{x}^2,$$

поэтому

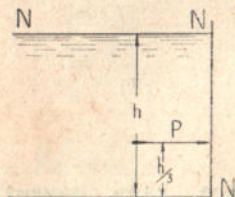
$$x_0 = \frac{J}{F_x} + \bar{x} \dots (8).$$

Отсюда видно, что центръ давленія всегда лежитъ ниже центра тяжести, ибо  $J$  и  $F\bar{x}$  величины положительныя.

Обратимся теперь къ выраженію (7). Числитель этого выраженія представляетъ собою центробѣжный моментъ инерціи, который, какъ извѣстно, обращается въ нуль, если  $ox$  и  $oy$  будутъ главными осями эллипса инерціи площади  $AB$  относительно начала координатъ. Если, слѣдовательно, начало координатъ будетъ выбрано такъ, что оси  $ox$  и  $oy$  будутъ главными осями эллипса инерціи площади  $AB$ , построеннаго для него, то центръ давленія будетъ лежать на оси  $ox$ . Такимъ образомъ, на примѣръ, центръ давленія будетъ находиться на оси симметріи площади  $AB$ , параллельной оси  $ox$ , если только площадь  $AB$  имѣетъ таковую.



Разсмотримъ одинъ примѣръ, которымъ мы воспользуемся въ дальнѣйшемъ изложеніи. Найдемъ давленіе на всю вертикальную стѣнку  $NN_1$  (фиг. 8) и точку его приложенія, предполагая, что стѣнка эта имѣетъ форму прямоугольника.



Фиг. 8.

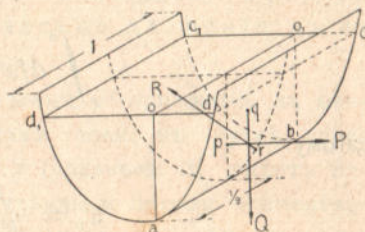
Обозначая высоту прямоугольника  $NN_1$  черезъ  $h$  и полагая, что ширина его равна единицѣ, по формулѣ (5) найдемъ, что давленіе будетъ:

$$P = \frac{\Delta h^2}{2} \dots (9)$$

Что касается центра давленія, то, очевидно, онъ находится по серединѣ ширины стѣнки, на разстояніи отъ  $N$ , равномъ (форм. 8)

$$x_0 = \frac{2h^3h}{12h^2} + \frac{h}{2} = \frac{2}{3}h \dots (10)$$

**10. Давленіе тяжелой капельной жидкости на стѣнку цилиндрическаго сосуда съ горизонтальной образующей.** Найдемъ давленіе на стѣнку цилиндрическаго сосуда  $cc_1d_1dab$  (фиг. 9), съ горизонтальной осью, наполненнаго жидкостью до уровня  $dd_1c_1c$ . Въ данномъ случаѣ давленія на отдѣльные безконечно малые элементы не параллельны между собою, поэтому ихъ равнодѣйствующая не будетъ уже равна алгебраической суммѣ ихъ, какъ въ предыдущемъ случаѣ.



Фиг. 9.

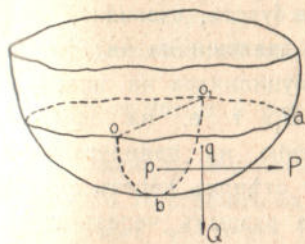
Въ виду этого каждое изъ элементарныхъ давленій нужно разложить на двѣ составляющихъ по двумъ какимъ-нибудь опредѣленнымъ направлѣніямъ и просуммировать эти составляющія отдѣльно. Удобнѣе всего для этой цѣли взять направлѣнія горизонтальное и вертикальное. Очевидно, что искомое давленіе будетъ равно и по величинѣ, и по направлѣнію діагонали параллелограмма, построеннаго на результирующихъ элементарныхъ давленій по двумъ направлѣніямъ.

Не останавливаясь на этой задачѣ въ общемъ ея видѣ, ограничимся тѣмъ случаемъ, когда требуется найти давленіе на часть стѣнки  $dcb_a$ , гдѣ  $dc$  есть линія пересѣченія ея съ свободной поверхностью и  $ab$  какая-нибудь образующая. Въ этомъ случаѣ задача разрѣшается гораздо проще. Дѣйствительно, разрѣжемъ мысленно жидкость верти-



нальной плоскостью  $abo_1o$  и рассмотримъ силы, дѣйствующія на объемъ  $dcbo_1oad$ . Принимая во вниманіе, что на внѣшнюю поверхность стѣнки и на свободную поверхность жидкости дѣйствуетъ атмосферное давленіе, легко сообразить, что на разсматриваемый объемъ жидкости будутъ дѣйствовать слѣдующія силы: 1) вѣсъ жидкости  $Q$ , приложенный въ центрѣ тяжести объема  $q$ , 2) давленіе  $P$  со стороны объема  $oo_1bad_1c_1$  на прямоугольникъ  $abo_1o$ , равное по величинѣ, какъ мы видѣли въ предыдущемъ параграфѣ,  $\Delta \frac{oa^2}{2}$  и приложенное въ точкѣ  $p$ , лежащей по срединѣ ширины на разстояніи  $\frac{oa}{3}$  по вертикали отъ  $ab$ , и 3) реакція стѣнки  $R$ , которая равна и прямо противоположна искомому давленію жидкости на стѣнку. Такъ какъ всѣ эти силы находятся въ равновѣсіи, то, очевидно, что искомое давленіе равно по величинѣ и направленію діагонали прямоугольника, построеннаго на  $P$  и  $Q$ .

Подобнымъ же образомъ можно найти давленіе на часть стѣнки  $oo_1ab$  сосуда и болѣе сложной формы (фиг. 10), причеиъ центръ давленія на вертикальное сѣченіе жидкости  $oo_1b$  можетъ быть во всякомъ данномъ случаѣ найденъ по уравненіямъ (6 и 7, § 9). Замѣтимъ только, что силы  $P$  и  $Q$  въ этомъ случаѣ, вообще говоря, не лежатъ уже въ одной плоскости, какъ это имѣетъ мѣсто въ предыдущемъ случаѣ, а потому здѣсь кромѣ равнодѣйствующаго давленія можетъ получиться и пара.



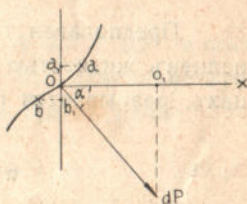
Фиг. 10.

**II. Давленіе на криволинейную стѣнку по данному направленію.** Положимъ, что намъ требуется найти давленіе на элементъ  $ab$  (фиг. 11) какой-нибудь криволинейной стѣнки по направленію  $ox$ . Обозначая гидростатическое давленіе въ центрѣ тяжести  $o$  элемента черезъ  $p$  и площадь его—черезъ  $df$ , найдемъ, что давленіе на весь элементъ, имѣющее направленіе внѣшней нормали въ его центрѣ тяжести, будетъ равно:

$$dP = p df . . . . . (1).$$

Обозначая уголь между направленіемъ  $dP$  и  $ox$  черезъ  $\alpha$ , найдемъ составляющую  $dP$  по  $ox$ , именно:

$$dP_x = dP \cos \alpha = p df \cos \alpha . . . . . (2).$$



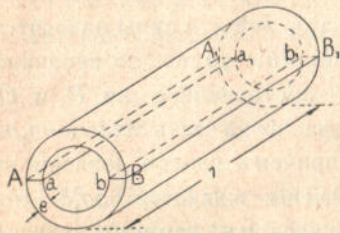
Фиг. 11.



Легко видѣть, что произведение  $df \cos \alpha$  есть не что иное, какъ проекція элемента  $ab$  на плоскость, перпендикулярную къ  $ox$ , поэтому уравненіе (2) можно выразить слѣдующимъ образомъ: давленіе на элементъ стѣнки по данному направленію равно давленію на проекцію элемента на плоскость, перпендикулярную къ данному направленію.

Этимъ простымъ положеніемъ очень часто пользуются для расчета тонкостѣнныхъ сосудовъ, наполненныхъ подъ давленіемъ капельными, газообразными или парообразными жидкостями.

Найдемъ толщину стѣнокъ цилиндрическаго сосуда съ внутреннимъ діаметромъ  $d$ , наполненнаго жидкостью подъ давленіемъ  $p$  (фиг. 12).



Фиг. 12.

Разсмотримъ отрѣзокъ сосуда, заключенный между двумя плоскостями, перпендикулярными къ его оси, длиной равной единицѣ и предположимъ, что подъ дѣйствіемъ давленія онъ разрывается по діаметральной плоскости  $ABA_1B_1$ . Разрывающее усиліе будетъ, очевидно, равно суммѣ проекцій давленій на внутреннюю

поверхность полуцилиндра на направленіе, перпендикулярное къ плоскости  $ABA_1B_1$ , т. е. на основаніи выведеннаго положенія будетъ равно давленію на прямоугольникъ  $aba_1b_1$ . Такимъ образомъ, обозначая толщину стѣнокъ черезъ  $e$  и допускаемое напряженіе на единицу площади на разрывѣ черезъ  $z$ , будемъ имѣть:

$$2ez = dp \dots \dots (3),$$

откуда

$$e = \frac{dp}{2z} \dots \dots (4).$$

Предполагая теперь, что сосудъ, который, понятно, разъ онъ наполненъ жидкостью подъ давленіемъ, долженъ быть закрытъ на концахъ, разрывается по плоскости, нормальной къ оси, найдемъ:

$$\pi(d + e)ez = \frac{\pi d^2}{4} p \dots \dots (5),$$

откуда, пренебрегая въ скобкахъ величиной  $e$ , имѣемъ:

$$e = \frac{pd}{4z} \dots \dots (6).$$





Примѣняя подобное же разсужденіе ко всякому другому элементу поверхности тѣла  $A$  и ко всякому другому горизонтальному направленію, мы придемъ къ заключенію, что составляющая равнодѣйствующаго давленія жидкости на погруженное въ нее тѣло по горизонтальному направленію равна нулю и что, слѣдовательно, равнодѣйствующая эта, если только она не равна нулю, имѣетъ вертикальное направленіе.

Построимъ теперь на элементѣ  $d\sigma$  (фиг. 13) цилиндръ съ вертикальной осью и допустимъ, что этотъ цилиндръ вырѣжетъ на поверхности нижней части тѣла  $A$  элементъ съ площадью  $d\sigma_1$  и съ центромъ тяжести въ  $o_1$ . Обозначая глубину погруженія точки  $o_1$  подъ свободной поверхностью черезъ  $h_1$ , легко найдемъ, что давленіе на всю площадь элемента  $d\sigma_1$  будетъ:

$$dP_1 = d\sigma_1 (\Delta h_1 + p_0) \dots (5).$$

Спроектируемъ давленія  $dP$  и  $dP_1$  на вертикальное направленіе и найдемъ ихъ равнодѣйствующую. Обозначая углы между направленіями этихъ давленій и вертикальной линіей соотвѣтственно черезъ  $\beta$  и  $\beta_1$  и считая направленіе снизу вверхъ за положительное направленіе, найдемъ, что искомая равнодѣйствующая будетъ:

$$dR = dP_1 \cos \beta_1 - dP \cos \beta = d\sigma_1 (\Delta h_1 + p_0) \cos \beta_1 - d\sigma (\Delta h + p_0) \cos \beta \dots (6).$$

Такъ какъ

$$d\sigma_1 \cos \beta_1 = d\sigma \cos \beta = ds \dots (7),$$

гдѣ  $ds$  есть нормальное сѣченіе цилиндра  $oo_1$ , то

$$dR = ds \Delta (h_1 - h) \dots (8).$$

Очевидно, что произведеніе  $ds (h_1 - h)$  есть не что иное, какъ объемъ цилиндра  $oo_1$ . Обозначая этотъ бесконечно малый объемъ черезъ  $dv$ , будемъ имѣть, что

$$dR = \Delta dv \dots (9)$$

и направлено снизу вверхъ.

Разбивая все тѣло  $A$  на бесконечно большое число такихъ тонкихъ призмъ съ вертикальной осью и примѣняя ко всѣмъ имъ подобное же разсужденіе, мы найдемъ, что полное давленіе жидкости на тѣло  $A$  будетъ направлено по вертикали снизу вверхъ и будетъ имѣть величину:

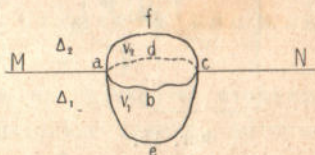


$$R = \Delta v . . . . . (10),$$

т. е. давленіе тяжелой капельной жидкости на погруженное въ нее тѣло направлено по вертикальному направленію вверхъ и равно вѣсу жидкости въ объемѣ погруженнаго тѣла. Это и есть законъ Архимеда.

Замѣтимъ, кромѣ того, что равнодѣйствующее давленіе  $R$  проходитъ черезъ центръ тяжести объема тѣла  $A$ ; это слѣдуетъ изъ того, что составляющія давленія пропорціональны объемамъ элементарныхъ цилиндровъ, на которые мы разбили объемъ тѣла  $A$ . Если тѣло  $A$  однородно, то тогда центръ тяжести его объема совпадаетъ съ его центромъ тяжести, въ противномъ случаѣ, это будутъ двѣ различныя точки.

Законъ Архимеда примѣняется и къ неполнѣ погруженнымъ въ жидкость тѣламъ, но при этомъ необходимо имѣть въ виду то предположеніе, которое было сдѣлано нами при его выводѣ, что давленіе на элементъ поверхности погруженнаго объема, находящагося ниже свободной поверхности на глубинѣ  $h$ , должно быть равно  $dP$  (уравненіе 1). Если это предположеніе оправдывается, законъ Архимеда можетъ быть примѣненъ; въ противномъ случаѣ его примѣненіе должно привести къ неправильнымъ заключеніямъ. Пояснимъ это на примѣрахъ. На погруженное тѣло дѣйствуютъ двѣ силы: вѣсъ его  $G$  и давленіе жидкости  $R$ . Если  $R < G$ , то тѣло тонетъ, если же  $R > G$ , то тѣло всплываетъ и плаваетъ на поверхности (фиг. 14), будучи только отчасти погружено въ жидкость. Очевидно, что тѣло будетъ всплывать до тѣхъ поръ, пока давленіе жидкости не станетъ равно его вѣсу. Спрашивается, будетъ ли давленіе жидкости равно вѣсу ея въ объемѣ  $abcde$ , если  $abcd$  есть контуръ, по которому тѣло пересѣкается плоскостью  $MN$ ? Разсмотримъ сначала тотъ случай, когда на поверхность  $MN$  давитъ атмосфера. При этомъ, пренебрегая разностью давленія атмосферы въ различныхъ точкахъ поверхности  $abcdf$ , на основаніи изложеннаго въ § 11 мы легко найдемъ, что вертикальная проекція атмосфернаго давленія на поверхность  $abcdf$  равна давленію на площадь  $abcd$ . Такъ какъ эта послѣдняя расположена на свободной поверхности, то, слѣдовательно, давленія на поверхности погруженнаго объема  $abcde$  удовлетворяютъ уравненію (1). Такимъ образомъ очевидно, что въ данномъ случаѣ законъ Архимеда можетъ быть примѣненъ въ полномъ объемѣ.



Фиг. 14.



Предположимъ теперь, что  $MN$  есть плоскость, раздѣляющая двѣ жидкости разной плотности. Очевидно, что равновѣсіе тѣла не нарушится, если мы приложимъ къ плоскости  $abcd$  двѣ силы: одну по вертикали вверхъ, а другую—внизъ, равныя каждая въ отдѣльности площади  $abcd$ , умноженной на гидростатическое давленіе, соответствующее плоскости  $MN$ .

Если это такъ, то, слѣдовательно, законъ Архимеда можетъ быть примѣненъ здѣсь отдѣльно къ каждой изъ двухъ частей тѣла, на которыя оно раздѣляется сѣченіемъ  $abcd$ , ибо каждая изъ приложенныхъ къ этому сѣченію силъ удовлетворяетъ уравненію (1). Обозначая вѣсъ единицы объема расположенной снизу жидкости черезъ  $\Delta_1$  (фиг. 14), расположенной сверху черезъ  $\Delta_2$  и соответственные объемы частей тѣла—черезъ  $v_1$  и  $v_2$ , мы легко найдемъ давленія и той, и другой жидкости и ихъ равнодѣйствующую:

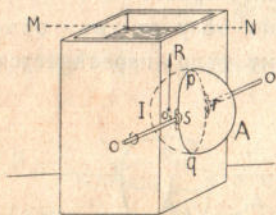
$$R_1 = \Delta_1 v_1 \dots (11), R_2 = \Delta_2 v_2 \dots (12) \text{ и } R = R_1 + R_2 = \Delta_1 v_1 + \Delta_2 v_2 \dots (13).$$

Легко будетъ также найти точку приложенія давленія  $R$ , какъ точку приложенія равнодѣйствующей двухъ параллельныхъ силъ  $R_1$  и  $R_2$ , приложенныхъ въ центрахъ тяжести соответствующихъ объемовъ  $v_1$  и  $v_2$ . Но надо замѣтить, что силы  $R_1$  и  $R_2$ —силы фиктивныя.

Допустимъ, что въ стѣнкѣ сосуда, наполненнаго тяжелой капельной жидкостью до уровня  $MN$  (фиг. 15), сдѣлано отверстіе, къ которому пригнанъ шаръ  $A$ , насаженный на горизонтальную ось  $oo$ . Если мы примѣнимъ къ погруженному въ жидкость полушару  $I$  законъ Архимеда, т. е. допустимъ, что давленіе на него  $R$  равно вѣсу полушара жидкости, приложено въ центрѣ тяжести  $o_1$  его объема и направлено вертикально вверхъ, то придемъ къ совершенно нелѣпому результату, что шаръ безъ затраты энергіи будетъ вращаться около оси  $oo$  по направленію стрѣлки часовъ, а это есть не что иное, какъ *regretium mobile*.

Очевидно, что законъ Архимеда здѣсь не примѣнимъ, такъ какъ давленіе на сѣченіе шара  $prqs$  стѣнкой сосуда равно атмосферному давленію и не удовлетворяетъ, слѣдовательно, уравненію (1). Давленіе на полушаріе  $I$  сведется здѣсь къ нѣкоторой равнодѣйствующей, проходящей черезъ его центръ.

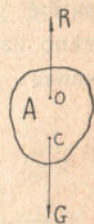
**13. Равновѣсіе погруженныхъ тѣлъ.** Къ погруженному въ тяжелую капельную жидкость тѣлу, какъ мы видѣли, приложены двѣ



Фиг. 15.



силы: 1) вѣсъ его  $G$ , приложенный въ центрѣ его тяжести  $c$  (фиг. 16) и 2) давленіе жидкости, равное вѣсу жидкости въ объемѣ тѣла, приложенное въ центрѣ тяжести объема тѣла  $o$ . Для равновѣсія необходимо, во-первыхъ, чтобы обѣ эти силы были равны между собою и во-вторыхъ, чтобы точки  $c$  и  $o$  были расположены на одной вертикали, ибо въ противномъ случаѣ получится пара, которая будетъ вращать тѣло. Если при этомъ центръ тяжести тѣла будетъ лежать ниже центра тяжести его объема, который часто называютъ центромъ водоизмѣщенія,—то равновѣсіе будетъ устойчивымъ, ибо при поворотѣ тѣла  $A$  на безконечно малый уголъ, силы  $R$  и  $G$  дадутъ пару, стремящуюся вернуть его въ прежнее положеніе. Въ противоположномъ случаѣ равновѣсіе будетъ неустойчивымъ.



Фиг. 16.

**14. Равновѣсіе плавающихъ тѣлъ.** Въ случаѣ плавающихъ тѣлъ равновѣсіе возможно, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, только при равенствѣ силъ тяжести и давленія и при расположеніи точекъ ихъ приложенія на одной вертикальной прямой. Въ то время какъ въ предыдущемъ случаѣ возможны два положенія равновѣсія, въ данномъ случаѣ такихъ положеній можетъ быть нѣсколько. Дѣйствительно, если обозначимъ средній вѣсъ единицы объема плавающего тѣла черезъ  $\delta$ , его объемъ черезъ  $V$ , вѣсъ единицы объема жидкости черезъ  $\Delta$  и объемъ погруженной части тѣла черезъ  $v$ , то легко найдемъ:

$$v = V \frac{\delta}{\Delta} \dots (1),$$

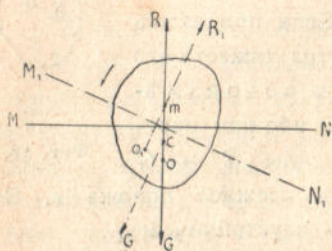
т. е. объемъ погруженной части плавающего тѣла есть величина постоянная при всѣхъ положеніяхъ равновѣсія, равная его полному объему, умноженному на его средній удѣльный вѣсъ относительно жидкости, въ которой оно плаваетъ.

Очевидно, что среди безконечнаго множества плоскостей, отсѣкающихъ отъ тѣла объемъ  $v$ , можетъ быть нѣсколько такихъ, которыя будутъ перпендикулярны къ прямой, соединяющей центръ тяжести и центръ водоизмѣщенія. Эти плоскости и будутъ соответствовать положеніямъ равновѣсія тѣла, одни изъ которыхъ будутъ устойчивы, другія неустойчивы.

Условіе устойчивости равновѣсія, выведенное для предыдущаго случая, т. е. чтобы центръ тяжести лежалъ ниже центра водоизмѣщенія, будетъ въ данномъ случаѣ условіемъ достаточнымъ, но не необходимымъ. Это значитъ, что если это условіе имѣетъ мѣсто,



то плавающее тѣло будетъ непременно находиться въ устойчивомъ равновѣсіи, но въ то же время тѣло можетъ находиться въ устойчивомъ равновѣсіи, если это условіе и не выполнено. Чтобы вывести необходимое условіе устойчиваго равновѣсія, положимъ, что мы повернули тѣло изъ его положенія равновѣсія на малый уголъ противъ стрѣлки часовъ въ плоскости фигуры (фиг. 17).

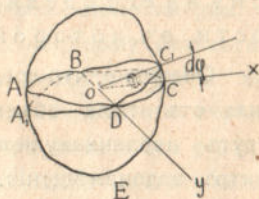


Фиг. 17.

Для удобства изображенія положимъ, что тѣло остается въ покоѣ, а поверхность жидкости повернулась относительно его въ обратную сторону изъ положенія  $MN$  въ положеніе  $M_1N_1$ . Допустимъ пока, что новый центръ водоизмѣщенія  $O_1$  будетъ находиться въ одной плоскости съ  $c$  и  $o$ , параллельной плоскости вращения. Въ такомъ случаѣ давленія  $R$  и  $R_1$  будутъ пересѣкаться между собою въ некоторой точкѣ  $m$ , называемой метацентромъ. Очевидно, что если метацентръ лежитъ выше центра тяжести, то положеніе равновѣсія устойчиво, ибо въ такомъ случаѣ  $R_1$  и  $G$  образуютъ пару, которая стремится повернуть тѣло обратно въ начальное положеніе. Если метацентръ будетъ лежать ниже центра тяжести, то тогда пара  $(R_1, G)$  будетъ стремиться удалить тѣло отъ положенія равновѣсія.

Такимъ образомъ мы видимъ, что вопросъ объ устойчивости равновѣсія рѣшается при помощи опредѣленія положенія метацентра. Прежде чѣмъ перейти къ опредѣленію положенія метацентра, докажемъ слѣдующую теорему, открытую Дюпеномъ: плоскость плаванія пересѣкается съ бесконечно близкой къ ней плоскостью, отсѣкающей отъ тѣла тотъ же объемъ (плоскостью сѣченія), по прямой, проходящей черезъ центръ тяжести фигуры, по которой тѣло пересѣкается плоскостью плаванія.

Пусть тѣло пересѣкается плоскостью плаванія по фигурѣ  $ABCD$  (фиг. 18). Проведемъ плоскость, наклоненную къ ней подъ бесконечно малымъ угломъ  $d\varphi$  и отсѣкающую отъ тѣла объемъ  $A_1DC_1BE$ , равный объему  $ABCDE$ . Очевидно, что въ силу равенства этихъ объемовъ объемы клиньевъ  $AA_1BD$  и  $CC_1DB$  будутъ также равны между собою. Выразимъ это аналитически. Вообразимъ въ плоскости  $ABCD$  прямоугольныя оси координатъ, начало которыхъ возьмемъ гдѣ-нибудь



Фиг. 18.



въ точкѣ  $o$  на прямой  $BD$  и по этой же прямой направимъ ось  $y$ ; тогда объемъ клина  $CC_1DB$  можно разбить на элементарныя призмы въ основаніемъ на плоскости  $ABCD$ , равнымъ  $d\sigma$ , и высотой  $x d\varphi$ . Такимъ образомъ имѣемъ:

$$\begin{aligned} \text{Объемъ } (CC_1DB) &= \int_{BCD} x d\sigma d\varphi = \text{объему } (AA_1DB) = - \\ &= \int_{ABD} x d\sigma d\varphi \end{aligned}$$

гдѣ первый интегралъ распространяется на площадь  $BCD$ , а второй — на площадь  $ABD$ . Такъ какъ  $d\varphi$  есть величина постоянная, то мы получимъ:

$$\int_{BCD} x d\sigma = - \int_{ABD} x d\sigma$$

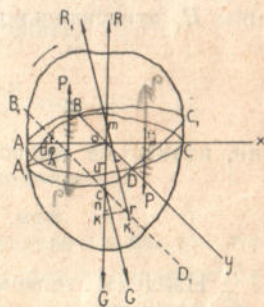
или

$$\int_{ABCD} x d\sigma = 0,$$

откуда слѣдуетъ, что линия пересѣченія плоскостей  $ABCD$  и  $A_1BC_1D$  проходить черезъ центръ тяжести фигуры  $ABDC$ , что и требовалось доказать.

Будемъ опредѣлять теперь положеніе метацентра. Вообразимъ, что  $ABCD$  (фиг. 19) есть плоскость плаванія,  $c$ —центръ тяжести тѣла и  $k$ —центръ водоизмѣщенія.

Повернемъ тѣло по стрѣлкѣ часовъ на безконечно малый уголъ  $d\varphi$  и допустимъ при этомъ, что поверхность жидкости пересѣчетъ его по фигурѣ  $A_1BC_1D$ , которая по предыдущему будетъ пересѣкаться съ фигурой  $ABCD$  по прямой  $BD$ , проходящей черезъ ея центръ тяжести,—и что новый центръ водоизмѣщенія  $k_1$  будетъ находиться въ той же плоскости, перпендикулярной оси вращенія, въ которой находятся  $c$  и  $k$ . (На фигурѣ изображено такъ, какъ будто бы жидкость повернулась противъ стрѣлки часовъ, а тѣло осталось въ покоѣ). Въ новомъ положеніи тѣло будетъ находиться подъ дѣйствіемъ пары  $(R_1G)$ , которая въ нашемъ случаѣ будетъ стремиться повернуть тѣло въ начальное поло-



Фиг. 19.



женіе около оси, проходящей черезъ его центръ тяжести и параллельной  $BD$ . Замѣтимъ, что собственно тѣло вращается не около оси  $BD$ , а около оси  $B'D'$ , ей параллельной и проходящей черезъ центръ тяжести тѣла, и что кромѣ вращательнаго движенія тѣло будетъ совершать при этомъ и поступательное движеніе, ибо его центръ тяжести не можетъ при вращеніи въ жидкости съ сохраненіемъ постояннаго погруженнаго объема оставаться въ покоѣ. Но такъ какъ насъ интересуетъ только вращеніе около оси  $BD$ , то мы можемъ замѣнить вращеніе около оси  $B'D'$  вращеніемъ около оси  $BD$ , прибавляя соответствующее поступательное движеніе, а затѣмъ совершенно поступательныхъ движеній не разсматривать. Чтобы найти положеніе метацентра  $m$ , разстояніе котораго отъ ц. т. тѣла  $c$  мы обозначимъ черезъ  $u$ , считая его положительнымъ, когда  $m$  выше  $c$  и отрицательнымъ въ обратномъ случаѣ,—прибѣгнемъ къ искусственному приему. Новое положеніе тѣла отличается отъ стараго тѣмъ, что клинъ  $AA_1BD$  вышелъ изъ жидкости и сталъ какъ бы тяжелѣе на вѣсъ жидкости въ его объемѣ, а клинъ  $CC_1BD$ , погрузившись въ жидкость, сталъ какъ бы легче на ту же величину. Обозначая эти двѣ равныя и противоположно направленныя силы черезъ  $p$ , мы можемъ разсматривать  $R_1$  какъ равнодѣйствующую силъ  $R$ ,  $p$  и  $p$ . Такимъ образомъ, имѣя въ виду, что моментъ равнодѣйствующей относительно всякой оси равенъ суммѣ моментовъ слагающихъ, мы найдемъ, что моментъ  $R_1$  относительно оси, проходящей черезъ  $k$  и параллельной  $BD$ , равенъ моменту пары  $(p, p)$  относительно оси  $BD$ .

Обозначая объемъ погруженной части тѣла черезъ  $v$ , вѣсъ единицы объема жидкости черезъ  $\Delta$  и разстояніе  $k$  отъ  $c$  черезъ  $n$ , считая его положительнымъ, когда  $k$  ниже  $c$ , мы можемъ придать моменту силы  $R_1$  относительно указанной оси слѣдующее выраженіе:

$$\text{мом. } (R_1) = \Delta v (u + n) \sin d\varphi$$

или, вслѣдствіе малости угла  $d\varphi$ ,

$$\text{мом. } (R_1) = \Delta v (u + n) d\varphi \dots (1).$$

Найдемъ теперь выраженіе для момента пары  $(p, p)$ . Отнесемъ фигуру  $ABCD$  къ прямоугольнымъ осямъ координатъ съ началомъ на прямой  $BD$  и съ осью  $y$ , направленной по этой прямой, и разобъемъ объемы клиньевъ на элементарныя призмы съ основаніемъ  $d\sigma$  въ плоскости  $ABCD$  и высотой  $x d\varphi$ . Вѣсъ жидкости въ объемѣ такой призмы будетъ равенъ  $\Delta d\sigma x d\varphi$  и моментъ этого вѣса относительно оси  $y$ —



$\Delta d\sigma x^2 d\varphi$ . Такимъ образомъ, моментъ пары  $(p, p)$  выразится слѣдующимъ образомъ:

$$\text{мом. пары } (p, p) = \int_{ABCD} \Delta d\sigma x^2 d\varphi = \Delta d\varphi \int_{ABCD} d\sigma x^2 \dots (2),$$

ибо  $\Delta$  и  $d\varphi$ —величины постоянныя.

Сравнивая выраженія (1) и (2), найдемъ:

$$v(u + n) = \int_{ABCD} d\sigma x^2 \dots (3).$$

Очевидно, что стоящій во второй части уравненія (3) интеграль представляет собою не что иное, какъ моментъ инерціи фигуры  $ABCD$  относительно оси  $BD$ , т. е. оси проходящей черезъ ея центръ тяжести и перпендикулярной къ плоскости вращенія. Обозначая этотъ моментъ инерціи черезъ  $J$ , имѣемъ:

$$u = \frac{J}{v} - n \dots (4).$$

Отсюда видно, что если  $n$  имѣетъ отрицательное значеніе, т. е. если центръ тяжести тѣла лежитъ ниже центра водоизмѣщенія,  $u$  будетъ имѣть положительное значеніе и, слѣдовательно, положеніе равновѣсія будетъ устойчивымъ. Если же  $n$  имѣетъ положительное значеніе, то могутъ быть три слѣдующихъ случая:

$$\frac{J}{v} > n, \quad u > 0 \text{—положеніе равновѣсія устойчивое,}$$

$$\frac{J}{v} = n, \quad u = 0 \text{—положеніе равновѣсія безразличное и}$$

$$\frac{J}{v} < n, \quad u < 0 \text{—положеніе равновѣсія неустойчивое.}$$

Мы предполагали до сихъ поръ, что  $k_1$  находится въ той же плоскости, перпендикулярной оси вращенія, въ которой располагаются  $k$  и  $s$ ; посмотримъ, когда это имѣетъ мѣсто въ дѣйствительности. Допустимъ, что ось  $x$  лежитъ въ одной плоскости съ  $k$  и  $s$  и что новый центръ водоизмѣщенія  $k_1$  будетъ отстоять отъ этой плоскости на величину  $\xi$ . Приравнивая моментъ  $R_1$  относительно оси  $x$  моменту пары  $(p, p)$  относительно той же оси, получимъ:



$$R_1 \xi = \int_{ABCD} \Delta d\varphi xy d\sigma = \Delta d\varphi \int_{ABCD} d\sigma xy \dots (5).$$

Интеграль во второй части этого равенства есть центробѣжный моментъ инерціи фигуры  $ABCD$ . Какъ извѣстно, онъ обращается въ нуль въ томъ случаѣ, если оси  $ox$  и  $oy$  суть главныя оси эллипса инерціи относительно точки  $o$ . Въ томъ случаѣ, когда фигура  $ABCD$  будетъ представлять собою окружность или квадратъ, эллипсъ инерціи обращается въ окружность и потому  $k_1$  всегда будетъ лежать въ одной плоскости, перпендикулярной оси вращенія, съ  $k$  и  $c$ .

Такимъ образомъ, малыя вращенія плавающего тѣла около какой-нибудь оси, проходящей черезъ его центръ тяжести имѣютъ слѣдствіемъ появленіе момента силъ, стремящагося вращать тѣло не только около этой оси, но также и около оси ей перпендикулярной, такъ что тѣло будетъ колебаться сразу около двухъ осей, если его вывести изъ положенія равновѣсія и предоставить самому себѣ.

Вопросъ о равновѣсіи плавающего тѣла, слѣдовательно, сводится въ общемъ случаѣ къ составленію двухъ уравненій (4) для двухъ главныхъ осей центрального эллипса инерціи фигуры  $ABCD$ , ибо, если прямая  $BD$  составляетъ съ одной изъ главныхъ осей уголъ  $\alpha$ , вращеніе около нея на уголъ  $d\varphi$  можно разложить на два вращенія на углы  $d\varphi \cos \alpha$  и  $d\varphi \sin \alpha$  около двухъ главныхъ осей. Если равновѣсіе окажется устойчивымъ относительно той изъ главныхъ осей, для которой  $J$  имѣетъ наименьшее значеніе, то оно будетъ устойчивымъ для всякой оси, проходящей черезъ центръ тяжести фигуры  $ABCD$ ; если оно будетъ неустойчивымъ для обѣихъ главныхъ осей, то будетъ неустойчивымъ и для всякой другой оси; если, наконецъ, равновѣсіе будетъ неустойчивымъ для одной изъ главныхъ осей и устойчивымъ для другой, то оно будетъ устойчивымъ только для осей, составляющихъ съ послѣдней безконечно малый уголъ.

**15. Малыя колебанія плавающего тѣла около положенія устойчиваго равновѣсія.** Мы говорили выше, что если мы выведемъ плавающее тѣло изъ положенія устойчиваго равновѣсія, то оно будетъ совершать вращательное движеніе около оси, проходящей черезъ его центръ тяжести, перпендикулярной плоскости вращенія, и совершать поступательное движеніе, ибо его центръ тяжести при данныхъ условіяхъ не можетъ оставаться неподвижнымъ. Такъ какъ насъ интересуеетъ только вращательное движеніе, то поступательнымъ движеніемъ мы будемъ пренебрегать, считая, что центръ тяжести тѣла остается неподвижнымъ въ пространствѣ. Кромѣ того замѣтимъ, что, какъ было доказано въ предыдущемъ параграфѣ, въ об-



щемъ случаѣ, когда плоскость вращенія не перпендикулярна одной изъ главныхъ осей инерціи фиг.  $ABCD$  (фиг. 19), тѣло будетъ совершать колебанія около двухъ взаимно перпендикулярныхъ осей. Такъ какъ эти колебанія можно замѣнить колебаніями около главныхъ осей инерціи фигуры  $ABCD$ , то мы въ дальнѣйшемъ будемъ разсматривать тотъ простой случай, когда плоскость вращенія перпендикулярна къ одной изъ главныхъ осей инерціи.

Если мы выведемъ плавающее тѣло изъ положенія равновѣсія (фиг. 17), то появляется пара  $(G, R_1)$ , моментъ которой, какъ легко вообразить, будетъ:

$$\text{Мом. пары } (G, R_1) = \Delta v \sin \varphi . . . . . (1),$$

гдѣ  $v$ —объемъ погруженной части тѣла,  $\Delta$ —вѣсъ единицы объема жидкости,  $u$ —разстояніе между  $s$  и  $m$  и  $\varphi$ —уголъ между  $R$  и  $R_1$ . Этотъ моментъ будетъ равенъ моменту инерціи тѣла  $J_0$  относительно оси, проходящей черезъ центръ тяжести и перпендикулярной къ плоскости вращенія, умноженному на угловое ускореніе —  $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ . Такимъ образомъ имѣемъ:

$$J_0 \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \Delta v \sin \varphi = 0 . . . . . (2).$$

Передъ угловымъ ускореніемъ мы ставимъ знакъ минусъ въ виду того, что  $\varphi$  убываетъ. Уравненіе (2) будетъ справедливо и въ томъ случаѣ, когда тѣло перейдетъ положеніе равновѣсія и будетъ отклоняться въ противоположную сторону, ибо при возрастаніи угла  $\varphi$  моментъ пары  $(G, R_1)$  измѣнитъ свой знакъ.

Ограничиваясь разсмотрѣніемъ малыхъ колебаній, мы можемъ упростить интеграцію уравненія (2), считая  $u$  постояннымъ и  $\sin \varphi = \varphi$ . Тогда мы получимъ:

$$J_0 \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \Delta v u \varphi = 0 . . . . . (3).$$

Извѣстно, что интегральъ такого уравненія будетъ имѣть слѣдующій видъ:

$$\varphi = c_1 e^{k_1 t} + c_2 e^{k_2 t} . . . . . (4),$$

гдѣ  $c_1$  и  $c_2$  произвольныя постоянныя, а  $k_1$  и  $k_2$ —постоянныя, определяемыя изъ уравненія:

$$J_0 k^2 + \Delta uv = 0 \dots (5).$$

Такъ какъ, очевидно,  $k_1$  и  $k_2$  имѣютъ мнимыя значенія, именно:

$$k_1 = \sqrt{-\frac{\Delta uv}{J_0}} \dots (6) \text{ и } k_2 = -\sqrt{-\frac{\Delta uv}{J_0}} \dots (7),$$

то уравненіе (4) можетъ быть представлено въ слѣдующемъ видѣ:

$$\varphi = A \cos \sqrt{\frac{\Delta uv}{J_0}} t + B \sin \sqrt{\frac{\Delta uv}{J_0}} t \dots (8),$$

гдѣ  $A$  и  $B$  произвольныя постоянныя.

Отсюда ясно, что  $\varphi$  періодическая функція времени и что, слѣдовательно, тѣло будетъ совершать колебательное движеніе. Если мы будемъ отсчитывать время отъ того момента, когда тѣло переходитъ черезъ положеніе равновѣсія, то  $A = 0$ , ибо при  $t = 0$  и  $\varphi = 0$ , такъ что

$$\varphi = B \sin \sqrt{\frac{\Delta uv}{J_0}} t \dots (9),$$

причемъ  $B$ —амплитуда колебанія и

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_0}{\Delta uv}} \dots (10)$$

—періодъ полнаго колебанія.

Колебательное движеніе, управляемое уравненіями (9) и (10), будемъ называть собственнымъ колебаніемъ тѣла.

Допустимъ теперь, что кромѣ пары  $(G, R_1)$  на тѣло дѣйствуетъ періодически измѣняющійся моментъ

$$M = M_0 \sin \eta t \dots (11),$$

гдѣ  $M_0$ —наибольшее значеніе этого момента, а  $\eta$ —величина, зависящая слѣдующимъ образомъ отъ періода  $T_1$  измѣненія момента:

$$\eta = \frac{2\pi}{T_1} \dots (12), \text{ откуда } T_1 = \frac{2\pi}{\eta} \dots (13).$$

Этотъ періодически измѣняющійся добавочный моментъ можетъ быть, на примѣръ, слѣдствіемъ дѣйствія волнъ, періодическаго перемѣщенія какой-нибудь тяжести, положенной на плавающее тѣло (раскачиваніе тѣла на лодкѣ) и т. п.



Въ этомъ случаѣ уравненіе вращательнаго движенія плавающего тѣла напишется, очевидно, слѣдующимъ образомъ:

$$J_0 \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \Delta uv \varphi + M_0 \sin \eta t = 0 \dots (14).$$

Интеграль этого уравненія будетъ:

$$\varphi = B \sin \sqrt{\frac{\Delta uv}{J_0}} t + \frac{M_0}{J_0 \eta^2 - \Delta uv} \sin \eta t \dots (15),$$

что легко провѣрить подстановкой въ уравненіе (14).

Отсюда видно, что если  $J_0 \eta^2 = \Delta uv$ , то  $\varphi$ —стремится увеличиваться до безконечности. Легко видѣть изъ уравненій (10) и (12), что это условіе равносильно условію

$$T = T_1 \dots (16),$$

т. е., если періодъ собственнаго колебанія плавающего тѣла равенъ періоду измѣненія внѣшняго момента, амплитуда колебанія тѣла возрастаетъ до безконечности.

Это есть одинъ изъ случаевъ явленія, называемаго резонансомъ.

## Глава 2-я.

### Движеніе капельныхъ жидкостей.

#### ОТДѢЛЪ 1-й.

#### Уравненія движенія.

**16. Основныя уравненія движенія и ихъ простѣйшіе интегралы.** По принципу Д'Аламбера движеніе можно разсматривать какъ равновѣсіе, если къ дѣйствующимъ силамъ прибавить силы инерціи. На основаніи этого мы легко получимъ изъ уравненій равновѣсія (уравненія 1, 2, и 3, § 4) и уравненія (1, § 5) уравненія движенія, если къ слагающимъ по осямъ координатъ внѣшнихъ силъ  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ , отнесенныхъ къ единицѣ массы, прибавимъ слагающія по тѣмъ же осямъ полного ускоренія, взятыя съ обратнымъ знакомъ. Такимъ образомъ имѣемъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho(X - j_x) \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \rho(Y - j_y) \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \rho(Z - j_z) \end{aligned} \right\} \dots \dots (1)$$

и

$$dp = \rho \left[ (X - j_x) dx + (Y - j_y) dy + (Z - j_z) dz \right] \dots \dots (2),$$

гдѣ  $j_x$ ,  $j_y$  и  $j_z$ —слагающія полного ускоренія по осямъ координатъ. Замѣтимъ, что уравненіе (2) получается изъ уравненій (1) умноженіемъ



ихъ соотвѣтственно на  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$  и сложениемъ между собою. Уравненіе (2) даетъ давленіе въ каждой точкѣ жидкости, отнесенное къ единицѣ площади, но его интегрированіе возможно лишь въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ.

1-й случай. Движеніе всякой частицы прямолинейно и равномерно. Въ этомъ случаѣ

$$j_x = j_y = j_z = 0$$

и

$$dp = \rho [Xdx + Ydy + Zdz],$$

слѣдовательно, давленіе въ массѣ движущейся жидкости слѣдуетъ законамъ гидростатики. Тотъ же результатъ получится и въ томъ случаѣ, когда ускореніями частицъ жидкости вслѣдствіе ихъ малости можно пренебречь.

2-й случай. Частицы жидкости принимаютъ ускоренія, равныя по величинѣ и направленію ускореніямъ, производимымъ внѣшними силами.

Въ этомъ случаѣ

$$X = j_x, \quad Y = j_y \quad \text{и} \quad Z = j_z,$$

поэтому

$$dp = 0 \quad \text{и} \quad p = \text{const.}$$

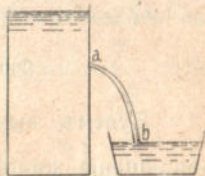
т. е. во всей массѣ движущейся жидкости давленіе имѣетъ постоянную величину.

Примѣръ такого движенія мы имѣемъ при истеченіи струйки изъ отверстія въ стѣнкѣ сосуда (фиг. 20). Ускореніе частицъ, составляющихъ струйку, будетъ, очевидно, равно ускоренію тяжести, поэтому, располагая ось  $z$  вертикально, а оси  $x$  и  $y$  горизонтально, мы будемъ имѣть:

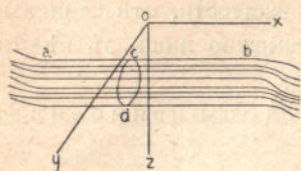
$$Z = j_z = g; \quad X = Y = j_x = j_y = 0.$$

Такимъ образомъ, давленіе въ предѣлахъ струйки  $ab$  будетъ имѣть постоянную величину, равную, очевидно, давленію на поверхности струйки. Этимъ выводомъ мы воспользуемся при изученіи явленія истеченія жидкости изъ отверстія.

3-й случай. На нѣкоторомъ протяженіи  $ab$  (фиг. 21), жидкость движется прямолинейными и параллельными струйками.



Фиг. 20.



Фиг. 21.

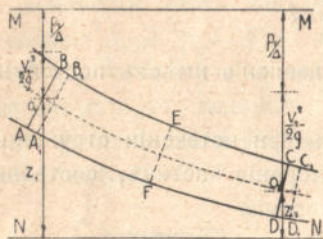
Въ этомъ случаѣ во всякомъ сѣченіи  $cd$ , нормальномъ къ направленію движенія струекъ, давленіе будетъ слѣдовать законамъ гидростатики. Дѣйствительно, направивъ ось  $x$  по направленію течения, для плоскости  $zoy$  будемъ имѣть:

$$dx = 0, \quad j_y = j_z = 0$$

и изъ уравненія (2):

$$dp = \rho [Ydy + Zdz].$$

**17. Уравненіе Данила Бернулли.** Уравненіе Д. Бернулли есть также одинъ изъ интеграловъ уравненія (2, § 16); но для того, чтобы лучше уяснить условія его примѣненія, мы выведемъ его непосредственно при помощи теоремы живыхъ силъ. Положимъ, что капельная жидкость движется по какой-нибудь трубѣ, заполняя все ея нормальное къ оси сѣченіе. Выдѣлимъ изъ трубы двумя нормальными сѣченіями отръзокъ  $ABCD$  (фиг. 22) конечной длины и предположимъ



Фиг. 22.

что за бесконечно малый промежутокъ времени объемъ жидкости  $ABCD$  перемѣстился въ бесконечно близкое положеніе  $A_1B_1C_1D_1$ . Примѣнимъ къ этому перемѣщенію разсматриваемаго объема теорему живыхъ силъ, по которой, какъ извѣстно, работа всѣхъ внѣшнихъ силъ при данномъ перемѣщеніи равна приращенію живой силы.

Будемъ вычислять приращеніе живой силы. Очевидно, что:

$$\begin{aligned} \text{приращеніе живой силы} &= \text{живой силѣ объема } (A_1B_1C_1D_1) - \text{жив. сила} \\ &\text{объема } (ABCD) = \text{жив. силѣ объема } (CDC_1D_1) + \text{жив. сил. об.} \\ &(A_1B_1CD)_{t+dt} - \text{жив. сила объема } (ABA_1B_1) - \text{жив. сила объема} \\ &(A_1B_1CD)_t \dots (1). \end{aligned}$$

Индексы при второмъ и четвертомъ членѣ имѣютъ цѣлью отмѣтить, что живая сила объема  $(A_1B_1CD)$  въ началѣ перемѣщенія (время  $t$ ), вообще говоря, не равна живой силѣ того же объема въ концѣ разсматриваемаго перемѣщенія (время  $t + dt$ ).



Для упрощения подсчета приращения живой силы въ гидравликѣ дѣлается предположеніе, что во всякомъ нормальномъ сѣченіи, какъ напримѣръ,  $AB$ ,  $CD$  и т. д. всѣ частицы обладаютъ одной и той же скоростью и всѣ струйки параллельны между собою. Такимъ образомъ, обозначая площадь сѣченія  $AB$  черезъ  $\omega_1$  и скорость въ немъ черезъ  $v_1$ , а тѣ же величины въ сѣченіи  $CD$ —черезъ  $\omega_2$  и  $v_2$ , легко найдемъ:

$$\text{жив. сила об. } (ABA_1B_1) = \frac{\Delta\omega_1 \overline{AA_1} v_1^2}{g} \frac{1}{2} \quad \text{и}$$

$$\text{жив. сила об. } (CDC_1D_1) = \frac{\Delta\omega_2 \overline{CC_1} v_2^2}{g} \frac{1}{2},$$

гдѣ  $\Delta$ —вѣсъ единицы объема жидкости и  $g$ —ускореніе тяжести. Что касается длинъ  $\overline{AA_1}$  и  $\overline{CC_1}$ , то ихъ легко выразить слѣдующимъ образомъ:

$$\overline{AA_1} = v_1 dt \quad \text{и} \quad \overline{CC_1} = v_2 dt.$$

Такимъ образомъ,

$$\text{жив. сила об. } (ABA_1B_1) = \frac{\Delta\omega_1 v_1 v_1^2}{g} dt \dots (2) \quad \text{и}$$

$$\text{жив. сила об. } (CDC_1D_1) = \frac{\Delta\omega_2 v_2 v_2^2}{g} dt \dots (3).$$

Будемъ теперь вычислять приращеніе живой силы объема  $A_1B_1CD$ . Допустимъ, что въ какомъ-нибудь сѣченіи  $EF$ , площадь котораго равна  $\omega$ , въ началѣ разсматриваемаго момента скорость будетъ  $v$ ; очевидно, что по истеченіи времени  $dt$  скорость эта измѣнится на величину  $\frac{\partial v}{\partial t} dt$ , такъ что приращеніе живой силы безконечно малаго цилиндра съ основаніемъ  $\omega$  и длиной  $dl$  выразится слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{\Delta\omega dl}{2g} \left[ \left( v + \frac{\partial v}{\partial t} dt \right)^2 - v^2 \right] = \frac{\Delta\omega dl}{g} v \frac{\partial v}{\partial t} dt \quad \text{и}$$

жив. сила объема  $(A_1B_1CD)_{t+dt}$  — живая сила объема  $(A_1B_1CD)_t =$

$$= \frac{\Delta dt}{g} \int \omega v \frac{\partial v}{\partial t} dl \dots (4),$$

гдѣ  $l$  есть полная длина разсматриваемаго участка трубы  $AC$ .

Такимъ образомъ, приращеніе живой силы объема жидкости  $ABCD$  при разсматриваемомъ безконечно маломъ перемѣщеніи выразится трехчленомъ:

$$\begin{aligned} \text{прир. жив. силы} = & \frac{\Delta\omega_2 v_2}{g} \frac{v_2^2}{2} dt - \frac{\Delta\omega_1 v_1}{g} \frac{v_1^2}{2} dt + \\ & + \frac{\Delta dt}{g} \int_0^l \omega v \frac{\partial v}{\partial t} dl \dots (5). \end{aligned}$$

Перейдемъ теперь къ опредѣленію работы внѣшнихъ силъ. Примѣняясь къ условіямъ тѣхъ случаевъ теченія жидкости, съ которыми приходится имѣть дѣло инженеру, будемъ предполагать, что на массу жидкости дѣйствуетъ только сила тяжести. Работа этой силы при всякомъ перемѣщеніи какой-нибудь массы равняется, какъ извѣстно, ея вѣсу, умноженному на вертикальное перемѣщеніе ея центра тяжести. Такъ какъ въ разсматриваемомъ случаѣ центръ тяжести объема  $A_1 B_1 CD$  (фиг. 22) остается неподвижнымъ, то работа силы тяжести выразится произведеніемъ вѣса безконечно малаго объема  $ABA_1 B_1$  или равнаго ему объема  $CDC_1 D_1$  на разность высотъ центровъ тяжести этихъ двухъ объемовъ надъ какимъ-нибудь произвольно выбраннымъ горизонтомъ. Такимъ образомъ, предполагая, что высота центра тяжести  $o_1$  сѣченія  $AB$  надъ горизонтальной плоскостью  $MN$  равна  $z_1$  и центра тяжести  $o_2$  сѣченія  $CD$  надъ той же горизонтальной плоскостью— $z_2$ , найдемъ:

$$\text{работа силы тяжести} = \omega_1 v_1 \Delta dt (z_1 - z_2) = \omega_2 v_2 \Delta dt (z_1 - z_2) \dots (6).$$

Затѣмъ мы должны принять во вниманіе работу давленій на сѣченія  $AB$  и  $CD$ . Выдѣляя изъ общей массы жидкости массу  $ABCD$ , мы должны внутреннія силы замѣнить силами внѣшними; эти внѣшнія силы и будутъ давленія на сѣченія  $AB$  и  $CD$ . Отвлекаясь отъ силъ тренія между частицами жидкости, необходимо, какъ мы видѣли раньше (§ 2), считать, что давленія эти направлены по нормалямъ къ соотвѣтствующимъ сѣченіямъ и при томъ по нормалямъ внутреннимъ, что также было выяснено въ § 2. Такимъ образомъ, давленіе въ сѣченіи  $AB$  имѣетъ направленіе, въ которомъ перемѣщаются частицы жидкости, а въ сѣченіи  $CD$ —направленіе противоположное перемѣщенію частицъ; первое давленіе, слѣдовательно, при разсматриваемомъ перемѣщеніи совершаетъ положительную работу, второе—отрицательную. Для опредѣленія величины этихъ давленій сдѣлаемъ еще



одно допущение, что кривизна оси трубы весьма незначительна. Допущение это вмѣстѣ со сдѣланными выше предположеніями параллелизма струекъ и нормальности ихъ къ соответствующимъ сѣченіямъ, приводитъ насъ къ заключенію, что давленія въ сѣченіяхъ  $AB$  и  $CD$  слѣдуютъ законамъ гидростатики (§ 16, сл. 3); а если это такъ, то полное давленіе на какое-нибудь нормальное сѣченіе трубы равно давленію въ его центрѣ тяжести, отнесенному къ единицѣ площади и умноженному на площадь сѣченія (§ 9).

Давленіе въ какой-нибудь точкѣ движущейся массы жидкости, отнесенное къ единицѣ площади, будемъ называть давленіемъ гидродинамическимъ. Такимъ образомъ, обозначая гидродинамическое давленіе въ центрѣ тяжести  $o_1$  сѣченія  $AB$  черезъ  $p_1$  и въ центрѣ тяжести  $o_2$  сѣченія  $CD$  черезъ  $p_2$ , легко найдемъ, что сумма работъ этихъ двухъ давленій будетъ:

$$p_1 \omega_1 v_1 dt - p_2 \omega_2 v_2 dt \dots (7),$$

гдѣ произведенія  $v_1 dt$  и  $v_2 dt$  представляютъ собою пути, пройденные при разсматриваемомъ перемѣщеніи точками приложенія полныхъ давленій.

Кромѣ работы силы тяжести и давленій слѣдовало бы принять во вниманіе работу силы тренія жидкости о стѣнки трубы и работу силъ удара, если труба имѣетъ гдѣ-нибудь внезапное расширеніе. Но мы пока отвлечемся отъ этихъ силъ, предполагая, что стѣнки трубы идеально гладки и что сѣченія ея измѣняются плавно. Принимая во вниманіе выраженія (5), (6) и (7), находимъ:

$$\frac{\Delta \omega_2 v_2}{g} \frac{v_2^2}{2} dt - \frac{\Delta \omega_1 v_1}{g} \frac{v_1^2}{2} dt + \frac{\Delta dt}{g} \int_0^l \omega v \frac{\partial v}{\partial t} dl = \omega_2 v_2 \Delta dt (z_1 - z_2) + \\ + p_1 \omega_1 v_1 dt - p_2 \omega_2 v_2 dt \dots (8).$$

Замѣтимъ, что въ виду несжимаемости жидкости черезъ каждое сѣченіе трубы въ единицу времени протекаетъ одинъ и тотъ же объемъ, что мы и принимали уже во вниманіе при выводѣ выраженія для работы силы тяжести. Аналитически условіе это выражается слѣдующимъ образомъ:

$$\omega_1 v_1 = \omega_2 v_2 = \omega v \dots (9).$$

Принимая во вниманіе это уравненіе и сокращая уравненіе (8) на произведеніе  $\omega_1 v_1 \Delta dt$ , получимъ:

$$\frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\Delta} + z_2 + \frac{1}{g} \int_0^l \frac{\partial v}{\partial t} dl = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\Delta} + z_1 \dots \dots \dots (10).$$

Это есть уравненіе неустановившагося теченія жидкости. Если же мы будемъ разсматривать установившееся теченіе, т. е. такое теченіе, при которомъ во всякой точкѣ пространства, занимаемомъ движущейся жидкостью, скорость сохраняетъ постоянно одну и ту же величину и направленіе, то тогда интеграль въ первой части уравненія обратится въ нуль, ибо скорость въ сѣченіи  $EF$  (фиг. 22) не измѣнится и, слѣдовательно,  $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ .

Такимъ образомъ, для установившагося теченія при сдѣланныхъ выше предположеніяхъ имѣемъ:

$$\frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\Delta} + z_2 = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\Delta} + z_1 = const \dots (4).$$

Это и есть уравненіе Д. Бернулли.

Замѣтимъ, что уравненіе это равнымъ образомъ примѣнимо и къ установившемуся теченію въ открытыхъ каналахъ или трубѣ при неполномъ ея заполненіи. Что касается уравненія (10), то въ этихъ двухъ послѣднихъ случаяхъ оно примѣнено быть не можетъ, ибо условіе несжимаемости будетъ имѣть совершенно другое выраженіе. Дѣйствительно, при заполненіи трубы во всю высоту ея сѣченія, объемъ жидкости между двумя данными нормальными къ оси трубы сѣченіями остается неизмѣннымъ, если же жидкость имѣетъ свободную поверхность, то объемъ этотъ измѣняется при повышеніи или пониженіи поверхности.

Легко видѣть кромѣ того, что сумма высотъ  $z$  и  $\frac{p}{\Delta}$  остается постоянной для всѣхъ точекъ одного и того же нормального сѣченія, такъ какъ при перемѣщеніи изъ центра тяжести въ какую-нибудь другую точку приращенія этихъ высотъ будутъ одинаковы по величинѣ, но противоположны по знаку. Имѣя въ виду, такимъ образомъ, что скорость всѣхъ точекъ одного и того же нормального сѣченія есть величина постоянная, можно уравненіе Д. Бернулли выразить слѣдую-



шимъ образомъ: при установившемся теченіи несжимаемой жидкости сумма трехъ высотъ: 1) высоты положенія ( $z$ ), 2) высоты давленія  $\left(\frac{p}{\Delta}\right)$  и 3) высоты, соотвѣтствующей скорости  $\left(\frac{v^2}{2g}\right)$ , при указанныхъ выше условіяхъ есть величина постоянная для всѣхъ точекъ жидкости.

Легко провѣрить, дѣйствительно, что выраженія  $\frac{p}{\Delta}$  и  $\frac{v^2}{2g}$  имѣютъ линейныя измѣренія, да, кромѣ того, высоты эти можно представить совершенно конкретно. Высота  $\frac{v^2}{2g}$  — есть та высота, на которую поднимется, на примѣръ, небольшой шарикъ, не испытывающій значительнаго сопротивленія воздуха, брошенный вертикально вверхъ со скоростью  $v$ .

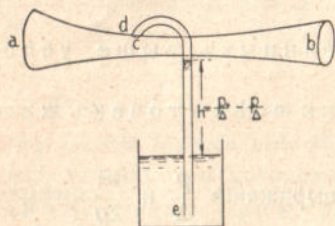
Высота  $\frac{p}{\Delta}$  легко можетъ быть получена при помощи барометрической трубки, т. е. трубки запаянной съ одного конца, изъ которой выкачанъ воздухъ; если такую трубку погрузить открытымъ концомъ въ жидкость, то послѣдняя поднимется въ ней на высоту  $\frac{p}{\Delta}$ . Эту высоту

часто называютъ высотой барометрическою. Наименьшее предѣльное ея значеніе—нуль, ибо давленіе, какъ мы знаемъ, отрицательнымъ быть не можетъ. Въ дѣйствительности давленіе внутри движущейся жидкости никогда не можетъ стать равнымъ даже и нулю и понижается лишь до давленія, соотвѣтствующаго температурѣ жидкости. Это обстоятельство нужно имѣть въ виду особенно при изслѣдованіи теченія горячихъ жидкостей. На практикѣ гораздо удобнѣе получить высоту пьезометрическую, равную  $\frac{p}{\Delta} - \frac{p_0}{\Delta}$ , гдѣ  $\frac{p}{\Delta}$  — высота барометрическая, а  $\frac{p_0}{\Delta}$  — высота, соотвѣтствующая давленію атмосферы.

Пьезометрическая высота можетъ быть получена непосредственно при помощи пьезометрической трубки, т. е. трубки, открытой съ обѣихъ сторонъ и погруженной однимъ концомъ въ жидкость. Очевидно, что въ такой трубкѣ вода поднимется на высоту  $\frac{p}{\Delta} - \frac{p_0}{\Delta}$ . Въ отличіе отъ высоты барометрической, высота пьезометрическая можетъ принимать значенія отрицательныя до предѣла— $\frac{p_0}{\Delta}$ . Чтобы измѣрить непосредственно



отрицательную пьезометрическую высоту, можно поступить слѣдующимъ образомъ. Положимъ, что въ пунктѣ *c* (фиг. 23) трубы *ab* барометрическое давленіе меньше атмосфернаго, потому, понятно, пьезометрическая высота имѣетъ отрицательное значеніе. Если мы введемъ одинъ открытый конецъ *d* загнутой трубки *de* внутрь трубы *ab*, а другой *e* погрузимъ въ сосудъ съ той же самой жидкостью, которая протекаетъ по трубѣ *ab*, то жидкость поднимется въ трубкѣ *de* надъ поверхностью ея въ сосудѣ на высоту

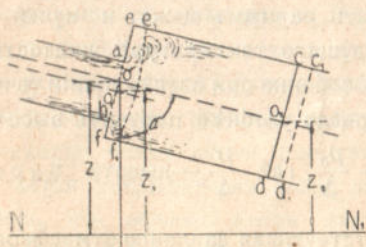


Фиг. 23.

$$h = \frac{p_0}{\Delta} - \frac{p}{\Delta},$$

что легко вывести, приравнивая давленія снизу и сверху на любое нормальное сѣченіе жидкости въ трубкѣ.

**18. Теорема Борда.** Оставляя безъ измѣненія всѣ предположенія, сдѣланныя при выводѣ уравненія Д. Бернулли, допустимъ, что труба въ какомъ нибудь мѣстѣ (фиг. 24) имѣетъ внезапное расширеніе. При переходѣ изъ узкаго къ широкому сѣченію жидкость, стремясь заполнить послѣднее, должна разбрасываться въ стороны. Понятно, что вслѣдствіе этой причины образуется переходное мѣсто, гдѣ на нѣкоторой длинѣ не будутъ уже имѣть мѣсто параллелизмъ струекъ и равенство скоростей во всѣхъ точкахъ одного и того же нормальнаго къ оси трубы сѣченія, и гдѣ благодаря соудареніямъ частицъ воды имѣетъ мѣсто работа силъ удара. Допустимъ, что начиная съ нор-



Фиг. 24.

мальнаго сѣченія *cd* движеніе происходитъ въ томъ порядкѣ, какъ это предполагалось при выводѣ уравненія Бернулли, т. е. струйки движутся параллельными рядами и скорости всѣхъ струекъ нормальны къ сѣченію и равны между собою. Въ такихъ предположеніяхъ примѣнимъ къ объему *efcd*, при его бесконечно-маломъ перемѣщеніи въ положеніе *e\_1 f\_1 c\_1 d\_1*, теорему количества движенія по направленію оси *oo\_2* цилиндра *efcd*. Можно было бы примѣнить къ этому перемѣщенію и теорему живыхъ силъ, но мы были бы при этомъ въ затрудненіи опредѣлить работу силъ удара частицъ жидкости, тогда какъ при примѣненіи теоремы количества движенія съ силами удара считается не приходится, ибо ихъ импульсы попарно уничтожаются. Обозначимъ скорость въ сѣченіи *ab* черезъ  $v_1$ , площадь его сѣченія черезъ  $\omega_1$ , давленіе въ его

нѣ въ положеніе  $e_1 f_1 c_1 d_1$ , теорему количества движенія по направленію оси  $oo_2$  цилиндра  $efcd$ . Можно было бы примѣнить къ этому перемѣщенію и теорему живыхъ силъ, но мы были бы при этомъ въ затрудненіи опредѣлить работу силъ удара частицъ жидкости, тогда какъ при примѣненіи теоремы количества движенія съ силами удара считается не приходится, ибо ихъ импульсы попарно уничтожаются. Обозначимъ скорость въ сѣченіи  $ab$  черезъ  $v_1$ , площадь его сѣченія черезъ  $\omega_1$ , давленіе въ его



центр тяжести через  $p_1$  и высоту его положения надъ произвольно выбраннымъ горизонтомъ  $NN_1$ —черезъ  $z_1$ ; соответственныя величины для сѣченія  $cd$  обозначимъ тѣми же буквами съ индексомъ 2. Наконецъ, обозначимъ давление въ центрѣ тяжести  $o$  сѣченія  $ef$  черезъ  $p$  и его высоту надъ горизонтомъ  $NN_1$ —черезъ  $z$ .

Въ виду того, что мы предполагаемъ движеніе установившимся, приращеніе количества движенія объема  $efcd$  по направленію  $oo_2$  выразится слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{\Delta\omega_2 v_2 dt}{g} (v_2 - v_1).$$

Для вычисленія импульса силъ, намъ необходимо знать давление на площадь  $ef$ , точный подсчетъ котораго, въ виду сложности движенія отдѣльныхъ частицъ, прилегающихъ къ стѣнкамъ  $ae$  и  $bf$ , не представляется возможнымъ. Но если сдѣлать предположеніе, что этимъ движеніямъ соответствують весьма малыя ускоренія, то тогда, имѣя въ виду выводы § 16 (сл. 1-й и 3-й), легко заключить, что давление во всемъ сѣченіи  $ef$  слѣдуетъ законамъ гидростатики, поэтому гидродинамическое давление въ центрѣ тяжести этого сѣченія будетъ:

$$p = p_1 - \Delta(z - z_1)$$

и, слѣдовательно, полное давление на это сѣченіе:

$$P = \omega_2 p_1 - \omega_2 \Delta(z - z_1).$$

Такимъ образомъ, принимая во вниманіе еще импульсъ давления въ сѣченіи  $cd$  и импульсъ силы тяжести по направленію  $oo_2$ , найдемъ:

$$\frac{\Delta\omega_2 v_2 dt}{g} (v_2 - v_1) = \omega_2 p_1 dt - \omega_2 \Delta(z - z_1) \frac{dt}{dt} - \omega_2 p_2 dt + \omega_2 \overline{oo_2} dt \cos \alpha \dots (1).$$

Имѣя въ виду, что

$$\overline{oo_2} \cos \alpha = z - z_2$$

и сокращая все уравненіе на произведеніе  $\Delta\omega_2 dt$ , найдемъ:

$$\frac{v_2(v_2 - v_1)}{g} = \frac{p_1}{\Delta} + z_1 - \frac{p_2}{\Delta} - z_2 \dots (2).$$

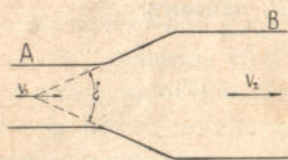
Прибавляя ко второй части уравненія (2) и вычитая изъ него сумму  $\frac{v_1^2}{2g} + \frac{v_2^2}{2g}$ , окончательно получимъ:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\Delta} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\Delta} + z_2 + \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} \dots (3).$$

Уравненіе это отличается отъ уравненія Д. Бернулли только послѣднимъ членомъ второй части. Такъ какъ уравненіе Д. Бернулли есть не что иное, какъ примѣненіе къ частному случаю принципа сохраненія энергіи, то изъ уравненія (3) легко сдѣлать слѣдующій выводъ: когда при установившемся теченіи, удовлетворяющемъ условіямъ, указаннымъ въ предыдущемъ параграфѣ, струя внезапно расширяется, жидкость теряетъ часть своей живой силы, причемъ потерянная живая сила равна живой силѣ потерянной скорости. Это и есть теорема Борда. Замѣтимъ, что при ея примѣненіи слѣдуетъ соблюдать осторожность. Дѣйствительно, составляя уравненіе количествъ движенія, мы предполагали, что въ сѣченіи *cd* (фиг. 24) жидкость движется уже параллельными струйками, но на какомъ разстояніи находится это сѣченіе отъ сѣченія *ab* указать совершенно невозможно, ибо для этого нѣтъ никакихъ данныхъ. Въ виду этого желательно при примѣненіи уравненія (3) выбирать второе сѣченіе по возможности дальше отъ сѣченія *ab*.

Теорема Борда можетъ быть доказана гораздо проще слѣдующимъ образомъ. Положимъ, что струйка жидкости, обладающая скоростью  $v_1$ , вливается въ резервуаръ, содержащій значительную массу неподвижной жидкости. Тогда, понятно, что каждый килограммъ жидкости, притекая въ резервуаръ со скоростью  $v_1$ , будетъ терять энергію  $\frac{v_1^2}{2g}$ . Положимъ теперь, что жидкость въ резервуарѣ движется со скоростью  $v_2$ , меньшей  $v_1$  и имѣющей съ ней одинаковое направленіе; тогда, очевидно, каждый килограммъ воды, притекая въ резервуаръ, теряетъ энергію  $\frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}$ , соотвѣтствующую относительной скорости  $(v_1 - v_2)$ .

Въ случаѣ плавнаго расширенія (фиг. 25) по опытамъ Флигнера потерянная энергія можетъ быть выражена для круглой трубы слѣдующимъ образомъ:



Фиг. 25.

$$\frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} \sin \delta,$$

гдѣ  $\delta$  уголъ въ вершинѣ конуса, образующаго переходную часть отъ узкой трубы *A* къ широкой *B*.



## 19. Уравненіе Д. Бернулли для относительнаго движенія.

Мы ограничимся здѣсь тѣмъ случаемъ относительнаго движенія, когда труба  $AB$  (фиг. 26), которую для простоты мы изобразимъ одной линіей, вращается равномерно около вертикальной оси съ угловой скоростью  $\Omega$ . Составляя для бесконечно малаго перемѣщенія объема  $AB$  при тѣхъ же предположеніяхъ, которыя мы дѣлали въ § 17, уравненіе живыхъ силъ, мы получимъ уравненіе (8, § 17), гдѣ подъ  $v_1$  и  $v_2$  надо подразумѣвать относительныя скорости въ пунктахъ  $A$  и  $B$ , но должны будемъ еще ко второй части этого уравненія прибавить работу силъ инерціи. Работа эта сведется, очевидно, только къ работѣ силы центробѣжной, ибо поворотное ускореніе всегда нормально къ относительной скорости и потому его работа будетъ равна нулю. Для вычисленія работы центробѣжной силы предположимъ, что изъ пункта  $C$ , отстоящаго отъ оси на разстояніе  $\rho$ , бесконечно малая масса  $dm$  за бесконечно малый промежутокъ времени перемѣстилась въ пунктъ  $C_1$ . Соотвѣтствующая этому перемѣщенію массы  $dm$  работа центробѣжной силы, очевидно, будетъ:

$$dh = dm\Omega^2\rho\cos\alpha ds.$$

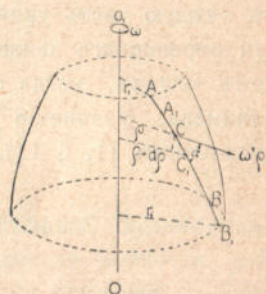
гдѣ  $ds = \overline{CC_1}$ . Замѣчая, что массу  $dm$  можно считать равной массѣ, протекающей по трубѣ въ бесконечно малое время, и что  $\cos\alpha ds = d\rho$ , получимъ:

$$dh = \frac{\omega_1 v_1 \Delta}{g} d\Omega^2 \rho d\rho.$$

Такъ какъ мы разсматриваемъ перемѣщеніе всей массы  $AB$  за бесконечно малое время, то, очевидно, работа центробѣжной силы, отнесенная ко всей этой массѣ будетъ

$$h = \frac{\omega_1 v_1 \Delta}{g} d\Omega^2 \int_{r_1}^{r_2} \rho d\rho = \frac{\omega_1 v_1 \Delta}{g} d\Omega^2 \left( \frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} \right) \dots (1)$$

гдѣ  $u_1$  и  $u_2$  суть скорости по окружности соотвѣтственно въ центрахъ тяжести сѣченій  $A$  и  $B$ .



Фиг. 26.

Внося это выраженіе въ уравненіе (8, § 17) и предполагая движеніе установившимся, легко найдемъ:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\Delta} + z_1 - \frac{u_1^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\Delta} + z_2 - \frac{u_2^2}{2g} \dots (2).$$

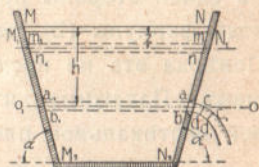
Какъ видимъ, здѣсь кромѣ трехъ высотъ уравненія Д. Бернулли въ каждую часть уравненія входитъ высота, соотвѣтствующая скорости переноснаго движенія, но только съ обратнымъ знакомъ. Въ частномъ случаѣ, когда ось трубы  $AB$  лежитъ на поверхности круглаго цилиндра, уравненіе (2) становится совершенно тождественнымъ съ уравненіемъ (1, § 17).



## ОТДѢЛЪ 2-й.

### Истечение изъ отверстій.

20. **Истечение изъ отверстій въ тонкой стѣнкѣ.** Будемъ сначала предполагать, что высота свободной поверхности жидкости для всѣхъ элементовъ площади отверстія есть величина постоянная. Этому предположенію соответствуетъ очень малое отверстие въ боковой стѣнкѣ сосуда, или отверстие любыхъ размѣровъ въ горизонтальномъ днѣ сосуда. Кромѣ того мы рассмотримъ здѣсь тотъ случай, когда отверстие находится въ тонкой стѣнкѣ. Тонкой стѣнкой принято называть такую стѣнку, толщина которой менѣе половины наименьшаго измѣренія отверстія. Чтобы получить такое отверстие, можно срѣзать наискось края стѣнки, какъ показано на фиг. 27.



Фиг. 27.

Предположимъ, что сосудъ наполненъ жидкостью до уровня  $MN$ , который, въ то время какъ жидкость вытекаетъ изъ отверстія  $ab$ , поддерживается на постоянной высотѣ соответственнымъ прибавленіемъ жидкости сверху, и будемъ разыскивать скорость струйки при выходѣ ея изъ отверстія; эту скорость будемъ называть скоростью истечения.

Для этой цѣли примѣнимъ къ сѣченію  $MN$  и къ сѣченію  $cd$ , весьма близкому къ  $ab$ , уравненіе Д. Бернулли, на что мы имѣемъ право, въ виду отсутствія при переходѣ жидкости отъ  $MN$  до  $cd$  внезапныхъ расширеній и въ виду ничтожности вредныхъ потерь отъ тренія, какъ это мы увидимъ дальше.

Обозначая площадь сѣченія  $MN$  черезъ  $\omega_1$ ,—скорость въ немъ черезъ  $v_1$  и давленіе черезъ  $p_1$  и соответственные величины въ сѣченіи  $cd$  тѣми же буквами безъ индексовъ и принимая за горизонтъ сравненія горизонтальную плоскость, проходящую черезъ центръ тяжести сѣченія  $ab$  (или  $cd$ ), будемъ имѣть:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\Delta} + h = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\Delta} \dots (1).$$

Предполагая, что отношеніе  $\frac{\omega}{\omega_1}$  есть очень малая величина и что, поэтому, въ силу условія несжимаемости, отношеніе  $\frac{v_1}{v}$  есть также величина очень малая, мы можемъ въ уравненіи (1) пренебречь первымъ членомъ лѣвой части.

Считая, наконецъ, что на  $MN$  давить атмосфера и что струйка вытекаетъ въ атмосферу, т. е. что (§ 16, сл. 2)  $p = p_0$ , мы получимъ:

$$v = \sqrt{2gh} \dots (2),$$

т. е. скорость истечения (при сдѣланныхъ предположеніяхъ) соотвѣтствуетъ глубинѣ погруженія центра тяжести отверстія подъ свободной поверхностью. Это и есть теорема Торичелли. Въ виду тѣхъ допущеній, которыя были сдѣланы съ одной стороны при выводѣ ур. Д. Бернулли, а съ другой—при выводѣ формулы (2), послѣднюю желательно повѣрить опытнымъ путемъ. Повѣрка эта не представляетъ затрудненій и заключается въ слѣдующемъ. Положимъ, что изъ очень малаго круглаго отверстія въ боковой вертикальной плоской (фиг. 28) стѣнкѣ сосуда  $A$  вытекаетъ струйка  $oo_1o_2$ . Форму этой струйки найти очень просто: вообразивъ въ отверстіи начало прямоугольныхъ координатъ съ горизонтальной осью  $ox$  и вертикальной осью  $oy$ , будемъ имѣть слѣдующія уравненія движения:

$$x = vt \dots (3) \text{ и}$$

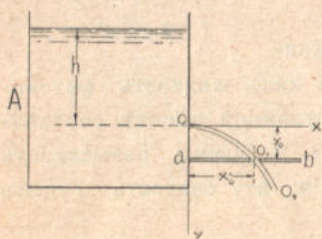
$$y = \frac{gt^2}{2} \dots (4),$$

гдѣ  $v$  есть скорость истечения,  $g$ —ускореніе тяжести и  $t$ —какой-нибудь промежутокъ времени. Исключая изъ уравненій (3) и (4)  $t$ , найдемъ:

$$y = \frac{g}{2v^2}x^2 \dots (5),$$

слѣдовательно струйка имѣетъ форму параболы.

Чтобы опредѣлить координаты какой-нибудь ея точки возьмемъ тонкую дощечку  $ab$  и сдѣлаемъ въ ней круглое отверстіе  $o$ , на раз-



Фиг. 28.



стояніи  $x_0$  отъ края  $a$ , а затѣмъ, приложивъ этотъ край къ стѣнкѣ сосуда и поддерживая дощечку горизонтально, будемъ перемѣщать ее внизъ или вверхъ до тѣхъ поръ, пока струйка не попадетъ въ отверстие  $o_1$ . Измѣривъ разстояніе  $oa$ , которое мы обозначимъ черезъ  $h_0$ , изъ уравненія (5) имѣемъ:

$$v = \sqrt{2g \frac{x_0^2}{4y_0}} \dots (6).$$

Если формула (2) выражаетъ то, что имѣемъ въ дѣйствительности, то, тогда, очевидно,

$$h = \frac{x_0^2}{4y_0} \dots (7).$$

Многочисленные опыты показали, что обыкновенно вторая часть уравненія (2) выходитъ немного меньше первой, поэтому въ формулу (2) вводятъ поправку и пишутъ ее въ такомъ видѣ:

$$v = \varphi \sqrt{2gh} \dots (8).$$

Коэффициентъ  $\varphi$ , имѣющій величину 0,97—0,98, называется коэффициентомъ скорости.

Перейдемъ теперь къ опредѣленію расхода. На первый взглядъ казалось бы, что расходъ, т. е. количество жидкости, вытекающее въ одну секунду, долженъ опредѣляться произведеніемъ площади отверстия на скорость. Но такое заключеніе было бы неправильно. Многочисленные наблюденія показываютъ, что струя, вытекая изъ отверстия въ тонкой стѣнкѣ, сжимается и на очень близкомъ разстояніи отъ отверстия достигаетъ наименьшаго сѣченія, что скорость въ самомъ отверстіи въ среднемъ меньше той, которая опредѣляется формулой (8), и что только въ наиболѣе сжатомъ сѣченіи скорость достигаетъ найденнаго выше значенія.

Всѣ эти явленія объясняются слѣдующимъ образомъ. Притекающія со всѣхъ сторонъ къ отверстию струйки должны, проходя черезъ него, измѣнить свое направленіе. Развивающаяся вслѣдствіе искривленія струекъ центробѣжная сила имѣетъ слѣдствіемъ и возрастаніе давленія отъ периферіи къ центру струи въ отверстіи, и сжатіе струи. Какъ только струйки принимаютъ параллельное направленіе, что и происходитъ въ сжатомъ сѣченіи, оба явленія перестаютъ имѣть мѣсто. Понятно, поэтому, что давленіе внутри струи въ отвер-

стии выше атмосфернаго, ибо такое давленіе имѣеть мѣсто на ея поверхности, и скорость меньше найденной выше, что легко заключить изъ уравненія (1), полагая въ немъ  $p_1 = p_0$  и  $p = p_0 + k$ , гдѣ  $k$  нѣкоторая положительная величина.

Такимъ образомъ, изъ предыдущаго ясно, что расходъ выразитъ произведеніемъ площади сжатаго сѣченія  $\omega_0$ , на скорость, опредѣляемую изъ формулы (8), т. е.

$$Q = \omega_0 \varphi \sqrt{2gh} \dots (9).$$

Обозначая площадь отверстія  $ab$  (фиг. 27) черезъ  $\omega$  и отношеніе  $\frac{\omega_0}{\omega}$ , которое называютъ коэффициентомъ сжатія, — черезъ  $\alpha$ , изъ уравненія (9) найдемъ:

$$Q = \alpha \varphi \omega \sqrt{2gh} = \mu \omega \sqrt{2gh} \dots (10),$$

гдѣ  $\mu = \alpha \varphi$  есть коэффициентъ расхода.

Итакъ, для опредѣленія расхода намъ надо знать коэффициентъ сжатія. Задача объ опредѣленіи этого коэффициента могла бы быть рѣшаема въ слѣдующемъ порядкѣ. Примѣнимъ къ объему  $MNdc$  (фиг. 27) при его безконечно маломъ перемѣщеніи въ положеніе  $M_1N_1d_1c_1$  теорему количествъ движенія по горизонтальному направленію, предполагая, что движеніе жидкости установилось.

Имѣя въ виду, что скорость въ сѣченіи  $MN$  направлена вертикально и что скорость объема  $M_1N_1cd$  съ теченіемъ времени не измѣняется, легко найдемъ, что приращеніе количества движенія рассматриваемой массы по горизонтальному направленію равно просто количеству движенія объема  $cdc_1d_1$ , т. е.

$$\text{прир. кол. движ.} = \frac{\omega_0 v dt \Delta}{g} v \sin \alpha \dots (11).$$

Переходя къ составленію суммы импульсовъ силъ, замѣтимъ, что сила тяжести объема  $MNcd$  и давленія на площадь  $MN$  импульса по горизонтальному направленію не дадутъ, поэтому намъ надо принять во вниманіе только импульсы реакцій стѣнокъ сосуда и давленія атмосферы на боковую поверхность струи  $abcd$  и сѣченіе  $cd$ . Вообразимъ внутри жидкости безконечно тонкій цилиндръ съ горизонтальной образующей, вырѣзающій на стѣнкахъ сосуда площади  $mn$  и  $m_1n_1$ , и подсчитаемъ давленія на эти площади по горизонтальному направленію. Здѣсь мы можемъ сдѣлать слѣдующее, весьма вѣроятное предположеніе, что жидкость имѣеть замѣтную скорость только вдоль стѣнки  $NN_2$  и остается почти неподвижной около стѣнки  $MM_2$ . При такомъ предположеніи давленіе въ



центрѣ тяжести площадки  $m_1n_1$ , отнесенное къ единицѣ площади, равно  $\Delta z + p_0$ , гдѣ  $z$  глубина погруженія оси цилиндра, а такое же давленіе въ центрѣ тяжести сѣченія  $mn$  равно  $\Delta z + p_0 - \frac{v_z^2}{2g} \Delta$ , гдѣ  $v_z$ —неизвѣстная намъ скорость струйки, прилегающей къ стѣнкѣ  $NN_2$  на глубинѣ  $z$ .

Такимъ образомъ, составляя сумму импульсовъ реакцій площадей  $m_1n_1$  и  $mn$ , которыя, очевидно, равны импульсамъ давленій жидкости, но противоположны по направленію, найдемъ, что эта сумма будетъ равна  $d\omega_z \frac{v_z^2}{2g} \Delta dt$ , гдѣ  $d\omega_z$ —нормальное сѣченіе цилиндра. Такимъ образомъ, импульсъ реакцій стѣнокъ, за исключеніемъ элемента  $a_1b_1$ , противоположнаго отверстію, выразится слѣдующимъ образомъ:

$$\text{Импульсъ реакціи стѣнокъ} = \int \frac{v_z^2}{2g} \Delta d\omega_z dt . . . . (12),$$

гдѣ интеграція должна быть распространена на всю площадь вертикальнаго сѣченія сосуда, кромѣ площади нормальнаго сѣченія цилиндра  $aa_1b_1b$ . Импульсъ реакціи  $a_1b_1$  по горизонтальному направленію, очевидно, будетъ:

$$\text{импульсъ реакціи } a_1b_1 = \omega \sin \alpha (p_0 + \Delta h) dt . . . . (13)$$

и, наконецъ, импульсъ атмосфернаго давленія на боковую поверхность струи  $acdb$  и сѣченіе  $cd$  по горизонтальному направленію будетъ:

$$\omega \sin \alpha p_0 dt . . . . (14).$$

Сопоставляя теперь выраженія (11), (12), (13) и (14) и принимая во вниманіе направленіе импульсовъ, получимъ:

$$\frac{\omega_0 v \Delta}{g} v \sin \alpha dt = \omega \sin \alpha (p_0 + \Delta h) dt + \int \frac{v_z^2}{2g} \Delta d\omega_z dt - \omega \sin \alpha p_0 dt . (15).$$

Отсюда, сокращая все уравненіе на произведеніе  $\Delta \sin \alpha dt$  и принимая во вниманіе уравненіе (8), найдемъ:

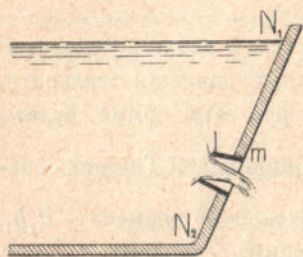
$$\omega_0 = \frac{\omega}{2} + k . . . . (16),$$

гдѣ  $k$ —нѣкоторая положительная величина, равная  $\int \frac{v_z^2}{2g} \frac{d\omega_z}{h \sin \alpha}$ .

Такимъ образомъ, для опредѣленія коэффициента сжатія намъ надо найти  $v_z$ , чего при современномъ состояніи гидравлики мы сдѣлать не можемъ.



Однако же уравненіе (16) даетъ намъ возможность заключить, что коэффициентъ сжатія  $\alpha$  никогда меньше 0,5 быть не можетъ и что онъ въ точности будетъ равенъ 0,5, если мы устранимъ теченіе вдоль стѣнки  $NN_2$ , ибо тогда  $v_x = 0$  и  $k = 0$ . Этому можно достигнуть при помощи, такъ называемаго, насадка Борда (фиг. 29), который пред-



Фиг. 29.

ставляетъ собою небольшой длины трубку  $lm$ , приставленную къ отверстию изнутри сосуда. При этомъ длина трубки не должна быть болѣе наименьшаго размѣра отверстия, ибо въ противномъ случаѣ, какъ показываетъ опытъ, струйка будетъ приставать къ ея стѣнкамъ и явленіе сжатія не будетъ имѣть мѣста.

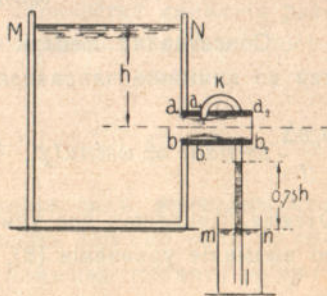
Такимъ образомъ, мы видимъ, что только въ одномъ частномъ случаѣ мы можемъ опредѣлить коэффициентъ сжатія теоретически; въ большинствѣ же случаевъ здѣсь приходится прибѣгать къ опытамъ, въ которыхъ недостатка не имѣется. Такъ напримѣръ, для отверстия въ тонкой стѣнкѣ, если только жидкость можетъ притекать къ нему безпрепятственно со всѣхъ сторонъ, коэффициентъ сжатія равенъ 0,64.

Разсмотримъ далѣе еще нѣсколько характерныхъ случаевъ истеченія.

**21. Насадокъ Вентури.** Положимъ, что къ отверстию въ вертикальной стѣнкѣ сосуда приставлена снаружи призматическая трубка (фиг. 30), длина которой удовлетворяетъ неравенствамъ

$$2a < l < 3a,$$

гдѣ  $a$  наименьшій размѣръ отверстия и  $l$  длина трубки. Это и есть насадокъ Вентури. Опытъ показываетъ, что при  $l < 2a$ , струйка вытекаетъ изъ отверстия, не касаясь стѣнокъ насадка, а при  $l \geq 3a$  становится уже слишкомъ замѣтнымъ влияніе тренія о его стѣнки.



Фиг. 30.

Изслѣдованіе истеченія черезъ насадокъ Вентури представляетъ тотъ интересъ, что здѣсь мы должны будемъ примѣнить всѣ основныя теоремы гидравлики. Сравнивая результаты теоретическаго изслѣдованія съ опытными данными, мы можемъ, такимъ образомъ, провѣрить точность основныхъ теоремъ и ихъ пригодность для рѣшенія задачъ гидравлики.



Вытекая изъ отверстія  $ab$  въ трубку, жидкость, какъ мы знаемъ изъ предыдущаго, должна сжаться. Вслѣдъ за этимъ сжатіемъ въ данномъ случаѣ, благодаря присутствію насадка, струя начинаетъ расширяться, заполняетъ все его сѣченіе и вытекаетъ изъ отверстія  $a_2b$  уже безъ сжатія.

Такимъ образомъ, мы имѣемъ здѣсь тотъ случай, который предусматривается теоремой Борда, именно, внезапное расширеніе струи; поэтому, съ цѣлью опредѣленія скорости истеченія изъ отверстія  $a_2b_2$ , мы и примѣнимъ эту теорему. Считая, что на  $MN$  давитъ атмосфера и что жидкость вытекаетъ также въ атмосферу, обозначая площадь сѣченія отверстія  $a_2b_2$  черезъ  $\omega$ , скорость истеченія—черезъ  $v$  и тѣ же величины въ сжатомъ сѣченіи  $a_1b_1$ —черезъ  $\omega_1$  и  $v_1$  и пренебрегая скоростью въ сѣченіи  $MN$ , будемъ имѣть:

$$h = \frac{v^2}{2g} + \frac{(v_1 - v)^2}{2g} \dots (1).$$

Далѣе, по условію несжимаемости

$$\omega_1 v_1 = \omega v \dots (2).$$

Исключая изъ уравненій (1) и (2)  $v_1$ , получимъ:

$$h = \frac{v^2}{2g} \left[ 1 + \left( \frac{\omega}{\omega_1} - 1 \right)^2 \right] \dots (3),$$

откуда, замѣчая, что коэффициентъ сжатія на основаніи предыдущаго  $= 0,64$ , имѣемъ:

$$v = 0,85 \sqrt{2gh} \dots (4).$$

Опытнымъ путемъ Вентури нашель:

$$v = 0,82 \sqrt{2gh} \dots (5).$$

Разница между двумя коэффициентами обусловливается главнымъ образомъ потерями на треніе о стѣнки сосуда и насадка, которыхъ мы не принимали при нашемъ выводѣ во вниманіе. Отсюда можно заключить, что теорема Борда приводитъ къ достаточно точнымъ результатамъ.

Опредѣлимъ теперь давленіе въ сжатомъ сѣченіи  $a_1b_1$ . Для этой цѣли примѣнимъ къ сѣченіямъ  $MN$  и  $a_1b_1$  уравненіе Д. Бернулли.

$$h + \frac{p_0}{\Delta} = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\Delta} \dots (6),$$

гдѣ  $p_0$ —давленіе атмосферы и  $p_1$ —давленіе въ сѣченіи  $a_1b_1$ . Отсюда, принимая во вниманіе уравненія (2) и (5), найдемъ:

$$\frac{p_0 - p_1}{\Delta} = 0,75h \dots (7),$$

т. е. высота давленія въ сжатомъ сѣченіи на  $0,75h$  меньше высоты атмосфернаго давленія. Этотъ результатъ былъ также провѣренъ Вентури: въ его опытѣ жидкость поднялась въ трубкѣ  $kl$  надъ уровнемъ  $mn$  на высоту, равную  $0,741h$ . Отсюда мы вторично (§ 20) можемъ заключить о достаточной точности уравненія Д. Бернулли.

**22. Коническіе насадки.** Если-бы мы придали насадку форму сжатой струи (фиг. 31), то, понятно, что для такого насадка коэффициентъ расхода равнялся бы коэффициенту скорости, ибо здѣсь нѣтъ причинъ для сжатія. Это подтверждается опытами Вейсбаха и Микеллотти.

По Вейсбаху въ такомъ случаѣ:

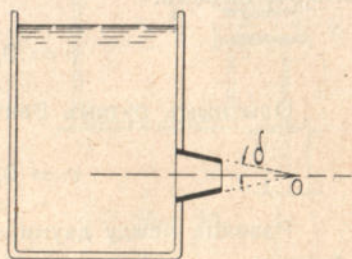
$$\mu = 0,965—0,97$$

а по Микеллотти

$$\mu = 0,983.$$

Если бы вмѣсто предыдущаго насадка мы взяли просто сходящійся конусъ, то, очевидно, при нѣкоторомъ углѣ  $2\delta$  (фиг. 32) въ вершинѣ получили бы приблизительно тѣ же результаты. Дѣйстви-тельно, изъ опытовъ Д'Обюиссона и Ка-стеля выяснилось, что

$$\text{при } 2\delta = 13^{\circ}24' \quad \mu = 0,946,$$



Фиг. 32.

а при углахъ большихъ, когда насадокъ приближается къ отверстию въ тонкой стѣнкѣ, и при углахъ меньшихъ, когда насадокъ приближается къ насадку Вентури, коэффициентъ расхода получаетъ меньшія значенія.



Зависимость  $\mu$  от  $\delta$  достаточно хорошо выражается формулой Цейнера, которая составлена главным образом по опытам Вейсбаха. Формула эта имѣетъ слѣдующій видъ:

$$\mu = \mu_{1/2\pi} (1 + 0,33214 \cos^3 \delta + 0,1667 \cos^4 \delta)$$

гдѣ  $\mu_{1/2\pi}$  — коэффициентъ расхода для отверстия въ тонкой стѣнкѣ; при этомъ замѣтимъ, что формула эта обнимаетъ всякія значенія  $\delta$  отъ нуля до  $\pi$ . Такъ на примѣръ (фиг. 33), въ 1 случаѣ  $\delta = 180^\circ$ , во 2 —  $\delta > 90^\circ$ , въ третьемъ — отверстие въ тонкой стѣнкѣ —  $\delta = 90^\circ$ , въ 4-омъ —  $\delta < 90^\circ$  и въ 5-омъ —  $\delta = 0$ .

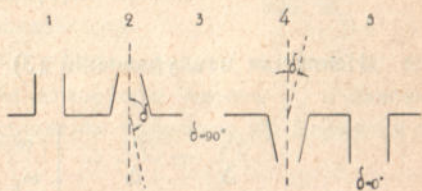
Внѣшніе коническіе расходящіеся насадки представляютъ нѣкоторую особенность, поэтому мы и остановимся на нихъ нѣсколько подробнѣе.

Допустимъ, что въ началѣ насадокъ имѣетъ форму сжатой струи (фиг. 34), а затѣмъ постепенно расширяется. Въ виду того, что здѣсь нѣтъ причинъ для сжатія, струя будетъ вытекать полнымъ сѣченіемъ  $ab$ . Обозначая площадь отверстия  $ab$  черезъ  $\omega$ , скорость истечения черезъ  $v$  и расходъ черезъ  $Q$ , получимъ:

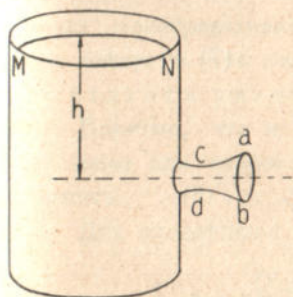
$$v = \varphi \sqrt{2gh} \dots (1)$$

$$\text{и } Q = \varphi \omega \sqrt{2gh} \dots (2).$$

Изъ уравненія (2) можно было бы на первый взглядъ сдѣлать заключеніе, что расширяя насадокъ до бесконечности, можно до такой же степени увеличивать и расходъ. Однако такое заключеніе было бы совершенно неправильно. Во-первыхъ, увеличивая размѣры сѣченія  $ab$ , мы не можемъ уже считать напоръ  $h$  постояннымъ для всѣхъ его элементовъ, во-вторыхъ, при дальнѣйшемъ удлиненіи насадки, связанномъ съ его расширеніемъ, будутъ появляться значительныя потери на треніе и, въ-третьихъ, — что является самымъ существеннымъ, — по мѣрѣ увеличенія отверстия  $ab$ , давленіе въ сѣченіи  $cd$  будетъ падать и приближаться къ нулю. Какъ только оно достигнетъ такого предѣла, струйка разорвется и расходъ перестанетъ



Фиг. 33.



Фиг. 34.

увеличиваться. Чтобы доказать справедливость послѣдняго положенія, примѣнимъ къ сѣченіямъ  $ab$  и  $cd$  уравненіе Д. Бернулли. Обозначая давленіе въ сѣченіи  $cd$  черезъ  $p_1$ , скорость черезъ  $v_1$ , площадь его черезъ  $\omega_1$  и давленіе атмосферы черезъ  $p_0$ , получимъ:

$$\frac{p_1}{\Delta} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_0}{\Delta} + \frac{v^2}{2g} \dots (3)$$

$$\text{и } \omega_1 v_1 = \omega v \dots (4).$$

Исключая изъ уравненій (3) и (4)  $v_1$ , найдемъ:

$$\frac{p_1}{\Delta} = \frac{p_0}{\Delta} - \left[ \frac{\omega^2}{\omega_1^2} - 1 \right] \frac{v^2}{2g} \dots (5).$$

Отсюда и видно, что съ возрастаніемъ  $\omega$  при данномъ  $\omega_1$  давленіе  $p_1$  понижается. Чтобы найти предѣльное значеніе  $\omega$  и  $Q$ , примѣнимъ къ сѣченіямъ  $MN$  и  $cd$  уравненіе Д. Бернулли и положимъ въ немъ  $p_1 = 0$ ; тогда будемъ имѣть наибольшее значеніе для  $v_1$ :

$$v_1 = \varphi \sqrt{2g \left( h + \frac{p_0}{\Delta} \right)} \dots (6).$$

Отсюда, пользуясь уравненіями (2) и (4), найдемъ наибольшія значенія для  $\omega$  и  $Q$ .

$$\omega = \omega_1 \frac{\sqrt{2g \left( h + \frac{p_0}{\Delta} \right)}}{\sqrt{2gh}} \dots (7)$$

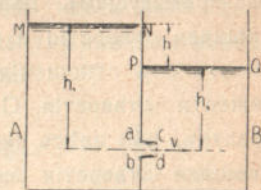
$$\text{и } Q = \varphi \omega_1 \sqrt{2g \left( h + \frac{p_0}{\Delta} \right)} \dots (8)$$

### 23. Истеченіе изъ отверстія въ тонкой стѣнкѣ въ жидкость.

Предположимъ, что жидкость изъ сосуда  $A$  (фиг. 35) черезъ отверстіе  $ab$  перетекаетъ въ сосудъ  $B$ , содержащій ту же самую жидкость. Найдемъ скорость истеченія, т. е. скорость въ сжатомъ сѣченіи  $cd$ , въ



предположеніи, что уровни  $MN$  и  $PQ$  соотвѣтственнымъ добавленіемъ и удаленіемъ жидкости поддерживаются на одной и той же высотѣ. Поставленную задачу мы можемъ разрѣшить или при помощи уравненія Д. Бернулли, примѣняя его къ сѣченіямъ  $MN$  и  $cd$ , или при помощи уравненія Борда, примѣняя его къ сѣченіямъ  $MN$  и  $PQ$  и замѣчая, что высота скорости  $v$  теряется полностью, вслѣдствіе удара струйки о неподвижную жидкость въ сосудѣ  $B$ . Въ видахъ наилучшаго уясненія способовъ примѣненія обоихъ уравненій рѣшимъ задачу и тѣмъ и другимъ способомъ. Обозначая давленіе атмосферы черезъ  $p_0$  и давленіе въ ц. т. сѣченія  $cd$  черезъ  $p$ , на основаніи уравненія Д. Бернулли получимъ:



Фиг. 35.

$$\frac{p_0}{\Delta} + h_1 = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\Delta} \dots \dots (1).$$

Полагая, что движеніе жидкости внутри сосуда  $B$  совершается очень медленно, мы можемъ съ большой точностью допустить, что давленіе внутри его слѣдуетъ законамъ гидростатики, поэтому

$$p = \Delta h_2 + p_0 \dots \dots (2).$$

Подставляя это выраженіе въ уравненіе (1), найдемъ:

$$v = \sqrt{2gh} \dots \dots (3).$$

Примѣняя теперь уравненіе Борда къ сѣченію  $MN$  и  $PQ$ , получимъ:

$$\frac{p_0}{\Delta} + h = \frac{p_0}{\Delta} + \frac{v^2}{2g} \dots \dots (4),$$

откуда непосредственно приходимъ къ выраженію (3), изъ котораго слѣдуетъ, что скорость истеченія въ жидкость соотвѣтствуетъ разности уровнейъ въ сосудахъ.

Понятно, что и здѣсь, какъ и въ случаѣ истеченія въ воздухъ, выраженіе для скорости должно быть исправлено опытнымъ коэффициентомъ.

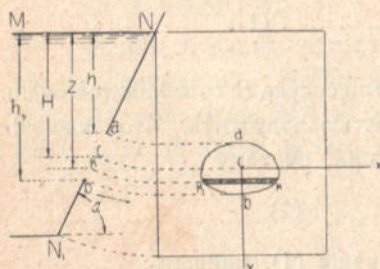
Для опредѣленія расхода мы должны составить произведеніе:

$$Q = \varphi a \omega \sqrt{2gh} \dots \dots (5),$$

гдѣ  $\varphi$ —коэффициентъ скорости,  $\alpha$ —коэффициентъ сжатія и  $\omega$  площадь отверстія. Оказывается, что  $\varphi$  и  $\alpha$  имѣютъ здѣсь тѣ же значенія, что и въ соотвѣтственныхъ случаяхъ истеченія въ воздухъ.

**24. Истеченіе изъ отверстій конечныхъ размѣровъ.** При истеченіи въ жидкость, какъ легко заключить изъ того, что было изложено въ предыдущемъ параграфѣ, расходъ жидкости зависитъ только отъ площади отверстія и разности уровней жидкости въ сосудахъ и не зависитъ отъ отношенія размѣровъ отверстія къ напору надъ центромъ тяжести отверстія. Совсѣмъ иначе обстоитъ дѣло при истеченіи въ воздухъ, ибо здѣсь скорость протеканія черезъ какой-нибудь элементъ площади отверстія зависитъ отъ глубины погруженія его центра тяжести подъ уровнемъ жидкости. Если размѣры отверстія значительны, то тогда напоръ и скорость истеченія для различныхъ элементовъ могутъ измѣняться въ широкихъ предѣлахъ, что должно быть принято во вниманіе при опредѣленіи расхода.

Допустимъ, что мы хотимъ опредѣлить расходъ черезъ отверстіе  $ab$  (фиг. 36), глубина погруженія ц. т. котораго подъ уровнемъ  $MN$  равна  $H$ .



Фиг. 36.

Выдѣлимъ въ этомъ отверстіи элементъ  $kk$ , для котораго напоръ будетъ равенъ  $z$ . Для простоты мы можемъ представить элементъ въ видѣ щели во всю ширину отверстія, имѣющей безконечно малую высоту  $dz$ . Очевидно, что скорость протеканія жидкости черезъ такую щель будетъ:

$$v = \sqrt{2gz} \dots (1)$$

и расходъ

$$dq = \mu b \frac{dz}{\sin \alpha} \sqrt{2gz} \dots (2),$$

гдѣ  $b$ —ширина щели. Чтобы получить расходъ черезъ все отверстіе надо выраженіе (2) проинтегрировать въ предѣлахъ измѣненія  $z$  отъ  $h_1$  до  $h_2$ . Такимъ образомъ,

$$q = \frac{\mu}{\sin \alpha} \int_{h_1}^{h_2} \frac{b dz}{\sqrt{2gz}} \sqrt{2gz} \dots (3).$$

Положимъ для примѣра, что мы имѣемъ въ вертикальной стѣнкѣ прямоугольное отверстіе, шириной  $b$ ; тогда

$$q = \mu b \sqrt{2g} \left[ h_2^{3/2} - h_1^{3/2} \right] \dots (4).$$



Но выраженію (2) удобнѣе придать другой видъ, чтобы сдѣлать выводъ, имѣющій общее значеніе для отверстій всякой формы.

Отнесемъ отверстіе къ прямоугольнымъ осямъ координатъ  $xoy$ , лежащимъ въ плоскости стѣнки съ началомъ въ центрѣ тяжести отверстія и съ горизонтальной осью  $ox$ . Тогда, очевидно,

$$dy = \frac{dz}{\sin\alpha} \quad \text{и} \quad z = H + y\sin\alpha$$

Подставляя эти значенія  $dz$  и  $z$  въ выраженіе (2), получимъ:

$$dq = \mu \sqrt{2gH} b \left[ 1 + \frac{y}{H} \sin\alpha \right]^{1/2} dy \dots (5).$$

Разложимъ выраженіе въ скобкахъ по стокрѣ Ньютона. Мы въ правѣ это сдѣлать, ибо  $\frac{y}{H} \sin\alpha < 1$ . Если притомъ мы ограничимся тремя членами, то получимъ:

$$dq = \mu \sqrt{2gH} b \left[ 1 + \frac{y}{2H} \sin\alpha - \frac{1}{8} \frac{y^2}{H^2} \sin^2\alpha \right] dy \dots (6).$$

и

$$q = \mu \sqrt{2gH} \left[ \int b dy + \frac{\sin\alpha}{2H} \int by dy - \frac{1}{8} \frac{\sin^2\alpha}{H^2} \int by^2 dy \right] \dots (7),$$

гдѣ интегралы должны быть распространены на всю площадь отверстія. Очевидно, что первый изъ нихъ и даетъ эту площадь, второй, дающій статическій моментъ этой площади, относительно оси  $ox$ , равенъ нулю, ибо ось  $ox$  проходитъ черезъ центръ тяжести, и третій—моментъ инерціи той же площади относительно оси  $ox$ . Обозначая площадь отверстія черезъ  $\omega$  и радіусъ инерціи черезъ  $r$ , получимъ:

$$q = \mu \sqrt{2gH} \omega \left[ 1 - \frac{1}{8} \sin^2\alpha \frac{r^2}{H^2} \right] \dots (8).$$

Отсюда можно сдѣлать заключеніе, что для опредѣленія расхода черезъ отверстія значительныхъ размѣровъ въ концѣ концовъ можно пользоваться просто выраженіемъ:

$$q = \mu \omega \sqrt{2gH} \dots (9),$$

ибо въ большинствѣ случаевъ выраженіе въ скобкахъ весьма мало отличается отъ единицы, тѣмъ болѣе, что коэффициентъ  $\mu$ , какъ въ томъ такъ и въ другомъ случаѣ, опредѣляется опытнымъ путемъ.

Однако же, если подъ руками нѣтъ опытныхъ данныхъ, расходъ съ нѣкоторымъ приближеніемъ можно вычислить и по формулѣ (8), принимая въ случаѣ притеканія жидкости со всѣхъ сторонъ  $\mu = 0.62$  и дѣлая поправки въ противномъ случаѣ, какъ это будетъ указано ниже (§ 28).

Для прямоугольнаго отверстія шириной  $b$  и высотой  $e$ , формула (8) принимаетъ слѣдующій видъ:

$$q = \mu b e \sqrt{2gH} \left( 1 - \frac{1}{96} \frac{e^2}{\sin^2 \varphi} \frac{e^2}{H^2} \right) \dots \dots (9)$$

и для круга радіуса  $\rho$ :

$$q = \mu \pi \rho^2 \sqrt{2gH} \left( 1 - \frac{1}{32} \frac{\rho^2}{\sin^2 \varphi} \frac{\rho^2}{H^2} \right) \dots \dots (10).$$

Во всѣхъ предыдущихъ выводахъ мы пренебрегали скоростью жидкости въ сосудѣ. Если же скорость эта  $v_0$  не очень мала, то для скорости истечения, при одинаковомъ давленіи на поверхность жидкости и въ пространствѣ, въ которое струя вытекаетъ, мы будемъ имѣть слѣдующее выраженіе:

$$v = \sqrt{2g \left( z + \frac{v_0^2}{2g} \right)} = \sqrt{2g(z + k)} \dots \dots (11),$$

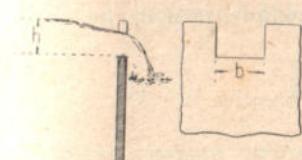
гдѣ  $k = \frac{v_0^2}{2g}$  есть величина линейная, т. е. вліяніе скорости сводится какъ бы къ увеличенію разстоянія центра тяжести отверстія отъ свободной поверхности. Такимъ образомъ, напримѣръ, для расхода черезъ прямоугольное отверстие, принимая во вниманіе скорость въ сосудѣ, мы имѣли бы, вмѣсто выраженія (11), слѣдующее выраженіе:

$$q = \frac{2}{3} \mu \sqrt{2g} \left[ (h_1 + k)^{3/2} - (h_2 + k)^{3/2} \right] b \dots \dots (12).$$

**25. Водосливы въ тонкой стѣнкѣ.** Водосливомъ называется отверстіе, преимущественно прямоугольное, вырѣзанное въ верху стѣнки и не имѣющее, слѣдовательно, верхняго ребра (фиг. 35). Такой водосливъ разсматриваютъ, какъ прямоугольное отверстіе, для котораго



$h_1 = h$  и  $h_2 = 0$ . Такимъ образомъ, по формулѣ (12) предыдущаго параграфа будемъ имѣть:



Фиг. 37.

$$q = \frac{2}{3}\mu \sqrt{2g} b \left[ (h_1 + k)^{3/2} - k^{3/2} \right] \dots (1)$$

или, при  $k = 0$ :

$$q = \frac{2}{3}\mu b h \sqrt{2gh} \dots (2).$$

Здѣсь въ среднемъ

$$\frac{2}{3}\mu = 0,4.$$

Но однако же на величину этого коэффициента имѣютъ вліяніе многіе факторы, какъ то: отношеніе ширины водослива къ ширинѣ потока, наклонъ стѣнки къ горизонту и т. п.; поэтому для болѣе точнаго опредѣленія расхода приходится обращаться къ специальнымъ опытамъ, въ которыхъ недостатка не имѣется.

Разсмотрѣнный нами водосливъ называется водосливомъ совершеннымъ. Если порогъ, т. е. горизонтальное ребро водослива, лежитъ ниже уровня нижней воды (фиг. 38), то водосливъ называется несовершеннымъ. По Dubuat расходъ въ этомъ случаѣ разбивается на двѣ части: расходъ черезъ совершенный водосливъ, глубиною  $h - \eta$ , и черезъ прямоугольное отверстіе, высоту  $\eta$ . Обозначая ширину водослива черезъ  $b$ , получимъ:



Фиг. 38.

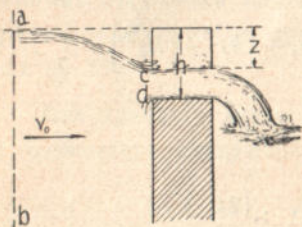
$$q = \frac{2}{3}\mu b \sqrt{2g} \left[ (h - \eta + k)^{3/2} - k^{3/2} \right] + \mu_1 b \eta \sqrt{2g(h - \eta + k)} \dots (3).$$

Пренебрегая скоростью потока, т. е. полагая  $k = 0$ , будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} q &= \frac{2}{3}\mu b (h - \eta) \sqrt{2g(h - \eta)} + \mu_1 \eta \sqrt{2g(h - \eta)} = \\ &= b \left[ \frac{2}{3}\mu (h - \eta) + \mu_1 \eta \right] \sqrt{2g(h - \eta)} \dots (4) \end{aligned}$$

**26. Водосливы въ толстой стѣнкѣ.** Если порогъ водослива настолько широкъ, что жидкость располагается надъ нимъ слоемъ равномерной толщины (фиг. 39), результатъ получается иной, чѣмъ въ предыдущемъ случаѣ. Имѣя въ виду параллелизмъ слоевъ въ сѣченіяхъ

$ab$  и  $cd$  и предполагая скорости въ этихъ сѣченіяхъ постоянными для всѣхъ струекъ и равными соотвѣтственно  $v_0$  и  $v$ , по уравненію Д. Бернулли, примененному къ точкамъ  $a$  и  $c$ , найдемъ:



Фиг. 39.

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g} + z \dots \dots (1)$$

откуда

$$v = \sqrt{2g(z+k)} \dots \dots (2),$$

$$\text{гдѣ } k = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Обозначая ширину водослива черезъ  $b$ , на основаніи уравненія (2) легко найдемъ выраженіе для расхода:

$$q = \mu b (h-z) \sqrt{2g(z+k)} \dots \dots (3),$$

или, пренебрегая  $k$ :

$$q = \mu b (h-z) \sqrt{2gz} \dots \dots (4).$$

Въ этихъ выраженіяхъ намъ неизвѣстна величина  $z$ —пониженіе уровня воды надъ порогомъ.

Разсматривая выраженіе (4), легко замѣтить, что  $q$  обращается въ нуль при  $z = h$  и при  $z = 0$ . Отсюда слѣдуетъ, что между этими двумя значеніями существуетъ такое значеніе для  $z$ , которое обращаетъ  $q$  въ maximum. Опытъ показываетъ, что  $z$  и получаетъ какъ разъ эту величину, поэтому для опредѣленія расхода, надо въ выраженіе (3) подставить значеніе  $z$ , обращающее его въ maximum. Чтобы найти эту величину  $z$ , приравняемъ производную отъ  $q$  по  $z$  нулю; получимъ:

$$\frac{dq}{dz} = -\mu b \sqrt{2gz} + \mu b (h-z) \frac{2g}{2\sqrt{2gz}}.$$

Откуда

$$-z^{1/2} + \frac{h}{2} z^{-1/2} - \frac{1}{2} z^{1/2} = 0$$

и

$$z = \frac{h}{3} \dots \dots (5).$$

Подобнымъ образомъ, на основаніи тѣхъ же соображеній, для перваго случая найдемъ:

$$z = \frac{h}{3} - \frac{2}{3} k$$



такъ что формулы (3) и (4) переписутся слѣдующимъ образомъ:

$$q = \mu,0,385 b (h + k) \sqrt{2g(h + k)} \dots (6)$$

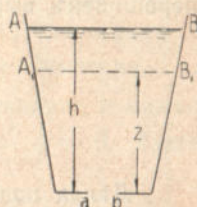
и

$$q = \mu,0,385 bh \sqrt{2gh} \dots (7).$$

Здѣсь можно принять, что въ среднемъ

$$\mu = 0,9.$$

**27. Вытекание жидкости изъ отверстій при перемѣнномъ уровнѣ.** До сихъ поръ мы предполагали, что уровень жидкости въ сосудѣ при помощи прибавленія такого же количества, какое вытекаетъ изъ отверстія, поддерживается на постоянной высотѣ надъ отверстіемъ. Если мы предположимъ теперь, что количество прибавляемой въ секунду жидкости не равно количеству, вытекающему изъ отверстія, то уровень будетъ или опускаться или подниматься. Пусть въ начальный моментъ уровень находился на высотѣ  $h$  надъ отверстіемъ (фиг. 40) и черезъ нѣкоторое время понизился до высоты  $z$ . Чтобы найти скорость истечения изъ отверстія  $ab$ , мы должны были бы воспользоваться уравненіемъ (10, § 17), ибо здѣсь мы имѣемъ дѣло съ теченіемъ неустановившимся. Но если предположить, что поперечные размѣры сосуда весьма значительны по сравненію съ размѣрами отверстія, то тогда интеграломъ въ первой части указаннаго уравненія можно пренебречь, ибо въ этомъ случаѣ измѣненія скоростей въ различныхъ сѣченіяхъ сосуда будутъ весьма ничтожны, и тогда въ предположеніи, что жидкость вытекаетъ въ атмосферу, и свободная ея поверхность находится подъ такимъ же давленіемъ, мы для разсматриваемаго момента получимъ:



Фиг. 40.

$$v = \sqrt{2gz} \dots (1).$$

Обозначая площадь отверстія черезъ  $\omega$ , мы легко найдемъ, что въ теченіе слѣдующаго безконечно-малаго промежутка времени, изъ отверстія вытечетъ количество:

$$dQ = \mu \omega \sqrt{2gz} dt \dots (2).$$

Если, далѣе, мы обозначимъ количество приливаемой въ секунду жидкости черезъ  $q$  и площадь сѣченія  $A_1B_1$ —черезъ  $\Omega$ , то легко найдемъ:

$$\mu \omega \sqrt{2gz} dt - q dt = - \Omega dz \dots (3),$$

откуда

$$dt = \frac{\Omega d\mathcal{L}}{q - \mu\omega \sqrt{2gz}} \dots (4).$$

Отсюда можно найти время  $t$ , въ теченіе котораго жидкость понизится отъ уровня  $AB$  до уровня  $A_1B_1$  (фиг. 40):

$$t = \int_h^z \frac{\Omega dz}{q - \mu\omega \sqrt{2gz}} \dots (5).$$

Для того, чтобы произвести интегрированіе, надо, очевидно, знать зависимость между  $\Omega$  и  $z$ .

Разсмотримъ для примѣра случай призматическаго сосуда, т. е. предположимъ, что  $\Omega = const.$

Полагая для сокращенія письма:

$$\frac{\Omega}{\mu\omega \sqrt{2g}} = A \quad \text{и} \quad \frac{q}{\mu\omega \sqrt{2g}} = \sqrt{k},$$

перепишемъ выраженіе (5) въ такомъ видѣ:

$$t = -A \int_z^h \frac{dz}{\sqrt{k} - \sqrt{z}} \dots (6).$$

Дѣлая положеніе, что

$$\sqrt{k} - \sqrt{z} = y,$$

мы легко найдемъ:

$$\begin{aligned} - \int \frac{dz}{\sqrt{k} - \sqrt{z}} &= 2 \left[ \sqrt{k} \int \frac{dy}{y} - \int dy \right] \\ &= 2 \left( \sqrt{k} \lg y - y \right) + const., \end{aligned}$$

такъ что

$$t = 2A \left[ \sqrt{k} \lg \frac{\sqrt{k} - \sqrt{h}}{\sqrt{k} - \sqrt{z}} + \sqrt{h} - \sqrt{z} \right] \dots (7).$$

Предполагая, что  $q = 0$ , изъ уравненія (7) легко найдемъ:

$$t = \frac{2\Omega}{\mu\omega \sqrt{2g}} \left( \sqrt{h} - \sqrt{z} \right) \dots (8).$$



Чтобы опредѣлить время  $T$  полного опорожненія сосуда, надо (въ формулѣ 8) положить  $z = 0$ ; тогда

$$T = \frac{2\Omega}{\mu\omega \sqrt{2g}} \sqrt{h} \dots (9).$$

Формулы (8) и (9) легко провѣрить при помощи опыта. Оказывается, что первая изъ этихъ формулъ даетъ гораздо лучшіе результаты, чѣмъ послѣдняя. Это объясняется тѣмъ, что при малой глубинѣ жидкости въ сосудѣ надъ отверстіемъ образуется воронка, такъ что условія теченія жидкости будутъ сильно отличаться отъ предполагаемыхъ при выводѣ формулы (9).

Формулу (9) можно выразить при помощи слѣдующаго положенія: время опорожненія призматическаго сосуда вдвое болѣе времени истеченія того же количества жидкости при постоянномъ уровнѣ. Дѣйствительно, если уровень поддерживается на высотѣ  $h$ , то время истеченія объема  $\Omega h$  будетъ:

$$T_0 = \frac{\Omega h}{\mu\omega \sqrt{2gh}} = \frac{\Omega}{\mu\omega \sqrt{2g}} \sqrt{h}.$$

Въ случаѣ сосуда неправильной формы (фиг. 41) интеграль въ формулѣ (5) можно взять приблизительно по правилу Симпсона.

Положимъ, что намъ надо опредѣлить время даннаго пониженія уровня въ сосудѣ  $A$  (фиг. 41). Предполагая, что  $q = 0$ , будемъ имѣть (форм. 5).

$$t = \frac{1}{\mu\omega \sqrt{2g}} \int_{h_n}^{h_0} \frac{\Omega dz}{\sqrt{z}}$$



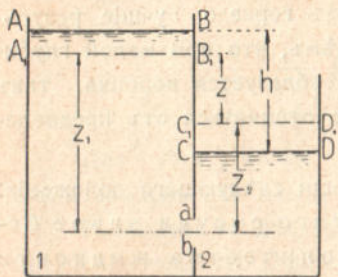
Фиг. 41.

Положимъ далѣе, что

уровню  $h_0$  соотвѣтствуетъ площадь поперечнаго сѣченія сосуда  $\Omega_0$ ,  
 "  $h_1$  " " " " "  $\Omega_1$ ,  
 "  $h_n$  " " " " "  $\Omega_n$ ,  
 тогда по правилу Симпсона

$$t = \frac{1}{\mu\omega \sqrt{2g}} \frac{h_0 - h_n}{3n} \left[ \frac{\Omega_0}{\sqrt{h_0}} + \frac{\Omega_n}{\sqrt{h_n}} + 4 \left( \frac{\Omega_1}{\sqrt{h_1}} + \frac{\Omega_3}{\sqrt{h_3}} + \dots \right) + 2 \left( \frac{\Omega_2}{\sqrt{h_2}} + \frac{\Omega_4}{\sqrt{h_4}} + \dots \right) \right] \dots (10).$$

При этомъ  $n$  должно быть четнымъ числомъ и разности  $(h_1 - h_0)$ ,  $(h_2 - h_1)$  и т. д. равны между собою. Время спорожненія по формулѣ Симпсона опредѣлить, очевидно, нельзя, ибо при  $h_n = 0$  подынтегральная функція обращается въ бесконечность. Рассмотримъ теперь самый простой случай истеченія при переменномъ уровнѣ въ жидкость, когда оба сосуда (фиг. 42) имѣютъ призматическую форму.



Фиг. 42.

Если площадь отверстія равна  $\omega$ , то за слѣдующій бесконечно малый промежутокъ времени изъ перваго сосуда во второй перетечетъ количество жидкости:

$$dQ = \mu \omega \sqrt{2gz} dt \dots (12).$$

Обозначая площадь поперечнаго сѣченія сосудовъ соотвѣтственно черезъ  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , легко найдемъ, что то же количество жидкости можетъ быть выражено еще слѣдующими двумя способами:

$$dQ = -\Omega_1 dz_1 = \Omega_2 dz_2 \dots (13 \text{ и } 14).$$

Замѣчая, кромѣ того, что

$$z = z_1 - z_2 \dots (15) \text{ и } dz = dz_1 - dz_2 \dots (16),$$

изъ уравненій (13, 14 и 16) найдемъ:

$$dQ = -\frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Omega_1 + \Omega_2} dz \dots (17).$$

Сравнивая (12) и (17), получимъ:

$$\begin{aligned} t &= \dots \frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Omega_1 + \Omega_2} \frac{1}{\mu \omega \sqrt{2g}} \int_h^z \frac{dz}{\sqrt{z}} = \\ &= \frac{2 \Omega_1 \Omega_2}{\Omega_1 + \Omega_2} \frac{1}{\mu \omega \sqrt{2g}} (\sqrt{h} - \sqrt{z}) \dots (18). \end{aligned}$$



Полагая  $\Omega_1 = \infty$ , т. е. что первый сосудъ безконечно великъ по сравненію со вторымъ, получимъ:

$$t = \frac{2\Omega_2}{\mu\omega\sqrt{2g}} (\sqrt{h} - \sqrt{z}) \dots (19).$$

Полагая  $\Omega_2 = \infty$ , будемъ имѣть:

$$t = \frac{2\Omega_1}{\mu\omega\sqrt{2g}} (\sqrt{h} - \sqrt{z}) \dots (20).$$

Если требуется опредѣлить время, въ теченіе котораго уровни въ сосудахъ сравниваются, надо во всѣхъ предыдущихъ формулахъ положить  $z = 0$ . Въ этомъ предположеніи для всѣхъ трехъ случаевъ (18, 19 и 20) время сравненія уровней будетъ вдвое болѣе времени истеченія того же количества при постоянной разности уровней.

**28. Сжатіе неполное и несовершенное.** Разсматривая различные случаи истеченія жидкости изъ отверстій въ тонкой стѣнкѣ, мы предполагали до сихъ поръ, что жидкость притекаетъ къ отверстию со всѣхъ сторонъ. Мы видѣли, что струйки, притекающія къ отверстию по стѣнкѣ, измѣняя свое направленіе на прямой уголъ, даютъ на струйки, непосредственно къ нимъ прилегающія; эти послѣднія, измѣняя свое направленіе на уголъ нѣсколько меньшій прямого, даютъ на слѣдующія струйки и т. д. При этомъ давленіе повышается снаружи внутрь струйки, ибо каждая струйка, оказывая давленіе на послѣдующую—вслѣдствіе измѣненія своего направленія, передаетъ еще на нее давленіе предыдущей. Такимъ образомъ, понятно, что если разстояніе центра тяжести отверстия отъ свободной поверхности есть  $h$ , то въ предположеніи одинаковаго внѣшняго давленія, и на поверхности жидкости, и въ пространствѣ, куда струя вытекаетъ, скорость внѣшнихъ струекъ въ отверстіи будетъ равна  $\sqrt{2gh}$ , а скорость внутреннихъ, постепенно убывая отъ периферіи къ центру, будетъ  $< \sqrt{2gh}$ . Но затѣмъ далѣе, по мѣрѣ выпрямленія струекъ, скорость ихъ увеличивается и онѣ утоняются. Когда же, наконецъ, всѣ онѣ приобрѣтутъ скорость, равную  $\sqrt{2gh}$ , нормальное сѣченіе всей струи получитъ наименьшіе размѣры. Отношеніемъ площади этого сѣченія къ площади отверстия и измѣряется, какъ мы видѣли выше, величина сжатія.

Правильность такого объясненія явленія сжатія прекрасно подтверждается тѣми случаями истеченія черезъ насадки, которые мы разсматривали въ предыдущихъ параграфахъ. Мы видѣли, на примѣръ, что сжатіе при истеченіи черезъ коническіе насадки, гдѣ внѣшнія струйки

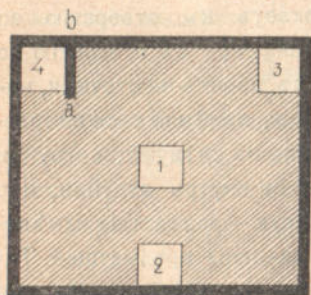


измѣняютъ направленіе, на уголъ значительно меньше прямого, коэффициентъ сжатія меньше, чѣмъ при истеченіи изъ отверстія въ тонкой стѣнкѣ. Напротивъ, коэффициентъ сжатія при истеченіи черезъ насадокъ Борда, гдѣ внѣшнія струйки измѣняютъ свое направленіе на  $180^\circ$ , меньше коэффициента при истеченіи изъ отверстія въ тонкой стѣнкѣ.

Дальнѣйшее подтвержденіе приведеннаго выше объясненія явленія сжатія можетъ быть получено опытной провѣркой тѣхъ слѣдствій, которыя изъ него могутъ быть получены.

Если, напримѣръ, имѣя отверстіе въ тонкой стѣнкѣ, мы такъ или иначе воспрепятствуемъ притеканію жидкости къ части его периметра, то должны въ силу сказаннаго выше получить меньшее сжатіе, чѣмъ въ случаѣ притеканія со всѣхъ сторонъ. Опытъ подтверждаетъ такое заключеніе.

Положимъ, что мы имѣемъ въ днѣ сосуда, имѣющаго въ планѣ форму прямоугольника (фиг. 43), четыре одинаковыхъ квадратныхъ отверстія: первое по срединѣ, второе у одной изъ боковыхъ стѣнокъ, третье въ углу и четвертое также въ углу, причемъ къ одной изъ его свободныхъ сторонъ приставлена стѣнка



Фиг. 43.

*ab*, простирающаяся вверхъ выше свободной поверхности. Очевидно, что къ отверстию 1 жидкость можетъ притекать со всѣхъ сторонъ, къ отверстию 2—съ трехъ сторонъ, къ отверстию 3—съ двухъ сторонъ и къ отверстию 4—съ одной стороны. Опытъ показываетъ, что наибольшее сжатіе будетъ имѣть мѣсто при вытеканіи изъ перваго отверстія, а наименьшее—изъ четвертаго. По сравненію

съ первымъ случаемъ сжатіе въ случаяхъ 2, 3 и 4 называется сжатіемъ неполнымъ.

Если обозначимъ вообще черезъ  $n$  отношеніе той части периметра отверстія, по которой устранено сжатіе, къ полному периметру, то по опытамъ Weisbach'a и Bidone'a коэффициентъ расхода  $\mu_n$  при неполномъ сжатіи находится въ слѣдующемъ отношеніи къ коэффициенту расхода  $\mu$  при полномъ сжатіи для такого же отверстія и при тѣхъ же условіяхъ:

$$\mu_n = \mu (1 + 0,145n).$$

Допустимъ далѣе, что отверстіе имѣетъ размѣры сравнимые съ размѣрами плоской стѣнки, въ которой оно помѣщается. Въ такомъ случаѣ мы не можемъ ожидать, что крайнія струйки, притекая къ отвер-



стію, успѣють принять направленіе стѣнки; а если это такъ, то онѣ будутъ измѣнять свое направленіе на уголъ меньшій прямого и сжатіе не будетъ достигать того предѣла, какъ въ случаѣ малаго отверстія. Опытъ опять таки подтверждаетъ и это слѣдствіе изъ даннаго выше объясненія. Сжатіе въ этомъ случаѣ называется несовершеннымъ.

Надо думать, что въ этомъ случаѣ (фиг. 44) между внѣшними струйками и стѣнками образуется пространство мертвой воды.

Коэффициентъ расхода  $\mu_n$ , понятно, въ случаѣ несовершеннаго сжатія для того же отверстія и прочихъ равныхъ условій будетъ больше, чѣмъ тотъ же коэффициентъ  $\mu$  при полномъ сжатіи. На основаніи своихъ опытовъ Weisbach установилъ слѣдующую зависимость между этими двумя коэффициентами:

$$\mu_n = \mu (1 + l),$$

причемъ для прямоугольнаго отверстія

$$l = 0,076 (9^n - 1)$$

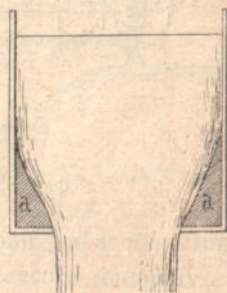
и для круглago

$$l = 0,4564 (14,821^n - 1),$$

гдѣ  $n$  отношеніе площади отверстія къ площади стѣнки, на которой отверстіе помѣщается.

**29. Протеканіе воды черезъ шлюзные камеры.** Шлюзами называютъ сооруженія, при помощи которыхъ судно съ одного уровня переводится на другой. Если рѣка мелка, то, чтобы поднять уровень воды, ее запруживаютъ въ нѣсколькихъ мѣстахъ, вслѣдствіе чего и является надобность въ сооруженіи, при помощи котораго можно было бы переводить судно съ одного уровня на другой. Если разность уровней у плотины не велика, то устраиваютъ простой шлюзъ (фиг. 45); въ противномъ случаѣ является необходимость въ устройствѣ двойного шлюза (фиг. 46).

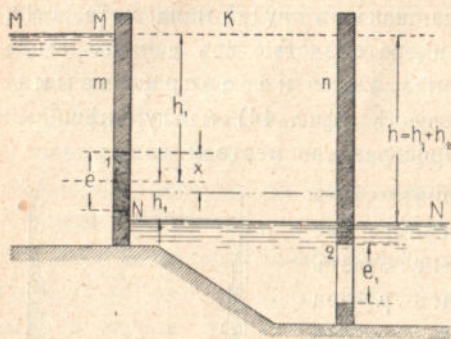
Простой шлюзъ состоитъ изъ камеры  $K$ , которая при посредствѣ двухъ воротъ можетъ быть сообщена съ верхней водой  $MM$  и нижней  $NN$ . Кромѣ того, въ каждой изъ стѣнокъ камеры имѣются прямоугольныя отверстія 1 и 2 (фиг. 45) — шлюзы, которые могутъ быть, въ случаѣ надобности, закрыты передвигающимися въ вертикальномъ направленіи щитами. Переводъ судна съ верхняго уровня на нижній совершается въ слѣдующемъ порядкѣ. Ворота въ стѣнкѣ  $n$  и шлюзъ 2



Фиг. 44.



закрываютъ и открываютъ шлюзъ 1; вода перетекаетъ черезъ это отверстіе и наполняетъ камеру  $K$  до уровня верхнихъ водъ. Какъ



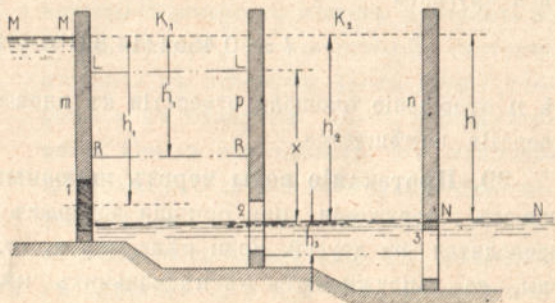
Фиг. 45.

только вода въ камерѣ  $K$  поднимается до уровня  $MM$ , ворота въ стѣнкѣ  $m$  открываютъ и судно вводятъ въ камеру. Затѣмъ ворота въ стѣнкѣ  $m$  и шлюзъ 1 закрываютъ и открываютъ шлюзъ 2; тогда вода переливается изъ камеры  $K$  въ нижнюю воду. Когда уровень въ камерѣ  $K$  опустится до уровня  $NN$ , открываютъ ворота въ стѣнкѣ  $n$  и судно выводятъ. Не трудно будетъ понять,

какимъ образомъ производится обратное перемѣщеніе судна.

Двойной шлюзъ отличается отъ простого тѣмъ, что онъ имѣетъ двѣ камеры  $K$  и  $K_1$  и трое воротъ въ стѣнкахъ  $m$ ,  $p$  и  $n$ , каждая изъ которыхъ снабжается шлюзомъ 1, 2 и 3. Въ этомъ случаѣ переводъ судна съ верхняго уровня на нижній совершается въ слѣдующемъ порядкѣ. Открываютъ шлюзъ 1; когда камера  $K_1$  наполнится до уровня

$MM$ , открываютъ ворота въ стѣнкѣ  $m$  и вводятъ судно въ камеру  $K_1$ . Ворота въ стѣнкѣ  $m$  и шлюзъ 1 закрываютъ и открываютъ шлюзъ 2; тогда вода изъ камеры  $K_1$  переливается въ камеру  $K_2$ . Какъ только уровни воды въ камерахъ сравняются, открываютъ ворота въ стѣнкѣ  $p$  и судно переводится въ камеру  $K_2$ . Затѣмъ закрываютъ ворота въ стѣнкѣ  $p$ , шлюзъ 2 и открываютъ шлюзъ 3; вода изъ камеры  $K_2$  выливается и уровень въ ней понижается до уровня нижней воды  $NN$ . Теперь остается только открыть ворота въ стѣнкѣ  $n$  и вывести судно наружу.



Фиг. 46.

При устройствѣ шлюзъ весьма важнымъ вопросомъ является вопросъ о ихъ пропускной способности, которая, очевидно, въ значительной мѣрѣ зависитъ отъ времени накопленія и опорожненія камеръ. Этотъ вопросъ мы можемъ разрѣшить на основаніи выведенныхъ раньше формулъ.

При устройствѣ шлюзъ весьма важнымъ вопросомъ является вопросъ о ихъ пропускной способности, которая, очевидно, въ значительной мѣрѣ зависитъ отъ времени накопленія и опорожненія камеръ. Этотъ вопросъ мы можемъ разрѣшить на основаніи выведенныхъ раньше формулъ.



Опредѣлимъ сначала время наполненія и опорожненія камеры  $K$  въ простомъ шлюзѣ. Тутъ мы встрѣчаемся съ тѣмъ случаемъ, когда площадь сѣченія одного изъ сосудовъ можно считать равной безконечности по сравненію съ площадью другой (участка рѣки и камеры). Наполненіе камеры  $K$  при открытомъ шлюзѣ 1 и закрытыхъ прочихъ отверстіяхъ (ворота и шлюзъ 2) можно раздѣлить на три періода.

Первый періодъ продолжается до тѣхъ поръ, пока въ камерѣ вода не достигнетъ нижняго ребра отверстія, т. е. пока вода не поднимется на высоту:

$$h_2 = \frac{e}{2},$$

гдѣ  $e$ —высота отверстія, а  $h_2$ —высота центра тяжести отверстія надъ уровнемъ нижнихъ водъ, ибо, понятно, вода въ камерѣ  $K$  передъ открытіемъ шлюза 1 должна стоять на этомъ уровнѣ; этотъ періодъ представляетъ случай истеченія въ воздухъ при постоянномъ напорѣ  $h_1$ .

Затѣмъ вода будетъ подниматься выше нижняго ребра отверстія и раздѣлять отверстіе на двѣ части съ высотами  $e - x$  и  $x$ , причемъ черезъ первую часть истеченіе происходитъ въ воду, черезъ вторую въ воздухъ. При этомъ напоръ надъ центромъ тяжести верхней части будетъ:

$$h_1 = \frac{e}{2} + \frac{x}{2}$$

и напоръ для нижней:

$$h_1 = \frac{e}{2} + x,$$

гдѣ  $x$  измѣняется отъ  $x = e$  до  $x = 0$ , когда вода достигаетъ до верхняго ребра отверстія.

Въ этотъ моментъ второй періодъ заканчивается и начинается третій періодъ, представляющій истеченіе подъ переменнымъ уровнемъ въ воду, причемъ разность уровней мѣняется отъ  $h_1 = \frac{e}{2}$  до 0.

Но такъ какъ въ концѣ концовъ всѣ результаты исправляются опытными коэффициентами, то задачу упрощаютъ, рассматривая только два періода.

1) Вода поднимается до центра тяжести сѣченія отверстія на высоту  $h_2$ , при чемъ считаютъ, что истеченіе происходитъ подъ постояннымъ напоромъ  $h_1$  въ воздухъ. За этотъ періодъ въ камеру  $K$  вольется

объемъ воды  $\Omega h_2$ , гдѣ  $\Omega$ —площадь сѣченія камеры. Секундный же расходъ, если обозначимъ черезъ  $\omega$  площадь отверстія, будетъ  $\mu\omega\sqrt{2gh_1}$ ; слѣдовательно, продолжительность перваго періода есть:

$$t_1 = \frac{\Omega h_2}{\mu\omega\sqrt{2gh_1}}.$$

2) Вода поднимается отъ центра тяжести сѣченія отверстія до уровня верхнихъ водъ; этотъ періодъ разсматриваютъ, какъ случай перетеканія изъ резервуара съ постояннымъ уровнемъ въ сосудъ съ переменнымъ уровнемъ при допущеніи, что разность высотъ измѣняется отъ  $h_1$  до 0.

Продолжительность этого періода выразится на основаніи предыдущаго (§ 27) такъ:

$$t_2 = \frac{2\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}}\sqrt{h_1}.$$

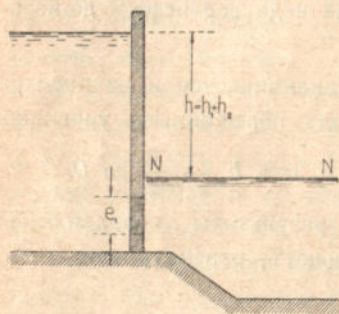
Поэтому время наполненія камеры будетъ:

$$T = t_1 + t_2 = \frac{\Omega(h_2 + 2h_1)}{\mu\omega\sqrt{2gh_1}} \dots (1).$$

При опредѣленіи времени, въ теченіе котораго уровень воды въ камерѣ  $K$  понизится до уровня нижнихъ водъ, могутъ встрѣтиться два случая въ зависимости отъ расположенія шлюза 2 относительно горизонта нижнихъ водъ  $NN$ .

1-й случай. Отверстіе всегда погружено въ воду (фиг. 47).

Это будетъ случай истеченія изъ сосуда съ переменнымъ уровнемъ въ сосудъ съ постояннымъ уровнемъ. На основаніи предыдущаго (§ 27) время опорожненія камеры выразится такъ:



Фиг. 47.

$$T_1 = \frac{2\Omega}{\mu\omega_1\sqrt{2g}}\sqrt{h} =$$

$$\frac{2\Omega}{\mu\omega_1\sqrt{2g}}\sqrt{h_1 + h_2} \dots (2),$$

гдѣ  $\omega_1$ —площадь отверстія 2.

2-й случай. Отверстіе только частью погружено въ нижнюю воду (фиг. 48).

Тутъ нужно различать два періода: первый продолжается, пока вода въ камерѣ не опустится до верхняго ребра отверстія, причѣмъ



истеченіе на части  $e_2$  происходитъ въ воздухъ, а на части  $e_1 - e_2$  — подъ воду подъ переменнымъ напоромъ; во второмъ періодѣ, когда вода въ камерѣ понизится ниже верхняго ребра отверстія, мы будемъ имѣть случай несовершеннаго водослива съ переменнымъ напоромъ.

Но нѣтъ основанія процессъ истеченія выражать такимъ образомъ, ибо все равно окончательный результатъ придется исправлять опытнымъ коэффициентомъ. Въ виду этого соображенія задачу упрощаютъ слѣдующимъ образомъ. Выше было показано, что время опорожненія призматическаго сосуда вдвое болѣе времени истеченія того же объема жидкости подъ постояннымъ уровнемъ. Изъ камеры  $K$  долженъ вытечь объемъ воды  $\Omega h$ . На части  $e_2$  отверстія истеченіе происходитъ подъ напоромъ  $h - \frac{e_2}{2}$ , слѣдовательно, секундный расходъ черезъ эту часть будетъ:

$$\mu b e_2 \sqrt{2g \left( h - \frac{e_2}{2} \right)},$$

гдѣ  $b$  — ширина отверстія.

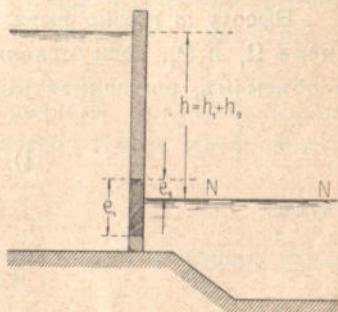
На части  $(e_1 - e_2)$  скорость истеченія будетъ  $\sqrt{2gh}$ , а секундный расходъ:  $\mu b (e_1 - e_2) \sqrt{2gh}$ . Поэтому объемъ  $\Omega h$  при постоянномъ уровнѣ вытекалъ бы во время:

$$t = \frac{\Omega h}{\mu b e_2 \sqrt{2g \left( h - \frac{e_2}{2} \right)} + \mu b (e_1 - e_2) \sqrt{2gh}}$$

и при переменномъ:

$$T_3 = \frac{2\Omega h}{\mu b e_2 \sqrt{2g \left( h - \frac{e_2}{2} \right)} + \mu b (e_1 - e_2) \sqrt{2gh}} \dots (3).$$

Въ случаѣ двойнаго шлюза наполненіе первой камеры и опорожненіе второй не отличаются отъ наполненія и опорожненія камеры простаго шлюза; поэтому намъ нужно только опредѣлить время перетеканія изъ камеры  $K_1$  въ камеру  $K_2$ . Въ данномъ случаѣ мы опять для упрощенія вопроса будемъ замѣнять отверстіе его центромъ тяжести и потому разобьемъ перетеканіе на два періода.



Фиг. 48.

1) Вода въ камерѣ  $K_2$  поднимается до центра тяжести отверстія 2 на высоту  $h_3$  и соотвѣтственно падаетъ въ камерѣ  $K_1$  съ высоты  $h_2$  до высоты  $x$  на уровень  $LL$ . Это будетъ случай истеченія въ воздухъ подъ переменнымъ уровнемъ; поэтому, называя площадь сѣченія камеры  $K_1$  черезъ  $\Omega_1$ , получимъ продолжительность этого періода (§ 27).

$$t_1 = \frac{2\Omega_1}{\mu\omega\sqrt{2g}}(\sqrt{h_2} - \sqrt{x}).$$

Высоту  $x$  можно выразить черезъ  $h_2$  и  $h_3$  и площади сѣченій камеръ  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , если сравнить объемъ, вылившейся изъ камеры  $K_1$  съ объемомъ, влившимся въ камеру  $K_2$ . Такимъ образомъ имѣемъ:

$$\Omega_1(h_2 - x) = \Omega_2h_3,$$

откуда

$$x = \frac{\Omega_1h_2 - \Omega_2h_3}{\Omega_1},$$

такъ что

$$\begin{aligned} t &= \frac{2\Omega_1}{\omega\mu\sqrt{2g}}\left(\sqrt{h_2} - \sqrt{\frac{\Omega_1h_2 - \Omega_2h_3}{\Omega_1}}\right) = \\ &= \frac{2\sqrt{\Omega_1}}{\mu\omega\sqrt{2g}}\left(\sqrt{\Omega_1h_2} - \sqrt{\Omega_1h_2 - \Omega_2h_3}\right). \end{aligned}$$

2) Вода продолжаетъ переливаться изъ камеры  $K_1$  въ камеру  $K_2$ , причемъ разность уровней измѣняется отъ  $x$  до 0; это будетъ случай истеченія подъ воду при переменныхъ уровняхъ въ обоихъ сосудахъ.

По предыдущему (§ 27):

$$t_2 = \frac{2\Omega_1\Omega_2}{\Omega_1 + \Omega_2} \frac{1}{\mu\omega\sqrt{2g}}\sqrt{x} = \frac{2\Omega_1\Omega_2}{\Omega_1 + \Omega_2} \frac{1}{\mu\omega\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{\Omega_1h_2 - \Omega_2h_3}{\Omega_1}}.$$

Полное время, въ теченіе котораго уровни въ обоихъ камерахъ сравняются, будетъ:

$$T_4 = t_1 + t_2 = \frac{2\sqrt{\Omega_1}}{\mu\omega\sqrt{2g}}\left[\sqrt{\Omega_1h_2} - \frac{\Omega_1}{\Omega_1 + \Omega_2}\sqrt{\Omega_1h_2 - \Omega_2h_3}\right] \dots (4).$$



Вычислимъ теперь высоту  $h'_1$ , на которую понизится окончательно уровень въ камерѣ  $K_1$ .

Очевидно:

$$\Omega_1 h'_1 = \Omega_2 (h_2 + h_3 - h'_1),$$

откуда

$$h'_1 = \frac{\Omega_2 (h_2 + h_3)}{\Omega_1 + \Omega_2}.$$

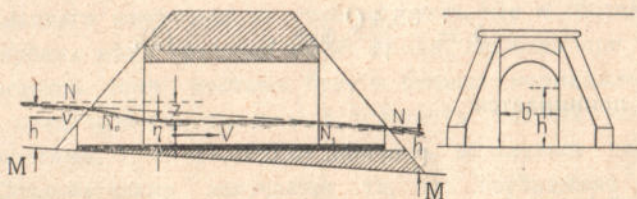
Если  $h'_1$  окажется меньше  $h_1$ , то тогда при вычисленіи времени наполненія камеры  $K_1$  придется принять во вниманіе только второй періодъ.

Коэффициенты  $\mu$  во всѣхъ этихъ формулахъ можно брать изъ таблицы Poncelet для прямоугольныхъ отверстій. Лучше же полагать

$$\mu = 0,6,$$

т. е. нѣсколько меньше истинной величины, чтобы сознательно дѣлать нѣкоторую ошибку въ худшую сторону.

**30. Расчетъ отверстія трубы.** Теченіе воды черезъ каменную трубу (фиг. 49) подобно теченію черезъ водосливъ въ толстой стѣнкѣ (§ 26). На фигурѣ  $MM$  представляетъ продольный разрѣзъ есте-



Фиг. 49.

ственного дна потока до устройства насыпи и  $NN_0NN_1$ —продольный профиль потока послѣ устройства трубы.

Обозначимъ черезъ  $H$  глубину потока,  $v$  его скорость,  $V$  скорость теченія въ трубѣ,  $z$  паденіе и  $b$  ширину или отверстіе трубы.

Хотя дно ложка криволинейно, но кривизна его настолько мала, что можно разсматривать сѣченіе трубы, какъ прямоугольникъ.

Мы вывели слѣдующую формулу для такого водослива (§ 26, форм. 6).

$$Q = \mu,0,385 b (h + k) \sqrt{2g (h + k)} \dots (1),$$

гдѣ  $k$ —высота, соотвѣтствующая скорости  $v$ , т. е.

$$k = \frac{v^2}{2g};$$

при этомъ  $z = \frac{h - 2k}{3}$

и

$$V = \sqrt{2g \left( \frac{H + k}{3} \right)} \dots (2).$$

Преобразуемъ формулу (1) слѣдующимъ образомъ. Умножимъ и раздѣлимъ вторую часть на  $2g \cdot 3 \sqrt{3}$ ; тогда найдемъ:

$$Q = \frac{0,385bV^3 \sqrt{3}}{2g},$$

откуда

$$b = \frac{2gQ}{0,385V^3 \sqrt{3}}$$

Если выразить  $2g$  въ футахъ, то можно написать:

$$b = \frac{35,4Q}{V^3} \text{ фут.} \dots (3),$$

при этомъ принимается

$$\mu \text{ пригл.} = 0,90.$$

Въ этой формулѣ намъ неизвѣстно только  $b$ , такъ что его и можно было бы отсюда вычислить. Но дѣло въ томъ, что скорость въ трубѣ не должна превосходить 16 фут. (2,285 саж.), поэтому расчетъ ведется въ такомъ порядкѣ.

Полагаютъ въ формулѣ (3)  $V = 2,285$  саж. (расх.  $Q$  также дѣленъ быть выраженъ при этомъ въ куб. саж.) и опредѣляютъ  $b$ ; затѣмъ  $b$  округляютъ въ большую сторону и подсчитываютъ по нему  $V$ . Послѣ этого изъ формулы (2) получимъ:

$$h = (0,04658 V^2 - k) \text{ фут.} \dots (4).$$

Если это  $h$  не разнится значительно отъ дѣйствительнаго, то расчетъ можно считать оконченнымъ. Если  $h$  изъ формулы (4) по-



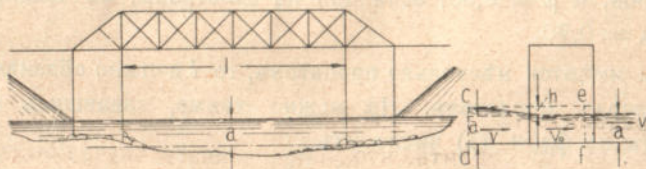
лучится значительно больше истиннаго, тогда, слѣдовательно, подсчетъ можно начинать съ формулы (2), ибо тогда мы получимъ скорость меньше предѣльной. Впрочемъ, можно довольствоваться и полученными результатами, если допустить, что передъ трубой образуется подпоръ. Если же  $h$  изъ форм. (4) получится значительно меньше дѣйствительнаго, то въ такомъ случаѣ придется расширить русло, или отказаться отъ трубы и замѣнить ее другимъ сооруженіемъ.

Разъ  $V$  и  $b$  установлены, то остается подсчитать высоту  $\eta$  слоя воды въ трубѣ, которая по предыдущему равна  $\frac{2}{3}(h+k)$ .

Высота устоевъ  $h_1$  (фиг. 49) должна быть не менѣе  $\eta$ .

**31. Разсчетъ отверстія моста.** Пусть глубина рѣки, гдѣ строится мостъ, есть  $a$ . Такъ какъ сѣченіе рѣки имѣетъ обыкновенно неправильную форму, то подъ  $a$  надо разумѣть высоту прямоугольника, равновеликаго площади сѣченія рѣки. Обыкновенно, ширина рѣки бываетъ настолько больше глубины, что такая замѣна не поведетъ къ большей неточности.

Обозначимъ среднюю скорость теченія  $v$  (о томъ, что надо разумѣть подъ средней скоростью, мы будемъ говорить дальше). Такъ какъ мостъ значительно стѣсняетъ сѣченіе рѣки, то средняя скорость подъ мостомъ  $v_0$  будетъ всегда больше  $v$ . Наблюденія показываютъ однако, что за мостомъ, ниже по теченію и подъ мостомъ не образуется никакого измѣненія въ глубинѣ, такъ что и послѣ постройки моста, глубина рѣки остается та же самая. Но если при той же глубинѣ скорость подъ мостомъ будетъ больше нормальной, то естественно предположить, что она возрастаетъ насчетъ поднятія воды передъ мостомъ, т. е. что передъ мостомъ образуется подпоръ высотой  $h$ . Слѣдовательно, получается то, что изображено на чертежѣ (фиг. 50).



Фиг. 50.

Величину подпора мы получимъ по теоремѣ Д. Бернулли, применяя ее къ сѣченіямъ  $cd$  и  $ef$ , причемъ будемъ приблизительно допускать, что въ сѣченіи  $cd$  скорость будетъ равна  $v$ , такъ какъ въ большинствѣ случаевъ подпоръ не бываетъ значителенъ. Такимъ об-

разомъ, считая дно на этомъ протяженіи горизонтальнымъ, мы найдемъ:

$$\frac{v^2}{2g} + cd = \frac{v_0^2}{2g} + ef,$$

откуда

$$cd - ef = h = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{v^2}{2g}.$$

Величину скорости  $v_0$  выбираютъ, соображаясь, во-первыхъ, съ грунтомъ, такъ какъ скорость не должна быть настолько велика, чтобы вода могла подмывать устои и быки, и во-вторыхъ, съ условіемъ пользованія рѣкой. Если рѣка судоходна, то при большой скорости ни одно судно не будетъ въ состояніи подняться подъ мостомъ.

Разъ величина подпора  $h$  установлена и разъ извѣстна высота  $k$ , соответствующая скорости  $v$ , то отверстіе моста подсчитать уже легко. Считаютъ, что данный случай подходитъ къ случаю несовершеннаго водослива; тогда, обозначая расходъ черезъ  $Q$ , найдемъ:

$$Q = \sqrt{2g} \mu \left[ \frac{2}{3} \left[ (h+k)^{3/2} - k^{3/2} \right] + a (h+k)^{1/2} \right] l,$$

откуда

$$l = \frac{Q}{\mu \sqrt{2g} \left[ \frac{2}{3} \left[ (h+k)^{3/2} - k^{3/2} \right] + a (h+k)^{1/2} \right]} \dots (1),$$

гдѣ принимаютъ  $\mu = 0,95$ , если устои и быки срезаны остриемъ противъ теченія, и  $\mu = 0,85$ , если они не заострены; въ среднемъ можно принять  $\mu = 0,90$ .

Если имѣется нѣсколько пролетовъ, то  $l$  должно обозначать сумму ширинъ всѣхъ пролетовъ. Но можно также, задавшись пролетомъ, опредѣлить по форм. (1) число ихъ.

Надо замѣтить, что сравненіе данного случая съ несовершеннымъ водосливомъ представляется мало основательнымъ; поэтому часто подсчитываютъ пролетъ моста слѣдующимъ образомъ.

Выше мы нашли, что

$$v_0 = \sqrt{2g(h+k)};$$



поэтому, обозначая разстояніе между устоями через  $l$ , найдемъ:

$$Q = \mu a l \sqrt{2g(h + h_0)},$$

откуда

$$l = \frac{Q}{\mu a [2g(h + h_0)]^{1/2}}$$

Здѣсь также въ среднемъ можно принимать  $\mu = 0,90$ .

## ОТДѢЛЪ 3-й.

### *Движеніе въ трубахъ.*

**32. Внутреннее треніе жидкостей.** До сихъ поръ, рассматривая различные случаи движенія жидкостей, мы не принимали во вниманіе никакихъ вредныхъ потерь, кромѣ потери при ударѣ (при быстромъ расширеніи струи) и мы видѣли, что результаты нашихъ теоретическихъ изслѣдованій весьма мало отличались отъ данныхъ опыта. Такое близкое совпаденіе объясняется только короткимъ протяженіемъ тѣхъ теченій, съ которыми намъ приходилось имѣть дѣло.

Изслѣдуя движеніе жидкости въ трубахъ, каналахъ и рѣкахъ, мы не можемъ уже пренебрегать этими потерями, ибо на длинныхъ протяженіяхъ теченія, съ какими мы будемъ имѣть дѣло, потери эти, постепенно накопляясь, достигаютъ весьма значительныхъ размѣровъ. Для примѣра укажемъ, что въ нефтепроводѣ отъ Баку до Батума теряется на преодоленіе вредныхъ сопротивленій потенциальная энергія вертикальнаго столба нефти высотой въ полверсты.

Вредныя потери при движеніи жидкостей происходятъ отъ двухъ различныхъ причинъ: отъ тренія между отдѣльными слоями или струйками жидкости (внутреннее треніе) и отъ тренія жидкости о стѣнки трубъ, канала и т. п.

Остановимся сначала на внутреннемъ треніи. По предположенію Ньютона, которое еще до сихъ поръ удерживается въ наукѣ, треніе двухъ рядомъ лежащихъ слоевъ жидкости, двигающихся съ различными скоростями, пропорціонально ихъ поверхности соприкосновенія и относительной скорости. Это предположеніе можетъ быть выражено аналитически слѣдующимъ образомъ.

$$F = csv . . . . (1),$$

гдѣ  $s$ —поверхность соприкосновенія,  $v$ —относительная скорость и  $c$ —коэффициентъ пропорціональности. Но выраженіе (1) представляется



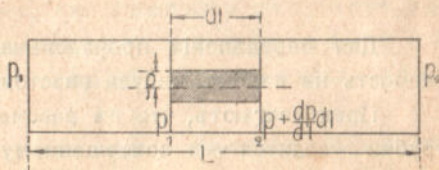
неудобнымъ въ томъ случаѣ, если  $v$  имѣетъ бесконечно малое значеніе, ибо тогда  $c$  надо считать бесконечно большой величиной. Чтобы выйти изъ этого затрудненія, умножимъ и раздѣлимъ правую часть выраженія (1) на  $dx$ , считая, что  $dx$  есть толщина слоя, и положимъ, что  $cdx = \eta$ , гдѣ  $\eta$  уже будетъ величиной конечной; тогда получимъ:

$$F = \eta s \frac{dv}{dx} \dots (2).$$

Выраженію (2) можно дать такое физическое толкованіе. Положимъ, что когда слой, находящійся отъ разсматриваемаго на единицѣ разстоянія, движется со скоростью большей или меньшей также на единицу скорости, треніе на единицу поверхности разсматриваемаго слоя будетъ равно  $\eta$ ; тогда, предполагая, что треніе это измѣняется пропорціонально скорости и обратно пропорціонально разстоянію, мы тотчасъ же придемъ къ выраженію (2), гдѣ  $\eta$ —называется коэффициентомъ внутренняго тренія.

**33. Формула Пуазейля.** Пользуясь выраженіемъ (2), рассмотримъ установившееся движеніе жидкости по горизонтальной цилиндрической трубкѣ весьма малаго діаметра подъ вліяніемъ разности давленій на концахъ. При этомъ будемъ предполагать, что жидкость въ трубкѣ раздѣлится на соосныя кольца толщиной  $dr$ , каждое изъ которыхъ будетъ имѣть свою скорость, убывающую отъ оси по направленію къ стѣнкамъ трубы.

Выдѣлимъ изъ трубки элементъ, длиною  $dl$  (фиг. 51) и составимъ уравненіе движенія для цилиндра радіуса  $\rho$ . Такъ какъ движеніе будетъ равномернымъ мы, очевидно, получимъ на основаніи выраженія (2)



Фиг. 51.

$$\left( p - p - \frac{dp}{dl} dl \right) \pi \rho^2 = \eta 2\pi \rho dl \frac{dv}{dr} \dots (1)$$

или

$$-\frac{dp}{dl} = \frac{2\eta}{\rho} \frac{dv}{dr} \dots (2).$$

Такъ какъ вторая часть этого уравненія, въ виду равномерности движенія, не зависитъ отъ  $l$ , то, интегрируя по  $l$ , мы получимъ:

$$p = al + b \dots (3).$$

Обозначая давленіе въ началѣ трубы черезъ  $p_1$ , а въ концѣ черезъ  $p_2$ , найдемъ:

$$b = p_1 \quad \text{и} \quad a = -\frac{p_1 - p_2}{L},$$

такъ что

$$p = -\frac{p_1 - p_2}{L} l + p_1 \dots (4).$$

откуда, имѣя въ виду уравненіе (2), получимъ:

$$-\frac{dp}{dl} = \frac{p_1 - p_2}{L} = \frac{2\eta}{\rho} \frac{dv}{dr} \dots (5).$$

Отсюда прежде всего видно, что, составляя уравненіе (1), мы должны были поставить передъ  $\frac{dv}{dr}$  знакъ минусъ; это объясняется тѣмъ, что  $v$  есть завѣдомо убывающая функція отъ  $r$ . Такимъ образомъ вмѣсто уравненія (5) имѣемъ:

$$dv = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta L} \rho dr \dots (6),$$

откуда по интеграціи получимъ:

$$v = -\frac{p_1 - p_2}{4\eta L} \rho^2 + c \dots (7).$$

Для опредѣленія произвольнаго постояннаго намъ нужно знать скорость на какомъ нибудь разстояніи отъ центра.

Предполагаютъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ вліяніе стѣнокъ трубки сводится къ совершенному прекращенію движенія непосредственно прилегающаго къ нимъ слоя жидкости. Обозначая внутренней радіусъ трубки черезъ  $r$  и полагая скорость у стѣнки равной нулю, мы изъ уравненія (7) легко найдемъ, что

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L} (r^2 - \rho^2) \dots (8)$$

т. е., что скорость въ поперечномъ сѣченіи измѣняется по закону параболы.

Пользуясь выраженіемъ (8), найдемъ расходъ жидкости черезъ трубку и среднюю скорость  $v_0$ , подъ которой мы будемъ подразумевать отношеніе полного расхода къ площади нормальнаго къ оси



сѣченія трубки. Очевидно, что если бы всѣ слои жидкости двигались съ этой скоростью, то расходъ былъ бы тотъ же, что и въ дѣйствительности.

Кольцевой слой радіуса  $\rho$  и толщиной  $d\rho$  пропускаетъ объемъ

$$dq = 2\pi\rho d\rho v = 2\pi \frac{p_1 - p_2}{4\eta L} (r^2 - \rho^2) \rho d\rho \dots (9),$$

т. е. расходъ черезъ всю трубку будетъ:

$$q = 2\pi \frac{p_1 - p_2}{4\eta L} \int_0^r (r^2 - \rho^2) \rho d\rho = \pi \frac{p_1 - p_2}{8\eta L} r^4 \dots (10)$$

и средняя скорость

$$v_0 = \frac{q}{\pi r^2} = \pi \frac{p_1 - p_2}{8\eta L} \frac{r^4}{\pi r^2} = \frac{p_1 - p_2}{8\eta L} r^2 \dots (11).$$

Формула (10) была найдена опытнымъ путемъ Пуазейлемъ, что и подтверждаетъ справедливость сдѣланныхъ при ея выводѣ предположеній. Очевидно, что съ помощью ея можно опредѣлить  $\eta$ , т. е. коэффициентъ внутренняго тренія жидкостей.

Для воды, если выразить давленіе въ килограммахъ на квадратный метръ и длину въ метрахъ, получается

$$\eta = 0,0001336.$$

Изъ формулы (11) мы видимъ, что средняя скорость пропорціональна разности давленій на концахъ и квадрату радіуса и обратно пропорціональна длинѣ трубы.

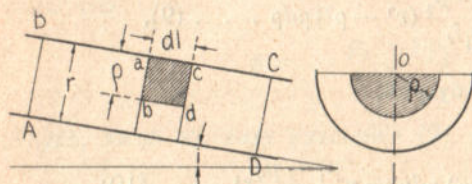
Замѣтимъ, что выведенный нами законъ движенія, выражаемый уравненіемъ (11) имѣетъ мѣсто, какъ слѣдуетъ изъ опытовъ Рейнольдса, о которыхъ мы будемъ говорить дальше, и изъ позднѣйшихъ опытовъ Камерера, и для трубъ конечнаго размѣра, если только средняя скорость не превосходитъ значенія, опредѣляемаго изъ слѣдующей эмпирической формулы:

$$c = k\eta \frac{g}{\Delta} \frac{1}{d} \dots (12),$$

гдѣ  $c$ —средняя скорость, которую Рейнольдсъ назвалъ критической,  $\eta$ —коэффициентъ внутренняго тренія,  $g$ —ускореніе тяжести,  $\Delta$ —всѣ единицы объема жидкости,  $d$ —діаметръ трубы и  $k$ —абсолютное число,

закрывающееся между 1900 и 2000, если всѣ размѣры выражены въ метрахъ.

**34. Задача Буссинеска.** Будемъ разсматривать установившееся равномерное движеніе воды въ полукругломъ открытомъ каналѣ (фиг. 52), исходя изъ тѣхъ же предположеній, которыя мы дѣлали при



Фиг. 52.

выводѣ формулы Пуазейля. Допустимъ, что ось канала наклонена къ горизонту подъ угломъ  $i$ . Выдѣливъ полуцилиндръ радиуса  $\rho$  и длиной  $dl$ , мы легко найдемъ, что на него дѣйствуетъ вдоль оси слагающая силы тяжести, равная

$\frac{\pi\rho^2}{2} \Delta \sin i dl$ , гдѣ  $\Delta$  всѣ единицы объема воды и на его боковой поверхности треніе, также имѣющее направленіе оси, равное по предыдущему  $-\pi\rho\eta \frac{dv}{d\rho} dl$ .

Такимъ образомъ, составляя уравненіе движенія вдоль оси, мы будемъ имѣть

$$\frac{\rho}{2} \Delta \sin i = -\eta \frac{dv}{d\rho} \dots (1),$$

ибо въ силу одинаковаго погруженія центровъ тяжести сѣченій  $ab$  и  $cd$  давленія на нихъ будутъ равны и противоположны.

Отсюда, интегрируя, получимъ:

$$v = -\frac{\Delta \sin i \rho^2}{4\eta} + c \dots (2).$$

Полагая скорость на внѣшней окружности равной нулю, получимъ:

$$v = \frac{\Delta \sin i}{4\eta} (r^2 - \rho^2) \dots (3).$$

Положимъ, что  $r = 1$  метру и  $\sin i = 0,0001$ ; будемъ искать скорость  $w$  средней струйки  $o$ . Припоминая, что для воды  $\eta = 0,0001336$ , будемъ имѣть:

$$w = \frac{1000 \cdot 0,0001}{4 \cdot 0,0001336} = 187,2 \text{ mtr.}$$



Такова, слѣдовательно, должна быть скорость средней струйки, чтобы внутреннее треніе могло уравновѣсить силу тяжести. Но скорость средней струйки въ данномъ случаѣ легко можетъ быть найдена наблюдениемъ надъ движениемъ поплавокъ и какъ оказывается въ лучшемъ случаѣ, при самыхъ гладкихъ стѣнкахъ, едва-ли достигаетъ и одного метра.

Придя къ такому результату, Буссинескъ вывелъ отсюда заключеніе, что такое несогласіе теории съ опытомъ несомнѣнно объясняется совершенно инымъ характеромъ движенія жидкости и инымъ влияніемъ стѣнокъ при конечныхъ размѣрахъ русла, нежели при капиллярныхъ трубкахъ. Онъ полагалъ, что влияние шероховатыхъ стѣнокъ заключается въ данномъ случаѣ въ томъ, что частицы жидкости, ударяясь о малѣйшіе выступы на стѣнкѣ, значительно измѣняютъ направленіе своего движенія, переходятъ, образуя вихри, въ массу жидкости и нарушаютъ правильность движенія другихъ частицъ. Вслѣдствіе быстрыхъ и частыхъ измѣненій своего движенія, частицы жидкости соударяются между собою, на что затрачивается значительное количество энергіи, далеко превосходящее сопротивленіе отъ внутренняго тренія. Но по мѣрѣ уменьшенія размѣровъ поперечнаго сѣченія русла это сопротивление уменьшается и обращается въ нуль въ волосныхъ трубкахъ, гдѣ частицы, вслѣдствіе ничтожныхъ размѣровъ поперечнаго сѣченія, не могутъ уклониться отъ прямолинейнаго движенія, параллельнаго стѣнкамъ. Такимъ образомъ Буссинескъ пришелъ къ заключенію, что сопротивление, возникающее при движеніи жидкостей въ трубахъ, каналахъ и т. п. нужно приписывать не внутреннему тренію, а скорѣе малой сравнительно вязкости жидкостей и удобоподвижности ихъ частицъ. Взглядъ этотъ, какъ мы увидимъ ниже, подтверждается нѣкоторыми прямыми опытами.

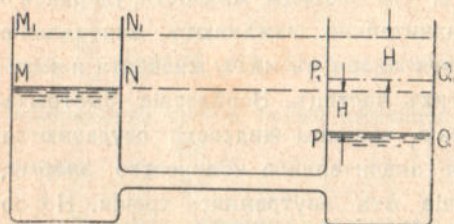
**35. Сопротивленія при движеніи въ трубахъ.** Изъ изложеннаго выше явствуетъ, что характеръ движенія жидкости въ трубахъ со скоростью, превосходящею скорость критическую, таковъ, что къ этому движенію мы въ сущности не въ правѣ примѣнить уравненіе Д. Бернулли, ибо оно предполагаетъ параллелизмъ слоевъ, а такового въ дѣйствительности не имѣется. Однако же чуть ли не повседневный опытъ учитъ насъ, что примѣненіе этого уравненія даже и при такихъ условіяхъ приводитъ къ достаточно точнымъ результатамъ, но при этомъ надо только предполагать, что скорость во всякомъ нормальномъ къ оси сѣченіи есть величина постоянная для всѣхъ струекъ и равная средней скорости, т. е. отношенію расхода къ площади поперечнаго сѣченія.



Что же касается вредныхъ потерь, обусловливаемыхъ вліяніемъ стѣнокъ трубы, потерь, которыя называются для простоты треніемъ, то потери эти за отсутствіемъ теоретическихъ данныхъ опредѣляются опытнымъ путемъ.

Какъ показываютъ многочисленныя опыты и наблюденія, сопротивленіе отъ тренія прямо пропорціонально поверхности соприкосновенія между жидкостью и стѣнкой и нѣкоторой функціи отъ скорости и не зависитъ отъ давленія.

Послѣднее положеніе легко доказывается слѣдующимъ образомъ: положимъ, что въ двухъ сосудахъ, соединенныхъ между собою трубкой (фиг. 53), поддерживается постоянная разность уровней  $MN$  и  $PQ$ .



Фиг. 53.

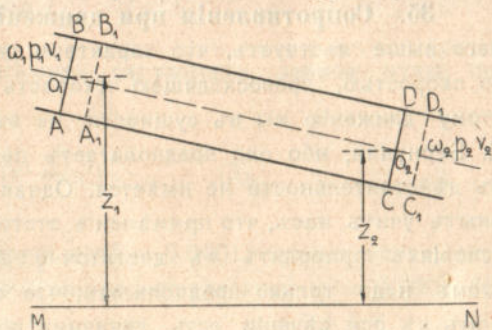
Опредѣляя количество жидкости, перетекающее по трубѣ изъ перваго сосуда во второй, мы легко найдемъ и среднюю скорость въ трубѣ.

Если мы подольемъ въ тотъ и другой сосудъ жидкость, такъ, чтобы въ первомъ сосудѣ

уровень поднялся до  $M_1N_1$ , а во второмъ до  $P_1Q_1$ , но чтобы при этомъ разность ихъ не измѣняла своей величины, то можемъ легко убѣдиться, опредѣляя опять расходъ жидкости, что средняя скорость въ трубѣ будетъ та же, что и въ первомъ случаѣ. Этимъ и подтверждается положеніе, что треніе не зависитъ отъ давленія, ибо, очевидно, что при повышеніи уровней воды въ сосудахъ, давленіе во всѣхъ сѣченіяхъ трубы повышается.

Чтобы ввести въ уравненіе Д. Бернулли членъ, зависящій отъ тренія, рассмотримъ отрѣзокъ  $ABCD$  призматической трубы (фиг. 54)

и примѣнимъ къ перемѣщенію объема  $ABCD$  въ бесконечно близкое положеніе  $A_1B_1C_1D_1$  теорему живыхъ силъ, предполагая движеніе установившимся и принимая во вниманіе работу силы тренія. На основаніи тѣхъ же разсужденій, къ которымъ мы прибѣгали при выводѣ уравненія Д. Бернулли (§ 17), легко найдемъ, что



Фиг. 54.

приращеніе живой силы объема  $ABCD$  будетъ:



$$\frac{\omega_2 v_2^3 \Delta dt}{2g} - \frac{\omega_1 v_1^3 \Delta dt}{2g},$$

работа силы тяжести:

$$\omega_2 v_2 \Delta dt (z_1 - z_2) = \omega_1 v_1 \Delta dt (z_1 - z_2)$$

и работа давленій на сѣченія  $AB$  и  $CD$ :

$$p_1 \omega_1 v_1 dt - p_2 \omega_2 v_2 dt.$$

Подсчитаемъ теперь работу силы тренія. На основаніи сказаннаго выше, сила тренія, отнесенная ко всему объему  $ABCD$  и направленная во всякой точкѣ противъ движенія, будетъ равна:

$$F = OL\varphi(v),$$

гдѣ  $O$ —периметръ трубы,  $L$ —длина оси трубы  $OO_2$  и  $v$ —средняя скорость въ трубѣ, равная въ силу постоянства сѣченія трубы  $v_1$  и  $v_2$ .

Работа силы тренія при разсматриваемомъ перемѣщеніи будетъ, очевидно:

$$R = -Fvdt = -OL\varphi(v)vdt.$$

Такимъ образомъ, имѣемъ:

$$\frac{\omega_2 v_2^3 \Delta dt}{2g} - \frac{\omega_1 v_1^3 \Delta dt}{2g} = \omega_2 v_2 \Delta dt (z_1 - z_2) + \omega_1 p_1 v_1 dt - \omega_2 p_2 v_2 dt - OL\varphi(v)vdt$$

откуда, сокращая все уравненіе на  $\omega_2 v_2 \Delta dt = \omega_1 v_1 \Delta dt = \omega v \Delta dt$ , получимъ:

$$\frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} = z_1 - z_2 + \frac{p_1}{\Delta} - \frac{p_2}{\Delta} - \frac{O}{\omega} L \frac{\varphi(v)}{\Delta} \dots (1)$$

или, принимая во вниманіе, что  $v_1 = v_2$ :

$$\frac{p_1}{\Delta} + z_1 = \frac{p_2}{\Delta} + z_2 + \frac{O}{\omega} L \frac{\varphi(v)}{\Delta} \dots (2).$$

Такъ какъ, о чемъ мы говорили выше (§ 17), всѣ члены этого уравненія представляютъ собою высоты, или иначе работу, отнесенную къ единицѣ вѣса, то и послѣдній членъ представляетъ также нѣкоторую высоту, которую называютъ высотой тренія и обозначаютъ черезъ  $\eta$ , такъ что

$$\eta = \frac{O}{\omega} L \frac{\varphi(v)}{\Delta} \dots (3).$$

Остановимся теперь на разсмотрѣніи этой высоты.

Отношеніе  $\frac{\omega}{\theta}$  площади поперечнаго сѣченія къ периметру называютъ гидравлическимъ радиусомъ или среднимъ радиусомъ. Обозначая радиусъ этотъ черезъ  $r$ , будемъ имѣть:

$$\eta = \frac{1}{r} L \frac{\varphi(v)}{\Delta} \dots (3).$$

Для круглой трубы діаметра  $d$  получимъ:

$$\eta = \frac{4}{d} L \frac{\varphi(v)}{\Delta} \dots (4).$$

Какъ показываетъ опытъ,  $\frac{\varphi(v)}{\Delta}$  оказывается возрастающей функцией  $v$ . Съ цѣлью опредѣленія ея, ее разлагаютъ въ рядъ по восходящимъ степенямъ  $v$  и опытнымъ путемъ разыскиваютъ коэффициенты. Большинство наблюдателей приходитъ къ тому заключенію, что можно ограничиваться только двумя членами ряда, т. е. полагать.

$$\frac{\varphi(v)}{\Delta} = av + bv^2 \dots (5).$$

На основаніи опытовъ Боссю, Купле и Дюбуа, Прони пришелъ къ заключенію, что коэффициенты  $a$  и  $b$  въ выраженіи (5) являются для данной жидкости величинами постоянными, не зависящими ни отъ діаметра трубы, ни отъ средней скорости, ни отъ свойства поверхности стѣнокъ трубы. Для воды Прони даетъ слѣдующія значенія для коэффициентовъ:

$$a = 0,0000173 \text{ и } b = 0,000348,$$

причемъ за единицу длины принимается одинъ метръ. Для тѣхъ же коэффициентовъ Д'Обюиссонъ предлагаетъ слѣдующія значенія:

$$a = 0,0000188 \text{ и } b = 0,000343.$$

Для облегченія при расчетахъ, когда скорость  $v$  не особенно мала, Дюпюи находилъ возможнымъ принимать:

$$a = 0 \text{ и } b = 0,0003855.$$

Но позднѣйшіе наблюдатели приходятъ къ тому заключенію, что коэффициенты  $a$  и  $b$  зависятъ не только отъ свойствъ жидкости, но также и отъ свойствъ стѣнокъ трубы, ея діаметра и скорости жидкости.



Дарси при устройствѣ имъ водопровода въ г. Дижонѣ произвелъ до 200 весьма тщательныхъ опытовъ надъ движеніемъ воды въ трубахъ разнаго діаметра и разнаго матеріала. Однимъ изъ важнѣйшихъ результатовъ его опытовъ было заключеніе, что треніе воды въ трубахъ зависитъ отъ матеріала, изъ котораго сдѣлана труба. Такъ, на-примѣръ, для трубъ деревянныхъ потеря въ опытахъ Дарси была вдвое больше, чѣмъ для трубъ металлическихъ. По мѣрѣ засоренія трубъ разнаго рода осадками, различіе матеріала сглаживается, причѣмъ для трубъ металлическихъ треніе увеличивается въ два раза. Въ результатѣ Дарси даетъ слѣдующія значенія коэффиціентовъ  $a$  и  $b$  для новыхъ и чистыхъ металлическихъ трубъ:

$$a = 0,000016 + \frac{0,0000000075}{d^2}$$

и

$$b = 0,000222 + \frac{0,0000062}{d},$$

гдѣ  $d$ —діаметръ трубы въ метрахъ. При средней скорости воды не меньшей 0,10 метра въ секунду, Дарси предлагаетъ считать:

$$a = 0 \text{ и } b = 0,000254 + \frac{0,00000647}{d}.$$

При меньшихъ скоростяхъ первымъ членомъ въ выраженіи (5) пренебрегать нельзя, ибо тогда онъ становится почти равнымъ второму. Это легко обнаружить слѣдующимъ образомъ. По даннымъ Прони:

$$\frac{av}{bv^2} = \frac{1}{20v}, \text{ т. ч., при } v = 0,05 \frac{\text{mtr}}{\text{sec}}, av = bv^2.$$

Такимъ образомъ, мы видимъ, что по Дарси коэффиціенты  $a$  и  $b$  зависятъ отъ діаметра. Въ томъ случаѣ, когда не требуется особенная точность, можно полагать:

$$a = 0 \text{ и } b = 0,000313.$$

Для старыхъ засоренныхъ трубъ всѣ коэффиціенты должны быть удвоены.

Вейсбахъ на основаніи опытовъ своихъ предшественниковъ и своихъ собственныхъ приходитъ къ заключенію, что коэффиціенты  $a$  и  $b$  зависятъ отъ скорости и предлагаетъ слѣдующія ихъ значенія:

$$a = 0 \text{ и } b = \frac{\lambda}{8g}, \text{ гдѣ } \lambda = 0,01439 + \frac{0,01692}{\sqrt{v}}$$

и  $g$ —ускореніе тяжести, приче́мъ за единицу длины и здѣсь принять метръ, а за единицу времени одна секунда.

Соединяя въ одно цѣлое опытныхъ данныхъ Дарси и Вейсбаха, Лангъ полагаетъ возможнымъ считать:

$$\lambda = 0,02 + \frac{0,0018}{\sqrt{vd}}.$$

Изъ всѣхъ этихъ формулъ чаще всѣхъ примѣняются формулы Дарси.

Всѣ указанная выше формулы для высоты тренія, за исключеніемъ менѣе точныхъ Прони и Д'Обюиссона, обладаютъ тѣмъ недостаткомъ, что онѣ сложны для подсчетовъ, ибо при подсчетахъ по нимъ нельзя пользоваться логарифмами. Въ виду этого функции  $\varphi(v)$  придаютъ иногда нѣсколько другое выраженіе.

По Дарси высота тренія представится формулой, имѣющей слѣдующій видъ:

$$\eta = \frac{4}{d} L \left[ \left( \alpha + \frac{\beta}{d^2} \right) v + \left( \gamma + \frac{\delta}{d} \right) v^2 \right].$$

Въ этой формулѣ, какъ легко видѣть, содержатся члены, зависящіе и отъ  $d^{-1}$ , и отъ  $d^{-2}$ , и отъ  $d^{-3}$ , а также отъ  $v$  и  $v^2$ . Такимъ образомъ, понятна будетъ возможность придать  $\eta$  выраженіе, содержащее только одинъ членъ, зависящій отъ  $d$  въ степени промежуточной между  $-1$  и  $-3$  и отъ  $v$  въ степени промежуточной между  $1$  и  $2$ . Такъ, напримѣръ, Фоксъ полагаетъ, что

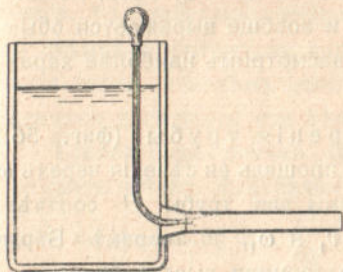
$$\eta = a \frac{v^{11/6}}{d^{17/8}} L \dots (6),$$

гдѣ для новыхъ чугуновыхъ или желѣзныхъ трубъ  $a = 0,00004186$ .

Такой же характеръ носить формула Рейнольдса. Но прежде чѣмъ перейти къ его формулѣ, остановимся нѣсколько на одномъ рядѣ его опытовъ, которые привели къ весьма интереснымъ результатамъ. Опыты состояли въ томъ, что Рейнольдсъ заставлялъ течь воду черезъ стеклянную трубку, длиною  $4\frac{1}{2}$  фута, присоединенную къ резервуару



(фиг. 55) воронкой, съ различными скоростями, для чего онъ измѣнялъ уровень воды въ резервуарѣ, и вводилъ въ трубку помощью пипетки струю анилиновой краски.



Фиг. 55.

Производя наблюденія надъ струйкой краски, Рейнольдсъ нашелъ, что пока скорость не превышала извѣстной величины, краска располагалась въ трубкѣ прямолинейной лентой; но какъ только скорость переходила этотъ предѣлъ, лента теряла ясность очертаній, представлялась размытой. Изслѣдуя размытую часть въ темной комнатѣ при помощи электрической искры, Рейнольдсъ убѣдился, что размытая часть представляла изъ себя вихри. При этомъ, далѣе, оказалось, что пока скорость не превышала указаннаго предѣльнаго значенія, потеря отъ тренія была пропорціональна первой степени скорости, а при болѣе высокихъ значеніяхъ скорости потеря эта была пропорціональна скорости въ степени, весьма близкой къ двумъ.

Такимъ образомъ, опытъ этотъ весьма наглядно подтверждаетъ и формулу Пуазейля, и предположенія Буссинеска относительно характера движенія жидкостей въ трубахъ при скоростяхъ, большихъ критической скорости.

Изъ своихъ многочисленныхъ опытовъ и съ другими трубами, Рейнольдсъ пришелъ къ слѣдующему выраженію для высоты тренія:

$$\eta = \frac{B^n P^{2n} d^{n-3} v^n}{A} \dots (6),$$

гдѣ  $d$ —диаметръ трубы въ метрахъ,  $A = 67,7 \cdot 10^6$ ,  $B = 396$  и

$$P = \frac{1}{1 + 0,0336t + 0,000221t^2},$$

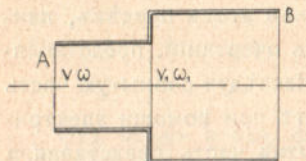
гдѣ  $t$ —температура въ градусахъ Цельсія.

Показатель  $n$  до критической скорости, которую можно опредѣлить по формулѣ (12, § 33), равенъ единицѣ, а при высшихъ скоростяхъ равенъ 1,7 для новыхъ трубъ и 2—для старыхъ, покрытыхъ осадками. При этомъ, когда  $n = 2$ , можно полагать  $P = 1$ .

Кромѣ тренія, которое имѣетъ мѣсто на всемъ протяженіи трубы, въ трубахъ могутъ появляться сопротивленія мѣстныя, происхождение которыхъ объясняется зависящимъ отъ разныхъ причинъ ударомъ

при внезапныхъ расширеніяхъ струи. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ высота сопротивленія, т. е. потерянная энергія на единицу вѣса, можетъ быть подсчитана по теоремѣ Борда (§ 18) и вообще выражается обыкновенно долей высоты средней скорости. Разсмотримъ наиболѣе характерные случаи такихъ сопротивленій.

1. Случай внезапнаго расширенія трубы (фиг. 56). Обозначая скорость въ трубѣ *A* черезъ *v*, площадь ея сѣченія черезъ  $\omega$



Фиг. 56.

и тѣ же величины для трубы *B* соответственно черезъ  $v_1$  и  $\omega_1$ , по теоремѣ Борда найдемъ, что потерянная высота будетъ:

$$\eta = \frac{(v - v_1)^2}{2g},$$

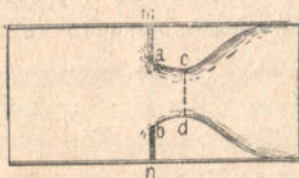
но такъ какъ въ силу несжимаемости

$$\omega v = \omega_1 v_1,$$

то

$$\eta = \frac{v^2}{2g} \left(1 - \frac{v_1}{v}\right)^2 = \frac{v^2}{2g} \left(1 - \frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 = \zeta \frac{v^2}{2g}.$$

2. Случай прохожденія жидкостичерезъ діафрагму (фиг. 57). Діафрагма *mn* схематически изображаетъ открытый только отчасти кранъ или клапанъ. При протеканіи черезъ отверстіе *ab* струя сжимается до размѣровъ *cd*, а затѣмъ расширяется и заполняетъ всю трубу. Обозначая черезъ *v* и  $\omega$  скорость въ трубѣ и площадь поперечнаго сѣченія трубы, черезъ  $v_0$  скорость въ сжатомъ сѣченіи и черезъ  $\omega_0$  площадь отверстія *ab*, по теоремѣ Борда будемъ имѣть:



Фиг. 57.

$$\eta = \frac{(v_0 - v)^2}{2g} = \frac{v^2}{2g} \left(\frac{v_0}{v} - 1\right)^2,$$

но въ силу несжимаемости

$$\alpha \omega_0 v_0 = \omega v,$$

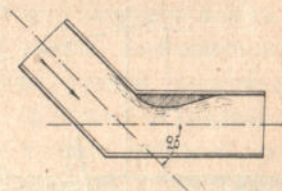
гдѣ  $\alpha$ —коэффициентъ сжатія, такъ что

$$\eta = \frac{v^2}{2g} \left(\frac{\omega}{\alpha \omega_0} - 1\right)^2 = \zeta \frac{v^2}{2g}.$$



3. Случай быстро измѣненія направленія трубы (колѣно). Когда вода должна измѣнить (фиг. 58) направленіе своего теченія, то благодаря центробѣжной силѣ она отжимается къ наружной стѣнкѣ и потому за колѣномъ получается сжатіе струи, а затѣмъ ударъ, такъ какъ струя стремится заполнить все сѣченіе.

Такого рода случай былъ изслѣдованъ опытнымъ путемъ Вейсбахомъ, и онъ нашелъ, что въ выраженіи  $\eta = \zeta \frac{v^2}{2g}$ , гдѣ  $v$ —средняя скорость въ трубѣ,

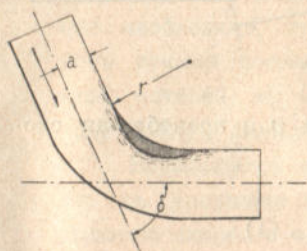


Фиг. 58.

$$\zeta = 0,9457 \sin^2 \delta + 2,047 \sin^4 \delta;$$

здѣсь  $\delta$ —половина угла между направленіями трубы до и послѣ колѣна.

4. Случай закругленія трубы (фиг. 59). При прохожденіи воды черезъ закругленіе наблюдаются тѣ же явленія, что и въ предыдущемъ случаѣ. При этомъ потерянная высота выражается слѣдующимъ образомъ:



Фиг. 59.

$$\eta = \zeta \frac{\delta^0}{90^0} \frac{v^2}{2g},$$

$$\text{гдѣ } \zeta = 0,131 + 1,848 \left( \frac{a}{r} \right)^{7/2};$$

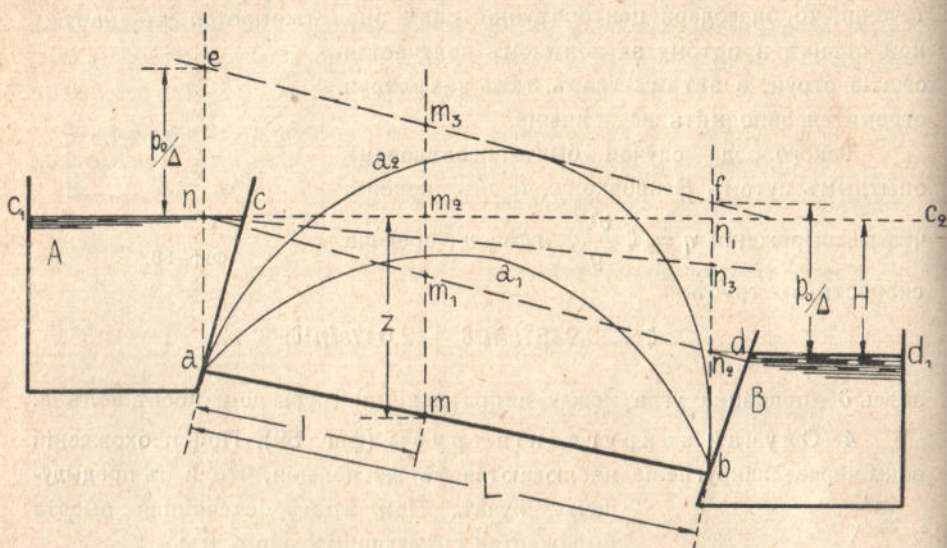
здѣсь  $\delta$ —уголъ между направленіями трубы до и послѣ закругленія,  $r$ —радіусъ закругленія и  $a$ —радіусъ трубы.

**36. Водопроводъ съ постояннымъ діаметромъ и постояннымъ расходомъ.** Разсмотримъ нѣсколько задачъ, которыя приходится разрѣшать при проектированіи водопроводной сѣти. Одна изъ самыхъ простыхъ и въ то же время наиболѣе интересныхъ задачъ заключается въ слѣдующемъ. Положимъ, что два резервуара  $A$  и  $B$  (фиг. 60), уровни въ которыхъ поддерживаются на постоянной высотѣ, соединены трубой  $ab$ , имѣющей по всей длинѣ постоянный діаметръ.

Требуется найти расходъ воды, т. е. объемъ ея, перетекающій въ одну секунду изъ резервуара  $A$  въ резервуаръ  $B$ , и законъ измѣненія давленія вдоль трубы.

Для рѣшенія этихъ вопросовъ примѣнимъ уравненіе Д. Бернулли, исправленное членомъ, зависящимъ отъ вредныхъ сопротивленій, одинъ разъ къ уровню  $c_1 c$  резервуара  $A$  и сѣченію трубы  $m$ , а другой разъ

къ уровнямъ  $cc_1$  и  $dd_1$ . Обозначая давление атмосферы на единицу площади черезъ  $p_0$ , гидродинамическое давление въ пунктъ  $m$  трубы



Фиг. 60.

черезъ  $p$  и постоянную скорость въ ней черезъ  $v$  и пренебрегая скоростями въ сѣченіяхъ  $c_1c$  и  $dd_1$ , получимъ:

$$\frac{p_0}{\Delta} + z = \frac{p}{\Delta} + \frac{v^2}{2g} + \eta \dots (1)$$

и

$$H = \eta_0 \dots (2),$$

гдѣ  $z$  есть разстояніе отъ горизонтальной плоскости  $c_1c_2$  точки  $m$ ,  $H$  разстояніе отъ той же плоскости уровня  $dd_1$ , а  $\eta$  и  $\eta_0$  соотвѣтственные высоты вредныхъ потерь.

Къ написаннымъ уравненіямъ мы можемъ добавить еще уравненіе несжимаемости:

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} v \dots (3),$$

гдѣ  $Q$ —расходъ и  $d$ —діаметръ трубы, а затѣмъ по указаннымъ въ предыдущемъ параграфѣ формуламъ должны будемъ опредѣлить высоты  $\eta$  и  $\eta_0$ .

Высоты эти представляютъ собою, очевидно, сумму высотъ всѣхъ вредныхъ сопротивленій, имѣющихъ мѣсто на соотвѣтствующемъ пути, т. е. сопротивленія отъ тренія и сопротивленія отъ ударовъ воды. Пер-



вое сопротивленіе второго рода будетъ имѣть мѣсто, какъ это мы видѣли при изслѣдованіи теченія черезъ насадокъ Вентури, въ началѣ трубы вслѣдствіе сжатія струи при входѣ въ трубу и слѣдующаго за нимъ расширенія. Чтобы избѣжать этой потери, слѣдуетъ всегда присоединять трубу къ резервуару при помощи конуса, имѣющаго въ вершинѣ уголъ въ  $13^{\circ}24'$  (§ 22). Да и, вообще говоря, сопротивленія второго рода имѣютъ такой характеръ, что при помощи надлежащаго конструированія трубопровода ихъ всегда можно избѣжать, или во всякомъ случаѣ довести до самыхъ незначительныхъ размѣровъ, тогда какъ сопротивленіе отъ тренія является совершенно неизбѣжнымъ обстоятельствомъ при движеніи жидкости по трубѣ, каналу и пр. и потому въ большинствѣ случаевъ, если только труба не особенно коротка, имѣетъ преобладающее значеніе.

Въ виду этого при предварительныхъ соображеніяхъ и при изслѣдованіяхъ теоретическаго характера, которыя мы и имѣемъ въ виду, можно потерю энергіи отъ ударовъ совершенно во вниманіе не принимать, за нѣкоторыми небольшими исключеніями. Это тѣмъ болѣе необходимо, что для точнаго подсчета этой потери надо имѣть подъ руками полный проектъ трубопровода, тогда какъ, пренебрегая этой потерей, мы можемъ предполагать ось трубы  $ab$  растянутой въ одну прямую линію.

Возвращаясь къ поставленной задачѣ, замѣтимъ прежде всего, что въ уравненіи (1) можно въ большинствѣ случаевъ пренебрегать высотой скорости въ трубѣ; ибо высота эта, при обыкновенныхъ значеніяхъ скорости около одного метра въ секунду, является весьма ничтожной величиной по сравненію съ прочими высотами, которыя достигаютъ иногда нѣсколькихъ десятковъ метровъ. Такимъ образомъ, вмѣсто уравненія (1) мы будемъ имѣть:

$$\frac{p_0}{\Delta} + z = \frac{p}{\Delta} + \eta \dots (4).$$

Перейдемъ теперь къ опредѣленію высотъ  $\eta$  и  $\eta_0$ . По формулѣ Дарси (§ 35) имѣемъ:

$$\eta = \left( \alpha + \frac{\beta}{d} \right) \frac{4l}{d} v^2 \dots (5),$$

гдѣ  $l$  длина отрѣзка трубы  $am$ . Принимая во вниманіе уравненіе (3), мы легко получимъ:

$$\eta = \frac{lQ^2}{\gamma d^5} \dots (6), \text{ гдѣ}$$



$$\frac{1}{\gamma} = \left( \alpha + \frac{\beta}{d} \right) \left( \frac{8}{\pi} \right)^2.$$

Въ среднемъ для старой трубы, считая коэффициентъ  $a = 0$  и  $b = 0,000625$  (§ 35),  $\gamma = (15,7)^2$ .

При подсчетѣ высоты  $\eta_0$  слѣдовало-бы кромѣ тренія принять во вниманіе потерю скорости при входѣ жидкости въ резервуаръ *B*. Но такъ какъ высота эта незначительна, то мы ею пренебрежемъ; тогда будемъ имѣть:

$$\eta_0 = \frac{LQ^2}{\gamma d^5} \dots (7),$$

гдѣ *L*—полная длина трубы *ab*. Принимая во вниманіе выраженія (6 и 7), можемъ уравненія (2 и 4) переписать въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{p_0}{\Delta} + z = \frac{p}{\Delta} + \frac{lQ^2}{\gamma d^5} \dots (8)$$

$$H = \frac{LQ^2}{\gamma d^5} \dots (9).$$

При помощи этихъ уравненій мы и разрѣшимъ оба поставленные вопроса: изъ уравненія (9) найдемъ *Q*, а затѣмъ изъ уравненія (8) *p* въ любомъ мѣстѣ трубы. Но мы воспользуемся этими уравненіями для уясненія нѣкоторыхъ весьма важныхъ обстоятельствъ, сопровождающихъ движеніе въ водопроводныхъ трубахъ.

Опредѣляя изъ уравненія (4) пьезометрическую высоту въ пунктѣ *m*, найдемъ:

$$\frac{p}{\Delta} - \frac{p_0}{\Delta} = z - \eta \dots (10).$$

Отсюда слѣдуетъ, что для полученія пьезометрической высоты въ какомъ-нибудь пунктѣ трубы надо въ этомъ пунктѣ провести вертикаль до встрѣчи съ плоскостью  $c_1c_2$  и отъ этой плоскости отложить внизъ высоту потери отъ тренія на пути отъ начала трубы до даннаго пункта. Такимъ образомъ, для пункта *m* (фиг. 60) вся пьезометрическая высота будетъ равна *mm*<sub>1</sub>, если  $m_2m_1 = \eta$ . Построивъ подобнымъ образомъ пьезометрическія высоты для нѣсколькихъ точекъ оси трубы и соединивъ ихъ непрерывной кривой, получимъ кривую пьезометрическихъ высотъ. Легко показать, что кривая эта съ большимъ приближеніемъ будетъ представлять собою прямую, проходящую черезъ точки пересѣченія вертикалей *an* и *bn*<sub>2</sub> съ плоскостью  $c_1c_2$ . Дѣйствительно,



опредѣляя изъ уравненія (9)  $Q$  и подставляя его выраженіе въ уравненіе (8), легко найдемъ:

$$\frac{p}{\Delta} - \frac{p_0}{\Delta} = z - H \frac{l}{L} \dots (11).$$

Допуская, что проекція  $l$  на плоскость  $c_1c_2$  равна самой длинѣ, т. е., что  $am = l = nm_2$ , изъ уравненій (10) и (11) найдемъ:

$$\eta = H \frac{l}{L} \dots (12),$$

а это и есть уравненіе прямой, проходящей черезъ точки  $n$  и  $n_2$ , ибо при  $l = 0$  и  $\eta = 0$ , и при  $l = L$ ,  $\eta = H = \eta_0$ .

Откладывая отъ точекъ  $n$  и  $n_2$  по вертикали вверхъ высоту столба  $\frac{p_0}{\Delta}$ , соответствующаго атмосферному давленію, и соединяя концы этихъ высотъ прямой, мы получимъ прямую барометрическихъ давленій, ибо, напримѣръ, высота  $mm_3$  будетъ представлять собою высоту барометрическаго давленія въ пунктѣ  $m$ .

Легко сообразить, что положеніе точекъ  $m_1$  и  $m_3$  на вертикали не зависитъ отъ вида оси трубы, если мы всегда будемъ приблизительно полагать, что длина трубы равна ея проекціи на плоскость  $nn_1$ . А если это такъ, то, очевидно, давленіе въ трубѣ будетъ падать по мѣрѣ выгибанія ея оси вверхъ. Если часть трубы  $aa_1b$  расположится выше прямой пьезометрическихъ высотъ, то въ этой части давленіе будетъ меньше атмосфернаго. Понятно, что если бы въ стѣннкѣ этой части трубы сдѣлать сквозное отверстіе, то жидкость не будетъ изливаться изъ него наружу.

Если часть оси трубы при выгибаніи вверхъ расположится выше кривой барометрическихъ высотъ, то теченіе жидкости станетъ совершенно невозможнымъ, ибо для этого требовалось бы, чтобы давленіе въ этой части было отрицательнымъ, что невозможно. Въ предѣлѣ, при температурѣ жидкости равной нулю градусовъ, ось трубы можно выгибать вверхъ до тѣхъ поръ, пока она не коснется прямой  $ef$ . Если же температура жидкости выше нуля, то наивысшая точка трубы должна быть ниже кривой барометрическихъ высотъ по вертикали на высоту, соответствующую давленію паровъ жидкости при данной температурѣ.

Замѣтимъ, что труба, часть оси которой располагается выше кривой пьезометрическихъ высотъ, называется сифономъ.

Допустимъ теперь, что на концѣ трубы  $b$  установленъ кранъ, черезъ который жидкость должна пройти передъ поступленіемъ въ ре-



зервуаръ *B*. Если площадь отверстія крана ничтожна по сравненію съ площадью сѣченія трубы, то скорость теченія жидкости черезъ него можетъ быть весьма значительна. Такъ какъ скорость эта и, слѣдовательно, ея высота при втеканіи жидкости въ резервуаръ *B* теряется, то это обстоятельство должно быть учтено при вычисленіи высоты  $\eta_0$  (ур—іе 2).

Допустимъ, что площадь отверстія крана равна  $\omega$ , тогда вмѣсто уравненія (9), мы будемъ имѣть:

$$H = \frac{LQ^2}{\gamma d^5} + \frac{Q^2}{\alpha^2 \omega^2 2g} \dots (13),$$

гдѣ  $\alpha$ —соотвѣтствующій коэффициентъ сжатія.

По уравненіямъ (8) и (13) и въ данномъ случаѣ можно найти расходъ жидкости по трубѣ и давленіе въ любомъ пунктѣ трубы. Опредѣляя изъ уравненія (13)  $Q^2$  и подставляя его выраженіе въ уравненіе (8), получимъ:

$$\frac{p_0}{\Delta} + z = \frac{p}{\Delta} + \frac{H}{k} l \dots (14),$$

гдѣ

$$k = L + \frac{\gamma d^5}{\alpha^2 \omega^2 2g}.$$

Опредѣляя изъ уравненія (14) пьезометрическую высоту, найдемъ:

$$\frac{p}{\Delta} - \frac{p_0}{\Delta} = z - \frac{H}{k} l \dots (15).$$

Изъ уравненія (15) ясно, что и въ данномъ случаѣ, если только считать длины проекцій отрѣзковъ трубы на горизонтальную ось равными длинѣ самихъ отрѣзковъ, кривая пьезометрическихъ высотъ изобразится прямою, проходящей черезъ точку  $n$  (фиг. 60) и черезъ нѣкоторую точку  $n_3$ , лежащую на вертикали  $bn_1$ , на разстояніи отъ  $n_2$ , равномъ

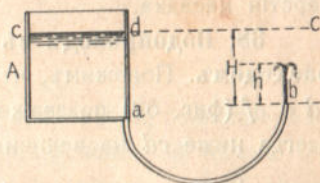
$$n_2 n_3 = H \left( 1 - \frac{1}{1 + \frac{\gamma d^5}{L 2g \alpha^2 \omega^2}} \right) \dots (16).$$

Отсюда видно, что по мѣрѣ закрыванія крана, если при полномъ открытіи площадь его пропускного отверстія равна площади сѣченія трубы, кривая пьезометрическихъ высотъ  $nn_2$  будетъ подниматься, вращаясь около точки  $n$ .



Въ предѣлѣ, когда кранъ совершенно будетъ закрытъ, прямая  $mn_3$  сольется, очевидно, съ прямою  $nn_1$ .

**37. Фонтанъ.** Фонтанъ является частнымъ случаемъ предыдущей задачи, когда труба  $ab$  заканчивается вертикальнымъ, открывающимся въ воздухъ (фиг. 61) колѣномъ, изъ котораго бьетъ вверхъ струя. Чтобы получить формулы для расчета размѣровъ частей фонтана, примѣнимъ къ сѣченію  $cd$  и концу трубы  $b$  теорему Д. Бернулли. Пренебрегая скоростью въ сѣченіи  $cd$ , предполагая, что на это сѣченіе давитъ атмосфера и что струя вытекаетъ изъ трубы также въ атмосферу, получимъ:



Фиг. 61.

$$H = \frac{v^2}{2g} + \eta \dots (1),$$

гдѣ  $v$ —скорость истечения изъ конца  $b$  трубы, который необходимо долженъ быть снабженъ коническимъ насадкомъ, и  $\eta$ —высота вредныхъ потерь на всемъ пути отъ  $cd$  до  $b$ .

Пренебрегая всѣми вредными потерями, кромѣ тренія въ трубѣ  $ab$ , мы, на основаніи предыдущаго, обозначая діаметръ трубы и ея длину соответственно черезъ  $d$  и  $l$ , можемъ уравненіе (1) переписать въ слѣдующемъ видѣ:

$$H = \frac{v^2}{2g} + \frac{Q^2 l}{\gamma d^5} \dots (2),$$

гдѣ  $Q$ —секундный расходъ.

Высотой скорости истечения изъ трубы  $ab$ , очевидно, въ данномъ случаѣ пренебрегать нельзя, ибо вода, вытекая изъ трубы, поднимается на нѣкоторую высоту  $h$  благодаря запасу энергіи въ видѣ живой силы. Не трудно сообразить, что при отсутствіи всякихъ вредныхъ сопротивленій, между  $h$  и  $v$  должна существовать слѣдующая зависимость:

$$\frac{v^2}{2g} = h,$$

Но въ дѣйствительности, какъ это установлено опытнымъ путемъ Мариоттомъ,

$$\frac{v^2}{2g} = h + 0,01h^2 \dots (3).$$

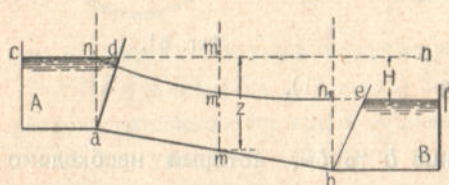
Понятно, что часть энергіи должна тратиться на преодоленіе сопротивленія воздуха и на удары съ обратно движущимися частицами.

Для рѣшенія различныхъ задачъ, къ уравненіямъ (2 и 3) надо присоединить уравненіе расхода черезъ конической насадокъ на концѣ трубы:

$$Q = \mu \omega v \dots (4),$$

гдѣ  $\mu$ —коэффициентъ расхода и  $\omega$ —площадь поперечнаго сѣченія отверстия насадка.

**38. Водопроводъ съ постояннымъ діаметромъ и переменнымъ расходомъ.** Положимъ, что два резервуара, уровни воды въ которыхъ  $cd$  и  $ef$  (фиг. 62) поддерживаются на постоянной высотѣ такъ, что  $ef$  всегда ниже  $cd$  на величину  $H$ , соединены трубой  $ab$ , имѣющей постоянный діаметръ по всей длинѣ.



Фиг. 62

Допустимъ дальше, что въ стѣнкѣ трубы  $ab$  по всей ея длинѣ сдѣланы на нѣкоторомъ разстояніи одно отъ другого отверстія, черезъ которыя вода можетъ вытекать наружу. Такимъ образомъ понятно, что изъ всей массы воды, проникающей въ трубу изъ резервуара  $A$ , часть ея, положимъ  $Q$ , вытечетъ изъ трубы на пути черезъ вышеупомянутыя отверстія, а остальная часть, положимъ  $P$ , воляется въ резервуаръ  $B$ .

Это есть не что иное, какъ случай обыкновенной уличной водопроводной трубы, изъ которой часть протекающей по ней воды отводится въ жилия помѣщенія.

Чтобы въ точности разрѣшить задачу относительно такого водопровода, надо въ точности же знать положеніе всѣхъ отверстій въ стѣнкахъ трубы и ихъ размѣры. Но для предварительныхъ соображеній теоретическаго характера возможно сдѣлать допущеніе, что  $Q$  расходуется равномерно по всей длинѣ трубы, такъ что на единицѣ длины трубы изъ нея вытекаетъ наружу объемъ

$$q = \frac{Q}{L} \dots (1),$$

гдѣ  $L$ —полная длина трубы  $ab$ .

Примѣнимъ теорему Д. Бернулли одинъ разъ къ сѣченіямъ  $cd$  и  $m$ , а другой разъ къ сѣченіямъ  $cd$  и  $ef$ , принимая во вниманіе потери на треніе и пренебрегая скоростями какъ въ сѣченіяхъ  $cd$  и  $ef$ , такъ и скоростью въ самой трубѣ; тогда получимъ:

$$\frac{p_0}{\Delta} + z = \frac{p}{\Delta} + \eta \dots (2) \text{ и}$$



$$H = \eta_0 . . . . (3),$$

гдѣ всѣ обозначенія тѣ же, что и въ предыдущей задачѣ.

Разсмотримъ сначала уравненіе (2). Опредѣляя изъ него пьезометрическую высоту въ пунктѣ  $m$  трубы, получимъ:

$$\frac{p_m}{\Delta} - \frac{p_0}{\Delta} = z - \eta . . . . (4).$$

Отсюда видно, что какъ и въ предыдущей задачѣ, откладывая отъ горизонтальной плоскости  $en, dn$  по вертикали, проведенной черезъ точку  $m$ , внизъ потерянную на треніе на пути  $am$  высоту  $\eta = m_2 m_1$ , мы получимъ въ точкѣ  $m$  конецъ пьезометрической высоты  $mm_1$ . Такимъ образомъ, зная  $\eta$  для различныхъ пунктовъ трубы, мы можемъ построить кривую пьезометрическихъ высотъ для всей трубы  $ab$ . Намъ остается, такимъ образомъ, найти выраженіе для высоты  $\eta$ , которое, очевидно, уже не будетъ имѣть того вида (§ 36, ур. 6), какъ въ предыдущей задачѣ, ибо здѣсь мы имѣемъ дѣло съ переменнымъ расходомъ по длинѣ трубы.

Но если мы будемъ разсматривать потерянную высоту  $d\eta$  на безконечно маломъ элементѣ длины трубы  $dl$ , предполагая, что расходъ  $s$  по длинѣ этого элемента остается неизмѣннымъ, мы получимъ:

$$d\eta = \frac{s^2 dl}{\gamma d^5} . . . . (5).$$

Такимъ образомъ, потеря на треніе на длинѣ  $am = l$ , будетъ:

$$\eta = \int_0^l \frac{s^2 dl}{\gamma d^5} . . . . (6).$$

Для того, чтобы произвести интегрированіе, намъ надо выразить  $s$  въ зависимости отъ  $l$ , или наоборотъ.

Легко видѣть на основаніи соотношенія (1), что расходъ черезъ сѣченіе трубы, отстоящее отъ  $a$  на разстояніи  $l$ , выразится слѣдующимъ образомъ:

$$s = P + \frac{Q}{L}(L-l) . . . . (7),$$

ибо черезъ это сѣченіе протечетъ то количество воды, которое попадетъ въ резервуаръ  $B$  и то количество, которое будетъ израсходовано на пути  $mb$ , длиною  $(L-l)$ .

Дифференцируя объ части уравненія (7), получимъ:

$$ds = -\frac{Q}{L} dl \dots (8).$$

Такъ что, на основаніи (6), будемъ имѣть:

$$\eta = -\frac{Q}{\gamma L d^5} \int_{P+Q}^{P+\frac{Q}{L}(L-l)} s^2 ds \dots (9)$$

ибо при  $l = 0$ ,  $s = P + Q$ —это есть расходъ черезъ сѣченіе  $a$ ,—и при произвольномъ значеніи  $l$ ,  $s = P + \frac{Q}{L}(L-l)$ .

Совершая интеграцію, будемъ имѣть:

$$\eta = \frac{L}{3\gamma Q d^5} \left[ (P+Q)^3 - \left( P + \frac{L-l}{L} Q \right)^3 \right] \dots (10).$$

Легко видѣть, что кривая пьезометрическихъ высотъ будетъ проходить черезъ точки  $n_1$  и  $n_2$ , точки пересѣченія вертикалей въ  $a$  и  $b$  соотвѣтственно съ уровнями  $cd$  и  $ef$ . Дѣйствительно, при  $l = 0$  и  $\eta = 0$ , а при  $l = L$ ,  $\eta = \eta_0 = H$ .

Выраженіе для  $\eta_0$  легко получить изъ уравненія (10), полагая  $l = L$ ; такимъ образомъ

$$\eta_0 = H = \frac{P^2 L}{3\gamma d^5} + \frac{Q^2 L}{3\gamma d^5} + \frac{(\sqrt{PQ})^2 L}{\gamma d^5} \dots (11).$$

Если бы  $P$  было равно нулю, то изъ уравненія (11) мы имѣли бы:

$$H = \frac{Q^2 L}{3\gamma d^5} \dots (12).$$

Отсюда видно, что если весь расходъ тратится равномерно на пути, то высота, потерянная на треніе, будетъ втрое меньше, чѣмъ при томъ же расходѣ на оконечности.

Если положимъ, что  $Q = 0$ , то изъ уравненія (11) получимъ:

$$H = \frac{P^2 L}{3\gamma d^5} \dots (13),$$

что мы имѣли уже въ предыдущей задачѣ.



Въ общемъ случаѣ, какъ это слѣдуетъ изъ уравненія (11), теряющійся на всемъ протяженіи трубы  $ab$  напоръ на треніе можно считать состоящимъ изъ трехъ частей: 1) изъ напора, соотвѣтствующаго расходу на концѣ трубы, 2) изъ напора, соотвѣтствующаго равномерному расходу на пути и 3) изъ напора, который терялся бы, если бы на оконечности существовалъ расходъ, равный среднему геометрическому изъ расходовъ  $P$  и  $Q$ .

Въ виду сложности выраженія (11), ему для облегченія при рѣшеніи задачъ практическаго характера придаютъ другой видъ.

Положимъ, что по трубѣ  $ab$ , того же діаметра какъ и данная, и при той же разности  $H$  уровней въ резервуарахъ (фиг. 62), безъ расходованія на пути, проводится изъ резервуара  $A$  въ резервуаръ  $B$  расходъ  $R$ . Тогда по предыдущему

$$H = \frac{R^2 L}{\gamma d^5} \dots (14).$$

Сравнивая выраженія (11) и (14) находимъ:

$$R^2 = P^2 + PQ + \frac{Q^2}{3} \dots (15),$$

откуда

$$R^2 = (P + 0,5Q)^2 + \frac{Q^2}{12},$$

такъ что

$$P + 0,57735Q > R > P + 0,5Q.$$

Такимъ образомъ, безъ большой погрѣшности можно считать, что

$$R = P + 0,57Q$$

и пользоваться при рѣшеніи задачъ вмѣсто выраженія (11) выраженіемъ

$$H = \frac{(P + 0,57Q)^2 L}{\gamma d^5} \dots (16).$$

Замѣтимъ, что высоты уровней воды въ резервуарахъ надъ центрами конечныхъ сѣченій  $a$  и  $b$  трубы можно въ общемъ случаѣ разсматривать какъ соотвѣтствующія этимъ сѣченіямъ заданныя пьезометрическія высоты.

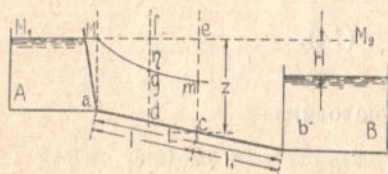
**39. Случай трубы, питающейся съ двухъ сторонъ.** Положимъ, что расчитавъ трубу  $ab$  (фиг. 63) на опредѣленные расходы  $Q$ —на пути и  $P$ —на оконечности, мы начинаемъ брать на пути расходъ, боль-

шей  $Q$ . Чтобы выяснитъ, какъ при этомъ будетъ уменьшаться  $P$ , воспользуемся уравненіемъ (15) предыдущаго параграфа; будемъ имѣть:

$$P = -0,5Q + \sqrt{R^2 - \frac{Q^2}{12}} \dots (1).$$

Отсюда ясно, что пока  $Q < R\sqrt{3}$ , то  $P$  имѣетъ положительное значеніе, т. е.  $ab$  даетъ еще расходъ на оконечности; если же  $Q = R\sqrt{3}$ , то  $P$  обращается въ нуль, т. е. вся вода, попадающая въ трубу  $ab$  изъ резервуара  $A$ , расходуется на пути; если, наконецъ,  $Q > R\sqrt{3}$ , то  $P$  становится отрицательнымъ.

Въ послѣднемъ случаѣ, очевидно, и резервуаръ  $B$  становится снабжающимъ, такъ что часть трубы  $ac$ , длиною  $l$ , будетъ питаться изъ резервуара  $A$ , а часть трубы  $bc$  длиною  $l_1$ ,—изъ резервуара  $B$ . Точку  $c$  называютъ точкой раздѣла питанія.



Фиг. 63.

Пусть высота уровня резервуара  $A$  надъ точкой  $c$  есть  $ce = z$  и пьезометрическая высота въ этой точкѣ

есть  $cm = z - em = z - h$ , гдѣ  $h = em$ .

Обозначая количество воды, расходуемое въ секунду на единицу длины трубы черезъ  $q$  и полную длину трубы черезъ  $L$ , будемъ имѣть во-первыхъ:

$$L = l + l_1 \dots (2)$$

и, по предыдущему:

$$h = \frac{(ql)^2 l}{3\gamma d^5} = \frac{q^2}{3\gamma d^5} l^3 \dots (3) \text{ и}$$

$$h - H = \frac{(ql_1)^2 l_1}{3\gamma d^5} = \frac{q^2}{3\gamma d^5} l_1^3 \dots (4).$$

Положимъ, что мы рассматриваемъ нѣкоторую трубу въ существующемъ водопроводѣ. Въ такомъ случаѣ мы должны считать данными  $d$  и  $q$ , а искомыми  $l$ ,  $l_1$  и  $h$ , которыя и могутъ быть найдены изъ трехъ уравненій (2, 3 и 4).

Этотъ случай будетъ соответствовать уличной трубѣ, прилегающей къ двумъ главнымъ водопроводнымъ линіямъ, причѣмъ высоты уровней въ резервуарахъ надъ крайними сѣченіями трубы  $a$  и  $b$  можно рассматривать какъ пьезометрическія высоты въ тѣхъ мѣстахъ этихъ



двухъ линій, гдѣ къ нимъ примыкаетъ уличная труба. При обыкновенныхъ условіяхъ вода будетъ течь по такой трубѣ въ опредѣленномъ направленіи, но въ случаѣ экстреннаго расхода, напримѣръ, въ случаѣ пожара, вода можетъ притекать въ трубу съ двухъ сторонъ.

Подобное же явленіе имѣетъ мѣсто въ водопроводахъ съ контръ-резервуарами. Въ часы малаго разбора воды въ городѣ часть воды, подаваемой насосами въ сѣть, скопляется въ резервуарѣ, помѣщенномъ на противоположномъ насосной станціи пунктѣ города. Въ часы же наибольшаго расхода контръ-резервуаръ становится питающимъ резервуаромъ. Въ этомъ случаѣ данными задачи являются пьезометрическая высота въ точкѣ раздѣла питанія и расходъ воды, а искомыми  $d$ ,  $l$  и  $l_1$ . Опять таки мы имѣемъ три уравненія съ тремя неизвѣстными.

Чтобы закончить задачу, найдемъ кривую пьезометрическихъ высотъ для части трубы  $ac$  (фиг. 63), считая  $h$  извѣстнымъ. При этомъ, какъ и въ предыдущихъ случаяхъ, мы будемъ считать длины отрѣзковъ трубы равными ихъ горизонтальнымъ проеціямъ, предполагая кромѣ того, что ось трубы лежитъ въ вертикальной плоскости. Если мы возьмемъ за начало координатъ точку пересѣченія вертикали  $aM$  съ горизонтальной прямой  $M_1M_2$ , лежащей въ плоскости уровня воды въ резервуарѣ  $A$ , направимъ ось  $l$  по  $M_1M_2$ , а ось  $\eta$ —по вертикали внизъ, то, какъ мы видѣли, искомая кривая будетъ представлять зависимость между  $\eta$  и  $l$ .

Вычислимъ поэтому потерянный напоръ на участкѣ трубы  $ad$ , предполагая, что длина этого участка равна  $l'$ . Если полный расходъ въ началѣ трубы есть  $ql = s_0$ , то черезъ сѣченіе  $d$  будетъ протекать объемъ:

$$s = q(l - l') = s_0 \frac{l - l'}{l} \dots (5).$$

Такимъ образомъ, очевидно, что потеря напора на послѣдующемъ элементѣ длины  $dl$  будетъ:

$$d\eta = \frac{s^2 dl}{\gamma d^5}$$

и

$$\eta = \frac{1}{\gamma d^5} \int_0^{l'} s^2 dl \dots (6),$$

или, имѣя въ виду уравненіе (5), откуда

$$dl = - \frac{l}{s_0} ds,$$

окончательно найдемъ:

$$\eta = - \frac{l}{\gamma d^5 s_0} \int_{s_0}^s s^2 ds = \frac{ls_0^2}{3\gamma d^5} \left[ 1 - \left( \frac{l-l'}{l} \right)^3 \right] \dots (7).$$

Подобнымъ же образомъ можетъ быть найдена кривая пьезометрическихъ высотъ для участка трубы *bc*.

**40. Водопроводъ съ постояннымъ расходомъ и переменнымъ діаметромъ.** Положимъ, что при прочихъ одинаковыхъ условіяхъ, которыя мы ставили въ первой задачѣ (§ 36), труба *ab* (фиг. 60) имѣетъ переменный діаметръ. Построимъ для такого случая кривую пьезометрическихъ высотъ и опредѣлимъ расходъ воды, поступающей въ секунду изъ резервуара *A* въ резервуаръ *B*.

Чтобы разрѣшить поставленные вопросы, примѣнимъ уравненіе Д. Бернулли одинъ разъ къ сѣченіямъ *cc*<sub>1</sub> и *m*, а затѣмъ къ сѣченіямъ *cc*<sub>1</sub> и *dd*<sub>1</sub>; очевидно, будемъ имѣть, пренебрегая высотами, соответствующими скоростямъ:

$$\frac{p}{\Delta} - \frac{p_0}{\Delta} = z - \eta \dots (1).$$

и

$$H = \eta_0 \dots (2).$$

Теперь намъ остается только опредѣлить  $\eta$  и  $\eta_0$ . По предыдущему для элемента трубы длиною *dl*, будемъ имѣть:

$$d\eta = \frac{Q^2 dl}{\gamma d^5} \dots (3),$$

такъ что

$$\eta = Q^2 \int_0^l \frac{dl}{\gamma d^5} \dots (4) \text{ и } \eta_0 = Q^2 \int_0^L \frac{dl}{\gamma d^5} \dots (5),$$

гдѣ *l*—длина отръзка трубы *am* и *L*—полная длина трубы.

Очевидно, для опредѣленія значеній интеграловъ въ выраженіяхъ (4 и 5), надо знать зависимость между *d* и *l*, при этомъ, для простоты и предварительныхъ соображеній, можно считать  $\gamma$  величиной постоянной и равной (15,7)<sup>2</sup>, хотя  $\gamma$  и зависитъ отъ *d*.



Для примѣра положимъ, что труба  $ab$  имѣетъ форму усѣченного конуса съ діаметромъ  $d_0$  въ пунктѣ  $a$  и  $d_1$  въ пунктѣ  $b$ . Тогда, очевидно, діаметръ въ пунктѣ  $m$ , на разстояніи  $l$  отъ  $a$ , будетъ:

$$d = d_0 - (d_0 - d_1) \frac{l}{L} \dots (6),$$

откуда

$$\partial d = - (d_0 - d_1) \frac{\partial l}{L} \dots (7).$$

Такимъ образомъ, на основаніи выраженій (4 и 5), будемъ имѣть:

$$\eta = \frac{Q^2 L}{4\gamma(d_0 - d_1)} \left( \frac{1}{d^4} - \frac{1}{d_0^4} \right) \dots (8) \text{ и}$$

$$\eta_0 = \frac{Q^2 L}{4\gamma(d_0 - d_1)} \left( \frac{1}{d_1^4} - \frac{1}{d_0^4} \right) \dots (9).$$

Имѣя въ виду выраженія (8 и 9), при помощи уравненій (1 и 2) мы можемъ найти расходъ  $Q$  и пьезометрическую высоту во всякой точкѣ трубы.

Положимъ теперь, что водопроводъ составленъ изъ ряда трубъ съ постоянными и неравными діаметрами  $d_1, d_2$  и  $d_3$  и т. д. и соотвѣтственными длинамъ  $l_1, l_2$  и  $l_3$  и т. д. Пренебрегая опять всѣми вредными сопротивленіями кромѣ тренія, по предыдущему будемъ имѣть:

$$H = \frac{Q^2}{\gamma} \sum_1^n \frac{l}{d^5} \dots (10),$$

гдѣ  $\gamma$  надо считать равнымъ средней величинѣ (15,7)<sup>2</sup>.

Допустимъ, что данный водопроводъ требуется замѣнить одной трубой, имѣющей длину  $L$  и діаметръ  $D$ , при условіи одинаковаго значенія  $Q$  и  $H$ . Для такой трубы будемъ, очевидно, имѣть:

$$H = \frac{Q^2 L}{\gamma D^5} \dots (11).$$

Сравнивая (10 и 11), получимъ:

$$\frac{L}{D^5} = \sum_1^n \frac{l}{d^5} \dots (12).$$

Это соотношеніе называютъ правиломъ Дюпюи.

Положимъ, что водопроводъ состоитъ только изъ двухъ трубъ, одна изъ которыхъ имѣеть длину  $l_1 = 0,9l$  и другая— $l_2 = 0,1l$ , гдѣ  $l$ —полная длина водопровода, причеъ діаметръ второй трубы  $d_2 = 0,2d_1$ , гдѣ  $d_1$ —діаметръ первой трубы. Тогда по правилу Дюпюи имѣемъ:

$$\frac{L}{D^5} = \frac{0,9l}{d_1^5} + \frac{0,1l}{(0,2)^5 d_1^5} = 313,4 \frac{l}{d_1^5}.$$

Найдемъ длину эквивалентной трубы, допуская, что ея діаметръ  $D = d_2$ . Очевидно, что

$$L = 313,4(0,2)^5 l = 0,100288l = 1,00288l_2,$$

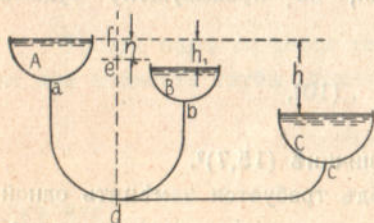
т. е.

$$L = \text{приблиз. } l_2.$$

Изъ этого примѣра видно, что если въ водопроводѣ имѣется одна, хотя бы и очень короткая труба, діаметръ которой значительно меньше діаметра остальныхъ, то такая труба имѣеть преимущественное вліяніе на потерю напора на треніе и на расходъ.

Желая уменьшить теряемый напоръ на треніе и увеличить расходъ, надо прежде всего замѣнить такую трубу трубою большаго діаметра.

**41. Водопроводъ съ тремя резервуарами.** Пусть три резервуара  $A$ ,  $B$  и  $C$  (фиг. 64) сообщаются между собою трубами  $ad$ ,  $db$  и  $dc$ , имѣющими соответственно діаметры  $d_1$ ,  $d_2$  и  $d_3$  и длины  $l_1$ ,  $l_2$  и  $l_3$ , причеъ разность высоты уровней воды въ резервуарѣ  $A$  и  $B$  равна  $h_1$ , а—резервуаровъ  $A$  и  $C$  равна  $h$ .



Фиг. 64.

Понятно, что верхній резервуаръ  $A$  можетъ только снабжать водою остальные резервуары, а нижній  $C$ —только получать воду отъ двухъ верхнихъ; что же касается до средняго резервуара  $B$ , то онъ можетъ и снабжать водою резервуаръ  $C$ , и получать воду изъ резервуара  $A$ , въ зависимости отъ величины пьезометрической высоты въ точкѣ развѣтвленія  $d$ .

Если  $de$  есть пьезометрическая высота въ этой точкѣ и  $\eta = fe$  потерянный напоръ на треніе въ трубѣ  $ad$  на пути отъ  $a$  до  $d$ , то въ томъ случаѣ, когда  $\eta > h_1$ , резервуаръ  $B$  будетъ снабжать водою резервуаръ  $C$ , когда же  $\eta < h_1$ , резервуаръ  $B$  будетъ получать воду изъ резервуара  $A$ .



Положимъ сначала, что мы имѣемъ первый случай, т. е., что  $\eta > h_1$ ; тогда, обозначая расходы въ трубахъ  $ad$ ,  $bd$  и  $dc$  соответственно черезъ  $q_1$ ,  $q_2$  и  $q_3$ , будемъ имѣть слѣдующія уравненія:

$$q_3 = q_1 + q_2 \dots (1), \quad \eta = \frac{q_1^2 l_1}{\gamma d_1^5} \dots (2),$$

$$\eta - h_1 = \frac{q_2^2 l_2}{\gamma d_2^5} \dots (3) \quad \text{и} \quad h - \eta = \frac{q_3^2 l_3}{\gamma d_3^5} \dots (4).$$

Во второмъ случаѣ, когда  $\eta < h_1$ , найдемъ:

$$q_1 = q_2 + q_3 \dots (1'), \quad \eta = \frac{q_1^2 l_1}{\gamma d_1^5} \dots (2'),$$

$$h_1 - \eta = \frac{q_2^2 l_2}{\gamma d_2^5} \dots (3') \quad \text{и} \quad h - \eta = \frac{q_3^2 l_3}{\gamma d_3^5} \dots (4').$$

Если мы разсматриваемъ существующій водопроводъ, то задача является вполнѣ опредѣленной, ибо для опредѣленія четырехъ неизвѣстныхъ  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  и  $\eta$  мы имѣемъ четыре уравненія. Но при рѣшеніи задачъ прежде всего приходится рѣшить вопросъ, какой мы имѣемъ случай и какой изъ группъ уравненій надо пользоваться. Для рѣшенія этого вопроса полагаемъ  $\eta = h_1$  и опредѣляемъ изъ уравненій (2 и 4)  $q_1$  и  $q_3$ . Если окажется при этомъ, что  $q_1 < q_3$ , т. е., что изъ резервуара  $A$  вытекаетъ меньше воды, чѣмъ поступаетъ въ резервуаръ  $C$ , то это будетъ первый случай и мы должны примѣнить первую группу уравненій; если же  $q_1 > q_3$ , то придется примѣнить вторую группу уравненій.

Задача эта находить примѣненіе также при расчетѣ развѣтвленной водопроводной сѣти; но тогда высоты уровней воды въ резервуарахъ надъ сѣченіями трубъ  $a$ ,  $b$  и  $c$  будутъ представлять собою пьезометрическія высоты въ этихъ сѣченіяхъ.

#### ОТДѢЛЪ 4-й.

##### *Равномѣрное движеніе воды въ рѣкахъ и каналахъ.*

42. Основное уравненіе равномѣрнаго установившагося движенія въ каналахъ; вредныя потери. Въ гидравликѣ рѣкой называютъ всякій естественный, а каналомъ искусственный открытый водопроводъ.

Разница между трубой и каналомъ или рѣкой заключается слѣдовательно въ томъ, что при движеніи въ послѣднихъ вода имѣетъ всегда свободную поверхность, находящуюся подъ давленіемъ атмосферы, тогда какъ въ трубѣ она свободной поверхности не имѣетъ, ибо заполняетъ все ея сѣченіе.

Приступая къ изслѣдованію движенія воды въ каналахъ и рѣкахъ, надо отмѣтить прежде всего, что здѣсь, подобно тому какъ это имѣетъ мѣсто въ трубахъ, не можетъ быть и рѣчи о параллелизмѣ струекъ и равенствѣ скоростей ихъ въ нормальныхъ къ оси канала сѣченіяхъ. Въ виду этого и здѣсь разсматривается не дѣйствительное, а нѣкоторое фиктивное движеніе, которое строится такъ же, какъ и фиктивное движеніе въ трубахъ, т. е. предполагается, что въ каждомъ нормальномъ къ оси канала сѣченіи всѣ частицы имѣютъ равныя и параллельныя скорости, нормальныя къ сѣченію, причемъ скорость ихъ опредѣляется по соотношенію  $v = \frac{Q}{\Omega}$ , гдѣ  $Q$ —секундный расходъ воды, а  $\Omega$ —площадь нормальнаго къ оси сѣченія.

Опытъ показываетъ, что такое допущеніе не ведетъ къ замѣтнымъ погрѣшностямъ въ расчетахъ каналовъ; но однако-же никогда не нужно забывать, что дѣйствительное движеніе будетъ сильно отличаться отъ фиктивнаго, ибо это обстоятельство часто приходится принимать во вниманіе.

Равномѣрное установившееся движеніе воды, т. е. движеніе съ постоянной средней скоростью вдоль оси, не измѣняющееся со време-



немъ, имѣетъ мѣсто, главнымъ образомъ, въ искусственныхъ каналахъ, обладающихъ на всемъ или значительномъ протяженіи постояннымъ уклономъ дна къ горизонту и постояннымъ по величинѣ, имѣющимъ въ большинствѣ случаевъ правильную геометрическую форму, нормальнымъ къ оси сѣченіемъ. Въ рѣкахъ же равномерное движеніе можетъ имѣть мѣсто, вслѣдствіе постояннаго измѣненія формы русла и уклона дна, развѣ на протяженіи нѣкоторыхъ небольшихъ участковъ.

Разсмотримъ равномерное установившееся теченіе въ нѣкоторомъ участкѣ канала, имѣющаго по всей длинѣ одинаковыя по размѣрамъ и по формѣ нормальныя сѣченія и постоянный уклонъ дна къ горизонту. Пусть  $ABCD$  (фиг. 65) есть продольное сѣченіе этого канала,  $i$ —уголъ наклона его дна  $BD$  къ горизонту и  $l$ —его длина, отсчитываемая по оси; такъ какъ при равномерномъ



Фиг. 65.

установившемся теченіи  $Q$ , а такъ же и  $\Omega$ , величины постоянныя, то при одинаковой формѣ и размѣрахъ всѣхъ поперечныхъ сѣченій канала поверхность воды представится плоскостью, наклоненной къ горизонту подъ тѣмъ же угломъ, какъ и дно канала. Примѣнимъ къ точкамъ  $A$  и  $C$  уравненіе Д. Бернулли, причѣмъ введемъ въ него членъ, зависящій отъ потерь на треніе. Въ виду того, что въ точкахъ  $A$  и  $C$  давить атмосфера и что скорости струекъ во всей массѣ жидкости въ каналѣ равны между собою, будемъ просто имѣть:

$$h = \eta . . . . (1),$$

гдѣ  $h = EC$  есть то, что называютъ паденіемъ поверхности воды въ каналѣ, а  $\eta$ —высота вредныхъ сопротивленій на протяженіи отъ  $AB$  до  $CD$ .

Изъ уравненія (1) мы видимъ, что работа силы тяжести воды при паденіи цѣликомъ затрачивается на преодоленіе вредныхъ сопротивленій. Высота вредныхъ сопротивленій выражается въ данномъ случаѣ совершенно такъ же, какъ и въ предыдущемъ. при движеніи въ трубахъ; именно:

$$\eta = \frac{O}{\Omega} l \frac{\varphi(v)}{\Delta} . . . . (2),$$

гдѣ  $O$ —смоченный периметръ сѣченія канала, т. е. та часть периметра струи воды, по которой она соприкасается со стѣнками канала,  $\Omega$ —площадь сѣченія струи, или, какъ принято говорить, пло-



щадь живого сѣченія и  $\varphi(v)$ —нѣкоторая функція скорости. Многочисленныя наблюденія показали, что

$$\frac{\varphi(v)}{\Delta} = av + bv^2 \dots (3).$$

По Прони

$$a = 0,000044 \text{ и } b = 0,000309.$$

Базенъ нашель возможнымъ положить

$$a = 0 \text{ и } b = \alpha + \frac{\beta}{r},$$

гдѣ  $r = \frac{Q}{Q}$ —средній радіусъ живого сѣченія, причеъ даль для коэффициентовъ  $\alpha$  и  $\beta$  слѣдующія значеніе въ предположеніи, что за единицу длины принять одинъ метръ:

- 1) стѣнки канала очень гладкія (цементная штукатурка, строганая доска и т. п.) . . . . .  $\alpha = 0,00015$  и  $\beta = 0,0000045$ ,
- 2) гладкія стѣнки (кладка изъ тесаныхъ камней, кладка кирпичная, деревянные доски) . . . . . „  $= 0,00019$  „  $= 0,0000133$ ,
- 3) стѣнки изъ бутовой кладки . . . . . „  $= 0,00024$  „  $= 0,00006$ ,
- 4) земляныя стѣнки . . . . . „  $= 0,00028$  „  $= 0,00035$ ,
- 5) каменистое русло . . . . . „  $= 0,0004$  „  $= 0,0007$ .

Принимая во вниманіе выраженіе для  $\frac{\varphi(v)}{\Delta}$ , данное Базеномъ, изъ уравненій (1) и (2) найдемъ:

$$h = \frac{1}{r} l bv^2 \dots (4)$$

или

$$ri = bv^2 \dots (5),$$

гдѣ уголъ  $i$  поставленъ вмѣсто  $tgi$ , вслѣдствіе того, что онъ бываетъ обыкновенно очень малымъ. Этотъ уголъ  $i$  называютъ обыкновенно уклономъ и выражаютъ въ промиляхъ. Если, на примѣръ,  $i = 1,5^0/00$  (промили), то это значить, что на длинѣ  $l = 1000$  mtr. паденіе  $h = 1,5$  mtr.

Изъ уравненія (5), полагая  $\frac{1}{\sqrt{b}} = c$ , найдемъ:



$$v = c \sqrt{ri} \dots (6).$$

Швейцарскіе инженеры Гангилье и Куттеръ даютъ  $c$  въ формулѣ (6) слѣдующее выраженіе:

$$c = \frac{23 + \frac{0,00115}{i} + \frac{1}{n}}{1 + \left(23 + \frac{0,00115}{i}\right) \frac{n}{\sqrt{r}}} \dots (7).$$

Такъ какъ членъ, зависящій отъ уклона,—особенно при уклонахъ, которые обыкновенно придають дну канала,—является величиной очень ничтожной по сравненію съ другими членами, то имъ очень часто и въ числитель и знаменатель пренебрегаютъ.

Въ формулѣ (7)  $n$  есть нѣкоторый постоянный коэффициентъ, называемый обыкновенно степенью шероховатости стѣнокъ канала и имѣющій слѣдующія значенія:

- 1) очень гладкія стѣнки . . . . .  $n = 0,010$ ,
- 2) гладкія стѣнки . . . . . „  $= 0,012$ ,
- 3) стѣнки изъ бутовой кладки . . . . . „  $= 0,017$ ,
- 4) стѣнки земляныя, но твердыя и правильныя;  
бутовая кладка . . . . . „  $= 0,020$ ,
- 5) земляныя стѣнки . . . . . „  $= 0,025$ ,
- 6) особенно шероховатыя стѣнки (крупная галька,  
водоросли) . . . . . „  $= 0,030$

Замѣтимъ, что при примѣненіи формулы (7) надо за единицу длины считать одинъ метръ.

На основаніи своихъ наблюденій, произведенныхъ на рѣкѣ Миссиссипи, американскіе инженеры Гумфрейсъ и Абботъ даютъ слѣдующую эмпирическую формулу для равномернаго движенія въ рѣкахъ:

$$v = \left( \sqrt{0,00256 + \sqrt{68,72r \sqrt{i} - 0,05b}} \right)^3 \text{ mtr} \dots (8),$$

въ которой

$$r = \frac{\Omega}{O + L} \text{ и } b = \frac{0,933}{\sqrt{h + 0,457}},$$

гдѣ  $\Omega$ ,  $O$ ,  $L$  и  $h$  обозначаютъ площадь живого сѣченія, смоченный периметръ, ширину рѣки по верху и среднюю глубину, т. е. высоту

прямоугольника, имѣющаго ширину  $L$  и равновеликаго по площади живому сѣченію рѣки.

Въ формулѣ (8) члены, содержащіе коэффициентъ  $b$ , имѣютъ слабое вліяніе на окончательные выводы, поэтому ими можно пренебречь въ такомъ случаѣ будемъ имѣть:

$$v = 8,28972 \sqrt{\frac{\Omega}{O + L}} (i)^{1/4} \text{ mtr} \dots (9).$$

Въ виду сложности вышеуказанныхъ формулъ, пользуются иногда формулами логариемическими. Изъ этихъ послѣднихъ наибольшимъ распространеніемъ пользуется формула Маннинга:

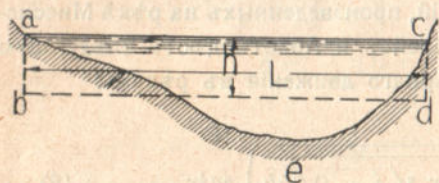
$$v = \frac{1}{n} r^{2/3} i^{1/2} \dots (10),$$

гдѣ  $n$  имѣетъ то же значеніе, что и въ формулѣ (7). Но чаще всего примѣняется формула Базена, поэтому для рѣшенія задачъ мы будемъ имѣть слѣдующія уравненія:

$$ri = \left( \alpha + \frac{\beta}{r} \right) v^2 \dots (11), \quad Q = \Omega v \dots (12) \text{ и}$$

$$r = \frac{\Omega}{O} \dots (13).$$

Замѣтимъ, что при примѣненіи этихъ уравненій къ равномерному движенію въ рѣкахъ,  $r$  можно безъ большой погрѣшности считать равнымъ средней глубинѣ  $h$  (фиг. 66). Дѣйствительно, изъ уравненія (13) мы имѣемъ:



Фиг. 66.

$$r = \frac{Lh}{L + 2h} = \frac{h}{1 + \frac{2h}{L}} = \infty h \dots (14),$$

ибо обыкновенно  $h$  имѣетъ очень ничтожную величину по сравненію съ  $L$ .

Не останавливаясь на задачахъ обыденныхъ, въ которыхъ при прочих заданныхъ величинахъ, по тремъ уравненіямъ (11, 12 и 13), разыскиваются три неизвѣстныхъ, рассмотримъ двѣ задачи, имѣющія общее значеніе. Обратимъ однако же вниманіе на то, что съ точки зрѣнія непосредственныхъ приложений изложенной теоріи интересно знать,



хотя бы даже и приблизительно, соотношеніе, во-первыхъ, между среднею скоростью и скоростями нѣкоторыхъ струекъ, которыя можно непосредственно измѣрять, чтобы по послѣднимъ приблизительно установить вторую въ существующемъ каналѣ, и, во-вторыхъ,—между средней скоростью и скоростью у стѣнокъ, ибо величиной послѣдней обусловливается ихъ размывъ.

Въ виду этого многіе наблюдатели пытались установить зависимость между средней скоростью  $v$ , скоростью стрешня  $v_0$ , т. е. наибольшей скоростью на поверхности и скоростью у стѣнокъ  $w$ .

По Прони между этими скоростями существуютъ слѣдующія соотношенія:

$$v = v_0 \frac{v_0 + 2,372}{v_0 + 3,153} \dots (15) \quad \text{и} \quad w = 2v - v_0 \dots (16).$$

Базенъ полагаетъ, что

$$v_0 = v + 14\sqrt{ri} \dots (17) \quad \text{и} \quad w = v - 6\sqrt{ri} \dots (18).$$

Скорость у стѣнокъ, во избѣжаніе размыва, не должна превосходить слѣдующихъ значений:

- 1) плотный песокъ . . . . .  $w = 0,9$  mtr.,
- 2) плотный глинистый грунтъ . . . . . „ = 1,5 mtr.,
- 3) каменистый грунтъ; дно укрѣплено одиночной мостовой . . . . . „ = 2,1 mtr.,
- 4) скалистый грунтъ; дно укрѣплено двойной мостовой . . . . . „ = 3 mtr.,
- 5) потокъ изъ каменной кладки . . . . . „ = 4,25 mtr.,
- 6) деревянный лотокъ . . . . . „ = 6 mtr.

**43. Задача о наименьшемъ уклонѣ.** Задача эта заключается въ томъ, чтобы при данныхъ  $Q$  и  $v$  подобрать форму поперечнаго сѣченія канала такъ, чтобы уклонъ  $i$  получилъ наименьшее значеніе.

Изъ уравненія (11) предыдущаго параграфа находимъ:

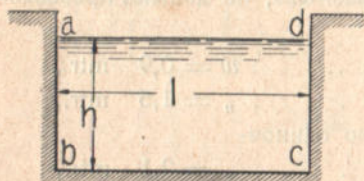
$$i = \left( \alpha + \frac{\beta}{r} \right) \frac{v^2}{r} \dots (1).$$

Отсюда видимъ, что наименьшему значенію  $i$  при данной скорости  $v$  соответствуетъ наибольшее значеніе  $r$ . Такъ какъ при данныхъ  $Q$  и  $v$  мы изъ уравненія (12) предыдущаго параграфа тотчасъ же можемъ опредѣлить  $\Omega$ , то на основаніи уравненія (13) того же параграфа легко можемъ убѣдиться, что наименьшему уклону соотвѣт-

ствуесть наименьшій периметръ при данной площади. Такимъ образомъ, задача о наименьшемъ уклонѣ сводится къ чисто геометрической задачѣ о наименьшемъ периметрѣ.

Какъ извѣстно, рѣшеніе этой задачи заключается въ томъ, что наименьшимъ периметромъ при данной площади обладаетъ окружность, и что правильный многоугольникъ обладаетъ меньшимъ периметромъ, чѣмъ неправильный. Соответственно съ этимъ, если форма сѣченія не дана, каналу слѣдуетъ придать форму полуокружности или, если это необходимо по какимъ-либо соображеніямъ конструктивнаго характера, форму половины правильнаго многоугольника (квадрата или шестиугольника). Но при практическихъ примѣненіяхъ въ задачу эту вводится ограниченіе тѣмъ, что напередъ задается форма канала; тогда уже рѣшеніе будетъ заключаться въ опредѣленіи относительныхъ размѣровъ сѣченія при условіи наименьшаго периметра при данной площади. Чаше же всего задача эта примѣняется къ сѣченіямъ прямоугольному и трапециoidalному, поэтому мы и рассмотримъ только эти два сѣченія.

1. Сѣченіе прямоугольное. Положимъ, что ширина живого сѣченія канала равна  $l$ , а высота его —  $h$  (фиг. 67); требуется при данной площади  $\Omega$  установить такое соотношеніе между  $l$  и  $h$ , чтобы периметръ  $abcd$  имѣлъ наименьшее значеніе.



$$\Omega = lh \dots (1) \quad \text{и} \quad O = 2h + l \dots (2).$$

Фиг. 67. Опредѣляя изъ уравненія (1)  $h$  и подставляя его выраженіе въ уравненіе (2), получимъ:

$$O = l + \frac{2\Omega}{l}.$$

Приравнивая производную отъ  $O$  по  $l$  нулю, мы найдемъ то значеніе  $l$ , которое обращаетъ  $O$  въ минимумъ; такимъ образомъ:

$$\frac{dO}{dl} = 1 - \frac{2\Omega}{l^2} = 0, \quad \text{или} \quad l^2 = 2\Omega.$$

Отсюда, принимая во вниманіе уравненіе (1), найдемъ:

$$l = 2h \dots (5),$$

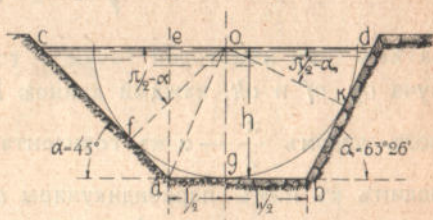
т. е. ширина живого сѣченія должна быть въ два раза больше его высоты.



2. Сѣченіе трапецидальное. Въ этомъ случаѣ кромѣ  $Q$  и  $v$  задается еще и уголъ  $\alpha$  (фиг. 68), который обусловливается свойствами грунта. Для угла  $\alpha$  выбираютъ слѣдующія значенія:

- 1) стѣнки мощенныя .  $\alpha = 63^{\circ}26'$ ,
- 2) твердый грунтъ . .  $\alpha = 45^{\circ}$ ,
- 3) рыхлый грунтъ . .  $\alpha = 26^{\circ}30'$ ,

Легко видѣть, что



Фиг. 68.

$$\Omega = \left( l + \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha} \right) h . . (1) \text{ и } O = l + \frac{2h}{\sin \alpha} . . (2).$$

Опредѣляя изъ уравненія (1)  $l$  и подставляя его значеніе въ уравненіе (2), получимъ:

$$O = \frac{\Omega}{h} - \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{2h}{\sin \alpha} . . . (3).$$

Чтобы найти значеніе  $h$ , обращающее  $O$  въ minimum, возьмемъ отъ  $O$  по  $h$  производную и приравняемъ ее нулю; получимъ:

$$-\frac{\Omega}{h^2} - \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{2}{\sin \alpha} = 0,$$

откуда, принимая во вниманіе уравненіе (1), будемъ имѣть:

$$l = \frac{2h}{\sin \alpha} - \frac{2h}{\operatorname{tg} \alpha} . . . (4).$$

Таково должно быть соотношеніе между  $l$  и  $h$ , чтобы  $O$  достигала наименьшаго значенія. Этому соотношенію можно дать слѣдующее геометрическое толкованіе. Опустимъ изъ середины верхняго основанія  $o$  перпендикуляръ  $of$  на сторону  $ac$  и соединимъ  $o$  съ  $a$ . Очевидно, что площадь треугольника  $oca$  можетъ быть выражена либо половиною произведенія  $ac$  на  $of$ , либо— $oc$  на  $ae$ ; но такъ какъ на основаніи (4)  $ac = oc$ , то слѣдовательно  $of = og = h$ . Отсюда слѣдуетъ, что окружность, проведенная изъ  $o$  радиусомъ  $h$ , должна касаться всѣхъ трехъ сторонъ трапеціи.

Такимъ образомъ, построеніе трапеціи, имѣющей при данной площади и углѣ  $\alpha$  наименьшій периметръ, сводится къ слѣдующему. Прежде всего опредѣляемъ по  $\Omega$  высоту трапеціи  $h$ , что легко сдѣлать, сопоставляя уравненія (1 и 4), откуда легко получимъ:

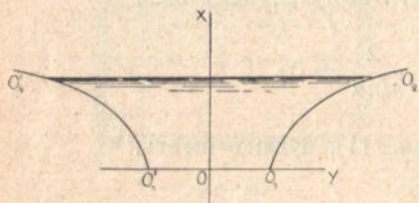
$$h = \sqrt{\Omega \frac{\sin \alpha}{2 - \cos \alpha}} \dots (5),$$

затѣмъ изъ нѣкоторой точки  $o$  горизонтальной линіи  $cd$  ведемъ три луча  $og$ ,  $of$  и  $ok$ , каждый длиною  $h$ , первый вертикально, а вторые подъ угломъ  $\frac{\pi}{2} - \alpha$  къ горизонтали и въ концахъ ихъ  $g$ ,  $f$  и  $k$  проводимъ къ нимъ перпендикуляры  $ab$ ,  $ac$  и  $bd$ . Пересѣченіе этихъ перпендикуляровъ между собою и съ горизонтальной прямой  $cd$  дасть намъ трапецію живого сѣченія струи, соотвѣтствующую наименьшему уклону.

**44. Задача о постоянной скорости.** Задача эта имѣетъ большое значеніе при построеніи канализаціонной сѣти, гдѣ, во избѣжаніе осадковъ на стѣнкахъ каналовъ, желательно при переменномъ наполненіи имѣть постоянную скорость теченія, достаточную для поддержанія твердыхъ частицъ во взвѣшенномъ состояніи.

Задача эта можетъ быть рѣшена точнымъ образомъ; положимъ, что сѣченіе канала плоскостью, нормальной къ оси, имѣетъ видъ указанный на (фиг. 69), гдѣ  $ox$ —ось симметріи,  $oo_1$ —горизонтальная прямая и  $o_1o_2$ —кривая, видъ которой мы должны опредѣлить подъ условіемъ постоянства скорости, что, какъ легко видѣть изъ уравненія (11, § 42), ведетъ къ постоянству гидравлическаго радіуса.

Такимъ образомъ мы должны имѣть:



Фиг. 69.

$$r = \frac{\Omega}{O} = a = const.,$$

или, обозначая длину  $oo_1$  черезъ  $b$

$$a = \frac{\int y dx}{b + \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx} \dots (1),$$

откуда

$$ab + a \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int y dx \dots (2).$$



Дифференцируя объ части этого уравненія по  $x$ , и раздѣляя переменныя, получимъ:

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{\sqrt{y^2 - a^2}} \dots (3),$$

откуда по интеграціи будемъ имѣть:

$$x = alg \left( y + \sqrt{y^2 - a^2} \right) + c.$$

Замѣчая, что при  $x = 0$ ,  $y = b$ , найдемъ:

$$x = alg \frac{y + \sqrt{y^2 - a^2}}{b + \sqrt{b^2 - a^2}} \dots (4).$$

Это и есть уравненіе кривой  $o_1 o_2$ .

Но каналъ такой формы представляетъ, особенно при укладкѣ въ грунтъ, большія конструктивныя неудобства, поэтому никогда и не примѣняется. Въ виду этого при постройкѣ канализаціи обыкновенно примѣняютъ сѣченія, которыя, удовлетворяя требованіямъ постоянства скорости при различныхъ наполненіяхъ приблизительно, являются въ то же время очень удобными въ конструктивномъ отношеніи. Къ таковымъ относятся сѣченія круглое и яйцеобразное.

1. Круглое сѣченіе (фиг. 70). Разсмотримъ, какъ здѣсь съ измѣненіемъ наполненія измѣняются  $r$  и  $v$ .

Допустимъ что жидкость наполняетъ сѣченіе до уровня  $ab$ ; тогда

$$h = ce = R(1 - \cos\varphi) \dots (1),$$

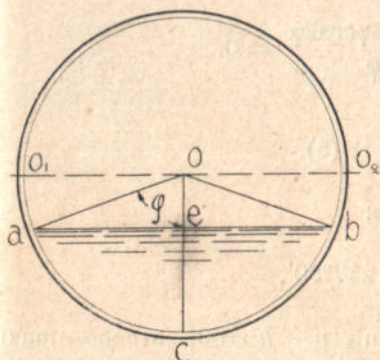
гдѣ  $R$  радиусъ круга,

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{R^2 2\varphi}{2} - 2 \text{ пл. } \triangle aoe = \\ &= \frac{R^2}{2} (2\varphi - \sin 2\varphi) \dots (2) \text{ и} \end{aligned}$$

$$O = R 2\varphi \dots (3).$$

Такимъ образомъ

$$r = \frac{\Omega}{O} = \frac{R}{2} \left( 1 - \frac{\sin 2\varphi}{2\varphi} \right) \dots (4).$$



Фиг. 70.

Не трудно будетъ убѣдиться, что формулы эти справедливы и для  $\varphi > \frac{\pi}{2}$ , т. е. для наполненія выше  $o_1o_2$ .

Разсматривая выраженіе (4), легко видѣть, что при  $\varphi = 0$  и, слѣдовательно,  $h = 0$ , и  $r = 0$ ; а если  $r = 0$ , то и  $v = 0$ , ибо изъ уравненія (11, § 42)

$$v = \frac{ri}{\alpha + \frac{\beta}{r}},$$

откуда, взявъ производную отъ числителя и знаменателя для устраненія неопредѣленности, мы и найдемъ, что при  $r = 0$  и  $v = 0$ .

При увеличеніи угла  $\varphi$  отъ 0 до  $\frac{\pi}{2}$ , отношеніе  $\frac{\sin 2\varphi}{2\varphi}$  будетъ непрерывно убывать отъ единицы до нуля, причемъ  $r$  и  $v$  будутъ въ то же время непрерывно возрастать. При  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  мы получимъ  $r = \frac{R}{2}$ .

Очевидно, что та же величина для  $r$  получается и при  $\varphi = \pi$  т. е. при заполненіи во всю высоту. Отсюда слѣдуетъ, что при нѣкоторомъ промежуточномъ наполненіи, заключающемся между половиною и всей высотой, скорость достигаетъ либо наибольшаго, либо наименьшаго значенія.

Чтобы найти соотвѣтствующее этому наполненію  $\varphi$ , возьмемъ производную отъ  $r$  по  $\varphi$  и приравняемъ ее нулю; такимъ образомъ:

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{R}{2} \frac{2\sin 2\varphi - 4\varphi \cos 2\varphi}{\sin^2 \varphi} = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} 2\varphi = 2\varphi \dots (5).$$

Это уравненіе имѣетъ два рѣшенія:

$$\varphi = 0 \quad \text{и} \quad 2\varphi = 257^{\circ}30'.$$

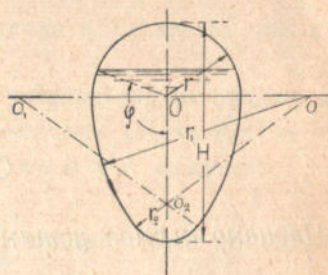
Первое рѣшеніе соотвѣтствуетъ minimum'у  $v$  и  $h = 0$ , второе—maximum'у  $v$  и  $h = 0,813d$ , гдѣ  $d$ —діаметръ окружности. При этомъ легко вычислить, что наибольшая скорость превышаетъ скорость при половинномъ наполненіи только приблизительно на 10%. Отсюда видно, что при измѣненіи наполненія въ предѣлахъ отъ половины до всей высоты окружности, скорость остается почти постоянной.



2. Сѣченіе яйцеобразное. Сѣченіе яйцеобразное очерчивается четырьмя дугами окружности (фиг. 71) радиусовъ  $r$ ,  $r_1$  и  $r_2$ . Измѣняя соотношенія между этими радиусами, можно получить очень большое разнообразіе такого рода сѣченій.

При  $r_1 = 3r$  и  $r_2 = 0,5r$ , получается, такъ называемое, обыкновенное овоидальное сѣченіе.

Не останавливаясь подробно на изслѣдованіи этого сѣченія, приведемъ слѣдующія данныя:



Фиг. 71.

|                        |                    |                    |                    |
|------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $\varphi = 90^\circ$   | $124^\circ 15'$    | $148^\circ 45'$    | $180^\circ$        |
| $v = 0,759c \sqrt{ri}$ | $0,826c \sqrt{ri}$ | $0,810c \sqrt{ri}$ | $0,761c \sqrt{ri}$ |
| $h = 0,667H$           | $0,854H$           | $0,952H$           | $H$ .              |

Здѣсь  $h$ —высота наполненія.

Отсюда видно, что при заполненіи до пять свода и при заполненіи во всю высоту,  $v$  имѣетъ почти одно и то же значеніе, а при наполненіи въ  $0,854H$  скорость достигаетъ наибольшаго значенія; причемъ величина наибольшей скорости превосходитъ скорость при заполненіи до пять свода и во всю высоту приблизительно на 8—9%.

## ОТДѢЛЪ 5-й.

### *Неравномѣрное установившееся движеніе воды въ рѣкахъ и каналахъ.*

45. Дифференціальное уравненіе неравномѣрно установившагося движенія. Неравномѣрное движеніе въ рѣкахъ и каналахъ будетъ имѣть мѣсто въ томъ случаѣ, если, во-первыхъ, измѣняются форма и размѣры поперечнаго сѣченія, или, во-вторыхъ, уклонъ дна. Изученіе такого движенія при современномъ состояніи гидравлики называется возможнымъ только при отсутствіи быстрыхъ измѣненій въ величинѣ поперечныхъ сѣченій, въ направленіяхъ потока и въ уклонѣ дна его. При такихъ условіяхъ можно считать, что уровень воды въ каждомъ поперечномъ сѣченіи представляется горизонтальной прямой. При послѣдующихъ изслѣдованіяхъ мы будемъ также предполагать параллелизмъ слоевъ и допускать, что во всякомъ сѣченіи всѣ струйки движутся съ одной и той же средней скоростью  $v = \frac{Q}{\Omega}$ , гдѣ  $Q$ —секундный расходъ и  $\Omega$ —площадь поперечнаго сѣченія. При сдѣланныхъ выше допущеніяхъ, мы можемъ считать, что давленіе въ каждомъ поперечномъ сѣченіи слѣдуетъ законамъ гидростатики. Пусть (фиг. 72) представляетъ потокъ на бесконечно малой



Фиг. 72.

длины  $ds$  между сѣченіями  $ab$  и  $cd$ . Пусть  $\Omega$  и  $v$  площадь и скорость сѣченія  $ab$ , а  $\Omega + d\Omega$  и  $v + dv$  тѣ же самыя величины для сѣченія  $cd$ .

Приращенія  $d\Omega$  и  $dv$  могутъ быть и положительны, и отрицательны, но всегда, понятно, различнаго знака, ибо вслѣдствіе несжимаемости жидкости

мы имѣемъ:

$$Q = \Omega v = const,$$



откуда

$$dQ = \Omega dv + v d\Omega = 0, \text{ или } \Omega dv = -v d\Omega \dots (1).$$

Такъ какъ  $\Omega$  и  $v$  положительны, то отсюда и слѣдуетъ, что  $d\Omega$  и  $dv$  имѣютъ всегда обратные знаки.

Если мы обозначимъ разность высотъ уровней обоихъ сѣченій по сравненію съ произвольно выбраннымъ горизонтомъ черезъ  $dy$ , то по теоремѣ Д. Бернулли, примѣненной къ точкамъ  $a$  и  $c$ , найдемъ:

$$dy = \frac{(v + dv)^2 - v^2}{2g} + \frac{O}{\Omega} bv^2 ds,$$

или

$$dy = \frac{v dv}{g} + \frac{O}{\Omega} bv^2 ds \dots (2).$$

Это и будетъ дифференціальное уравненіе неравномѣрнаго движенія. Чтобы проинтегрировать его, нужно выразить  $O$ ,  $\Omega$  и  $v$  черезъ  $s$ .

Мы увидимъ ниже, что это уравненіе оказывается возможнымъ проинтегрировать для потока большой и постоянной ширины, но малой глубины. Въ общемъ же случаѣ приходится довольствоваться приближительнымъ интегрированіемъ.

Если мы проинтегрируемъ выраженіе (2), то получимъ:

$$y = \int_{v_0}^{v_1} \frac{v dv}{g} + \int_{s_0}^{s_1} \frac{O}{\Omega} bv^2 ds \dots (3),$$

гдѣ  $s_0$  и  $s_1$  разстоянія двухъ сѣченій, между которыми мы распространяемъ интеграцію, отъ нѣкотораго сѣченія, которое мы разсматриваемъ какъ начальное:  $v_0$  и  $v_1$  суть среднія скорости въ этихъ сѣченіяхъ.

Уравненіе (3) можно переписать такъ:

$$y = \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_0^2}{2g} + \int_{s_0}^{s_1} \frac{O}{\Omega} bv^2 ds.$$

Такъ какъ

$$Q = \Omega_0 v_0 = \Omega_1 v_1 = \Omega v,$$

то полученное уравненіе легко преобразуется въ слѣдующее:

$$y = \frac{Q^2}{2g} \left( \frac{1}{\Omega_1^2} - \frac{1}{\Omega_0^2} \right) + Q^2 \int_{s_0}^{s_1} \frac{O}{\Omega^3} b ds \dots (4).$$

Вотъ этимъ уравненіемъ мы и можемъ воспользоваться для рѣшенія нѣсколькихъ вопросовъ.

Такъ какъ отношеніе  $\frac{O}{\Omega^3}$  и  $b$ , которое также зависитъ отъ отношенія  $\frac{O}{\Omega}$ , различны для различныхъ сѣченій, то для того чтобы получить величину интеграла, стоящаго во второй части уравненія (4), надо разстояніе между двумя данными сѣченіями раздѣлить на четное число равныхъ частей, вычислить для каждого полученнаго сѣченія  $\frac{O}{\Omega^3}$  и  $b$ , а затѣмъ и вычислить интеграль, пользуясь способомъ Симпсона.

Покажемъ, въ какомъ порядкѣ слѣдуетъ рѣшать нѣкоторые изъ вопросовъ.

1. Извѣстенъ расходъ воды  $Q$ , форма и размѣры поперечныхъ профилей; требуется найти паденіе.

Эта задача рѣшается непосредственно по уравненію (4). Но надо замѣтить, что гораздо проще ту же задачу можно разрѣшить непосредственнымъ нивелированіемъ. Для этого стоитъ только укрѣпить на днѣ въ разсматриваемыхъ сѣченіяхъ кольца такъ, чтобы ихъ вершины совпадали со свободной поверхностью воды въ данныхъ сѣченіяхъ. Тогда на эти кольца и можно ставить рейку.

2. Опредѣлить  $Q$ , когда извѣстны всѣ остальные величины.

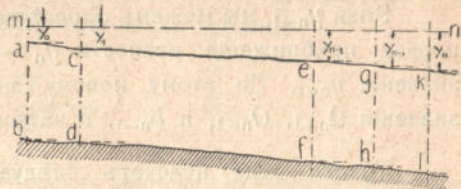
Эта задача разрѣшается также непосредственно по уравненію (4). Но опять таки къ такому рѣшенію слѣдуетъ прибѣгать только тогда, когда нѣтъ возможности опредѣлить расходъ непосредственнымъ измѣреніемъ.

О способахъ непосредственнаго измѣренія расхода будемъ говорить ниже.

3. Извѣстенъ расходъ воды, форма русла, т. е. продольный профиль дна и размѣры поперечныхъ сѣченій въ нѣсколькихъ мѣстахъ, и глубина воды въ одномъ изъ крайнихъ сѣченій; требуется построить по точкамъ продольный профиль воды.



Пусть  $bd\bar{f}hl$  (фиг. 73) будетъ продольный профиль дна. Предположимъ, что намъ извѣстны форма и размѣръ поперечныхъ сѣченій русла въ пунктахъ  $b, d, f, h$  и  $l$ , глубина  $kl$  и расходъ  $Q$ ; требуется опредѣлить профиль свободной поверхности или, иначе, разстоянія  $y_n, y_{n-1} \dots y_0$  отдѣльныхъ точекъ этого профиля  $k, g, e, c$  и  $a$  отъ нѣкотораго произвольно взятаго горизонта  $mn$ .



Фиг. 73.

Эту задачу приходится разрѣшать при опредѣленіи профиля подпруженной рѣки, и вопросъ этотъ представляетъ большую важность, такъ какъ связанъ съ имущественными отношеніями. Если мы сумѣемъ опредѣлить профиль подпруженной воды, то узнаемъ, затопимъ-ли нашей запрудой чужія земли, или нѣтъ.

Для рѣшенія этой задачи перепишемъ уравненіе (4) въ такомъ видѣ:

$$y_n - y_{n-1} = \frac{Q^2}{2g} \left( \frac{1}{\Omega_n^2} - \frac{1}{\Omega_{n-1}^2} \right) + Q^2 \int_{s_{n-1}}^{s_n} \frac{O}{\Omega^3} bds \dots (5).$$

Длину  $s$  надо отсчитывать отъ какого-нибудь общаго начала.

Чтобы получить значеніе интеграла, будемъ предполагать, что на всемъ протяженіи участка  $hl$  всѣ величины, входящія подъ знакъ интеграла, сохраняютъ постоянную величину, равную средней арифметической изъ крайнихъ значеній. Такимъ образомъ:

$$\frac{O}{\Omega^3} = \frac{1}{2} \left( \frac{O_n}{\Omega_n^3} + \frac{O_{n-1}}{\Omega_{n-1}^3} \right) \text{ и } b = \frac{1}{2} (b_{n-1} + b_n)$$

Тогда, обозначая разность  $s_n - s_{n-1}$  черезъ  $\Delta s$ , найдемъ:

$$y_n - y_{n-1} = \frac{Q^2}{2g} \left( \frac{1}{\Omega_n^2} - \frac{1}{\Omega_{n-1}^2} \right) + \frac{Q^2 b}{2} \left( \frac{O_n}{\Omega_n^3} + \frac{O_{n-1}}{\Omega_{n-1}^3} \right) \Delta s.$$

Такъ какъ въ этомъ уравненіи являются неизвѣстными  $y_{n-1}, O_{n-1}, \Omega_{n-1}$ , то его возможно рѣшать только по способу постепеннаго приближенія. Профиль подпруженной воды можно приблизительно считать горизонтальной прямой, поэтому для перваго приближенія положимъ:



$$y_n = y_{n-1}.$$

Зная  $y_{n-1}$ , мы можемъ опредѣлить  $\Omega_{n-1}$ ,  $O_{n-1}$  и  $b_{n-1}$  и подсчитать первое приближеніе разности  $y_n - y_{n-1}$ , т. е. найти болѣе близкое значеніе  $y_{n-1}$ . По этому новому значенію  $y_{n-1}$  опредѣляемъ новыя значенія  $\Omega_{n-1}$ ,  $O_{n-1}$ , и  $b_{n-1}$ , а затѣмъ и новое значеніе  $y_{n-1}$ .

Такого рода подсчетъ слѣдуетъ вести до тѣхъ поръ, пока двѣ послѣдовательныя разности  $y_n - y_{n-1}$  не будутъ различаться между собой на величину очень малую по сравненію съ самой разностью. Опредѣливъ  $y_{n-1}$ , можемъ подобнымъ-же образомъ опредѣлить  $y_{n-2}$  и т. д.

Въ большинствѣ случаевъ, однако, приходится рѣшать задачу въ обратномъ порядкѣ. Обыкновенно при опредѣленіи высоты плотины требуется, чтобы уровень воды въ нѣкоторомъ опредѣленномъ сѣченіи не превосходилъ опредѣленной высоты, чтобы не потопить чужой земли, зданія, или не поднять уровня нижнихъ водъ у стоящей выше плотины. Пусть, напримѣръ, требуется, чтобы высота въ сѣченіи  $b$  лежала послѣ постановки плотины ниже горизонта сравненія  $mn$  на опредѣленную величину  $y_0$ . Задача, слѣдовательно, будетъ состоять въ опредѣленіи  $y_n$  по данному  $y_0$ . Очевидно, что для рѣшенія этой задачи надо начать опредѣленіе продольнаго профиля поверхности съ уравненія:

$$y_1 - y_0 = \frac{Q^2}{2g} \left( \frac{1}{\Omega_1^2} - \frac{1}{\Omega_0^2} \right) + \frac{Q_2 b}{2} \left( \frac{O_0}{\Omega_0^3} + \frac{O_1}{\Omega_1^3} \right) \Delta s.$$

Порядокъ рѣшенія этого уравненія будетъ таковъ-же, какъ и въ предыдущемъ случаѣ. Опредѣливъ  $y_n$ , мы и можемъ рѣшить, на какую высоту мы можемъ запрудой поднять уровень въ данномъ мѣстѣ  $l$ . Если приращеніемъ скорости за его малостью можно пренебречь, уравненіе (2) принимаетъ слѣдующій видъ:

$$i_0 = \frac{O}{\Omega} b v^2 \dots (6).$$

Это уравненіе совершенно подобно уравненію равномернаго движенія, только вмѣсто уклона дна сюда входитъ уклонъ поверхности.



46. Случай рѣки постоянной ширины и незначительной по сравненію съ шириной глубины. Вернемся опять къ фиг. 72 и выведенному нами дифференціальному уравненію движенія:

$$dy = \frac{v dv}{g} + \frac{O}{\Omega} b v^2 ds \dots (1).$$

Пусть уклонъ дна на протяженіи бесконечно малаго разсматриваемаго участка будетъ  $i$ ; проведемъ черезъ точку  $a$  прямую  $an$ , параллельную дну, и горизонталь  $am$ ; пусть далѣе  $l$  есть постоянная ширина потока,  $h$  средняя глубина (глубина равновеликаго прямоугольника) въ сѣченіи  $ab$  и  $h + dh$  его глубина въ сѣченіи  $cd$ . Изъ чертежа видно, что

$$cm = dy \quad \text{и} \quad nc = dh,$$

такъ что изъ прямоугольнаго треугольника  $amn$  найдемъ:

$$mn = dy + dh = ds \operatorname{tg} i$$

или, такъ какъ  $i$  очень малый уголъ,

$$dy + dh = ids \dots (2).$$

Далѣе, по условію несжимаемости мы имѣемъ:

$$Q = \Omega v = \operatorname{const} \dots (3).$$

Откуда, дифференцируя, легко найдемъ:

$$\Omega dv = -v d\Omega \quad \text{или} \quad dv = -\frac{v}{\Omega} d\Omega \dots (4).$$

Такъ какъ  $\Omega = lh$ , а по нашему предположенію  $l = \operatorname{const}$ , то

$$d\Omega = l dh \dots (5).$$

Принимая во вниманіе всѣ полученныя выраженія, изъ уравненія (1) получимъ:

$$ids = -\frac{v^2 l dh}{\Omega g} + \frac{O}{\Omega} b v^2 ds + dh,$$

откуда

$$ds = \frac{1 - \frac{v^2 l}{g\Omega}}{i - \frac{O}{\Omega} b v^2} dh \dots (6).$$

Это уравненіе и послужитъ намъ для рѣшенія всѣхъ вопросовъ, относящихся къ данному случаю. Изъ уравненія (6) имѣемъ:

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - \frac{O}{\Omega}bv^2}{1 - \frac{v^2l}{g\Omega}} \dots (7).$$

Такъ какъ мы должны отсчитывать  $s$  по направленію дна, а  $h$  по перпендикуляру къ нему, то это отношеніе есть не что иное, какъ тангенсъ угла касательной къ профилю поверхности съ прямой  $an \parallel bd$ , т. е.  $tg\varphi$ .

Если мы теперь допустимъ, что  $h$  мало по сравненію съ  $l$ , то найдемъ, что

$$\frac{O}{\Omega} = \frac{l + 2h}{lh} = \frac{1 + \frac{2h}{l}}{h} = \approx \frac{1}{h}.$$

Обозначая далѣе для сокращенія письма  $\frac{Q}{l}$  черезъ  $q$ , гдѣ  $q$  будетъ представлять средній расходъ на единицу ширины канала (на 1 mtr.), перепишемъ уравненіе (7) въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - \frac{bq^2}{h^3}}{1 - \frac{q^2}{gh^3}} \dots (8).$$

Изъ уравненія (8) видно, что для того, чтобы  $\frac{dh}{ds}$  было равно нулю, необходимо, чтобы  $i = \frac{bq^2}{h^3}$ . Это будетъ случай равномернаго движенія. Пусть  $h$ , опредѣленное изъ этого соотношенія, будетъ  $H$ ; тогда:

$$H^3 = \frac{bq^2}{i}.$$

Для того, чтобы  $\frac{dh}{ds} = \infty$ , необходимо, чтобы  $1 - \frac{q^2}{gh^3} = 0$ .

Обозначимъ соотвѣтственное значеніе  $h$  черезъ  $H_1$ , такъ что

$$H_1^3 = \frac{q^2}{g} \quad \text{и} \quad v = \sqrt{gH_1}.$$



При этомъ, понятно, свободная поверхность будетъ нормальна къ направленію дна. Этотъ результатъ противорѣчитъ сдѣланному допущенію параллельности струекъ дну и показываетъ, что въ этомъ случаѣ выведенное уравненіе перестаетъ имѣть мѣсто; поэтому этотъ случай требуетъ спеціальнаго изученія.

Составимъ разность

$$H^3 - H_1^3 = \frac{bq^2}{i} - \frac{q^2}{g} = \frac{q^2}{i} \left( b - \frac{i}{g} \right).$$

Отсюда видно, что

$$\text{при } b > \frac{i}{g} \dots \dots H > H_1,$$

$$b = \frac{i}{g} \dots \dots H = H_1,$$

$$b < \frac{i}{g} \dots \dots H < H_1.$$

Во второмъ случаѣ, какъ легко найти изъ уравненія (8), профиль поверхности будетъ представляться горизонтальной прямой, если только  $i$  имѣетъ постоянную величину на нѣкоторомъ протяженіи (такой случай и можетъ представиться, на примѣръ, при запруживаніи рѣки съ постояннымъ уклономъ дна).

Дѣйствительно, изъ уравненія (8) имѣемъ:

$$dh \left[ 1 - \frac{q^2}{gh^3} \right] = ds \left[ i - \frac{bq^2}{h^3} \right]$$

или

$$dh (gh^3 - q^2) = gds (ih^3 - bq^2).$$

Полагая  $b = \frac{i}{g}$ , найдемъ:

$$dh \left( gh^3 - q^2 \right) = gds \left( ih^3 - \frac{iq^2}{g} \right) = ids \left( gh^3 - q^2 \right),$$

т. е. при этомъ, независимо отъ значенія  $h$ ,  $\frac{dh}{ds} = i$ . Слѣдовательно, профиль будетъ горизонтальная прямая.

Будемъ теперь изслѣдовать изгибъ продольнаго профиля поверхности по отношенію къ дну на протяженіи какого-нибудь участка, имѣющаго постоянный уклонъ дна. Для этой цѣли возьмемъ уравненіе (8) и преобразуемъ его такимъ образомъ:

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - \frac{ibq^2}{ih^3}}{1 - \frac{q^2}{gh^3}} = \frac{i - \frac{iH^3}{h^3}}{1 - \frac{H_1^3}{h^3}} = i \frac{h^3 - H^3}{h^3 - H_1^3} \dots (9).$$

Найдемъ вторую производную:

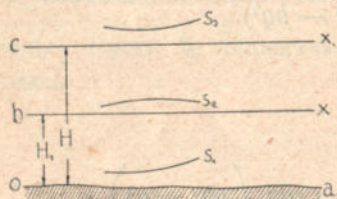
$$\begin{aligned} \frac{d^2h}{ds^2} &= i \frac{[(h^3 - H_1^3) 3h^2 - (h^3 - H^3) 3h^2]}{[h^3 - H_1^3]^2} \frac{dh}{ds} = \\ &= \frac{3h^2 i^2 (H^3 - H_1^3) (h^3 - H^3)}{(h^3 - H_1^3)^2 (h^3 - H_1^3)} \dots (10). \end{aligned}$$

Вторая часть уравненія (10) при данномъ  $h$  положительна или отрицательна въ зависимости отъ знака разности  $H^3 - H_1^3$ , ибо знаменатель  $(h^3 - H_1^3)^2$  всегда положителенъ.

Мы видѣли, что  $H > H_1$ , если  $b > \frac{i}{g}$  и  $H < H_1$ , если  $b < \frac{i}{g}$ . Среднее значеніе  $b$  есть 0,004, откуда и видно, что если  $i < 0,004$ ,  $9,81 = 0,039 = \infty 4^{0/00}$ , то  $H > H_1$ , если  $i > 4^{0/00}$ , то  $H < H_1$  и если, наконецъ,  $i = 4^{0/00}$ , то  $H = H_1$ .

Разсмотримъ сначала тотъ случай, когда  $H > H_1$ .

Отложимъ отъ дна по перпендикуляру отрѣзокъ  $ob = H_1$  и отрѣзокъ  $oc = H$ , и затѣмъ проведемъ черезъ точки  $c$  и  $b$  прямая  $bx$  и  $cx'$ , параллельныя дну. Если глубина воды  $h$  меньше  $H_1$ , то мы будемъ имѣть à fortiori, что  $h < H$ . Въ такомъ случаѣ изъ уравненія (10) видно, что  $\frac{d^2h}{ds^2} > 0$ , т. е. кривая профиля  $s_1$  будетъ обращена выпуклостью внизъ. Если



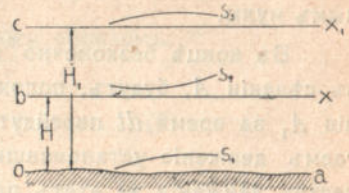
Фиг. 74.

$H > h > H_1$ , то  $\frac{d^2h}{ds^2} < 0$ , кривая профиля  $s_2$  будетъ обращена выпуклостью вверхъ. Если  $h > H > H_1$ , кривая профиля  $s_3$  будетъ обращена выпуклостью внизъ.



Если  $H_1 > H$  (фиг. 75), то при  $h < H < H_1$ ,  $\frac{d^2h}{ds^2} < 0$  и, слѣдова-

тельно, кривая профиля  $s_1$  будетъ обращена выпуклостью вверхъ. Если  $H_1 > h > H$ , то кривая профиля  $s_2$  будетъ обращена выпуклостью внизъ. Если, наконецъ,  $H_1 > H > h$ , то кривая профиля  $s_3$  будетъ обращена выпуклостью вверхъ.



Фиг. 75.

**47. Прыжокъ воды.** Изслѣдуемъ теперь явленіе, называемое „прыжкомъ воды“. Въ предыдущемъ параграфѣ мы видѣли, что при  $v = \sqrt{gh}$  продольная поверхность потока дѣлается нормальной ко дну. Такого рода явленіе и называютъ прыжкомъ воды.

Такъ какъ при выводѣ уравненія (7, § 46) мы предполагали, что струйки движутся параллельно дну, то это уравненіе не можетъ служить для изслѣдованія явленія прыжка. Въ этомъ случаѣ слѣдуетъ обратиться къ непосредственному изслѣдованію явленія, разсматривая очень короткую часть потока, которая заключаетъ въ себѣ прыжокъ, чтобы можно было пренебречь паденіемъ на этой части, но въ то же время такого протяженія, чтобы можно было предположить выше и ниже прыжка два сѣченія, черезъ которыя вода протекаетъ параллельными струйками.

Пусть  $A$  и  $A_1$  (фиг. 76) будутъ два такихъ сѣченія, между которыми происходитъ прыжокъ, т. е. быстрое поднятіе уровня воды. Обозначимъ черезъ  $\Omega$  площадь сѣченія  $A$ , черезъ  $v$  среднюю скорость въ этомъ сѣченіи и черезъ  $y$  разстояніе центра тяжести этого сѣченія отъ поверхности; тѣ же величины для сѣченія  $A_1$  обозначимъ черезъ



Фиг. 76

$v_1$ ,  $\Omega_1$  и  $y_1$ . Примѣнимъ къ части потока  $AA_1$  теорему количества движенія. При этомъ понятно, мы не должны вводить въ разсмотрѣніе внутреннихъ силъ, ибо сумма импульсовъ этихъ силъ = 0. Такимъ образомъ мы должны будемъ разсмотрѣть только внѣшнія

силы: 1) давленіе атмосферы, 2) силу тяжести и 3) гидродинамическія давленія въ сѣченіяхъ  $A$  и  $A_1$ .

Будемъ брать за ось проекцій направленіе, параллельное продольному профилю дна. Такъ какъ мы условились пренебрегать паденіемъ,



то должны считать направленіе силы тяжести перпендикулярнымъ ко дну и, слѣдовательно, ея импульсъ по выбранному направленію равнымъ нулю.

Въ концѣ бесконечно малаго времени  $dt$  частицы, которыя были въ сѣченіи  $A$ , будутъ, положимъ, въ сѣченіи  $a$ , а частицы изъ сѣченія  $A_1$  за время  $dt$  перейдутъ въ сѣченіе  $a_1$ ; такъ какъ мы предполагаемъ движеніе установившимся, то при вычисленіи приращенія количества движенія за этотъ промежутокъ времени всей массы, находящейся между сѣченіями  $A$  и  $A_1$ , намъ не нужно будетъ разсматривать общую массу  $A_1a$ . Легко видѣть, что въ такомъ случаѣ приращеніе количества движенія выразится такъ:

$$\frac{\Delta\Omega_1 v_1}{g} v_1 dt - \frac{\Delta\Omega v}{g} v dt.$$

Составимъ теперь импульсъ силъ. Давленіе въ центрѣ тяжести сѣченія  $A$  будетъ равно  $p_0 + \Delta y$ , гдѣ  $p_0$ —давленіе атмосферы; поэтому импульсъ полнаго давленія въ этомъ сѣченіи по горизонтальному направленію есть:

$$(\Omega p_0 + \Delta\Omega y) dt.$$

Если за положительное направленіе мы примемъ направленіе теченія, то этотъ импульсъ должны считать положительнымъ.

Такимъ же образомъ легко найдемъ, что импульсъ давленія въ сѣченіи  $A_1$  будетъ:

$$-(\Omega_1 p_0 + \Delta\Omega_1 y_1) dt.$$

Кромѣ того надо принять во вниманіе импульсъ по горизонтальному направленію атмосфернаго давленія на поверхность  $AA_1$ , который, понятно, будетъ:

$$(\Omega_1 - \Omega) p_0 dt.$$

Такимъ образомъ имѣемъ:

$$\frac{\Delta\Omega_1 v_1}{g} v_1 dt - \frac{\Delta\Omega v}{g} v dt = \Delta\Omega y dt + \Omega p_0 dt + \Omega_1 p_0 dt - \Omega p_0 dt - \Omega_1 p_0 dt - \Omega_1 y_1 \Delta t$$

или, по сокращеніи на  $\Delta t$  и приведеніи,

$$\frac{\Omega_1 v_1^2}{g} - \frac{\Omega v^2}{g} = \Omega y - \Omega_1 y_1 \dots (1).$$



Такъ какъ

$$\Omega v = v_1 \Omega_1,$$

то мы можемъ переписать ур—іе (1) такимъ образомъ:

$$\frac{v^2}{g} \left( 1 - \frac{\Omega}{\Omega_1} \right) = \frac{\Omega_1}{\Omega} y_1 - y \dots (2)$$

или

$$\frac{v_1^2}{g} \left( 1 - \frac{\Omega_1}{\Omega} \right) = \frac{\Omega}{\Omega_1} y - y_1 \dots (3).$$

Если русло имѣть форму прямоугольника съ постоянной шириной  $l$  и перемѣнной глубиной  $h$ , то

$$\Omega = lh, \quad \Omega_1 = lh_1, \quad y = \frac{h}{2} \text{ и } y_1 = \frac{h_1}{2}$$

и ур—іе (2) приметъ видъ:

$$\frac{v^2}{g} \left( 1 - \frac{h}{h_1} \right) = \frac{h_1}{h} \frac{h_1}{2} - \frac{h}{2},$$

или

$$\frac{v^2}{gh} = \frac{h_1 + h}{2h} \dots (4).$$

Такимъ же образомъ изъ ур—ія (3) найдемъ:

$$\frac{v_1^2}{gh} = \frac{h_1 + h}{2h_1} \dots (5).$$

Изъ ур—ія (4) имѣемъ:

$$h_1^2 + hh_1 - \frac{2v^2h}{g} = 0,$$

откуда

$$h_1 = -\frac{h}{2} + \sqrt{\frac{h^2}{4} + \frac{2v^2h}{g}} \dots (6).$$

(во второй части передъ корнемъ беремъ знакъ  $+$ , ибо  $h_1 > 0$ ).

Такимъ же образомъ изъ ур—ія (5) найдемъ:

$$h = -\frac{h_1}{2} + \sqrt{\frac{h_1^2}{4} + \frac{2v_1^2 h_1}{g}} \dots (7).$$

Т. к.  $h_1 > h$ , то изъ ур—ія (6) имѣемъ:

$$-\frac{h}{2} + \sqrt{\frac{h^2}{4} + \frac{2v^2 h}{g}} > h,$$

или

$$\sqrt{\frac{h^2}{4} + \frac{2v^2 h}{g}} > \frac{3h}{2},$$

такъ что

$$\frac{h^2}{4} + \frac{2v^2 h}{g} > \frac{9h^2}{4}$$

и

$$h < \frac{v^2}{g}, \text{ т. е. } v > \sqrt{gh}.$$

Такимъ же образомъ изъ соотношенія (7) найдемъ, что

$$v_1 < \sqrt{gh_1}.$$

Это показываетъ, что при переходѣ отъ сѣченія  $A$  къ сѣченію  $A_1$  разность  $v - \sqrt{gh}$  переходитъ черезъ ноль. Въ томъ сѣченіи, гдѣ это выраженіе обращается въ ноль, и имѣетъ мѣсто прыжокъ.

Высота прыжка  $h_0$  опредѣлится изъ уравненія (6). Дѣйствительно, легко видѣть, что

$$h_0 = h_1 - h = \sqrt{\frac{h_1^2}{4} + \frac{2v_1^2 h_1}{g}} - \frac{3}{2} h_1.$$

Зная высоты  $h_1$  и  $h$ , мы можемъ вычислить потерю напора, которою сопровождается прыжокъ. Обозначая эту потерю черезъ  $\zeta$  и принимая ур—іе Д. Бернулли къ теченію воды отъ сѣченія  $A$  до сѣченія  $A_1$ , мы найдемъ:

$$\frac{v^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} = h_1 + \zeta - h,$$

откуда



$$\zeta = \frac{v^2}{2g} + h - \left( \frac{v_1^2}{2g} + h_1 \right).$$

Изъ ур—ій (4) и (5) легко найти, что

$$\frac{v^2}{2g} + h = \frac{h_1^2 + hh_1 + 4h^2}{4h}$$

и

$$\frac{v_1^2}{2g} + h_1 = \frac{h^2 + hh_1 + 4h_1^2}{4h_1},$$

такъ что

$$\zeta = \frac{h_1^2 + hh_1 + 4h^2}{4h} - \frac{h^2 + hh_1 + 4h_1^2}{4h_1} = \frac{(h_1 - h)^3}{4hh_1}.$$

Все вышеизложенное даетъ намъ нѣкоторое приблизительное представленіе о томъ, что происходитъ на поверхности рѣки въ случаѣ неравномѣрнаго движенія. Неравномѣрное движеніе при нашихъ предположеніяхъ (постоянной ширинѣ) можетъ имѣть мѣсто только при переменномъ уклонѣ, если рѣка не запружена, или при постоянномъ уклонѣ, если рѣка запружена.

**48. Ур—іе профиля подпруженной рѣки.** Ур—іе профиля подпруженной рѣки выводится въ томъ предположеніи, что рѣка до запруживанія на томъ протяженіи, на которое распространяется подпруда, имѣетъ постоянную глубину  $H$  и постоянный уклонъ дна  $i$ . Но такъ какъ ни то ни другое въ дѣйствительности не имѣетъ мѣста, то подъ  $i$  надо разумѣть средней уклонъ поверхности до запруживанія на данномъ протяженіи, а подъ  $H$  ту величину, которая опредѣляется изъ ур—ія (§ 45):

$$Hi = bv^2 \dots \dots (1),$$

гдѣ  $v$ —средняя скорость теченія на томъ же протяженіи. Установивши при помощи измѣреній и ур—ія (1) величины  $H$  и  $i$ , полагаютъ, что  $i$  есть постоянный уклонъ дна и  $H$  средняя глубина рѣки до установки плотины.

Положимъ, что  $ab$  (фиг. 77) профиль дна и  $cd$  профиль свободной поверхности до постановки плотины. Допустимъ, что въ пунктѣ  $b$  мы хотимъ поставить плотину и поднять воду до высоты  $bk = h_0$ . Для того, чтобы получить уравненіе профиля, надо проинтегрировать уравненіе (§ 46):

$$\frac{dh}{ds} = i \frac{h^3 - H^3}{h^3 - H_1^3}.$$

Такъ какъ разстоянія удобнѣе отсчитывать отъ плотины вверхъ, то мы должны будемъ  $s$  замѣнить въ этомъ выраженіи черезъ  $-s$ ; тогда получимъ:

$$\frac{dh}{ds} = -i \frac{h^3 - H^3}{h^3 - H_1^3} \dots \dots (2).$$

Чтобы подогнуть результатъ къ таблицамъ, составленнымъ Бресомъ для построения профиля, представимъ ур—іе (2) въ такомъ видѣ:

$$ids = - \frac{\frac{h^3}{H^3} - \frac{H_1^3}{H^3}}{\frac{h^3}{H^3} - 1} dh.$$

Положимъ

$$\frac{H_1^3}{H^3} = a^3 \quad \text{и} \quad \frac{h}{H} = u,$$

тогда

$$\frac{ids}{H} = - \frac{u^3 - a^3}{u^3 - 1} du \dots \dots (3).$$

Теперь и будемъ интегрировать это ур—іе, распространяя интеграцію отъ плотины ( $s = 0$ ) до какого-нибудь произвольнаго сѣченія ( $s = s$ ), чему соотвѣтствуютъ предѣлы

$$u_0 = \frac{h_0}{H} \quad \text{и} \quad u = \frac{h}{H}.$$

Такимъ образомъ:

$$\frac{is}{H} = - \int_{u_0}^u \frac{u^3 - a^3}{u^3 - 1} du.$$

Интеграль во второй части можно разбить на два интеграла:

$$\frac{is}{H} = - \int_{u_0}^u du - (1 - a^3) \int_{u_0}^u \frac{du}{u^3 - 1},$$



или:

$$\frac{is}{H} = u_0 - u - (1 - a^3) \int_{u_0}^u \frac{du}{u^3 - 1} \dots (2).$$

Интегралъ во второй части этого ур—ія можно взять приближительно, разлагая подынтегральную функцию въ рядъ:

$$\begin{aligned} - \int_{u_0}^u \left( u^3 - 1 \right)^{-1} du &= - \int_{u_0}^u \left( u^{-3} + u^{-6} + u^{-9} + \dots \right) du = \\ &= \left( \frac{1}{2u^2} + \frac{1}{5u^5} + \frac{1}{8u^8} + \dots \right) u. \end{aligned}$$

Положимъ

$$\left( \frac{1}{2u^2} + \frac{1}{5u^5} + \dots \right) = \Psi(u),$$

тогда

$$\frac{is}{H} = u_0 - u + (1 - a^3) \left[ \Psi(u) - \Psi(u_0) \right] \dots (4).$$

Для облегченія вычисленій Брессомъ составлены таблицы, въ которыхъ имѣются для данныхъ значеній  $u$  значенія  $\frac{1}{u}$  и  $\Psi(u)$  (см. прил. табл. I).

Разсмотримъ рядъ:

$$\Psi(u) = \frac{1}{2u^2} + \frac{1}{5u^5} + \frac{1}{8u^8} + \frac{1}{11u^{11}} + \dots$$

Общій членъ этого ряда будетъ:  $U_n = \frac{1}{(3n-1)u^{3n-1}}$ . Извѣстно, что если пред.  $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ , то рядъ будетъ сходящимся.

Въ нашемъ случаѣ это отношеніе равно:

$$\text{пред.}_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( 3n-1 \right) u^{3n-1}}{\left( 3n+2 \right) u^{3n+2}} = \frac{\left( 3 - \frac{1}{n} \right)}{\left( 3 + \frac{2}{n} \right) u^3} = \frac{1}{u^3}$$

Отсюда видно, что при  $u > 1$ , рядъ будетъ сходящійся; если же  $u = \frac{h}{H} = 1$ , то  $\Psi(u)$  обращается въ сумму:

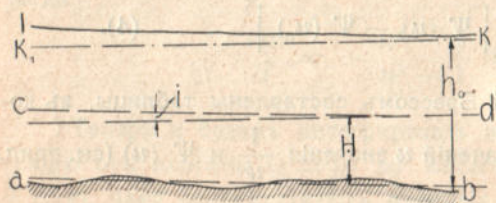
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{11} + \frac{1}{14} + \dots$$

Общій членъ этого ряда  $U_n = \frac{1}{3n-1}$ . Необходимое условіе сходимости пред.  $\left( nU_n \right)_{n=\infty} = 0$  не удовлетворяется, ибо пред.  $\left( \frac{n}{3n-1} \right)_{n=\infty} = \frac{1}{3}$ , слѣдовательно, рядъ будетъ расходящійся, т. ч.

$$\text{при } u = 1 \dots \Psi(u) = \infty.$$

Разсмотримъ, пользуясь сдѣланными выводами, нѣсколько частныхъ случаевъ.

1. Пусть  $i < 4^0/00$ ; тогда  $H > H_1$  и профиль, какъ мы видѣли раньше, будетъ представлять изъ себя вогнутую кривую  $kl$  (фиг. 77),



Фиг. 77.

которая будетъ асимптотически приближаться къ прямой  $cd$ . Дѣйствительно, мы видѣли, что при  $u = \frac{h}{H} = 1$ ,  $\Psi(u) = \infty$ ; а при  $u > 1$  имѣетъ конеч. значеніе т. ч.  $\Psi(u_0)$ —конечная величина.

Такъ какъ при этомъ  $a = \frac{H_1}{H} < 1$ , то изъ уравненія (4) видно, что при такихъ условіяхъ  $s$  обращается въ безконечность. Понятно, слѣдовательно, что кривая  $kl$  пойдетъ выше горизонтали  $kk_1$ .

2. Пусть  $i = 4^0/00$ ; тогда  $H = H_1$ ,  $a = 1$  и уравненіе профиля приметъ видъ:

$$\frac{is}{H} = u_0 - u = \frac{h_0}{H} - \frac{h}{H} \text{ и } is = h_0 - h,$$

т. е. профиль будетъ горизонтальная прямая.

3. Пусть  $i > 4^0/00$  и  $h_0 < H_1$ , (фиг. 78), тогда  $H_1 > H$  и  $a = \frac{H_1}{H} > 1$ . Какъ мы знаемъ, въ этомъ случаѣ профиль будетъ представлять во-



гнутую кривую; при этомъ глубина будетъ возрастать по мѣрѣ удаленія отъ плотины, ибо, что видно изъ уравненія (2),  $\frac{dh}{ds}$  остается положительной, пока  $h < H_1$ . Но какъ только уровень поднимется до прямой  $ef$ , онъ долженъ прыжкомъ перейти ниже этой линіи. Если разность  $H_1 - H$  не превосходитъ высоты прыжка, соотвѣтствующей даннымъ условіямъ, то можно считать,

что профиль переходитъ въ прямую  $cd$ . Въ обычныхъ случаяхъ и можно дѣлать такое предположеніе, ибо паденія не

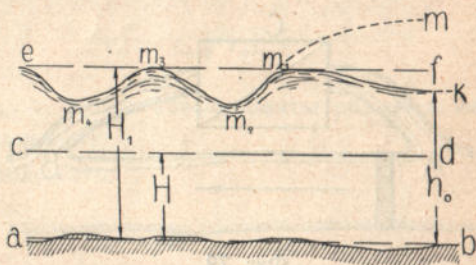
бываютъ обыкновенно особенно значительны, т. ч. разность между  $H_1$  и  $H$  не можетъ быть очень большой. Въ противномъ случаѣ послѣ прыжка  $m_1 m_2$  получится кривая  $m_2 m_3$ , подобная  $km$ , такъ что въ результатѣ получится безконечный рядъ стоячихъ волнъ.

4. Пусть  $i > 4 \text{ ‰}$  и  $h_0 > H_1$ ; тогда  $H_1 > H$  и  $a = \frac{H_1}{H} > 1$ .

Въ этомъ случаѣ профиль представится выпуклой кривой, а затѣмъ или перейдетъ прыжкомъ къ прямой  $cd$ , т. е. къ нормальному профилю, или подобно предыдущему будетъ представлять собою рядъ стоячихъ волнъ.

**49. Плотины.** Мы видѣли, какимъ образомъ опредѣляется высота подпруженной воды. Посмотримъ теперь, какъ опредѣляется высота самой плотины. Для этого ознакомимся сначала съ общимъ устройствомъ, служащимъ для сосредоточенія паденія воды около того мѣста, гдѣ стоитъ двигатель.

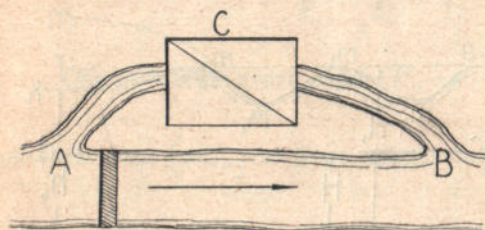
Двигатель и фабричное зданіе въ настоящее время рѣдко ставятся на самой плотинѣ, т. к. въ такомъ случаѣ пришлось бы устраивать солидныя и дорого стоящія основанія. Если бы фабричное зданіе было отодвинуто отъ рѣки, а двигатель поставленъ у самой плотины, то пришлось бы устраивать дорого стоящую и во многихъ отношеніяхъ неудобную передачу отъ двигателя къ фабрику. Поэтому въ настоящее время для концентрированія паденія въ мѣстѣ, удобномъ для постановки фабричнаго зданія, пользуются каналами  $AC$  и  $CB$  (фиг. 79), изъ которыхъ первый называется приводящимъ, а второй отводящимъ. Какъ видимъ, первый каналъ беретъ воду выше плотины и подводитъ ее къ двигателю; здѣсь и сосредоточивается все паденіе. Падая, вода проходитъ черезъ двигатель и приводитъ его въ движеніе. Выйдя изъ



Фиг. 78.



двигателя, вода по каналу  $CB$  возвращается въ рѣку. Если разность уровней въ  $A$  и  $B$  есть  $H$ , то въ пунктѣ  $C$  можно сосредоточить все паденіе за исключеніемъ того, которое тратится на преодоленіе вредныхъ сопротивленій въ приводящемъ и отводящемъ каналахъ, для чего



Фиг. 79.

оба должны имѣть нѣкоторый уклонъ. Если черезъ каналъ отводится вся вода изъ рѣки, то высота плотины должна быть, понятно, равна или больше глубины подпруженной воды въ данномъ мѣстѣ. Если же каналъ беретъ только часть воды изъ рѣки, то тогда приходится принимать мѣры, чтобы пропускать остальную часть черезъ плотину. Въ этомъ отношеніи плотины можно раздѣлить на водопропускныя и водосливныя.

Высота водопропускныхъ плотинъ равна или больше высоты подпруженной воды, причемъ для пропуска воды въ нижней части плотины устраиваютъ шлюзы, т. е. прямоугольныя отверстія, которыя можно закрывать щитами, перемѣщающимися въ вертикальномъ направленіи. Величина этихъ отверстій можетъ быть подсчитана по общимъ правиламъ, которыя относятся къ расчету прямоугольныхъ отверстій. Высота водосливныхъ плотинъ, напротивъ того, всегда меньше высоты подпруженной воды, такъ что избытокъ воды переливается черезъ верхнее ребро плотины, образуя водосливъ. Покажемъ, какимъ образомъ подсчитывается высота такого рода плотинъ.

Пусть полный расходъ воды въ рѣкѣ равенъ  $Q$  и въ каналъ отводится объемъ  $q$ ; тогда черезъ плотину будетъ сливаться количество воды:

$$Q_0 = Q - q.$$

Допустимъ далѣе, что высота подпруженной воды у плотины надъ нормальнымъ уровнемъ будетъ  $h$ . Такъ какъ такими плотинами пользуются только тогда, когда не требуется большого поднятія уровня воды, то можно допустить, что ширина рѣки  $l$  и до плотины и послѣ плотины есть величина постоянная и равная ширинѣ незапруженной рѣки. По предыдущему обозначимъ черезъ  $H$  среднюю глубину рѣки до устройства плотины; послѣ устройства плотины глубина воды передъ плотиной увеличивается, а за плотиной понижается, т. к. по этой части до соединенія съ отводящимъ каналомъ протекаетъ количество воды  $Q_0 < Q$ . Пусть глубина этой части будетъ  $H_0$ .



Если  $v$  и  $r$  суть скорость и средній радиусъ поперечнаго сѣченія рѣки до устройства плотины, и  $v_0$  и  $r_0$ —тѣ же величины для участка за плотиною послѣ ея устройства, то, считая паденіе выше и ниже плотины постояннымъ, найдемъ:

$$v = c \sqrt{ri}, \quad v_0 = c_0 \sqrt{r_0 i}.$$

Будемъ считать, что  $c = c_0$ , т. к. эти коэффициенты разнятся между собой на незначительную величину.

По предыдущему можемъ положить:

$$r = H \quad \text{и} \quad r_0 = H_0.$$

Кромѣ того имѣемъ:

$$Q = Hlv \quad \text{и} \quad Q_0 = H_0lv_0,$$

откуда

$$\frac{Q_0}{Q} = \frac{H_0 v_0}{H v}$$

или, имѣя въ виду выраженіе для  $v$  и  $v_0$ ,

$$\frac{H_0}{H} = \left( \frac{Q_0}{Q} \right)^{2/3}.$$

Отсюда и можно опредѣлить  $H_0$ .

Перейдемъ теперь къ опредѣленію высоты плотины. Данными задачи мы будемъ считать:  $H$ ,  $h$  и  $H_0$ . Здѣсь могутъ быть два случая.

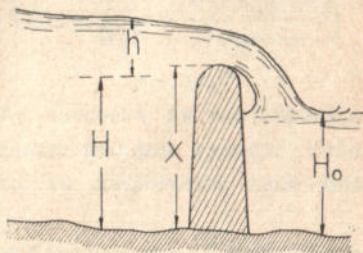
1) высота плотины  $X > H_0$  (фиг. 80)—плотина образуетъ совершенный водосливъ, почему и называется плотиною совершенной;

2) высота плотины  $X < H_0$

(фиг. 81)—плотина образуетъ несовершенный водосливъ и называется несовершенной. Поэтому прежде всего надо рѣшить вопросъ, съ которымъ случаемъ мы имѣемъ дѣло.

Предположимъ для этого, что  $X = H_0$ ;

тогда черезъ такую плотину должно переливаться количество воды (§ 25):



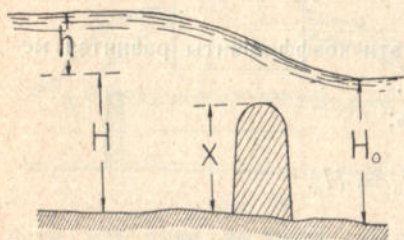
Фиг. 80.

$$Q_1 = \frac{2}{3} \mu l \sqrt{2g} \left[ (H + h - H_0 + k)^{3/2} - k^{3/2} \right],$$

гдѣ

$$k = \frac{u^2}{2g} \quad \text{и} \quad u = \frac{Q_0}{l(H+h)}.$$

Коэффиц.  $\frac{2}{3} \mu$  по Редтенбахеру можно принять = 0,57. Если  $u$  мало, то можно полагать  $k = 0$ . Если мы отсюда получимъ такое значеніе для  $Q_1$ , что  $Q_1 > Q_0$ , то плотина должна быть совершенная; если же  $Q_1 < Q_0$ , то плотина должна быть несовершенной.



Фиг. 81.

Во первомъ случаѣ для опредѣленія  $X$  надо пользоваться формулой совершеннаго водослива:

$$Q = \frac{2}{3} \mu_1 l \sqrt{2g} \left[ (H+h-X+k)^{3/2} - k^{3/2} \right].$$

Во второмъ же случаѣ—формулой несовершеннаго водослива:

$$Q_0 = \frac{2}{3} \mu_1 l \sqrt{2g} \left[ (h+H-H_0+k)^{3/2} - k^{3/2} \right] + \mu_2 l \sqrt{2g} (H_0 - X) \sqrt{H+h-H_0},$$

$$\text{гдѣ } \frac{2}{3} \mu_1 = 0,57 \quad \text{и} \quad \mu_2 = 0,62.$$

Если  $u$  мало, то надо полагать  $k = 0$ .



## ОТДѢЛЪ 6-й.

### Определение расхода и средней скорости.

**50. Непосредственное определение расхода.** Когда расходъ не особенно великъ, его можно определить непосредственнымъ измѣрениемъ. Разсмотримъ нѣсколько самыхъ употребительныхъ и простыхъ способовъ непосредственнаго измѣренія расхода.

1. Определение расхода при помощи шлюза (фиг. 82).

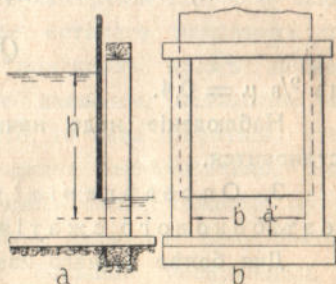
Для этого способа измѣренія воду нужно направить въ прямоугольный каналъ, который имѣетъ на концѣ шлюзъ.

Щитъ шлюза передвигаютъ внизъ и вверхъ до тѣхъ поръ, пока количество притекающей къ шлюзу воды не будетъ равно количеству, черезъ него протекающему. О наступленіи такого равновѣсія можно судить по тому, что съ этого момента уровень воды передъ шлюзомъ не будетъ ни опускаться, ни подниматься. Тогда, измѣривъ величины  $h$ ,  $a'$  и  $b'$ , мы можемъ для опредѣленія расхода воспользоваться формулой истечения черезъ прямоугольное отверстіе.

Для облегченія вычисленій Meisner составилъ таблицу. При этомъ онъ дѣлалъ подсчетъ въ томъ предположеніи, что ширина отверстія немного меньше ширины канала. Если же ширина отверстія равна ширинѣ канала, то табличныя величины надо увеличить на 9% (см. прил. табл. II).

2. Определение расхода при помощи водослива съ боковымъ сжатіемъ (фиг. 83).

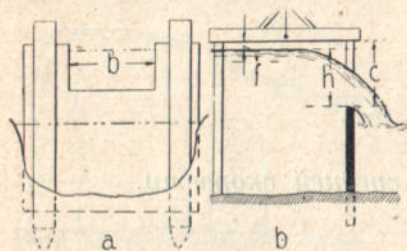
На приводящемъ или отводящемъ воду отъ двигателя каналѣ, перпендикулярно къ направленію движенія, ставятъ щитъ изъ толстыхъ досокъ. Въ срединѣ этого щита дѣлаютъ прямоугольный вырѣзъ, какъ показано на чертежѣ. Ширина вырѣза должна быть при-



Фиг. 82.



близительно равна  $\frac{1}{2}$  ширины канала. Всѣ канты, какъ горизонтальныхъ реберъ отверстия, такъ и вертикальныхъ должны быть заострены такимъ образомъ, чтобы вода проходила сначала черезъ острый край; высота нижняго ребра отверстия должна быть выбрана такъ,



Фиг. 83.

чтобы не только вся вода могла пройти черезъ образовавшийся водосливъ, но чтобы это ребро лежало выше нижней воды на высоту, равную приблизительно  $h$  (фиг. 83) и ни въ какомъ случаѣ не меньшую 150 мм. Понятно, что если при этомъ вода будетъ выступать изъ береговъ канала, надо ставить

боковыя продольныя огражденія. Замѣтимъ, что если желательно получить точные результаты, надо заботиться о томъ, чтобы деревянныя стѣнки нигдѣ воды не пропускали.

Высота  $h$ , разстояніе между уровнемъ воды передъ водосливомъ и нижнимъ кантомъ отверстия, измѣряется при помощи ватерпаса  $a$ , какъ указано на чертежѣ. Когда ватерпасъ установленъ горизонтально, измѣряютъ высоту  $f$ , но только на разстояніи отъ водослива, не меньшемъ 1 метра, и высоту  $c$ . Очевидно, что  $h = c - f$ .

Зная  $h$ , можно опредѣлить расходъ по формулѣ:

$$Q = \frac{2}{3} \mu b h \sqrt{2gh},$$

гдѣ  $\frac{2}{3} \mu = 0,4$ .

Наблюденіе надо начинать тогда, когда движеніе совершенно установится.

3. Опредѣленіе расхода при помощи водослива безъ бокового сжатія.

Для болѣе точнаго измѣренія Meisner предлагаетъ еще слѣдующее устройство. Всю воду надо направить черезъ прямоугольный каналъ съ деревянными стѣнками и въ этомъ каналѣ построить водосливъ во всю его ширину, съ соблюденіемъ въ остальномъ тѣхъ же правилъ, что и въ предыдущемъ случаѣ. Чтобы быть вполнѣ увѣреннымъ, что вода вытекаетъ въ воздухъ, слѣдуетъ въ стѣнкѣ канала между порогомъ водослива и струей просверлить отверстіе въ 50—80 мм. діам. Высота  $h$  измѣряется въ этомъ случаѣ такъ же, какъ и въ предыдущемъ случаѣ. Затѣмъ расходъ можно вычислить по формулѣ:

$$Q = \frac{2}{3} \mu b h \sqrt{2gh},$$

гдѣ  $\frac{2}{3} \mu$  надо положить равнымъ 0,443.



Для обоихъ этихъ случаевъ Meisner вычислилъ таблицы, по которымъ и можно найти расходъ при данномъ  $h$  (см. прил. табл. III и IV).

**51. Измѣреніе расхода черезъ посредство измѣренія скорости.** Когда представляется затруднительнымъ опредѣлить расходъ по одному изъ указанныхъ выше способовъ, то опредѣляютъ расходъ по измѣренной площади поперечнаго сѣченія и средней скорости, пользуясь формулой:

$$Q = \Omega v.$$

Болѣе точно можно опредѣлить  $Q$  слѣдующимъ образомъ. Предположимъ, что намъ извѣстно поперечное сѣченіе потока, расходъ котораго мы хотимъ опредѣлить. Разбиваемъ это сѣченіе на небольшія части и измѣряемъ скорость въ центрѣ тяжести этихъ площадокъ. Если обозначимъ площадь какой-либо изъ этихъ частей черезъ  $f$  и скорость въ ея центрѣ тяжести черезъ  $u$ , то найдемъ:

$$Q = \Sigma fu.$$

Мы видимъ, слѣдовательно, что оба эти способа приводятся къ измѣренію скоростей, потому и остановимся на описаніи способовъ опредѣленія средних и дѣйствительныхъ скоростей.

1. По плавки. Простѣйшій способъ измѣренія скорости заключается въ опредѣленіи времени, въ теченіе котораго поплавокъ проплываетъ данное протяженіе. Такъ какъ поплавокъ кромѣ движенія вмѣстѣ съ водой имѣетъ еще собственное движеніе, вслѣдствіе того, что онъ находится на наклонной плоскости, то надо стараться, чтобы это движеніе по возможности было совершенно незначительно. Ускореніе этого движенія зависитъ отъ слагающей силы тяжести по направленію поверхности и сопротивленія воды движенію. Если, поэтому, поплавокъ будетъ имѣть малый вѣсъ при большой поверхности, то собственное движеніе его будетъ незначительно, ибо сопротивленіе воды пропорціонально площади нормальнаго къ направленію движенія сѣченія, и имъ можно будетъ пренебречь. Въ виду этого самымъ лучшимъ матеріаломъ для изготовленія поплавка является пробка. Чтобы поплавокъ былъ замѣтенъ, его снабжаютъ краснымъ флажкомъ, который долженъ вращаться на оси, иначе поплавокъ испытывалъ бы сопротивленіе воздуха. Наблюденіе производится такъ. Пускаютъ поплавокъ на стрешень (струйка на поверхности, обладающая наибольшей скоростью) и выжидаютъ, когда его движеніе установится; для этого надо, чтобы поплавокъ прошелъ 15—20 mtr. Затѣмъ наблюда-



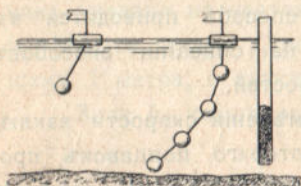
ють время прохождения поплавка мимо двухъ станцій, разстояние  $d$  между которыми должно быть точно измѣрено. Такого рода наблюденія производятъ нѣсколько разъ. Если въ теченіе  $t$  секундъ сдѣлано  $n$  наблюдений, то средняя скорость  $v_0$  на стрешнѣ опредѣлится по формуль:

$$v_0 = \frac{nd}{t}.$$

Зная скорость стрешня, можно по формуламъ, приведеннымъ выше (§ 42), опредѣлить среднюю скорость потока.

Чтобы при помощи поплавка опредѣлить скорость на нѣкоторой опредѣленной глубинѣ, къ обыкновенному поплавку привѣшиваютъ полый металлическій шаръ (фиг. 84). Скорость движенія такого поплавка зависитъ главнымъ образомъ отъ скорости шара, слѣдовательно, помощью его и можно измѣрять скорость на желаемой глубинѣ.

Если мы составимъ поплавокъ изъ нѣсколькихъ пустотѣлыхъ металлическихъ шариковъ (фиг. 84), помѣщенныхъ на различной глубинѣ, то такой поплавокъ будетъ двигаться со средней скоростью въ данномъ мѣстѣ поперечнаго сѣченія. Опредѣляя такимъ образомъ среднюю скорость въ нѣсколькихъ, распределенныхъ по ширинѣ равномѣрно мѣстахъ, можемъ опредѣлить среднюю скорость потока, какъ среднюю арифметическую изъ этихъ скоростей. Но при этомъ необходимо измѣрить среднюю скорость у обоихъ береговъ, какъ можно ближе къ нимъ. Въмѣсто пустотѣлыхъ металлическихъ шариковъ Meisner рекомендуетъ брать просто куски древеснаго корня. Среднюю скорость въ данномъ пунктѣ по ширинѣ можно измѣрять при помощи пустотѣлой палки, свинченной изъ нѣсколькихъ частей (фиг. 84); насыпая въ палку дробь, можно заставить ее погрузиться на желаемую глубину. Длина погруженной части палки, какъ показали опыты полковника Allan Cunningham'a, должна быть равна 0,9 глубины, для того чтобы скорость ея передвиженія равнялась средней скорости.



Фиг. 84.

2. Трубка Пито. Трубка Пито представляетъ изъ себя загнутую подъ прямымъ угломъ (фиг. 85) и открытую съ обѣихъ сторонъ стеклянную трубку  $BA$ , причемъ конецъ  $B$  имѣетъ капиллярное отверстіе. Если погрузить тонкій конецъ  $B$  въ воду и поставить трубку отверстіемъ противъ теченія, то вода въ трубкѣ поднимается на нѣ-



которую высоту  $h$  надъ уровнемъ воды, которая и будетъ зависѣть отъ скорости на той глубинѣ, на которой находится нижнее отверстіе трубки. Если обозначить площадь отверстія при  $B$  черезъ  $f$ , то давленіе на это сѣченіе со стороны воды, находящейся въ трубкѣ будетъ:

$$\Delta f (z + h),$$

а со стороны воды, движущейся въ рѣкѣ:

$$\Delta f z + \zeta \Delta f \frac{v^2}{2g},$$

гдѣ  $\zeta$ —нѣкоторый коэффициентъ.

Такъ какъ жидкость въ трубкѣ находится въ равновѣсіи, то

$$\Delta f (z + h) = \Delta f z + \zeta \Delta f \frac{v^2}{2g},$$

откуда

$$h = \zeta \frac{v^2}{2g}.$$

По опытамъ Dubuat  $\zeta = 1.15$ .

Такимъ образомъ найдемъ:

$$v = \frac{1}{\zeta} \sqrt{2gh} = \alpha \sqrt{2gh}.$$

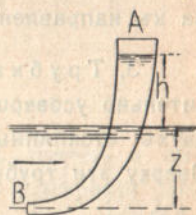
Для установленія величины коэффициента  $\alpha$ , трубку двигаютъ съ определенной скоростью въ спокойной водѣ и наблюдаютъ  $h$ . Здѣсь отмѣтимъ еще интересный фактъ, которымъ мы воспользуемся въ дальнѣйшемъ. Если трубку поворачивать около оси вертикальнаго колѣна, то поднятіе  $h$  мѣняется и даже становится иногда отрицательнымъ.

Опыты Berthelot'a дали слѣдующіе результаты для различныхъ угловъ, образуемыхъ осью горизонтальнаго колѣна съ направлениемъ обратнымъ теченію:

|                      |                          |
|----------------------|--------------------------|
| При углѣ = $0^\circ$ | повышеніе воды = $+ h$ , |
| $45^\circ$           | = $0$ ,                  |
| $90^\circ$           | = $- 1,5h$ ,             |
| $180^\circ$          | = $- 0,5h$ .             |

Такое отрицательное поднятіе показываетъ, что въ этомъ случаѣ около конца трубки имѣетъ мѣсто разрѣженіе. Такое разрѣженіе, выраженное высотой опусканія воды въ трубкѣ, называютъ недавленіемъ.

<sup>1)</sup> Второй членъ въ этомъ выраженіи представляетъ собою эмпирическую формулу давленія потока на погруженное въ него тѣло.

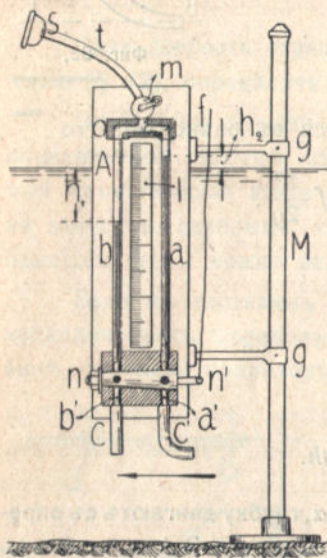


Фиг. 85.



Изъ предыдущей таблицы видимъ, что не давление достигаетъ наибольшей величины, когда ось горизонтальнаго колѣна перпендикулярна къ направленію теченія.

3. Трубка Дарсу и Ваумгартен'а. Дарсу и Ваумгартен значительно усовершенствовали трубку Пито. Ихъ приборъ состоитъ изъ двухъ стеклянныхъ трубокъ *a* и *b* (фиг. 86) діаметромъ 15—20 мм. Вверху эти трубки соединяются общей металлической оправой *O*, снаб-



Фиг. 86.

женной краномъ *m*, служащимъ для сообщенія или разобщенія трубки съ атмосферой. Отъ крана *m* идетъ каучуковая трубка *t*, оканчивающаяся костянымъ мунштукомъ *s*. Внизу трубки также заключаются въ общую оправу съ двумя цилиндрическими каналами *a'* и *b'*, служащими продолженіемъ трубокъ. Къ каждому изъ этихъ каналовъ снизу присоединена металлическая трубка, причемъ къ каналу *b'* присоединена прямая трубка *c*, а къ каналу *a'*—загнутая подъ прямымъ угломъ трубка *c'*. Кранъ *nn'*, имѣющій два круглыхъ отверстія одинаковаго діаметра съ трубками, служитъ для одновременнаго замыканія ихъ. Весь приборъ прикрѣпляется къ доскѣ *A*, которая снабжена вертикальной шкалой *l* съ дѣленіями для отсчета высотъ воды въ обѣихъ

трубкахъ. Доска двумя втулками *g* надѣта на шестъ *M*, на которомъ она можетъ быть установлена въ любомъ положеніи. Нижній конецъ шеста заостренъ и снабженъ заостреннымъ чугуннымъ башмакомъ; чтобы воспрепятствовать углубленію шеста въ дно русла, башмакъ снабжаютъ круглымъ дискомъ. Для измѣренія скорости приборъ погружаютъ въ воду на желаемую глубину, открывъ кранъ *m*; при этомъ горизонтальное колѣно трубки *c'* должно быть направлено противъ теченія. Если кранъ *nn'* открытъ, то вода въ трубкѣ *b*, вслѣдствіе не давления, будетъ стоять ниже поверхности воды въ потокѣ на нѣкоторую высоту  $h_1$ , а въ трубкѣ *a*—выше на нѣкоторую высоту  $h_2$ . Какъ только наступитъ равновѣсіе, кранъ *nn'* закрываютъ при помощи шнурковъ *ff*, а затѣмъ приборъ вынимаютъ и отсчитываютъ высоту  $h = h_1 + h_2$ .

Такъ какъ и давление и не давление пропорціональны квадрату скорости, то



$$h_1 = \zeta' \frac{v^2}{2g} \quad \text{и} \quad h_2 = \zeta'' \frac{v^2}{2g},$$

откуда

$$v^2 = \sqrt{\frac{2g(h_1 + h_2)}{\zeta' + \zeta''}} = \alpha \sqrt{2gh}.$$

Величину коэффициента  $\alpha$  опредѣляютъ опытнымъ путемъ и пишутъ на приборѣ. Обыкновенно  $\alpha = 0,988 - 0,998$ . При измѣреніи скорости на большой глубинѣ вода стремится заполнить обѣ трубки и подняться выше оправы  $O$ . Въ этомъ случаѣ помощью мундштука  $s$  вдувають ртомъ въ верхнюю часть трубокъ воздухъ и такимъ образомъ понижаютъ горизонтъ воды въ обѣихъ трубкахъ на одну и ту же высоту, не измѣняя разности между ними. Послѣ вдуванія кранъ  $m$  долженъ быть тотчасъ же закрытъ.

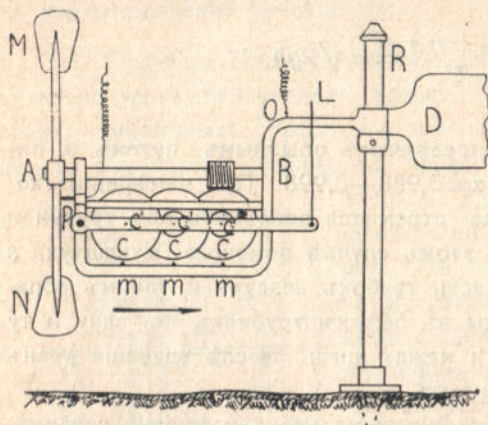
Наоборотъ, при измѣреніи скорости на незначительной глубинѣ, напримѣръ у берега, когда вода въ трубкѣ  $b$  можетъ не пройти кранъ  $mn'$ , воздухъ при помощи мундштука  $s$  высасываютъ изъ трубки, вслѣдствіе чего вода поднимается въ обѣихъ трубкахъ на одну и ту же величину.

Преимущество этого прибора по сравненію съ простой трубкой Пито заключается въ слѣдующемъ: 1) онъ можетъ служить для измѣренія скоростей на различной глубинѣ, 2) неудобство отсчитыванія вслѣдствіе колебанія поверхности воды въ трубкѣ совершенно устранено, 3) волосность не имѣетъ вліянія на точность показанія, т. е. вслѣдствіе этого обстоятельства вода поднимается въ обѣихъ трубкахъ на одну и ту же величину, 4) вслѣдствіе одновременнаго отсчитыванія высоты давленія и недавленія, приборъ болѣе чувствителенъ.

4. Вертушки Woltmann'a и Amsler'a. Схема этого прибора изображена на фиг. 87.  $AB$  есть ось, на концѣ  $A$  которой укрѣплены два (или больше) крыла  $M$  и  $N$ , наклоненныя къ плоскости вращенія подъ нѣкоторымъ угломъ. Подъ давленіемъ струекъ воды крылья и ось приходятъ во вращеніе и по числу оборотовъ оси за извѣстное время можно опредѣлить скорость теченія. Счетъ числа оборотовъ ведется десятичнымъ счетчикомъ, состоящимъ изъ 3-хъ большихъ зубчатыхъ колесъ  $C$  и 2-хъ меньшихъ  $C_1$ , причемъ ихъ передаточныя числа  $= 10$ . Первое колесо счетчика сцѣпляется съ безконечнымъ винтомъ, нарязаннымъ на оси  $AB$ . Колеса счетчика имѣютъ опоры въ рычагѣ, вращающемся около  $P$  на шарнирѣ. Пружинка  $k$  постоянно стремится отодвинуть рычагъ внизъ и вывести, слѣдовательно, счетчикъ изъ зацѣпленія съ червякомъ. Натягивая шнурокъ  $L$ , привязанный къ



свободному концу рычага, наблюдатель можетъ привести счетчикъ въ зацѣпленіе и начать счетъ оборотовъ. По истеченіи нѣкотораго опредѣленнаго промежутка времени, наблюдатель опускаетъ шнурокъ, пружина выводитъ счетчики изъ зацѣпленія и счетъ оборотовъ прекращается. Первое колесо счетчика считаетъ единицы оборотовъ, второе—десятки и третье—сотни. Чтобы при выниманіи прибора изъ воды счетчикъ не могъ повернуться самъ собою, на обоймицѣ, въ которой вращается ось, имѣются два штифта *m*, которые при расцѣпленіи счетчика входятъ между зуб-



Фиг. 87.

цами и закрѣпляютъ положеніе колесъ. Весь приборъ можетъ быть установленъ въ любомъ мѣстѣ шеста *M*, но съ сохраненіемъ вращенія, т. ч. при помощи крыла *D* онъ самъ собою устанавливается такъ, что ось *AB* имѣетъ направленіе теченія.

Подобный же приборъ можетъ быть употребленъ для опредѣленія скорости движенія газовъ (анемометръ), но, конечно, онъ долженъ быть сдѣланъ гораздо чувствительнѣй. Слабую сторону этого прибора представляетъ счетчикъ, который находясь въ водѣ, часто засаривается и задерживаетъ вращеніе. Поэтому Amsler устроилъ счетчикъ электрической. Одинъ изъ электродовъ спирали Румкорфа соединяется съ мѣдной оправой вертушки, гдѣ нибудь въ пунктѣ *O*, а другой, изолированный отъ обоймицы, проходитъ черезъ нее и выступаетъ такъ, что задѣваетъ за спицу крыла, причѣмъ токъ замыкается и на лентѣ телеграфнаго аппарата, введеннаго въ цѣпь, каждое прохожденіе спицы отмѣчается точкой. При такомъ способѣ можно сосчитать не только число оборотовъ, но даже замѣтить ихъ сравнительную продолжительность: оказывается, что она не постоянна, а періодически мѣняется. Это, до сихъ поръ не изслѣдованное явленіе, называется пульсацией рѣки.

Многочисленные опыты показали, что зависимость между скоростью теченія и числомъ оборотовъ вертушки можетъ быть выражена соотношеніемъ:

$$v = a + bn,$$



гдѣ  $v$ —скорость,  $n$ —число оборотовъ, а  $a$  и  $b$ —постоянныя прибора.

Эти постоянныя опредѣляются совершенно такимъ же способомъ, какъ и постоянныя другихъ приборовъ. Относительно постояннаго  $a$  замѣтимъ слѣдующее.

Если мы положимъ  $n = 0$ , то найдемъ:

$$v = a.$$

Слѣдовательно,  $a$  есть такая скорость, при которой вертушка еще не вращается, поэтому  $a$  можетъ служить мѣрой нечувствительности и называется коэффициентомъ нечувствительности.

Надо, конечно, позаботиться объ его уменьшеніи. Величина  $a$  зависитъ главнымъ образомъ отъ величины тренія въ сочлененіяхъ; если, поэтому, приборъ устроенъ деликатно, то можно принимать:

$$v = bn.$$

## ОТДѢЛЪ 7-й.

### Движеніе грунтовыхъ водъ.

**52. Основное ур—іе движенія; кривая депрессіи.** Атмосферныя осадки, проникая съ поверхности земли въ почву, движутся черезъ нее вертикально, пока не встрѣтятъ на своемъ пути какой-нибудь водонепроницаемый слой. Если поверхность послѣдняго имѣетъ въ какомъ-нибудь направленіи уклонъ, то вода начинаетъ двигаться вдоль этого уклона, заполняя всѣ промежутки между отдѣльными частицами лежащаго выше водонепроницаемаго слоя. Теченіе такого слоя воды мало чѣмъ отличается отъ неравномѣрнаго теченія въ каналахъ, ибо здѣсь, какъ и тамъ, свободная поверхность находится подъ давленіемъ атмосферы. Но однако-же существенное отличіе заключается въ томъ, что грунтовая вода, встрѣчая на своемъ пути весьма значительныя вредныя сопротивленія, движется всегда съ очень малой скоростью и потому, какъ мы видѣли выше (§ 35), высоту вредныхъ потерь здѣсь можно считать пропорціонально первой степени скорости.

Пусть  $oo$  (фиг. 88) есть поверхность водонепроницаемаго слоя,  $i$  есть уголъ, образуемый  $oo$  съ горизонтомъ и  $ab$  поверхность слоя воды. Разсматривая движеніе потока на безконечно маломъ протяженіи  $ds$ , отъ вертикальнаго сѣченія  $cd$  до сѣченія  $ef$ , мы по предыдущему (§ 45) легко найдемъ, пренебрегая измѣненіемъ живой силы:

$$\frac{\Omega}{O} i_0 = \alpha v . . . (1),$$

гдѣ  $i_0$ —уклонъ поверхности потока.

Въ виду полной невозможности опредѣленія  $\Omega$  и  $O$  путемъ непосредственнаго измѣренія ур—іе (1), удобнѣе изображать въ слѣдующемъ видѣ:

$$i_0 = \mu v . . . (2),$$



где  $\mu$  является некоторой постоянной для всякого грунта, подлежащей определению путем наблюдений. Таким образом найдено, что

для крупного песку  $\mu = 1266$ ,  
 для мелкого песку  $\mu = 5760$ .

Обозначая  $ef_1$  через  $y$  и  $ef$  через  $h$  и предполагая, что  $s$  отсчитывается по направлению течения, мы легко найдем:

$$y = h - is \dots (3).$$

Если далее, мы обозначим через  $q$  расход воды на единицу ширины потока и через  $m$  отношение площади отверстий в сечении  $ef$  к полной площади его, то легко найдем:

$$q = mhw \dots (4).$$

Разсматривая, наконец, прямоугольный треугольник  $ce_1c$ , мы будем иметь:

$$i_0 = -\frac{dy}{ds} \dots (5).$$

Таким образом, имея в виду уравнения (2, 4 и 5), легко найдем:

$$i_0 = \frac{\beta q}{h} = -\frac{dy}{ds} \dots (6).$$

где  $\beta = \frac{\mu}{m}$ .

Сопоставляя затем уравнения (3 и 6), будем иметь:

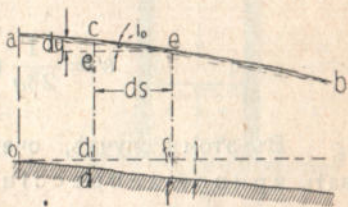
$$ds = \frac{hdh}{ih - \beta q} = \frac{dh}{i} + \frac{\beta q}{i^2} \frac{idh}{ih - \beta q} \dots (7).$$

Отсюда по интеграции в пределах от  $h_0$  до  $h$ , где  $h_0$  глубина потока в сечении  $oa$ , от которого отсчитывается  $s$ , получим:

$$s = \frac{h - h_0}{i} + \frac{\beta q}{i^2} \lg \frac{ih - \beta q}{ih_0 - \beta q} \dots (8).$$

Разложим второй член во второй части уравнения (8) в ряд; будем иметь:

$$+ \frac{\beta q}{i^2} \lg \frac{1 - \frac{ih}{\beta q}}{1 - \frac{ih_0}{\beta q}} = \frac{\beta q}{i^2} \left[ \frac{ih_0}{\beta q} - \frac{ih_0}{\beta q} + \frac{i^2 h_0^2}{2\beta^2 q^2} - \frac{i^2 h^2}{2\beta^2 q^2} + \dots \right].$$



Фиг. 88.

Подставляя въ ур—іе (8), найдемъ:

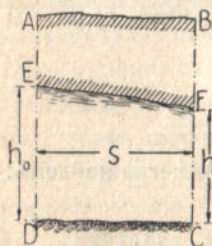
$$s = \frac{1}{2\beta q} (h_0^2 - h^2) + \frac{i}{3\beta^2 q^2} (h_0^3 - h^3) + \dots \quad (9).$$

Если паденіе поверхности водонепроницаемаго слоя настолько мало, что имъ можно пренебречь, мы будемъ имѣть:

$$s = \frac{1}{2\beta q} (h_0^2 - h^2) \dots \quad (10).$$

Въ этомъ случаѣ, очевидно, кривая  $ab$ , которую принято называть кривой депрессіи, будетъ представлять собою параболу съ горизонтальной осью.

Если мы обозначимъ паденіе ( $h_0 - h$ ) на протяженіи  $s$  (фиг. 89) черезъ  $z$ , то изъ ур—ія (10) будемъ имѣть:



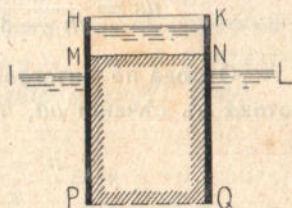
Фиг. 89.

$$q = \frac{1}{\beta} \frac{z}{s} \frac{h + h_0}{2} \dots \quad (11).$$

Отсюда слѣдуетъ, что расходъ пропорціоналенъ паденію  $z$ , средней глубинѣ водоноснаго слоя  $\left(\frac{h + h_0}{2}\right)$  и обратно пропорціоналенъ длинѣ слоя.

Понятно, что формула (11) можетъ быть непосредственно примѣнена къ фильтру той же толщины, гдѣ вода протекаетъ не въ горизонтальномъ, а въ вертикальномъ направленіи (фиг. 90) черезъ фильтрующій слой  $MNPQ$ , заключенный между двумя водонепроницаемыми стѣнками  $MP$  и  $NQ$ .

Здѣсь  $\frac{h + h_0}{2} = MN = PQ$ ,  $s = MP = NQ$  и  $h_0 - h = z$  — есть разность высотъ уровней воды надъ фильтрующимъ слоемъ (горизонталь  $HK$ ) и въ сборномъ бассейнѣ (горизонталь  $IL$ ).



Фиг. 90.

**53. Расходъ обыкновеннаго колодца.** Допустимъ, что мы имѣемъ круглый колодецъ  $LMON$  (фиг. 91), прорѣзывающій водоносный слой  $ABCD$  во всю его глубину. Если изъ такого колодца берется равномерно вода, то поверхность воды въ немъ въ началѣ будетъ



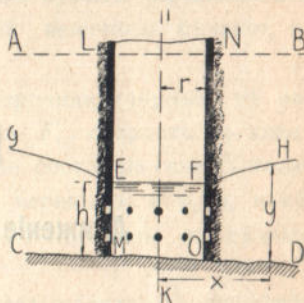
опускаться, а затѣмъ, когда движеніе установится, займетъ нѣкоторое положеніе  $EF$ , и поверхность водяного слоя образуетъ около колодца воронку  $GH$ . Найдемъ ур—іе меридіана этой воронки и расходъ колодца.

По предыдущему (ур—іе (2) § 52) имѣемъ:

$$i_0 = \frac{dy}{dx} = \mu v \dots (1).$$

Опредѣляя количество воды, протекающей черезъ боковую поверхность цилиндра радіуса  $x$  и высоты  $y$ , найдемъ:

$$q = m2\pi xyv \dots (2).$$



Фиг. 91.

Исключая изъ этихъ двухъ ур—ій  $v$ , будемъ имѣть:

$$q = \frac{2\pi}{\beta} xy \frac{dy}{dx} \dots (3)$$

или

$$ydy = \frac{3q}{2\pi} \frac{dx}{x} \dots (4).$$

Отсюда по интеграціи въ предѣлахъ измѣненія  $x$  отъ  $r$  до  $x$  и  $y$ —отъ  $h$  до  $y$ , будемъ имѣть:

$$y^2 - h^2 = \frac{\beta q}{\pi} \lg \frac{x}{r} \dots (5).$$

Это и есть уравненіе меридіана воронки  $GH$ . Предполагая, что на нѣкоторомъ разстояніи отъ оси колодца  $IK$ , равномъ  $r_0$ , глубина водоноснаго слоя равна  $h_0$ , изъ уравненія (5) будемъ имѣть:

$$q = \frac{2\pi}{\beta} \left[ \frac{h_0 - h}{\lg \frac{r_0}{r}} \right] \frac{h + h_0}{2} \dots (6),$$

т. е. расходъ колодца пропорціоналенъ средней толщинѣ  $\left( \frac{h+h_0}{2} \right)$  водоноснаго слоя на данномъ разстояніи  $r_0$  и паденію поверхности потока на томъ же разстояніи, и обратно пропорціоналенъ логариѣму отношенія  $\frac{r_0}{r}$ .





движутся съ равными и параллельными оси скоростями. Такое допущение ведетъ къ слѣдствию, что давленіе въ каждомъ такомъ сѣченіи слѣдуетъ законамъ гидростатики. Кромѣ того будемъ предполагать, что труба не имѣетъ ни быстрыхъ измѣненій величины сѣченія, ни рѣзкихъ измѣненій направленія.

Возьмемъ два сѣченія  $AB$  и  $CD$ , перпендикулярныя къ оси  $M_0M$ . Обозначимъ площадь сѣченія  $AB$  черезъ  $F_0$ , скорость въ этомъ сѣченіи черезъ  $w_0$ , величины, характеризующія состояніе газа въ этомъ сѣченіи, т. е. давленіе и удѣльный объемъ,—черезъ  $p_0$  и  $v_0$  и, наконецъ, внутреннюю энергію—черезъ  $U_0$ . Тѣ же величины въ сѣченіи  $CD$  обозначимъ черезъ  $F, w, p, v$  и  $U$ .

Такъ какъ по нашему предположенію газъ обладаетъ въ трубѣ установившимся движеніемъ, то, слѣдовательно, черезъ каждое сѣченіе въ одно и то же время (1 секунду) протекаетъ одна и та же масса, или одинъ и тотъ же вѣсъ газа. Черезъ сѣченіе  $AB$  въ одну секунду протекаетъ объемъ  $F_0w_0$ ; вѣсъ этого объема будетъ:

$$G = \frac{F_0w_0}{v_0}.$$

Тотъ же самый вѣсъ газа протекаетъ въ то же время и черезъ сѣченіе  $CD$ , т. ч.

$$G = \frac{F_0w_0}{v_0} = \frac{Fw}{v} \dots (1).$$

Разсмотримъ движеніе объема  $ABCD$  за бесконечно-малый промежутокъ времени  $dt$ , въ концѣ котораго объемъ этотъ будетъ занимать положеніе  $A'B'C'D'$ , и примѣнимъ къ этому перемѣщенію обобщенную теорему живыхъ силъ.

Вычислимъ приращеніе кинетической энергіи внѣшней и внутренней при этомъ перемѣщеніи, т. е. разность этой энергіи газа въ объемахъ  $A'B'C'D'$  и  $ABCD$ .

Такъ какъ мы предполагаемъ движеніе установившимся, то кинетическая энергія газа въ общемъ объемѣ  $A'B'CD$  остается неизмѣнной, слѣдовательно, ея приращеніе при разсматриваемомъ перемѣщеніи будетъ равно:

кин. энерг. объема  $(CC'DD')$ —кин. энерг. объема  $(AA'BB')$ .

Кинетическая энергія газа, находящагося въ сѣченіи  $AB$ , по отношенію къ одному  $kgm$ , есть  $\left( U_0 + A \frac{w_0^2}{2g} \right)$  калорий; въ объемѣ же

$ABA'B' = F_0 w_0 dt$  заключается въсь  $\frac{F_0 w_0 dt}{v}$ , т. ч. запасъ кинет. энергіи въ этомъ объемѣ будетъ:

$$\left( U_0 + A \frac{w_0^2}{2g} \right) \frac{F_0 w_0 dt}{v}.$$

Здѣсь  $A$  обозначаетъ термическій эквивалентъ работы, который равенъ  $\frac{1}{424}$ .

Такимъ же образомъ найдемъ, что запасъ кинет. энергіи въ объемѣ  $CDCD'$  будетъ:

$$\left( U + A \frac{w^2}{2g} \right) \frac{F w dt}{v}.$$

Принимая во вниманіе уравненіе (1), найдемъ, что приращеніе кинет. энергіи объема  $ABCD$  за время  $dt$  будетъ:

$$\frac{F w dt}{v} \left[ \left( U + A \frac{w^2}{2g} \right) - \left( U_0 + A \frac{w_0^2}{2g} \right) \right].$$

Составимъ теперь сумму работъ внѣшнихъ силъ. Работа тяжести выразится произведеніемъ вѣса объема  $ABCD$  на пониженіе центра тяжести при перемѣщеніи въ положеніе  $A'B'C'D'$ . Но такъ какъ вѣсъ объема  $A'B'CD$  и положеніе его центра тяжести остаются неизмѣнными, то работа тяжести будетъ:

$$A \frac{F w dt}{v} h,$$

гдѣ  $h$  есть разность высотъ центровъ тяжести сѣченія  $AB$  и  $CD$  надъ какимъ-нибудь горизонтомъ.

Работа давленія въ сѣченіи  $AB$  положительна и равна

$$A p_0 F_0 w_0 dt.$$

Работа давленія въ сѣченіи  $CD$  отрицательна и равна

$$- A p F w dt.$$

Кромѣ того нужно принять во вниманіе ту теплоту, которая при этомъ перемѣщеніи отнимается или сообщается рассматриваемой массѣ газа въ объемѣ  $ABCD$ . Положимъ, что одному  $kg$  газа при



его перемѣщеніи отъ  $AB$  до  $CD$  сообщается извнѣ  $Q$  кал. (если теплота отнимается, то надо считать  $Q$  отрицательнымъ). Но при разсматриваемомъ перемѣщеніи дѣло происходитъ такъ, какъ будто въсь  $\frac{Fw}{v} dt$  прямо перемѣщается изъ положенія  $ABA'B'$  въ положеніе  $CDC'D'$ , поэтому всей разсматриваемой массѣ газа при ея безконечно маломъ перемѣщеніи сообщается количество тепла, равное

$$\Delta Q = \frac{Fw}{v} dt Q.$$

Эта теплота должна быть включена въ сумму работъ внѣшнихъ силъ.

Примемъ теперь во вниманіе и работу вредныхъ сопротивленій, т. е., главнымъ образомъ, работу тренія. Пусть отрицательная работа тренія по отношенію къ одному  $kgf$  газа при его перемѣщеніи отъ  $AB$  до  $CD$  будетъ  $AB$  *kal*. Тогда по отношенію къ въсу  $\frac{Fw}{v} dt$  эта работа будетъ:

$$A \Delta B = AB \frac{Fw}{v} dt.$$

Эта работа вся обращается въ теплоту. А если это такъ, то мы должны будемъ ввести предыдущее выраженіе два раза въ сумму работъ внѣшнихъ силъ и при томъ одинъ разъ со знакомъ  $-$ , а другой со знакомъ  $+$ , т. ч. оба эти члена сократятся. Такимъ образомъ, приравнивая приращеніе кинетической энергии суммѣ работъ всѣхъ силъ, получимъ:

$$\begin{aligned} \frac{Fw}{v} dt \left[ U + A \frac{w^2}{2g} - \left( U_0 + A \frac{w_0^2}{2g} \right) \right] &= A \frac{Fw}{v} h dt + Ap_0 F_0 w_0 dt - \\ &- Ap Fw dt + \frac{Fw}{v} Q dt. \end{aligned}$$

Раздѣливъ все это уравненіе на  $\frac{Fw}{v} dt$ , будемъ имѣть:

$$U + A \frac{w^2}{2g} - \left( U_0 + A \frac{w_0^2}{2g} \right) = Ah + Ap_0 v_0 - Apv + Q \dots (2).$$

Въ приложеніи гораздо удобнѣе пользоваться дифференціальной формой:

$$dU + Ad \left( \frac{w^2}{2g} \right) = Adh - Ad(pv) + dQ \dots (3)$$

Здѣсь  $dQ$  есть количество теплоты, сообщаемое одному  $kgr.$  газа на протяженіи одного элемента трубы.

Кромѣ уравненія (3) всегда будетъ справедливо уравненіе, выражающее первый принципъ термодинамики:

$$dQ' = dU + Apdv,$$

гдѣ подѣ  $dQ'$  надо разумѣть сумму:

$$dQ = dQ + AdB,$$

т. ч.

$$dQ + AdB = dU + Apdv \dots (4)$$

Складывая это уравненіе съ уравненіемъ (3), найдемъ:

$$d \left( \frac{w^2}{2g} \right) = dh - vdp - dB \dots (5)$$

Высоту  $dB$ , выражающую потерю энергіи на 1  $kgr.$  газа на протяженіи одного элемента трубы, можно выразить по аналогіи съ потерей на треніе при движеніи воды формулой (для трубы съ круглымъ сѣченіемъ):

$$dB = 4 b \frac{dx}{D} w^2,$$

гдѣ  $D$ —діаметръ трубы и  $dx$ —длина ея элемента.

Для рѣшенія вопросовъ о движеніи газовъ мы можемъ пользоваться уравненіемъ (1) и любыми двумя уравненіями изъ трехъ (3, 4 и 5). Такимъ образомъ мы имѣемъ только три уравненія, между тѣмъ какъ неизвѣстныхъ имѣемъ пять:  $p$ ,  $v$ ,  $U$ ,  $w$  и температура  $t$ .

Два недостающія уравненія суть: характеристическое уравненіе

$$pv = R (t^0 + 273^0) \dots (6)$$

и

$$dU = C_v dT = \frac{A}{k-1} d(pv) \dots (7),$$

гдѣ  $C_v$ —теплоемкость при постоянномъ объемѣ и  $T$ —абсолютная температура.



Въ тѣхъ случаяхъ, когда давленіе и температура газа при движеніи измѣняются мало и колеблются около нѣкотораго средняго значенія, можно  $v$  считать постояннымъ и равнымъ средней величинѣ.

При такомъ допущеніи, замѣчая, что

$$v = \frac{1}{\Delta} = \text{const.}$$

изъ уравненія (5) по интеграціи найдемъ:

$$\frac{w_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\Delta} + h = \frac{w^2}{2g} + \frac{p}{\Delta} + B \dots (8).$$

А это есть уравненіе Д. Бернулли.

**55. Истечение газа изъ отверстія.** Пусть имѣемъ сосудъ  $A$ , наполненный газомъ подъ давленіемъ  $p_0$ , которое остается постояннымъ во все время истечения газа черезъ отверстіе  $ab$  (фиг. 93). Обозначимъ площадь отверстія черезъ  $F$ , давленіе окружающей среды черезъ  $p'$  и давленіе въ отверстіи черезъ  $p$ . Это послѣднее, какъ мы увидимъ ниже, можетъ разниться отъ  $p'$ .

Принимая, что движеніе установилось, опредѣлимъ скорость истечения и вѣсъ вытекающаго въ одну секунду газа. Для этого намъ прежде всего слѣдуетъ сдѣлать какую-нибудь гипотезу относительно  $Q$ . Такъ какъ истечение происходитъ быстро, то окружающая среда не будетъ успѣвать сообщать газу замѣтнаго количества теплоты и потому самое естественное предположеніе будетъ, что  $Q = 0$ .

Въ виду того, что вредныя сопротивленія на короткомъ пути, на которомъ газъ соприкасается со стѣнками сосуда, ничтожны, можемъ положить  $B = 0$ . Кромѣ того, такъ какъ работа силы тяжести не можетъ быть велика,—ибо газъ притекаетъ къ отверстію и снизу и сверху,—то будемъ полагать и  $h = 0$ .

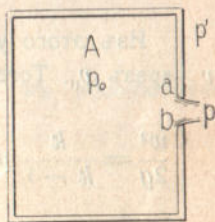
При такихъ допущеніяхъ уравненія (3 и 4 § 54) намъ дадутъ:

$$dU + A p dv = 0 \dots (1)$$

$$dU + A d \frac{w^2}{2g} = - A d (pv) \dots (2)$$

Замѣтивъ, что (уравненіе 7 § 54)

$$dU = \frac{A}{k-1} d(pv),$$



Фиг. 93.

изъ уравненія (1) получимъ:

$$\frac{1}{k-1}(pdv + vdp) + pdv = 0,$$

или

$$kpdv + vdp = 0.$$

Раздѣляя переменныя и интегрируя это уравненіе, получимъ:

$$pv^k = p_0v_0^k = \text{const} \dots (3).$$

Отсюда видимъ, что процессъ истеченія есть адиабатическій процессъ.

Принимая во вниманіе опять выраженіе для  $dU$ , изъ уравненія 2) найдемъ:

$$\frac{1}{k-1}d(pv) + d\left(\frac{w^2}{2g}\right) = -d(pv)$$

или

$$d\left(\frac{w^2}{2g}\right) = -\frac{k}{k-1}d(pv).$$

Отсюда по интеграціи имѣемъ:

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{k}{k-1}(p_0v_0 - pv) = \frac{k}{k-1}R(T_0 - T) \dots (4).$$

Изъ этого ур—ія мы можемъ при помощи ур—ія (3) исключить  $v$  черезъ  $v_0$ . Тогда будемъ имѣть:

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{k}{k-1}p_0v_0\left(1 - \frac{pv}{p_0v_0}\right) = \frac{k}{k-1}\left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]p_0v_0.$$

Отсюда:

$$w = \sqrt{\frac{k}{k-1}p_0v_0\left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]2g} \dots (5).$$

Чтобы принять во вниманіе вредныя сопротивленія, можемъ написать, что дѣйствительная скорость

$$w_e = \varphi w = \varphi \sqrt{\frac{k}{k-1}p_0v_0\left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]2g} \dots (5'),$$



гдѣ  $\varphi$ —коэффициентъ скорости, имѣющей для совершенныхъ газовъ ту же величину, что и для идеальныхъ жидкостей.

При опредѣленіи вѣса вытекающаго въ одну секунду газа, надо принять во вниманіе сжатіе струи; если обозначимъ коэффициентъ сжатія черезъ  $\alpha$ , то найдемъ:

$$G = \frac{\alpha F w_e}{v} = \alpha \varphi F \sqrt{\frac{k}{k-1} 2g \frac{p_0 v_0}{v^2} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}.$$

Но такъ какъ на основаніи ур—ія (3) имѣемъ, что

$$v^2 = \left[ \frac{p_0}{p} \right]^{\frac{2}{k}} v_0^2,$$

то, обозначая произведеніе  $\alpha \varphi$  черезъ  $\mu$  (коэф. расхода), найдемъ:

$$G = \mu F \sqrt{\frac{k}{k-1} 2g \frac{p_0}{v_0} \left[ \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{2}{k}} - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]} \dots (6).$$

Формулы (5 и 6) и рѣшаютъ поставленные вопросы. Изслѣдуемъ теперь эти формулы. Примемъ, что давленіе газа въ отверстіи одинаково съ давленіемъ въ окружающей средѣ, т. е. положимъ, что  $p = p'$ . Если при этомъ  $p' = p_0$ , то мы получимъ:

$$w_e = 0 \text{ и } G = 0,$$

что можно было предвидѣть.

Вообразимъ теперь, что вытеканіе происходитъ въ абсолютную пустоту, т. е. положимъ, что  $p = p' = 0$ . Тогда

$$w_e = \varphi \sqrt{2g \frac{k}{k-1} p_0 v_0} \text{ и } G = 0.$$

Этотъ результатъ, очевидно, не имѣетъ смысла; слѣдовательно, наше предположеніе, что въ данномъ случаѣ  $p = p'$ , невѣрно.

Fliegner опредѣлилъ давленіе струи воздуха въ отверстіи опытнмъ путемъ и нашель, что  $p$  не всегда равно  $p'$  и съ возрастаніемъ отношенія  $\frac{p_0}{p'}$  приближается къ наименьшему значенію:

$$p = 0,5767 p_0.$$

Меньше этой величины давленіе въ отверстіи быть не можетъ, какъ бы мало ни было  $p'$ .

Покажемъ, что выведенныя нами формулы приводятъ къ тому же результату. Если формула (6) при предположеніи, что  $p = p'$ , даетъ  $G = 0$  при двухъ значеніяхъ  $p$ :

$$p = 0 \text{ и } p = p_0.$$

то, слѣдовательно, при нѣкоторомъ промежуточномъ значеніи  $p = p_1$ , величина  $G$  достигаетъ наибольшаго значенія. Чтобы найти  $p_1$ , приравняемъ первую производную отъ  $G$  по  $p$  нулю. Такъ какъ подкоренная величина въ бесконечность обратиться не можетъ, то мы придемъ къ условію:

$$\frac{d}{dp} \left[ \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{2}{k}} - \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right] = 0,$$

или

$$\frac{2}{k} \left[ \frac{p_1}{p_0} \right]^{\frac{2-k}{k}} - \frac{k+1}{k} \left[ \frac{p_1}{p_0} \right]^{\frac{1}{k}} = 0,$$

откуда

$$z = \frac{p_1}{p_0} = \left[ \frac{2}{k+1} \right]^{\frac{k}{k-1}} \dots \dots (7).$$

Полагая  $k = 1,41$ , найдемъ:

$$z = \frac{p_1}{p_0} = 0,5266.$$

Подставляя выраженіе (7) въ формулу (6) найдемъ:

$$\begin{aligned} G_{max} = \mu F &= \sqrt{2g \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{v_0} \left[ \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{2}{k-1}} - \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \right]} = \\ &= \mu F \sqrt{2g \frac{k}{k+1} \frac{p_0}{v_0} \left[ \frac{2}{k+1} \right]^{\frac{2}{k-1}}} = \\ &= \mu F p_0 \sqrt{2g \frac{k}{k+1} \frac{1}{RT_0} \left[ \frac{2}{k+1} \right]^{\frac{2}{k-1}} \dots \dots (8). \end{aligned}$$



Для воздуха, полагая  $R = 29,3$ , найдемъ:

$$G_{max} = 0,3972 \mu F \frac{p_0}{\sqrt{T_0}}.$$

Итакъ, формула (6), опредѣляющая вѣсь вытекающаго газа, приводитъ къ слѣдующимъ результатамъ, если принять, что  $p = p'$ .

При  $p = p_0$ ,  $G = 0$ . Если  $p'$  уменьшается и отношеніе  $\frac{p_0}{p'}$ , слѣдовательно, увеличивается,—вѣсь вытекающаго газа увеличивается. Такъ будетъ продолжаться до тѣхъ поръ, пока  $p'$  не станетъ равнымъ  $0,5266 p_0$ , когда  $G$  достигнетъ наибольшаго значенія. Все это время  $p = p'$ .

Пусть теперь давленіе во внѣшней средѣ продолжаетъ уменьшаться такъ, что

$$\frac{p'}{p_0} < 0,5266.$$

При этомъ по формулѣ (6) мы получили бы постепенно уменьшающійся вѣсь  $G$ , если бы и теперь допустили, что  $p = p'$ . Но мы видѣли, что такое допущеніе приводитъ къ явно несообразному результату, слѣдовательно, здѣсь нельзя уже допускать, что  $p = p'$ . Напротивъ того, слѣдуетъ принять, что какъ бы дальше ни уменьшалось давленіе во внѣшней средѣ, давленіе въ отверстіи не измѣняется и остается равнымъ  $p_1 = 0,5266 p_0$ . Такой ходъ явленій, какъ мы уже сказали, находить себѣ подтвержденіе въ опытахъ Fliegner'a.

Итакъ при пользованіи формулой (6) всегда нужно помнить, что въ ней  $p$  обозначаетъ давленіе въ отверстіи, которое до тѣхъ только поръ равно наружному  $p'$ , пока  $p' > 0,5266 p_0$ . Если же  $p' < 0,5266 p_0$ , то давленіе въ отверстіи надо всегда принимать равнымъ  $0,5266 p_0$ , т. е.  $G$  будетъ оставаться затѣмъ постоянно равнымъ  $G_{max}$ . Справедливость этого результата была подтверждена также опытами S. Venant, Wantzel'я и Zeuner'a. Всѣ эти экспериментаторы пришли къ заключенію, что при постепенномъ уменьшеніи отношенія  $\frac{p'}{p_0}$ , вѣсь вытекающаго газа сначала возрастаетъ, а затѣмъ, послѣ того, какъ это отношеніе достигнетъ извѣстной величины, остается почти безъ измѣненія.

Итакъ, мы видѣли, что положеніе  $Q = 0$  приводитъ къ результатамъ, подтверждаемымъ опытными данными.

Отмѣтимъ одно весьма интересное обстоятельство. Оказывается, что при  $G_{max}$ , скорость въ отверстіи равна скорости звука въ газѣ при состояніи, характеризуемомъ величинами  $p_1$  (ур. 7) и  $v_1$ . Дѣйствительно, принимая во вниманіе уравненія (3 и 7), изъ уравненія (5) найдемъ:

$$w = \sqrt{k g p_1 v_1},$$

а это и есть скорость звука.

При расчетахъ по формулѣ (6) слѣдуетъ брать слѣдующія значенія для коэффициента  $\mu$ :

|   |              |
|---|--------------|
| отверстіе въ тонкой стѣнкѣ . . . . .                                      | $\mu = 0,65$ |
| короткій цилиндрической насадокъ . . . . .                                | $\mu = 0,85$ |
| слабо конической насадокъ (уголь при вершинѣ около $12^\circ$ ) . . . . . | $\mu = 0,95$ |

Въ томъ случаѣ, когда отношеніе  $\frac{p}{p_0}$  мало разнится отъ единицы, формулы (5) и (6) могутъ быть значительно упрощены.

Положимъ, что  $\frac{p}{p_0} = 1 - \delta$ , гдѣ  $\delta$  — очень малая величина; тогда

$$1 - \left[ \frac{p}{p_0} \right]^{\frac{k-1}{k}} = 1 - (1-\delta)^{\frac{k-1}{k}} = 1 - \left[ 1 - \frac{k-1}{k} \delta \right] = \frac{k-1}{k} \delta.$$

Подставляя это выраженіе въ формулу (5'), найдемъ:

$$w_e = \varphi \sqrt{2g p_0 v_0 \delta}.$$

Замѣняя  $\delta$  черезъ  $1 - \frac{p}{p_0}$ , получимъ:

$$w_e = \varphi \sqrt{2g (p_0 - p) v_0} \dots (9).$$

Замѣтимъ, что то же выраженіе для  $w_e$  получимъ изъ обыкновенной формулы Д. Бернулли, считая, что  $v = v_0 = const$ .

Такимъ образомъ найдемъ, что при такихъ условіяхъ

$$G = \frac{\mu F}{v} \sqrt{2g (p_0 - p) v_0} \dots (10).$$

**56. Истеченіе водяного пара изъ отверстія.** Всѣ выводы предыдущаго параграфа могутъ быть примѣнены къ водяному пару, на-



чальная степень сухости котораго заключается въ предѣлахъ отъ 0,7 до 1, если только положить

$$k = 1,035 + 0,1x_0,$$

гдѣ  $x_0$ —начальная степень сухости пара.

Подобно предыдущему, если только дано давленіе въ отверстіи, которое никогда не можетъ быть ниже значенія, опредѣляемаго по форм. (7, § 55), можно найти скорость истечения  $w$  по форм. (5'), расходъ по форм. (6) и удѣльный объемъ по уравненію (3). Но замѣтимъ, что адиабатическое измѣненіе состоянія пара, если только его степень сухости мало отличается отъ единицы, сопровождается его конденсацией, т. е. уменьшеніемъ его степени сухости. Последнюю въ отверстіи можно опредѣлить на основаніи слѣдующихъ соображеній. Если  $s$ —удѣльный объемъ сухого насыщеннаго пара при давленіи  $p$  и  $\sigma$ —удѣльный объемъ воды ( $\sigma=0,001$ ), то удѣльный объемъ смѣси при степени сухости  $x$  будетъ:

$$v = xs + (1-x)\sigma.$$

Если  $x$  мало отличается отъ единицы, (а мы и предполагаемъ такой случай), то съ достаточной точностью можно положить, ибо  $\sigma$ —очень малая величина, что

$$v = xs.$$

Такимъ же образомъ для начального состоянія пара въ сосудѣ получимъ:

$$v_0 = x_0 s_0,$$

откуда

$$\frac{x}{x_0} = \frac{v}{v_0} \frac{s_0}{s} \dots (1).$$

Но для сухого насыщеннаго пара съ большой точностью можно принять, что

$$ps^n = D \dots (2),$$

гдѣ  $n = \frac{33}{31}$  и  $D = 1,7617$ , если только давленіе выражено въ килограммахъ на квадратный сантиметръ. Такимъ образомъ, на основаніи уравненій (1 и 2) и уравненія (3, § 55), легко найдемъ:

$$\frac{x}{x_0} = \left[ \frac{p}{p_0} \right]^{\frac{k-n}{kn}} \dots (3).$$

Отсюда при данныхъ  $p$ ,  $p_0$  и  $x_0$  и можно найти  $x$ .

**57. Насадокъ Лавалья.** Предполагая, что  $x_0 = 1$  и что давление въ отверстіи  $p_1 = p_0 \left[ \frac{2}{k+1} \right]^{\frac{k}{k-1}}$  (уравненіе 7, § 55), можно составить слѣдующую таблицу:

| $p_0$  | $p_1$      | $w_1$      | $H = \frac{w_1^2}{2g}$ |
|--------|------------|------------|------------------------|
| 5 kgr. | 2,887 kgr. | 442,4 mtr. | 9977 kgr. mtr.         |
| 6      | 3,465      | 444,9      | 10088                  |
| 7      | 4,042      | 444,0      | 10182                  |
| 8      | 4,619      | 448,8      | 10265                  |
| 9      | 5,197      | 450,4      | 10339                  |
| 10     | 5,774      | 451,8      | 10405                  |
| 11     | 6,352      | 453,1      | 10465                  |
| 12     | 6,929      | 454,3      | 10521                  |

Здѣсь  $w_1$  есть скорость истеченія при наименьшемъ давленіи въ отверстіи и  $H$ —соотвѣтствующая этой скорости живая сила одного килограмма пара. Отсюда видно, что какъ  $w_1$  такъ  $H$ , не смотря на возрастаніе давленія въ сосудѣ, сохраняютъ почти постоянную величину. Собственно давленіе  $p_1$  и скорость  $w_1$  относятся не къ отверстию, а къ сжатому сѣченію, отстоящему на нѣкоторомъ небольшомъ разстояніи отъ отверстія. Такимъ образомъ, очевидно, что если-бы къ отверстию былъ приставленъ внѣшній насадокъ, имѣющій форму сжатой струи, то обстоятельства истеченія не измѣнились-бы. Отсюда ясно, насколько плохо была-бы использована энергія пара, если-бы онъ подводился къ активной паровой турбинѣ при помощи коническаго сходящагося насадка.

Совсѣмъ иначе будетъ происходить истеченіе, если насадокъ будетъ имѣть видъ, изображенный на фиг. (94). Здѣсь за сужающейся частью, имѣющей форму сжатой струи, слѣдуетъ коническій расходящійся насадокъ. Это и есть насадокъ Лавалья. Оказывается, что при помощи такого насадка всю потенциальную энергію пара можно превратить въ энергію кинетическую. Чтобы уяснить себѣ это, обратимся къ уравненію (6, § 55) и перепишемъ его въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{G}{F} = \mu \sqrt{\frac{k}{k-1} 2g \frac{p_0}{v_0} \left[ \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{2}{k}} - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]} \dots (1).$$

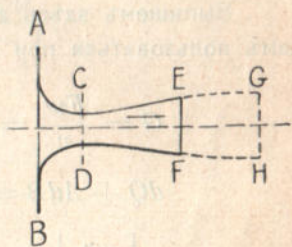


Мы считали раньше переменнѣю величиной въ этомъ уравненіи  $G$ ; но очевидно, мы можемъ, задаваясь  $G$ , считать переменнѣю величиной  $F$ , т. е. площадь поперечныхъ сѣченій насадка въ различныхъ мѣстахъ вдоль по его оси. Отсюда ясно, что наибольшему значенію подкоренной функции, когда (ур. 7, § 55)

$$p = p_1 = p_0 \left[ \frac{2}{k+1} \right]^{\frac{k}{k-1}},$$

соотвѣтствуетъ наименьшее сѣченіе  $CD$  (фиг. 94) насадка. Задаваясь же давленіемъ во внѣшней средѣ, мы легко по уравненію (1) найдемъ величину площади отверстия насадка  $EF$ , а по уравненію (5', § 55) величину скорости истечения изъ него.

Если бы насадокъ былъ продолженъ и расширенъ еще дальше, какъ показано пунктиромъ на фиг. (94), то это имѣло-бы послѣдствіемъ уменьшеніе скорости истечения и увеличеніе степени сухости пара. Дѣйствительно, если въ сѣченіи  $EF$  давленіе равно давленію во внѣшней средѣ, то при теченіи пара отъ сѣченія  $EF$  до сѣченія  $GH$  давленіе это остается неизмѣннымъ, такъ что здѣсь имѣетъ мѣсто измѣненіе состоянія пара при постоянномъ давленіи.



Фиг. 94.

Обозначая скорость и степень сухости пара въ сѣченіи  $EF$  соотвѣтственно черезъ  $w$  и  $x$ , площадь этого сѣченія черезъ  $F$  и тѣ же величины для сѣченія  $GH$ —черезъ  $w_2$ ,  $x_2$  и  $F_2$ , найдемъ, что кинетическая энергія одного килограмма пара въ этихъ двухъ сѣченіяхъ будетъ:

$$H_2 = \frac{w_2^2}{2g} \dots (2) \quad \text{и} \quad H = \frac{w^2}{2g} \dots (3),$$

откуда мы найдемъ, что на рассматриваемомъ пути въ теплоту будетъ преобразовываться энергія, равная въ калоріяхъ  $A(H - H_2)$ . Если  $r$  есть скрытая теплота испаренія, то мы будемъ имѣть слѣдующее равенство:

$$A(H - H_2) = r(x_2 - x) \dots (4),$$

такъ какъ  $H > H_2$ , то, очевидно,  $x_2 > x$ .

Замѣчая, что

$$F_2 w_2 = G v_2 \quad \text{и} \quad F w = G v,$$

принимая во вниманіе ур—іе (1, § 56) и имѣя въ виду, что въ данномъ случаѣ  $s=s_2$ , мы легко найдемъ:

$$\frac{F_2}{F} = \frac{x_2 w}{x w_2} \dots (5).$$

Такимъ образомъ, задаваясь одной изъ трехъ неизвѣстныхъ:  $w_2$ ,  $x_2$  и  $F_2$ , мы, пользуясь уравненіями (2), (3), (4) и (5), найдемъ значенія двухъ другихъ.

**58. Движеніе газа по трубѣ при малой разности давленій на концахъ.** При изслѣдованіи движенія газа по трубѣ, если только труба имѣетъ значительную длину, слѣдуетъ принять во вниманіе вредныя сопротивленія.

Выпишемъ здѣсь для удобства всѣ формулы, которыми мы будемъ пользоваться при дальнѣйшемъ изложеніи.

$$G = \frac{Fw}{v} = const \dots (1).$$

$$dQ + AdB = dU + A p dv \dots (2).$$

$$d \left[ \frac{w^2}{2g} \right] = dh - v dp - dB \dots (3).$$

$$dB = 4b \frac{dx}{D} w^2 \dots (4).$$

$$pv = R (t + 273) \dots (5).$$

$$dU = \frac{A}{k-1} d(pv) \dots (6).$$

Сдѣлаемъ слѣдующія предположенія: 1) труба горизонтальна, т. е.  $dh = 0$  (если бы труба и не была горизонтальна, а немного наклонна, то и въ такомъ случаѣ работой силы тяжести можно было бы пренебречь); 2) теплота не теряется во внѣшнее пространство, т. е.  $dQ = 0$ . Послѣднее допущеніе будетъ вполне правдоподобно, когда труба окружена дурнымъ проводникомъ (зарыта въ землю). При такимъ допущеніяхъ изъ ур—ія (2) мы будемъ имѣть:

$$dB = \frac{dU}{A} + p dv,$$

или, принявъ во вниманіе ур—іе (6),



$$dB = \frac{1}{k-1} d(pv) + pdv,$$

а такъ какъ по формулѣ (5)

$$d(pv) = Rdt,$$

то

$$dB = 4b \frac{dx}{D} w^2 = \frac{Rdt}{k-1} + pdv \dots (7).$$

Подставимъ послѣднее выраженіе для  $dB$  въ ур—іе (3), полагая въ немъ  $d\eta = 0$ ; тогда найдемъ:

$$d \left[ \frac{w^2}{2g} \right] = -vdp - pdv - \frac{Rdt}{k-1}.$$

Отсюда

$$d \left[ \frac{w^2}{2g} \right] + d(pv) + \frac{Rdt}{k-1} = 0.$$

Замѣчая, что  $d(pv) = Rdt$ , получимъ:

$$d \left[ \frac{w^2}{2g} \right] + \frac{k Rdt}{k-1} = 0 \dots (8),$$

откуда, по интеграціи, найдемъ:

$$\frac{w^2 - w_0^2}{2g} + \frac{kR(t - t_0)}{k-1} = 0 \dots (9).$$

гдѣ  $w_0$  и  $t_0$ —обозначаютъ скорость и температуру въ началѣ трубы.

Изъ ур—ія (1) имѣемъ:

$$dv = \frac{Fdw}{G}.$$

Сопоставляя ур—ія (1) и (5), легко найдемъ:

$$p = \frac{R(t+273)}{v} = \frac{R(t+273)}{w} \cdot \frac{G}{F}.$$

Такимъ образомъ:

$$pdv = R(273+t) \frac{dw}{w}.$$

Подставимъ это выраженіе для  $p dv$  въ ур—іе (2):

$$4b \frac{dx}{D} w^2 = \frac{Rdt}{k-1} + R(273+t) \frac{dw}{w} \dots (10).$$

Исключая изъ этого ур—ія съ помощью ур—ій (8 и 9),  $t$  и  $dt$ , получимъ:

$$4b \frac{dx}{D} w^2 = -\frac{wdw}{kg} + \left[ R(273+t_0) + \frac{w_0^2 - w^2}{2g} \frac{k-1}{k} \right] \frac{dw}{w}.$$

Все это ур—іе раздѣлимъ на  $w^2$ , тогда найдемъ:

$$4b \frac{dx}{D} = \left[ R(273+t_0) + \frac{k-1}{k} \frac{w_0^2}{2g} \right] \frac{dw}{w^3} - \frac{k+1}{2gk} \frac{dw}{w}.$$

Интегрируя это ур—іе, получимъ:

$$4b \frac{x}{D} = \frac{1}{2} \left[ R(273+t_0) + \frac{k-1}{k} \frac{w_0^2}{2g} \right] \left[ \frac{1}{w_0^2} - \frac{1}{w^2} \right] - \frac{k+1}{2kg} \lg \frac{w}{w_0}.$$

Умножимъ теперь все это ур—іе на  $4g$  и, кромѣ того, умножимъ и раздѣлимъ первый членъ 2-й части на  $w_0^2$ , тогда получимъ:

$$16gb \frac{x}{D} = \left[ R(273+t_0) \frac{2g}{w_0^2} + \frac{k-1}{k} \right] \left[ 1 - \left( \frac{w_0}{w} \right)^2 \right] + \frac{k+1}{k} \lg \left[ \frac{w_0}{w} \right]^2.$$

Положимъ для сокращенія

$$\left[ 1 - \frac{w_0^2}{w^2} \right] = E$$

и, слѣдовательно:

$$\frac{w_0^2}{w^2} = 1 - E \dots (11);$$

тогда

$$16gb \frac{x}{D} = \left[ R(273+t_0) \frac{2g}{w_0^2} + \frac{k-1}{k} \right] E + \frac{k-1}{k} \lg(1-E) \dots (12).$$



Въ этой формулѣ при практическихъ примѣненіяхъ рекомендуется брать

$$b = 0,00048,$$

хотя изъ многочисленныхъ опытовъ найдено, что въ среднемъ

$$b = 0,00032.$$

Посмотримъ, къ какимъ результатамъ приводятъ выведенныя формулы при обыкновенныхъ, часто встрѣчающихся на практикѣ, значеніяхъ переменныхъ. Положимъ, что намъ даны:  $w_0$ ,  $t_0$ ,  $\frac{x}{D}$ ,  $p_0$  (или  $v_0$ ). Ходъ рѣшенія задачи въ этомъ случаѣ долженъ быть таковъ. Изъ ур—ія (12) опредѣляемъ попытками  $E$ . Обыкновенно величина  $E$  даже при весьма большихъ отношеніяхъ  $\frac{x}{D}$  бываетъ очень мала, т. ч. для перваго приближенія можно положить  $lg(1 - E) = 0$  и, такимъ образомъ, сразу найти значеніе  $E$ , близкое къ истинному. Когда  $E$  найдено, то по уравненію (11), которое можно переписать въ видѣ:

$$w = w_0 \sqrt{\frac{1}{1-E}},$$

найдемъ  $w$ .

Затѣмъ, изъ уравненія (1) найдемъ:

$$\frac{v}{v_0} = \frac{w}{w_0}.$$

откуда

$$v = v_0 \sqrt{\frac{1}{1-E}}.$$

Далѣе изъ ур—ія (9) имѣемъ:

$$\begin{aligned} t &= t_0 - \frac{k-1}{Rk} \frac{w^2 - w_0^2}{2g} = t_0 - \frac{0,41}{R \cdot 1,41 \cdot 2g} \left( \frac{w^2}{w_0^2} - 1 \right) w_0^2 = \\ &= t_0 - \frac{0,41}{R \cdot 1,41 \cdot 2g} \frac{E}{1-E} w_0^2 \end{aligned}$$

и, наконецъ, изъ уравненія (5) найдемъ:

$$p = \frac{R(273 + t)}{v}.$$

1-ый примѣръ. Сухой воздухъ движется въ трубѣ, длина которой въ 5000 разъ болѣе діаметра, причемъ скорость въ началѣ трубы равна 10 метрамъ и температура  $10^{\circ}C$ ; требуется найти температуру въ концѣ трубы и отношеніе  $\frac{p}{p_0}$ , гдѣ  $p_0$ —давленіе въ началѣ трубы и  $p$ —давленіе въ концѣ ея.

Въ этомъ случаѣ мы должны положить:  $\frac{x}{D} = 5000$ ,  $w_0 = 10$  mtr,  $t_0 = 10^{\circ}$ ,  $R = 29,272$  и  $b = 0,00048$ ; тогда форм. (12) намъ дастъ:

$$16,9,81,0,00048,5000 = \left( 29,272,285 \cdot \frac{19,61}{100} + 0,29 \right) E + 1,709 \lg(1-E)$$

или

$$375 = 1625,495 E + 1,709 \lg(1-E).$$

Отсюда послѣдовательнымъ приближеніемъ найдемъ, что

$$E = 0,231.$$

На основаніи этого

$$w = 10 \sqrt{\frac{1}{0,769}} = 11,403,$$

$$t = 10 - 0,0005063 \frac{231}{769} 100 = 9,9848^{\circ}C,$$

$$\frac{v_0}{v} = \sqrt{1-E} = 0,88,$$

и

$$\frac{p}{p_0} = \frac{v_0}{v} \frac{273+t}{273+t_0} = 0,88 \frac{282,9848}{283} = 0,88,$$

откуда

$$\frac{p_0 - p}{p} = 0,14.$$

2-ой примѣръ. Дано:

$$\frac{x}{D} = 3000, w_0 = 5 \text{ mtr}, t_0 = 10^{\circ}.$$

Формула (12) даетъ:

$$225 = 6481E + 1,709 \lg(1-E).$$



Отсюда послѣдовательнымъ приближеніемъ найдемъ:

$$E = 0,035.$$

Такимъ образомъ:

$$w = w_0 \sqrt{\frac{1}{1-0,035}} = 5,18 \text{ mtr.},$$

$$t = 10^0 - 0,0005063 \frac{35}{965} 25 = 9,99955^0 C$$

и

$$\frac{p}{p_0} = \frac{v_0 282,99}{v 283} = \frac{5}{5,18} 0,999 = 0,96.$$

Изъ разсмотрѣнныхъ примѣровъ видно, что 1) скорость газа увеличивается отъ начала къ оконечности, 2) давленіе падаетъ и 3) температура остается почти постоянной. Въ виду этого послѣдняго обстоятельства, которое можно объяснить только тѣмъ, что теплота, развивающаяся отъ тренія, достаточна, чтобы поддержать температуру постоянной, допускаютъ часто для упрощенія задачи, что состояніе газа при движеніи въ изолированной трубѣ измѣняется по изотермѣ. Кромѣ того слѣдуетъ обратить вниманіе на то, что при малой разности давленій на концахъ скорость является уже очень значительной; наоборотъ, при малой скорости пониженіе давленія оказывается очень незначительнымъ.

Выведенными формулами можно пользоваться для расчета воздухопроводовъ и проводовъ для свѣтильнаго газа. Однако же, въ виду сложности этихъ формулъ, чаще въ обыкновенныхъ случаяхъ практики при небольшой разности давленій на концахъ для расчета газопроводовъ пользуются обыкновенной формулой Д. Бернулли, считая газъ несжимаемымъ и пренебрегая работой силы тяжести.

При такихъ допущеніяхъ по теоремѣ Д. Бернулли мы получимъ:

$$\frac{p_0}{\Delta} - \frac{p}{\Delta} = 4b \frac{x}{D} w^2,$$

гдѣ для  $\Delta$  надо принимать нѣкоторое среднее значеніе.

Отсюда мы найдемъ:

$$z = p_0 - p = 4b \frac{x}{D} w^2 \Delta.$$

Но такъ какъ

$$\pi D^2 w = Q,$$

гдѣ  $Q$ —секундный расходъ, то

$$z = 4b \frac{x}{D^5} \frac{Q^2}{\pi^2} \Delta.$$

По опытамъ Ридлера и Гутермута для воздуха можно положить, если за единицу длины принять 1 mtr.,

$$\frac{4b}{\pi^2} = \frac{864}{10^6},$$

т. ч.

$$z = p_0 - p = \frac{864}{10^6} \frac{Q^2 x \Delta}{D^5}.$$

Если выразимъ  $z$  въ атмосферахъ, т. е. въ *kgf.* на 1 кв. сент., то получимъ:

$$z \text{ atm} = \frac{z}{100^2} = \frac{864}{10^{10}} \frac{Q^2 x \Delta}{D^5}.$$

Для  $\Delta$  нужно принимать среднее значеніе вѣса 1 куб. метра въ трубопроводѣ.

При расчетѣ трубопроводовъ для свѣтильнаго газа обыкновенно давленіе измѣряютъ въ миллиметрахъ водяного столба, расходъ въ куб. метрахъ въ часъ и діаметръ трубы въ миллиметрахъ.

Не трудно найти, что 1 mm. водяного столба соотвѣтствуетъ давленію одного *kgf.* на 1 кв. метръ, такъ что это обстоятельство не внесетъ никакого измѣненія въ формулы, ибо давленія  $p_0$  и  $p$  должны быть выражены въ *kgf.* на *mtr.*

Положимъ, что газъ течетъ по трубѣ въ направленіи паденія, величину котораго обозначимъ черезъ  $h$ ; тогда по теоремѣ Д. Бернулли имѣемъ:

$$\frac{p_0}{\Delta} - \frac{p}{\Delta} + h = 4b \frac{x 1000^5}{\pi^2 D^5} \frac{Q^2}{3600^2} = \frac{4b 10^{15}}{10^7 1,296} \frac{x Q^2}{\pi^2 D^5}$$

или

$$z \text{ mm. вод. столба} = \frac{4b 10^8}{\pi^2} \frac{x Q^2}{D^5} \frac{1}{1,296} \Delta - h \Delta.$$



Обозначимъ удѣльный вѣсъ свѣтильнаго газа по отношенію къ воздуху черезъ  $\delta$ ; тогда  $\Delta = 1,293\delta$  и

$$z = 4b10^7 \frac{xQ^2}{D} \delta - h\Delta.$$

Въ среднемъ принимаютъ:

$$4b10^7 = 225500, \quad \delta = 0,4, \quad \Delta = 0,5 \text{ kgr.}$$

и

$$\Delta h = 0,5h \frac{\text{kgr}}{\text{mtr}^2} = 0,5h \text{ мм. вод. ст.,}$$

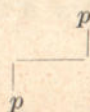
если  $h$  выражено въ mtr., т. ч.

$$z = 225500 \frac{xQ^2}{D^5} 0,4 - 0,5h.$$

## Замѣченные опечатки.

| Стр. |  | Напечатано.  | Слѣдуетъ читать.   |
|------|--|--|--|
| 6    | ур—іе (2)  | $X\rho dsdx$   | $X\rho dx.$  |
| 16   | ур—іе (3)  | $\frac{p_2}{p_1}$  | $\frac{p_1}{p_2}$  |
| "    | строка 14  | $k = \frac{1}{67,4(273^0 + t^0)}$  | $k = \frac{1}{287,1(273^0 + t^0)}$   |
| "    | ур—іе (4)  | $lg_{10} \frac{p_2}{p_1}$  | $lg_{10} \frac{p_1}{p_2}$  |
| 17   | ур—іе (6)  | $lg_{10} \frac{h_2}{h_1}$  | $lg_{10} \frac{h_1}{h_2}$  |
| 19   | строка 4 снизу                                     | него   | нея.   |
| 20   | ур—іе (16)   | $\frac{h^3 h}{12h^2}$  | $\frac{2h^3}{12h^2}$   |
| 26   | строка 20  | $P_1$  | $R_1.$   |
| 29   | " 6  | $-\int_{ABD} x d\sigma d\theta$  | $-\int_{ABD} x d\sigma d\varphi.$  |
| 35   | ур—іе (15)   | $\frac{I_0 \eta^2 - \Delta uv}{M_0} Sn \eta t$   | $\frac{M_0}{I_0 \eta^2 - \Delta uv} Sn \eta t.$                                      |
| 40   | ур—іе (6)  | $\omega_2 v_2 \Delta dt (z_2 - z_1)$   | $\omega_2 v_2 \Delta dt (z_1 - z_2).$  |
| 45   | ур—іе (1)  | $\omega_1 p_1 dt - \omega_2 \Delta (z - z_1)$  | $\omega_2 p_1 dt - \omega_2 \Delta (z - z_1) dt.$                                    |
| 47   | ур—іе (1)  | $\frac{\omega_1 v_1 \Delta}{g} dt \Omega^2 \left( \frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} \right)$ | $\frac{\omega_1 v_1 \Delta}{g} dt \left( \frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} \right).$ |
| 54   | строка 9 снизу                                     | $l < 3a$   | $l > 3a.$  |
| 55   | ур—іе (3)  | $1 - \left( \frac{\omega}{\omega_1} - 1 \right)^2$   | $1 + \left( \frac{\omega}{\omega_1} - 1 \right)^2.$                                  |
| 60   | ур—іе (3)  | $\frac{bdz}{\sqrt{2gz}}$   | $bdz \sqrt{2gz}.$  |
| 61   | вмѣсто угла $\varphi$ вездѣ должно быть $\alpha$ . |  |  |
| 63   | ур—іе (1)  | $k^{2/3}$  | $k^{3/2}.$   |
| 66   | ур—іе (4)  | $\Omega dt$  | $\Omega dz.$   |
| 67   | строка 15  | $\frac{\Omega}{\mu \omega \sqrt{2g}} h$  | $\frac{\Omega}{\mu \omega \sqrt{2g}} \sqrt{h}.$                                      |
| 69   | стр. 1 снизу                                       | слово „сжатіе“ излишне.  |  |
| 83   | ур—іе (2)  | $\frac{2\pi dv}{\rho d\rho}$   | $\frac{2\pi dv}{\rho d\rho} \eta.$   |
| 103  | ур—іе (4)  | $\frac{p_0}{\Delta} - \frac{p_0}{\Delta}$  | $\frac{p}{\Delta} - \frac{p_0}{\Delta}.$   |

Черт. 19 силы  $p$  и  $p$  должны быть расположены такъ:





# ТАБЛИЦА I-ая.

(Стр. 139).

| $\frac{1}{u}$ | u    | $\Psi'(u)$ | $\frac{1}{u}$ | u    | $\Psi'(u)$ |
|---------------|------|------------|---------------|------|------------|
| 1,00          | 1,00 | $\infty$   | 0,83          | 1,20 | 0,479      |
| 0,99          | 1,01 | 1,416      | 0,82          | 1,22 | 0,454      |
| 0,98          | 1,02 | 1,191      | 0,80          | 1,25 | 0,420      |
| 0,97          | 1,03 | 1,060      | 0,77          | 1,30 | 0,373      |
| 0,96          | 1,04 | 0,970      | 0,74          | 1,35 | 0,335      |
| 0,95          | 1,05 | 0,895      | 0,71          | 1,40 | 0,304      |
| 0,94          | 1,06 | 0,838      | 0,69          | 1,45 | 0,277      |
| 0,93          | 1,07 | 0,783      | 0,67          | 1,50 | 0,257      |
| 0,93          | 1,08 | 0,749      | 0,62          | 1,60 | 0,218      |
| 0,92          | 1,09 | 0,712      | 0,59          | 1,70 | 0,190      |
| 0,91          | 1,10 | 0,676      | 0,56          | 1,80 | 0,166      |
| 0,90          | 1,11 | 0,651      | 0,53          | 1,90 | 0,146      |
| 0,89          | 1,12 | 0,626      | 0,50          | 2,00 | 0,132      |
| 0,88          | 1,13 | 0,602      | 0,44          | 2,25 | 0,102      |
| 0,88          | 1,14 | 0,580      | 0,40          | 2,50 | 0,085      |
| 0,87          | 1,15 | 0,561      | 0,33          | 3,00 | 0,055      |
| 0,86          | 1,16 | 0,541      | 0,29          | 3,50 | 0,041      |
| 0,85          | 1,17 | 0,525      | 0,25          | 4,50 | 0,031      |
| 0,85          | 1,18 | 0,509      | 0,20          | 5,00 | 0,020      |
| 0,84          | 1,19 | 0,493      |               |      |            |

## ТАБЛИЦА II-ая.

Расходъ черезъ шлюзъ (фиг. 82, стр. 145).

| Напоръ<br>h<br>мм. | Рас-<br>ходъ<br>Q<br>на 1 mtr.<br>ши-<br>рины. | Напоръ<br>h<br>мм. | Рас-<br>ходъ<br>Q<br>на 1 mtr.<br>ши-<br>рины. | Напоръ<br>h<br>мм. | Рас-<br>ходъ<br>Q<br>на 1 mtr.<br>ши-<br>рины. | Напоръ<br>h<br>мм. | Рас-<br>ходъ<br>Q<br>на 1 mtr.<br>ши-<br>рины. | Напоръ<br>h<br>мм. | Рас-<br>ходъ<br>Q<br>на 1 mtr.<br>ши-<br>рины. |
|--------------------|--|--------------------|--|--------------------|--|--------------------|--|--------------------|--|
| 220                | 1390   | 380                | 1838   | 775                | 2624   | 1200               | 3266   | 1625               | 3801   |
| 225                | 1415   | 390                | 1863   | 800                | 2666   | 1225               | 3300   | 1650               | 3829   |
| 230                | 1429   | 400                | 1886   | 825                | 2708   | 1250               | 3333   | 1675               | 3859   |
| 240                | 1461   | 425                | 1944   | 850                | 2749   | 1275               | 3367   | 1700               | 3887   |
| 250                | 1491   | 450                | 2000   | 875                | 2789   | 1300               | 3400   | 1725               | 3916   |
| 260                | 1521   | 475                | 2055   | 900                | 2828   | 1325               | 3432   | 1750               | 3944   |
| 270                | 1549   | 500                | 2108   | 925                | 2867   | 1350               | 3464   | 1775               | 3973   |
| 280                | 1578   | 525                | 2160   | 950                | 2906   | 1375               | 3497   | 1800               | 4000   |
| 290                | 1605   | 550                | 2211   | 975                | 2944   | 1400               | 3528   | 1825               | 4028   |
| 300                | 1633   | 575                | 2261   | 1000               | 2981   | 1425               | 3559   | 1850               | 4056   |
| 310                | 1661   | 600                | 2309   | 1025               | 3018   | 1450               | 3590   | 1875               | 4083   |
| 320                | 1687   | 635                | 2357   | 1050               | 3055   | 1475               | 3621   | 1900               | 4110   |
| 330                | 1713   | 650                | 2404   | 1075               | 3092   | 1500               | 3652   | 1925               | 4137   |
| 340                | 1738   | 675                | 2450   | 1100               | 3127   | 1525               | 3682   | 1950               | 4164   |
| 350                | 1764   | 700                | 2495   | 1125               | 3163   | 1550               | 3712   | 1975               | 4190   |
| 360                | 1789   | 725                | 2525   | 1150               | 3198   | 1575               | 3741   | 2000               | 4217   |
| 370                | 1814   | 750                | 2583   | 1175               | 3232   | 1600               | 3771   |                    |  |

Для получения расхода въ литрахъ табличную величину надо умножить на ширину и высоту отверстия въ метрахъ.



### ТАБЛИЦА III-ья.

Расходъ черезъ водосливъ съ боковымъ сжатіемъ (фиг. 83, стр. 146).

| Напоръ<br>h<br>мм. | Расходъ<br>Q<br>на 1 mtr.<br>ширины. | Напоръ<br>h<br>мм. | Расходъ<br>Q<br>на 1 mtr.<br>ширины. | Напоръ<br>h<br>мм. | Расходъ<br>Q<br>на 1 mtr.<br>ширины. | Напоръ<br>h<br>мм. | Расходъ<br>Q<br>на 1 mtr.<br>ширины. | Напоръ<br>h<br>мм. | Расходъ<br>Q<br>на 1 mtr.<br>ширины. |
|--------------------|--------------------------------------|--------------------|--------------------------------------|--------------------|--------------------------------------|--------------------|--------------------------------------|--------------------|--------------------------------------|
| 10                 | 2,01                                 | 44                 | 17,8                                 | 78                 | 41,0                                 | 130                | 86,8                                 | 230                | 200                                  |
| 12                 | 2,63                                 | 46                 | 19,0                                 | 80                 | 42,5                                 | 135                | 91,6                                 | 240                | 213                                  |
| 14                 | 3,30                                 | 48                 | 20,2                                 | 82                 | 44,1                                 | 140                | 96,8                                 | 250                | 226                                  |
| 16                 | 4,03                                 | 50                 | 21,4                                 | 84                 | 45,6                                 | 145                | 102                                  | 260                | 240                                  |
| 18                 | 4,78                                 | 52                 | 22,7                                 | 86                 | 47,3                                 | 150                | 107                                  | 270                | 253                                  |
| 20                 | 5,59                                 | 54                 | 23,9                                 | 88                 | 48,8                                 | 155                | 112                                  | 280                | 268                                  |
| 22                 | 6,43                                 | 56                 | 25,2                                 | 90                 | 50,5                                 | 160                | 118                                  | 290                | 281                                  |
| 24                 | 7,31                                 | 58                 | 26,6                                 | 92                 | 52,2                                 | 165                | 123                                  | 300                | 296                                  |
| 26                 | 8,21                                 | 60                 | 27,9                                 | 94                 | 53,9                                 | 170                | 129                                  | 310                | 311                                  |
| 28                 | 6,15                                 | 62                 | 29,3                                 | 96                 | 55,5                                 | 175                | 134                                  | 320                | 326                                  |
| 30                 | 10,1                                 | 64                 | 30,7                                 | 98                 | 57,2                                 | 180                | 140                                  | 330                | 341                                  |
| 32                 | 11,1                                 | 66                 | 32,1                                 | 100                | 59,0                                 | 185                | 145                                  | 340                | 357                                  |
| 34                 | 12,2                                 | 68                 | 33,5                                 | 105                | 63,3                                 | 190                | 151                                  | 350                | 373                                  |
| 36                 | 13,3                                 | 70                 | 35,0                                 | 110                | 67,9                                 | 195                | 157                                  | 360                | 389                                  |
| 38                 | 14,3                                 | 72                 | 36,5                                 | 115                | 72,4                                 | 200                | 163                                  | 370                | 405                                  |
| 40                 | 15,5                                 | 74                 | 37,9                                 | 120                | 77,2                                 | 210                | 175                                  | 380                | 422                                  |
| 42                 | 16,6                                 | 76                 | 39,5                                 | 125                | 81,8                                 | 220                | 187                                  | 390<br>400         | 439<br>456                           |

Расходъ въ литрахъ.

## ТАБЛИЦА IV-ая.

Расходъ черезъ водосливъ безъ бокового сжатія (стр. 146).

| Напоръ<br>h<br>мм. | Рас-<br>ходъ<br>Q<br>на 1 mtr.<br>шири-<br>ны. | Напоръ<br>h<br>мм. | Рас-<br>ходъ<br>Q<br>на 1 mtr.<br>шири-<br>ны. | Напоръ<br>h<br>мм. | Рас-<br>ходъ<br>Q<br>на 1 mtr.<br>шири-<br>ны. | Напоръ<br>h<br>мм. | Рас-<br>ходъ<br>Q<br>на 1 mtr.<br>шири-<br>ны. | Напоръ<br>h<br>мм. | Рас-<br>ходъ<br>Q<br>на 1 mtr.<br>шири-<br>ны. |
|--------------------|--|--------------------|--|--------------------|--|--------------------|--|--------------------|--|
| 50                 | 20,3   | 84                 | 44,7   | 145                | 103  | 230                | 209  | 330                | 371  |
| 52                 | 21,5   | 86                 | 46,4   | 150                | 108  | 235                | 216  | 340                | 389  |
| 54                 | 22,8   | 88                 | 48,0   | 155                | 114  | 240                | 224  | 350                | 408  |
| 56                 | 24,1   | 90                 | 49,7   | 160                | 119  | 245                | 231  | 360                | 427  |
| 58                 | 25,4   | 92                 | 51,4   | 165                | 125  | 250                | 238  | 370                | 446  |
| 60                 | 26,8   | 94                 | 53,1   | 170                | 131  | 255                | 246  | 380                | 466  |
| 62                 | 28,2   | 96                 | 54,8   | 175                | 137  | 260                | 254  | 390                | 486  |
| 64                 | 29,6   | 98                 | 56,5   | 180                | 143  | 265                | 261  | 400                | 507  |
| 66                 | 31,0   | 100                | 58,3   | 185                | 149  | 270                | 269  |                    |  |
| 68                 | 32,4   | 105                | 62,8   | 190                | 156  | 275                | 277  |                    |  |
| 70                 | 33,9   | 110                | 67,4   | 195                | 162  | 280                | 285  |                    |  |
| 72                 | 35,4   | 115                | 72,1   | 200                | 168  | 285                | 293  |                    |  |
| 74                 | 36,9   | 120                | 76,9   | 205                | 175  | 290                | 301  |                    |  |
| 76                 | 38,4   | 125                | 81,8   | 210                | 182  | 295                | 310  |                    |  |
| 78                 | 40,0   | 130                | 86,9   | 215                | 188  | 300                | 318  |                    |  |
| 80                 | 41,6   | 135                | 92,0   | 220                | 195  | 310                | 335  |                    |  |
| 82                 | 43,1   | 140                | 97,3   | 225                | 202  | 320                | 353  |                    |  |

Расходъ въ литрахъ.



# Оглавленіе.

## Введеніе.

| §§                       | Стр. |
|--------------------------|------|
| 1. Гидравлика . . . . .  | 1    |
| 2. Жидкія тѣла . . . . . | 2    |

## Глава 1-я.

### Равновѣсіе жидкихъ тѣлъ.

|  |    |
|--|----|
| 3. Гидростатическое давленіе и его свойства . . . . .  | 5  |
| 4. Уравненія движенія . . . . .  | 7  |
| 5. Поверхность уровня . . . . .  | 8  |
| 6. Равновѣсіе капельной жидкости подѣ дѣйствиємъ силы тяжести . . . . .  | 11 |
| 7. Относительное равновѣсіе капельной жидкости, находящейся подѣ дѣйствиємъ силы тяжести . . . . .                       | 12 |
| 8. Равновѣсіе газообразныхъ жидкостей, находящихся подѣ дѣйствиємъ силы тяжести. Барометрическое нивелированіе . . . . . | 15 |
| 9. Давленіе тяжелой капельной жидкости на плоскую стѣнку сосуда . . . . .  | 17 |
| 10. Давленіе тяжелой капельной жидкости на стѣнку цилиндрическаго сосуда съ горизонтальной образующей . . . . .          | 20 |
| 11. Давленіе на криволинейную стѣнку по данному направленію . . . . .  | 21 |
| 12. Законъ Архимеда . . . . .  | 23 |
| 13. Равновѣсіе погруженнаго тѣла . . . . .   | 26 |
| 14. Равновѣсіе плавающихъ тѣлъ . . . . .   | 27 |
| 15. Малыя колебанія плавающего тѣла около положенія устойчиваго равновѣсія . . . . .                                     | 32 |

## Глава 2-я.

## Движеніе капельныхъ жидкостей.

## ОТДѢЛЪ 1-й

## Уравненія движенія.

| §§   | Стр. |
|--|------|
| 16. Основныя уравненія движенія и ихъ простѣйшіе интегралы . . . | 36   |
| 17. Уравненіе Д. Бернулли . . . . .                              | 38   |
| 18. Теорема Борда . . . . .                                      | 44   |
| 19. Уравненіе Бернулли для относительнаго движенія . . . . .     | 47   |

## ОТДѢЛЪ 2-й.

## Истеченіе изъ отверстій.

|  |    |
|--|----|
| 20. Истеченіе изъ отверстій въ тонкой стѣнкѣ . . . . .         | 49 |
| 21. Насадокъ Вентури . . . . .                                 | 54 |
| 22. Коническіе насадки . . . . .                               | 56 |
| 23. Истеченіе изъ отверстія въ тонкой стѣнкѣ въ жидкость . . . | 58 |
| 24. Истеченіе изъ отверстій конечныхъ размѣровъ . . . . .      | 61 |
| 25. Водосливы въ тонкой стѣнкѣ . . . . .                       | 62 |
| 26. Водосливы въ толстой стѣнкѣ . . . . .                      | 63 |
| 27. Вытеканіе жидкости изъ отверстій при переменномъ уровнѣ .  | 65 |
| 28. Сжатіе неполное и несовершенное . . . . .                  | 69 |
| 29. Протеканіе воды черезъ шлюзные камеры . . . . .            | 71 |
| 30. Разсчетъ отверстія трубы . . . . .                         | 77 |
| 31. Разсчетъ отверстія моста . . . . .                         | 79 |

## ОТДѢЛЪ 3-й.

## Движеніе въ трубахъ.

|   |    |
|---|----|
| 32. Внутреннее треніе жидкостей . . . . . | 82 |
| 33. Формула Пуазейля . . . . .            | 83 |
| 34. Задача Буссинеска . . . . .           | 86 |



### III.

| §§   | Стр. |
|--|------|
| 35. Сопротивленія при движеніи въ трубахъ . . . . .                            | 87   |
| 36. Водопроводъ съ постояннымъ діаметромъ и постояннымъ<br>расходомъ . . . . . | 95   |
| 37. Фонтанъ . . . . .  | 101  |
| 38. Водопроводъ съ постояннымъ діаметромъ и переменнымъ<br>расходомъ . . . . . | 102  |
| 39. Случай трубы, питающейся съ двухъ сторонъ . . . . .                        | 105  |
| 40. Водопроводъ съ постояннымъ расходомъ и переменнымъ<br>діаметромъ . . . . . | 108  |
| 41. Водопроводъ съ тремя резервуарами . . . . .                                | 110  |

#### ОТДѢЛЪ 4-й.

##### Равномѣрное движеніе воды въ рѣкахъ и каналахъ

|   |     |
|---|-----|
| 42. Основное уравненіе равномѣрнаго установившагося движе-<br>нія въ каналахъ; вредныя потери . . . . . | 112 |
| 43. Задача о наименьшемъ уклонѣ . . . . .   | 117 |
| 44. Задача о постоянной скорости . . . . .  | 120 |

#### ОТДѢЛЪ 5-й.

##### Неравномѣрное установившееся движеніе воды въ рѣкахъ и каналахъ.

|   |     |
|---|-----|
| 45. Дифференціальное уравненіе неравномѣрно установившагося<br>движенія . . . . .               | 124 |
| 46. Случай рѣки постоянной ширины и незначительной по<br>сравненію съ шириной глубины . . . . . | 129 |
| 47. Прыжокъ воды . . . . .  | 133 |
| 48. Уравненіе профиля подпруженной воды . . . . .   | 137 |
| 49. Плотины . . . . .   | 141 |

#### ОТДѢЛЪ 6-й.

##### Опредѣленіе расхода и средней скорости.

|  |     |
|--|-----|
| 50. Непосредственное опредѣленіе расхода . . . . .             | 145 |
| 51. Измѣреніе расхода черезъ посредство измѣренія скорости . . | 147 |

## IV.

### ОТДѢЛЪ 7-й.

#### Движеніе грунтовыхъ водъ.

| §§  | Стр. |
|---|------|
| 52. Основное уравненіе движенія; кривая депрессіи . . . . . | 154  |
| 53. Расходъ обыкновеннаго колодца . . . . .                 | 156  |

### Глава 3-я.

#### Движеніе газообразныхъ жидкостей.

|  |     |
|--|-----|
| 54. Уравненіе установившагося движенія . . . . .                               | 158 |
| 55. Истеченіе газа изъ отверстія . . . . .                                     | 163 |
| 56. Истеченіе водяного пара изъ отверстія . . . . .                            | 168 |
| 57. Насадокъ Лавала . . . . .  | 170 |
| 58. Движеніе газа по трубѣ при малой разности давленій на<br>концахъ . . . . . | 172 |
| Таблицы . . . . .  | 181 |



## ВСТУПЛЕНІЕ.

**I. Прикладная механика.** Существует мнѣніе, которое поддерживается главнымъ образомъ представителями чистой науки, что прикладная механика есть просто собраніе практическихъ задачъ, не объединенныхъ общей идеей и общей цѣлью. Такой взглядъ не только не вѣренъ, но и вреденъ. Въдѣ только при точномъ ограниченіи области науки и правильной постановкѣ ея вопросовъ возможно правильное ея развитіе.

Для выясненія надлежащаго взгляда на прикладную механику обратимся къ авторамъ, посвятившимъ не мало времени и силъ на изслѣдованіе ея вопросовъ.

Во вступленіи къ своему курсу „mécanique et machines“ \*) Воуг устанавливаетъ въ общихъ чертахъ такой взглядъ на прикладную механику. Послѣ разрѣшенія съ большой точностью вопросовъ небесной механики, раціональная механика обратилась къ изслѣдованію другихъ системъ (тѣла твердыя, жидкія и газообразныя), гдѣ мириады маленькихъ частицъ, дѣйствуя другъ на друга на разстояніяхъ, которыя не поддаются никакому измѣренію, ставятъ изслѣдователямъ задачу гораздо болѣе сложную, чѣмъ изслѣдованіе движенія отдѣльныхъ небесныхъ тѣлъ.

Въ виду указанной сложности, вопросъ о движеніи этихъ системъ во многихъ случаяхъ не удается разрѣшить со всей строгостью математики. Но прогрессъ идетъ своей дорогой: каждый день появляются новыя изобрѣтенія, сооружаются огромныя машины, учреждаются гигантскія мануфактуры; естественно, что наука должна до нѣкоторой степени удовлетворять запросамъ практики и придти на помощь промышленности, чтобы дать по крайней мѣрѣ какія-нибудь руково-

\*) Томъ I, стр. 13 и 14.

дѣшія идеи въ рѣшеніи очень сложныхъ вопросовъ, съ которыми приходится здѣсь встрѣчаться. Такимъ образомъ, благодаря трудамъ Navier, Poncelet и Coriolis'a, создается приближительная, временная наука, именуемая прикладной механикой въ противоположность механикѣ рациональной.

Подобнаго же взгляда придерживается Förpl.\*) „Основаніе отдѣленія технической механики, говоритъ онъ, какъ особой отрасли знанія, заключается въ томъ, что механика не въ состояніи еще разрѣшить со всей точностью многихъ вопросовъ, подлежащихъ ея вѣдѣнію. Отношеніе техника и натуралиста къ такимъ вопросамъ различно. Послѣдній, конечно, желаетъ освѣтить темный вопросъ, но онъ не спѣшитъ съ этимъ и откладываетъ до того времени, когда онъ будетъ имѣть возможность разрѣшить его съ надлежащей точностью. Напротивъ того, техникъ подъ давленіемъ необходимости долженъ безъ промедленія приниматься за дѣло и какъ бы то ни было разрѣшить тотъ вопросъ, который стоитъ на его пути“.

Нельзя не согласиться, что въ этихъ взглядахъ заключается большая доля истины. Дѣйствительно, существованіе многихъ отдѣловъ прикладной механики, какъ напримѣръ, отдѣла о вредныхъ сопротивленіяхъ, о движеніи воды въ трубахъ и каналахъ и т. п. можно объяснить только такъ, какъ это объясняется цитированными выше авторами. Но съ другой стороны оба эти взгляда, если на нихъ смотрѣть какъ на опредѣленія, не могутъ быть признаны истинными. Въ самомъ дѣлѣ, наука опредѣляется вѣдь не только точностью методовъ изслѣдованія, тѣмъ болѣе что въ прикладной механикѣ неточность допускается иногда умышленно, какъ напримѣръ, при расчетѣ маховыхъ колесъ,—а главнымъ образомъ областью и цѣлью изслѣдованія. Методы и точность изслѣдованія измѣняются вмѣстѣ съ развитіемъ науки, цѣль же и область изслѣдованія имѣютъ, если не вѣчное, то во всякомъ случаѣ продолжительное значеніе.

Reuleaux, который удѣляетъ много мѣста этому вопросу въ своей *Theoretische Kinematik*,\*\*) находитъ совершенно неправильнымъ отказывать прикладной механ. въ самостоятельности. По его мнѣнію область изслѣдованія прикладной

\*) Vorlesung über technische Mechanik. Leipzig. 1898 г. т. I стр. 11.

\*\*) Т. I, гл. 1-ая и 2-ая.



механики составляет машинная система и цѣль изслѣдованія—причинная зависимость явленій въ этой системѣ. Съ этой точки зрѣнія прикладная механика является столь же самостоятельной, какъ и небесная механика, которая изслѣдуетъ законы движенія системы небесныхъ тѣлъ, или физика, задачу которой составляетъ изслѣдованіе молекулярныхъ движеній. По отношенію ко всѣмъ этимъ наукамъ рациональная механика занимаетъ совершенно одинаковое положеніе. Это наука по преимуществу методологическая: она вырабатываетъ методы изслѣдованія движенія различныхъ системъ.

Но и со взглядомъ Reuleaux нельзя вполне согласиться, такъ какъ онъ значительно суживаетъ и цѣль, и область изслѣдованія прикладной механики.

Машинная система есть созданіе человѣческаго генія и странно было бы предполагать, что система эта сама въ себѣ заключаетъ конечную цѣль своего созданія. Правда, Reuleaux старается разыскать машинную систему въ скелетахъ животныхъ, но „эти изысканія, говоритъ проф. В. Л. Кирпичевъ,\*) производятъ впечатлѣніе сухой, бесплодной схоластики. Совершенно ясно, несмотря ни на какія натяжки, что природа не знаетъ кинематики Reuleaux: достаточно обратить вниманіе на то, что въ природѣ нѣтъ непрерывнаго вращательнаго движенія,—а это главное движеніе машинъ, чаще всего въ нихъ встрѣчающееся, которымъ мы стремимся замѣнить всѣ другія движенія на нашихъ фабрикахъ и заводахъ“. Но если машинная система не является цѣлью самой въ себѣ, то, очевидно, она должна быть результатомъ той цѣли, которой она удовлетворяетъ. Цѣль же машины заключается въ преобразованіи энергіи естественныхъ источниковъ въ работу, нужную для человѣка. Иными словами, при помощи машины человѣкъ заставляетъ силы природы совершать ту работу, которая ему не подъ силу ни по качеству, ни по количеству.

Чтобы убѣдиться въ томъ, что машины служатъ указанной цѣли, стоитъ только прогуляться по двумъ тремъ промышленнымъ заведеніямъ и присмотрѣться къ тому, что тамъ происходитъ. Если мы зайдемъ на паровую прядильную фабрику, то увидимъ, какъ на цѣломъ рядѣ станковъ рыхлая ват-

\*) Значеніе фантазій для инженеровъ.

ная лента превращается въ очень крѣпкую и тонкую нить, и несомнѣнно обратимъ вниманіе на то, что всѣ эти станки приводятся въ движеніе упругостью пара въ паровой машинѣ. Здѣсь, стало быть, мы имѣемъ случай преобразования тепловой энергіи въ работу вытягиванія и закручиванія нити. На водяной мельницѣ энергія падающей воды преобразуется въ работу размалыванія зерна и т. д.

Изъ предыдущаго ясно, что взглядъ Reuleaux на машинную систему, какъ на явленіе природы, изученіе котораго потребовало созданія особой науки, является совершенно фантастическимъ. Да и фактически его опредѣленіе не исчерпываетъ содержанія прикладной механики.

Въ прикладной механикѣ, кромѣ изученія машинной системы, удѣляется значительное мѣсто изученію природы источниковъ энергіи, т. е. изученію свойствъ тѣлъ, которые являются носителями этой энергіи и посредниками передачи ея въ машинахъ. Да это и понятно, ибо этими свойствами опредѣляется форма и движеніе органовъ ея, непосредственно воспринимающихъ эту энергію, а затѣмъ и весь ея механизмъ. Такъ напримѣръ, термодинамика тщательно изучаетъ различныя тѣла со стороны ихъ способности воспринимать и передавать тепловую энергію, въ гидравликѣ изслѣдуются свойства жидкихъ тѣлъ, которые чаще всего являются носителями внѣшней потенциальной и внѣшней кинетической энергіи и т. д. Несомнѣнно, что вотъ эта часть прикладной механики, гдѣ изучаются источники энергіи и является наиболѣе существенной, тогда какъ тѣ отдѣлы, гдѣ изучается машинная система, имѣютъ лишь вспомогательное, второстепенное значеніе. Отсюда, принимая во вниманіе ту цѣль, которой служатъ машины, мы можемъ дать прикладной механикѣ слѣдующее опредѣленіе.

Прикладная механика есть наука о способахъ преобразованія энергіи, доставляемой естественными источниками въ работу нужную человѣку для какихъ-либо производительныхъ или просто культурныхъ цѣлей.

Такъ какъ это преобразование энергіи производится при помощи сооружений, называемыхъ машинами, то названіе прикладная механика можно замѣнить названіемъ теорія машинъ. Это послѣднее названіе, котораго придерживается



большинство нѣмецкихъ авторовъ, гораздо болѣе соотвѣтствуетъ сути дѣла, чѣмъ первое.

Но названіе теорія машинъ надо понимать, какъ ясно изъ предыдущего, въ болѣе широкомъ смыслѣ, чѣмъ его понимаетъ Reuleaux. Онъ отрицаетъ за машиной цѣль, а признаетъ лишь только особую машинную систему, изученіе свойствъ которой, по его мнѣнію, и составляетъ предметъ прикладной механики.

Мы уже говорили выше, почему съ такимъ взглядомъ нельзя согласиться. Машинная система не является цѣлью въ самой себѣ, а есть результатъ другой цѣли,—цѣли использования энергіи, доставляемой естественными источниками; и это доказываетъ лучше всего никто иной, какъ самъ Reuleaux. Машинная система характеризуется тѣмъ, какъ мы увидимъ изъ послѣдующаго изложенія, что для всякой ея точки возможно единственное, вполнѣ опредѣленное, какъ говоритъ Reuleaux, принужденное движеніе; и это свойство ея есть простой результатъ той цѣли, которой она служитъ. Reuleaux говоритъ: \*) „космическая свобода явленій природы приведена въ машинѣ въ такой порядокъ, котораго не въ состояніи поколебать никакая внѣшняя сила“.

Дѣйствительно, заставляя работать на себя свободныя силы природы, мы должны самымъ устройствомъ машины точно опредѣлить имъ границы ихъ дѣйствія, чѣмъ и объясняется созданіе машинной системы съ опредѣленнымъ, единственно возможнымъ движеніемъ всѣхъ ея частей.

Но мы до сихъ поръ выясняли только область изслѣдованія прикладной механики и не касались еще вопроса о той цѣли, которую она преслѣдуетъ.

Мы говорили выше, что прикладная механика удѣляетъ много мѣста изученію свойствъ тѣлъ, которыя являются чаще всего носителями той или иной энергіи. Такое изученіе необходимо, въ виду желанія получить изъ даннаго, располагаемаго запаса энергіи, наибольшую возможную работу. На первый взглядъ такое желаніе можетъ показаться страннымъ, въ виду того, что, какъ извѣстно, энергія не исчезаетъ, а только преобразуется, принимаетъ другую форму. Но дѣло въ томъ, что въ прикладной механикѣ за энергію, какъ таковую, принимаетъ

---

\*) Theorethische Kinematik, стр. 37-ая.

ся лишь та энергія, которую можно непосредственно обратить въ работу, а для этого требуется, чтобы энергія обладала извѣстнымъ напряженіемъ. Пояснимъ это на простомъ примѣрѣ. Пусть въ нашемъ распоряженіи имѣются два водопада: въ одномъ 200 kgr. воды въ секунду падаютъ съ высоты 10 mtr., а въ другомъ 20000 kgr. воды въ секунду падаютъ съ высоты 0,1 mtr. И въ томъ и другомъ случаѣ мы располагаемъ однимъ и тѣмъ же запасомъ энергіи въ 2000 kgr. mtr. въ секунду; но въ первомъ случаѣ, благодаря значительной высотѣ паденія, мы можемъ до 80% энергіи использовать для нужной намъ работы, а во второмъ случаѣ мы едва ли сумѣемъ использовать и 10%.

Вся неиспользованная нами часть энергіи не пропадетъ, но приметъ такую форму и будетъ обладать столь малымъ напряженіемъ, что ея использование окажется совершенно невозможнымъ и потому съ точки зрѣнія прикладной механики будетъ считаться совершенно потерянной. Слѣдовательно, для того чтобы энергія, доставляемая естественными источниками, могла быть использована для техническихъ цѣлей, она должна обладать извѣстнымъ напряженіемъ. Такъ какъ запасы такой энергіи сравнительно не такъ значительны, то отсюда и понятно стремленіе изыскать способъ использования возможно большей части этой энергіи.

Такимъ образомъ, главная цѣль прикладной механики заключается въ выясненіи тѣхъ условій, при наличности которыхъ изъ даннаго и удобнаго для пользованія запаса энергіи можно извлечь наибольшую работу.

Кромѣ этой главной цѣли прикладная механика имѣетъ и другія не столь важныя задачи, какъ на примѣръ, прочность частей машины при наименьшей затратѣ матеріала, простоту устройства и т. п.

И такъ, все вышеизложенное приводитъ насъ къ заключенію, что прикладная механика имѣетъ и свою собственную область и свою собственную цѣль изслѣдованія, и потому нельзя не согласиться съ Reuleaux, который говоритъ:\*) „я называю ее (прикладную механику) наукой и не думаю, чтобы это было слишкомъ большою претензіей съ моей стороны; если

\*) Theoretische Kinematik, стр. 39, Braunschweig 1875.



угодно, называйте ее наукой второго или третьего порядка; она пользуется в своей области изслѣдованія научнымъ методомъ и мало по малу завоевываетъ свою самостоятельность, которая сдѣлала необходимымъ ея отдѣленіе (отъ другихъ наукъ)“.

Что необходимость такого отдѣленія области прикладной механики отъ области другихъ физико-механическихъ наукъ чувствовалась очень давно, можно доказать историческими справками.

Въ концѣ 18-го столѣтія вопросы прикладной механики разрабатывались физиками и механиками рядомъ съ другими вопросами; но въ 1794 году, при открытіи (первой въ свѣтѣ) политехнической школы въ Парижѣ, Monge въ своей инструкціи предложилъ установить особый курсъ элементовъ машинъ, что и было приведено въ исполненіе Betancourt'омъ, Lanz'emъ и Hâchett'омъ. Этими учеными впервые дѣлаются попытки систематизировать подлежащій изученію матеріалъ, разобратся въ томъ понятіи, которое обозначается словомъ машина и расчленить его на составныя части. Съ тѣхъ поръ вопросы прикладной механики подвергаются самостоятельной разработкѣ.

**2. Машинная система.** Изъ предыдущаго достаточно ясно, что содержаніе прикладной механики можно разбить на два большихъ отдѣла: 1) на изученіе свойствъ тѣлъ, являющихся посредниками въ передачѣ энергіи въ машинахъ и 2) на изученіе механическихъ свойствъ той системы, которая служитъ для воспріятія и передачи этой энергіи.

Мы говорили, что машинная система обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что каждая ея точка имѣетъ вполнѣ определенное единственно возможное, принужденное движеніе, независимо отъ силъ, которыя могутъ быть къ ней приложены. Въ дальнѣйшемъ изложеніи выясняются тѣ условія, которыя должны быть соблюдены для осуществленія указаннаго свойства машины. Однако же изъ того обстоятельства, что черезъ части машины отъ одной точки къ другой передаются усилія, можно непосредственно заключить, что машинная система должна состоять изъ твердыхъ тѣлъ. Отсюда слѣдуетъ, что изученіе машинной системы, механика машинной системы, сводится къ механикѣ твердаго тѣла. Но однако же въ нѣкоторыхъ част-

ныхъ случаяхъ, части машины могутъ быть выполнены и не изъ твердыхъ тѣлъ. Въ томъ случаѣ, если часть машины подвергается постоянно только растягивающимъ усиліямъ, она можетъ быть выполнена изъ тѣла гибкаго: ремня, каната и т. п. Обратнo, въ случаѣ воздѣйствія только сжимающихъ силъ, возможно примѣненіе въ машинахъ капельныхъ несжимаемыхъ жидкостей. Наконецъ, въ качествѣ органовъ машинъ могутъ съ успѣхомъ примѣняться искусственно изготовленные пружинныя тѣла. Извѣстно, что абсолютно твердыхъ тѣлъ не существуетъ: всякое, такъ называемое, твердое тѣло болѣе или менѣе деформируется подъ дѣйствіемъ внѣшнихъ силъ, такъ что разннца между твердымъ тѣломъ и пружинами, которыя характеризуются своей податливостью, не качественная, а чисто количественная.

**3. Кинематика машинъ.** Изученіе машинной системы, какъ и всякой другой механической системы, можетъ быть двойное: кинематическое и динамическое.

Кинематическое изученіе машинной системы и составляетъ предметъ кинематики машинъ, или иначе теоріи механизмовъ, такъ какъ механизмомъ принято называть всякое устройство, имѣющее цѣлью воспроизведеніе опредѣленнаго движенія. Механизмъ есть понятіе болѣе общее, чѣмъ машина, ибо послѣдняя становится механизмомъ только тогда, когда мы отвлекаемся отъ дѣйствующихъ въ ней силъ, и имѣетъ цѣлью передать работу при опредѣленномъ движеніи. Механизмомъ въ тѣсномъ смыслѣ слова являются, на примѣръ, часы, цѣль устройства которыхъ—опредѣленное движеніе стрѣлокъ, или устройства, служація для опредѣленнаго движенія астрономическихкихъ приборовъ.

Для удобства изложенія мы разобьемъ содержаніе курса на два отдѣла: 1) изученіе плоскихъ системъ и 2) изученіе системъ пространственныхъ. Наиболѣе важное значеніе имѣетъ отдѣлъ первый, такъ какъ по большей части всѣ точки машины совершаютъ движеніе въ одной плоскости и такъ какъ онѣ обыкновенно имѣютъ плоскость симметріи, поэтому движеніе цѣлой части можетъ быть охарактеризовано движеніемъ ея средняго сѣченія.



## ГЛАВА I-ая.

### Кинематика плоской неизменяемой системы.

4. Геометрическое представление движения. Как известно, движение неизменяемой фигуры в ее плоскости в высшей степени наглядно изображается качением одной кривой, неизменно связанной с движущейся фигурой, по другой—неподвижной кривой. Первая кривая, представляющая собою геометрическое место мгновенных центров вращения в подвижной фигуре, называется серполоидой, вторая—геометрическое место мгновенных центров на плоскости—называется поллоидой. Точка соприкосновения этих кривых является для данного момента мгновенным центром вращения.

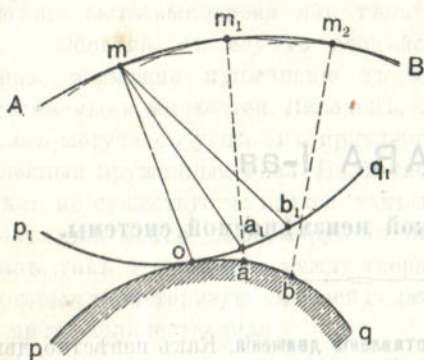
Такое изображение движения чрезвычайно удобно для кинематики машин, ибо части машин очень часто очерчиваются по этим двум кривым, чему примѣромъ можетъ служить вагонное колесо и рельсъ и колеса фрикціонной передачи,—или очень просто строятся, если, какъ на примѣрѣ, при построении зубчатыхъ колесъ, известны эти кривыя.

Въ виду этого при дальнѣйшемъ изложеніи мы будемъ предполагать эти кривыя известными, а впоследствии покажемъ, какъ онѣ строятся по даннымъ условіямъ движения.

Замѣтимъ кромѣ того, что такое представленіе движения благоприятно въ томъ отношеніи, что ведетъ къ очень простому приближительному графическому рѣшенію кинематическихъ задачъ во всякомъ случаѣ, какъ бы онѣ ни были сложны.

5. Траекторія точки. Пусть серполоида  $p_1q_1$  (фиг. 1) катится по поллоидѣ  $pq$ ; требуется найти траекторію точки  $m$ , неизменно связанной съ серполоидой.

Допустимъ, что кривыя  $pq$  и  $p_1q_1$  соприкасаются въ точкѣ  $o$ . Эта точка въ данный моментъ времени будетъ служить мгновеннымъ центромъ вращения для точки  $m$ , такъ что въ



Фиг. 1.

весьма малый промежутокъ времени точка  $m$  опишетъ элементъ окружности около точки  $o$  радиусомъ  $om$ . Пусть въ слѣдующій моментъ времени кривыя  $pq$  и  $p_1q_1$  будутъ соприкасаться точками  $a$  и  $a_1$ , причемъ  $\overline{oa} = \overline{oa_1}$ , такъ какъ качение происходитъ безъ скольженія; тогда точка  $m$  будетъ вращаться около  $a$  и опишетъ элементъ окружности радиусомъ  $a_1m$ . Въ слѣдующій моментъ времени, когда кривыя  $pq$  и  $p_1q_1$  соприкоснутся точками  $b$  и  $b_1$ , точка  $m$  опишетъ элементъ окружности около точки  $b$  радиусомъ  $b_1m$  и т. д.

Очевидно, что кривая  $AB$ , огибающая всѣ эти элементарныя дуги окружностей и будетъ траекторіей точки  $m$ .

Отсюда мы заключаемъ, что траекторія точки  $m$  есть огибающая круга, центръ котораго движется по полюидѣ, а радиусъ измѣняется по закону радиусовъ векторовъ серполоиды, если точка  $m$  принята за ея полюсь.

Замѣтимъ, что мгновенные радиусы  $om$ ,  $a_1m$ ,  $b_1m$  и т. д. всегда нормальны къ траекторіи въ соответственныхъ точкахъ (напр.  $om$ —нормаль къ  $AB$  въ точкѣ  $m$ ), ибо огибающая и огибаемая всегда имѣютъ общую нормаль въ точкѣ соприкосновения, а радиусы  $om$ ,  $a_1m$  и т. д. нормальны къ огибаемой, такъ какъ огибаемая есть окружность.

Въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ, какъ мы увидимъ изъ разобранныхъ ниже примѣровъ, задача о нахожденіи траекторіи точки разрѣшается весьма просто аналитически. Но слѣдуетъ обратить вниманіе на то, что, каковы бы ни были кривыя  $pq$  и  $p_1q_1$ ,—онѣ могутъ быть даже не заданы уравненіями.

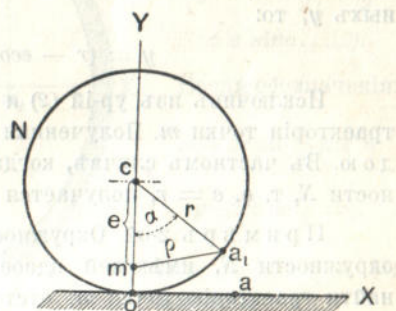


ми,—задача эта весьма просто съ достаточной точностью можетъ быть рѣшена графическимъ путемъ. Для этого стоитъ только описать нѣсколько окружностей изъ центровъ  $o$ ,  $a$ ,  $b$  и т. д. радиусами  $om$ ,  $a_1m$ ,  $b_1m$  и т. д., а затѣмъ провести къ нимъ при помощи лекала приблизительно огибающую.

Примѣръ 1-ый. Пусть полоида будетъ прямая  $oX$  (фиг. 2), а серполоида окружность  $N$  радиуса  $r$ . Отыщемъ траекторію точки  $m$ , находящейся отъ центра окружности на разстояніи  $cm=e$ .

Мы знаемъ, что траекторія точки  $m$  будетъ огибающая окружности, центръ которой движется по прямой  $oX$ , а радиусы измѣняются по закону радиусовъ векторовъ окружности  $N$ , если примемъ точку  $m$  за полюсъ.

Найдемъ уравненіе этой окружности, принявъ  $o$  за начало прямоугольныхъ осей координатъ  $XoY$ . Пусть черезъ нѣкоторый промежутокъ времени придуть въ соприкосновеніе точки  $a$  и  $a_1$ . Соединимъ  $a_1$  съ  $c$  и  $m$  прямыми и обозначимъ уголь  $a_1cm$  черезъ  $\alpha$ . Очевидно, что въ рассматриваемый моментъ времени радиусъ искомой окружности будетъ равенъ  $a_1m$ .



Фиг. 2.

Изъ  $\Delta mca_1$  имѣемъ:

$$\rho^2 = r^2 + e^2 - 2re\cos\alpha.$$

Центръ окружности въ рассматриваемый моментъ будетъ лежать въ точкѣ  $a$ , такъ что его координаты будутъ

$$x_1 = ar \text{ и } y_1 = 0,$$

слѣдовательно, уравненіе искомой окружности напишется такъ:

$$(x - ar)^2 + y^2 = \rho^2 = r^2 + e^2 - 2re\cos\alpha \dots (1).$$

Переменнымъ параметромъ здѣсь является уголь  $\alpha$ , такъ какъ этотъ уголь, при различныхъ положеніяхъ окружности  $N$ , принимаетъ различныя значенія.

Взявъ отъ ур-я (1) частную производную по  $\alpha$ , получимъ:

$$-2(x - ar)r = 2resina,$$

откуда

$$x = ar - esina \dots (2).$$

Чтобы получить ур-е огибающей, надо изъ ур-ий (1) и (2) исключить  $\alpha$ . Подставляя выраженіе (2) въ ур-іе (1), получимъ:

$$e^2 \sin^2 \alpha + y^2 = r^2 + e^2 - 2recosa,$$

откуда:

$$y = \pm (r - ecos\alpha);$$

такъ какъ искомая кривая лежитъ въ области положительныхъ  $y$ , то:

$$y = (r - ecos\alpha) \dots (3).$$

Исключивъ изъ ур-ий (2) и (3) уголь  $\alpha$ , получимъ ур-іе траекторіи точки  $m$ . Полученная кривая называется трохойдою. Въ частномъ случаѣ, когда точка  $m$  лежитъ на окружности  $N$ , т. е.  $e = r$ , получается циклоида.

Примѣръ 2-ой. Окружность  $N_1$  (фиг. 3) катится внутри окружности  $N$ , имѣющей вдвое большій радіусъ; требуется найти траекторію точки  $m$ , отстоящей отъ центра окружности  $N_1$  на разстояніи  $cm = e$ . Предполагая, что въ слѣдующій моментъ времени окружности  $N$  и  $N_1$  соприкоснутся точками  $a$  и  $a_1$ , причеъ  $\widehat{oa} = \widehat{oa_1}$ , найдемъ:

$$(\text{радіусъ производящей окружности})^2 = \rho^2 = ma_1^2 = r^2 + e^2 - 2recosa;$$

координаты центра этой окружности:

$$x_1 = Oa_2 = 2rsin\beta \text{ и } y_1 = a_2a = 2rcos\beta,$$

или въ виду равенства дугъ  $oa$  и  $oa_1$ ,

$$x_1 = 2rsin\frac{\alpha}{2} \text{ и } y_1 = 2rcos\frac{\alpha}{2}.$$

Теперь легко написать ур-іе производящей окружности:

$$\left(x - 2rsin\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y - 2rcos\frac{\alpha}{2}\right)^2 = r^2 + e^2 - 2recosa \dots (1).$$





ур-іе (5) къ начальному положенію. Знакъ  $+$  соответствовалъ бы каченію  $N_1$  по  $N$  снаружи. Теперь изъ ур-ій (4) и (5) легко найти, что

$$\xi = -(r + e) \sin \frac{\alpha}{2} \text{ и } \eta = (e - r) \cos \frac{\alpha}{2}$$

и

$$x = (r - e) \sin \frac{\alpha}{2} \dots (6) \text{ и } y = (r + e) \cos \frac{\alpha}{2} \dots (7).$$

Отсюда имѣемъ:

$$\frac{x}{r - e} = \sin \frac{\alpha}{2} \text{ и } \frac{y}{r + e} = \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Возвышая оба равенства въ квадратъ и складывая ихъ, получимъ:

$$\frac{x^2}{(r - e)^2} + \frac{y^2}{(r + e)^2} = 1 \dots (8).$$

Слѣдовательно, траекторія точки  $m$  будетъ эллипсисъ, полуоси котораго будутъ:

$$a = \pm (r - e) \text{ и } b = (r + e).$$

Разсмотримъ здѣсь нѣсколько частныхъ случаевъ. 1-й случай. Точка  $m$  лежитъ внутри окружности  $N_1$ , т. е.  $r > e$ ; тогда:

$$a = r - e, \quad b = r + e \text{ и } a + b = 2r,$$

т. е. сумма полуосей эллипса = радиусу неподвижной окружности.

2-й случай. Точка  $m$  лежитъ внѣ окружности  $N_1$ , т. е.  $e > r$ ; тогда:

$$a = e - r, \quad b = r + e \text{ и } b - a = 2r,$$

т. е. разность полуосей эллипса = радиусу неподвижной окружности.

3-й случай. Точка  $m$  совпадаетъ съ  $c$ , т. е.  $e = 0$ , тогда ур-іе (8) обращается въ ур-іе окружности съ центромъ въ  $O$  и радиусомъ  $r$ .

4-й случай. Точка  $m$  лежитъ на окружности  $N_1$ , т. е.  $e = r$ ; тогда получимъ:

$$x = 0,$$

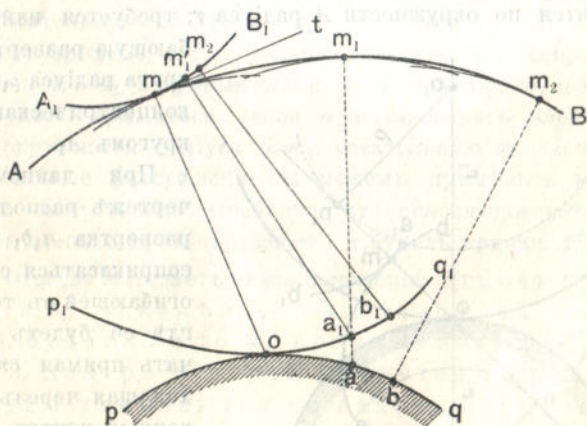


т. е. траекторія всякой точки, лежащей на катящейся окружности, будетъ діаметральная прямая.

**6. Огибающая подвижной кривой.** Будемъ теперь искать ту кривую  $AB$  (фиг. 4), которую огибаетъ при своемъ движеніи неизмѣнно связанная съ серполоидой кривая  $A_1B_1$ .

Допустимъ, что мы эту кривую нашли, и предположимъ, что въ данный моментъ времени, когда полюсъ находится въ точкѣ  $o$ , обѣ наши кривыя соприкасаются въ точкѣ  $m$ . Если мы будемъ разсматривать точку  $m$ , какъ точку кривой  $A_1B_1$ , то можемъ утверждать, что въ данный моментъ времени она будетъ описывать элементъ дуги окружности около центра  $o$  радіусомъ  $om$  и будетъ перемѣщаться, слѣдовательно, перпендикулярно къ направленію  $om$ . Съ другой стороны, та же точка  $m$  можетъ перемѣщаться только по направленію общей касательной  $mt$ , ибо въ противномъ случаѣ кривая  $A_1B_1$ , или отойдетъ отъ кривой  $AB$ , или врѣжется въ нее, чего, понятно, быть не можетъ.

Приведенное доказательство послѣдняго положенія, несмотря на свою наглядность, недостаточно строго, поэтому мы



Фиг. 4-я.

приведемъ здѣсь еще другое доказательство. Перемѣщеніе точки  $m$ , какъ точки соприкосновенія двухъ кривыхъ  $AB$  и  $A_1B_1$ , по

первой кривой (абсолютное перемещение) складается геометрически из двух перемещений: из перемещения точки  $m$  по кривой  $A_1B_1$  (относительное перемещение) и перемещения той точки кривой  $A_1B_1$ , с которой в данный момент точка  $m$  совпадает (перемещение переносного движения). Нам нужно разыскать направление этого последнего перемещения. Так как два первых перемещения, при данном расположении кривых (фиг. 4), имеют направление касательной  $mt$ , то, очевидно, что и последнее перемещение, как геометрическая разность двух первых, имеет то же направление.

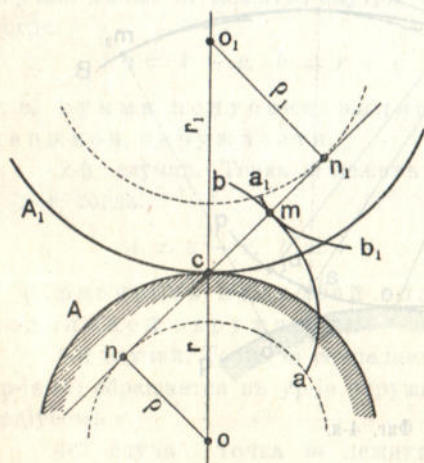
Таким образом, мы видим, что точка  $m$  кривой  $A_1B_1$  перемещается нормально к  $om$  и в то же время может перемещаться только по направлению  $mt$ . Отсюда следует, что  $mt$  перпендикулярно к  $om$ ; таким образом, мы заключаем, что нормаль в точках соприкосновения подвижной кривой с ее огибающей проходит через соответствующий мгновенный центр вращения.

Иногда только этого положения достаточно для нахождения огибающих.

Примеръ. Положимъ, окружность  $A_1$  (фиг. 5), радиуса  $r_1$ , катится по окружности  $A$  радиуса  $r$ ; требуется найти огибающую развертки  $a_1b_1$

круга радиуса  $r_1 = o_1m_1$ , концентрическаго съ кругомъ  $A_1$ .

При данномъ на чертежѣ расположеніи, развертка  $a_1b_1$  будетъ соприкасаться со своей огибающей въ точкѣ  $m$ , гдѣ ее будетъ встрѣчать прямая  $sn_1$ , проходящая черезъ мгновенный центръ вращения  $c$  и касательная къ развертываемой окружности, что вытекаетъ съ одной стороны изъ



фг. 5-я. Ф



свойствъ развертки, а съ другой стороны—изъ доказаннаго выше положенія.

Но легко видѣть, что прямая  $n_1n$  будетъ всегда касаться окружности радиуса  $\rho$ , concentрической съ окружностью  $A$ . Дѣйствительно, опустимъ изъ  $o$  на  $nn_1$  перпендикуляръ  $on$ ; тогда изъ подобныхъ треугольниковъ  $ocn$  и  $o_1cn_1$  имѣемъ:

$$\frac{r}{r_1} = \frac{\rho}{\rho_1}, \text{ откуда } \rho = \text{const.}$$

Слѣдовательно, огибающая развертки  $a_1b_1$  обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что нормали въ различныхъ ея точкахъ будутъ касаться одной и той же окружности. Очевидно, что  $ab$  есть развертка окружности радиуса  $\rho$ , concentрической съ окружностью  $A$ .

**7. Нахождение огибающей.** Но, однако, знаніе указаннаго свойства не всегда достаточно для нахождения огибающей подвижной кривой. Для этой цѣли нужно поискать другихъ средствъ.

Будемъ рассуждать такъ. Въ разсматриваемый моментъ времени точка  $m$  кривой  $A_1B_1$  (фиг. 4) будетъ вращаться около  $o$  и описывать элементарную дугу окружности радиуса  $om$ , касательную къ кривой  $AB$  въ точкѣ  $m$ ; въ слѣдующій моментъ времени, когда полоида и серполоида соприкоснутся точками  $a$  и  $a_1$ , а кривыя  $AB$  и  $A_1B_1$ —точками  $m_1$  и  $m'_1$ , точка  $m'_1$  будетъ вращаться около  $a$  и описывать элементарную дугу окружности радиуса  $a_1m'_1$ , касательную къ  $AB$  въ точкѣ  $m_1$ . Подобное рассужденіе мы можемъ примѣнить къ какому угодно числу точекъ. Очевидно, что огибающая всѣхъ этихъ элементарныхъ дугъ окружности и будетъ кривая  $AB$ .

Отсюда вытекаетъ такое положеніе: огибающая кривой  $A_1B_1$ , неизмѣнно связанной съ серполоидой, будетъ въ то же время огибающей окружности, центръ которой движется по полоидѣ, а радиусы измѣняются по закону нормалей, проведенныхъ изъ различныхъ точекъ кривой  $A_1B_1$  до встрѣчи съ серполоидой.

Слѣдуетъ обратить вниманіе на то, что при помощи этого положенія можно во всякомъ, даже очень сложномъ случаѣ, найти огибающую графическимъ путемъ.

Существуют однако два способа, при помощи которых задача о нахождении огибающей подвижной кривой сводится в некоторых случаях к предыдущей, болѣе простой задачѣ, о нахождении траекторіи точки. Перейдемъ къ изложенію этихъ способовъ.

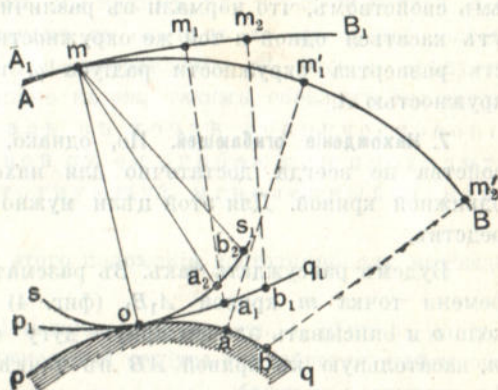
**8. Теорема Камуса.** Положимъ, что при каченіи кривой  $ss_1$  (фиг. 6) по кривой  $pq$  неизмѣнно связанная съ первой точка  $m$  опишетъ траекторію  $AB$  и при каченіи  $ss_1$  по кривой  $p_1q_1$  та же точка опишетъ кривую  $A_1B_1$ . Если мы неизмѣнно соединимъ кривую  $A_1B_1$  съ кривой  $p_1q_1$  и покажемъ послѣднюю по  $pq$ , то кривая  $A_1B_1$  будетъ огибать кривую  $AB$ .

Въ этомъ заключается теорема Камуса.

Для ея доказательства вспомнимъ ранѣе доказанныя положенія. Мы знаемъ, что кривая  $A_1B_1$  есть огибающая окружности, центръ которой движется по  $p_1q_1$ , а радиусы измѣняются по закону радиусовъ векторовъ  $to$ ,  $ta_2$ ,  $tb_2$  и т. д., причемъ соотвѣтствующіе мгновенные радиусы  $to$ ,  $t_1a_1 = ta_2$ ,  $t_2b_1 = tb_2$  и т. д. будутъ нормальны къ кривой  $A_1B_1$ . Но кривая  $AB$  есть также огибающая окружности, центръ которой движется по  $pq$ , а радиусы измѣняются по закону радиусовъ векторовъ  $to$ ,  $ta_2$ ,  $tb_2$  и т. д. или, въ силу равенства этихъ радиусовъ нормалямъ къ  $A_1B_1$ , — по закону этихъ нормалей, а отсюда и слѣдуетъ, что  $AB$  есть огибающая  $A_1B_1$ .

**Примѣръ.** Положимъ, что окружность  $A_1$  (фиг. 7) катится по окружности  $A$ ; требуется найти огибающую диаметра  $ab$  первой окружности.

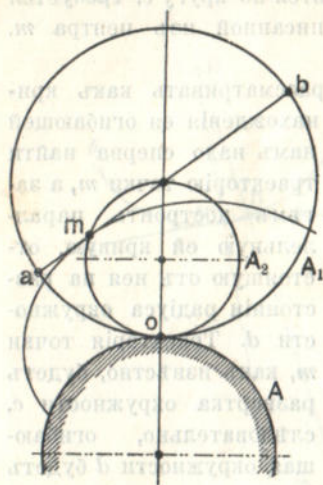
Мы знаемъ, что если мы покатымъ внутри окружности  $A_1$  окружность  $A_2$ , имѣющую вдвое меньшій радиусъ, то ея



Фиг. 6.



точка  $m$  опишетъ діаметръ  $ab$ . Слѣдовательно, діаметръ  $ab$  при каченіи  $A_1$  по  $A$  будетъ огибать ту кривую, которую при каченіи  $A_2$  по  $A$  опишетъ точка  $m$ . Кривая эта называется эпициклоидой.



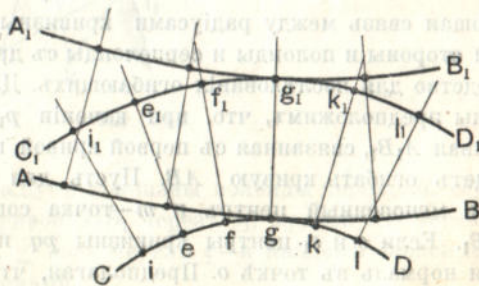
Фиг. 7.

**9. Параллельныя кривыя.** Докажемъ, что если мы нашли пару огибающихъ, то кривыя, имъ параллельныя и равно отъ нихъ отстоящія, будутъ также взаимно огибающія.

Кривыи параллельными между собою называются такія кривыя, разстояніе между которыми по ихъ общимъ нормалямъ есть величина постоянная. Напримѣръ, кривыя  $CD$  и  $C_1D_1$  (фиг. 8) будутъ параллельны между собою, если отрѣзки общихъ нормалей между ними  $ii_1$ ,

$ee_1$ ,  $ff_1$  и т. д. равны между собою.

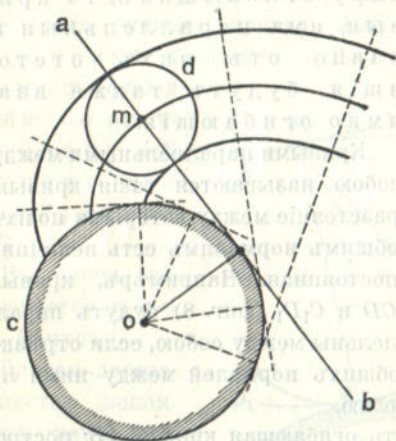
Вообразимъ, что  $CD$  есть огибающая кривой  $AB$ ; построимъ кривыя  $A_1B_1$  и  $C_1D_1$  имъ параллельныя и равно отъ нихъ отстоящія. Допустимъ, что въ данный моментъ  $AB$  и  $CD$  соприкасаются въ точкѣ  $g$ ; очевидно, что въ то же время  $A_1B_1$  и  $C_1D_1$  будутъ соприкасаться въ точкѣ  $g_1$ . Если въ слѣдующій моментъ  $AB$  и  $CD$  соприкоснутся въ точкѣ  $k$ , то  $A_1B_1$  и  $C_1D_1$  соприкоснутся въ точкѣ  $k_1$ . Если, слѣдовательно, кривая  $AB$  при своемъ перемѣщеніи будетъ постоянно соприкасаться съ кривой  $CD$ , то  $A_1B_1$ , оставаясь параллельной  $AB$ , будетъ постоянно соприкасаться съ  $C_1D_1$ . Этимъ наше положеніе и доказывается.



Фиг. 8-я.

**Примѣръ.** Этимъ положеніемъ особенно удобно пользоваться при нахожденіи огибающихъ перемѣщающейся окружности. Пусть прямая  $ab$  (фиг. 9) катится по кругу  $c$ ; требуется найти огибающую окружности  $d$ , описанной изъ центра  $m$ , лежащего на прямой  $ab$ .

Такъ какъ окружность можно разсматривать какъ кривую, параллельную центру, то для нахождения ея огибающей намъ надо сперва найти траекторію точки  $m$ , а затѣмъ построить параллельную ей кривую, отстоящую отъ нея на расстоянии радиуса окружности  $d$ . Траекторія точки  $m$ , какъ извѣстно, будетъ развертка окружности  $c$ , слѣдовательно, огибающая окружности  $d$  будетъ кривая, параллельная этой разверткѣ, т. е. тоже развертка окружности  $c$ , ибо параллельная разверткѣ есть тоже развертка.



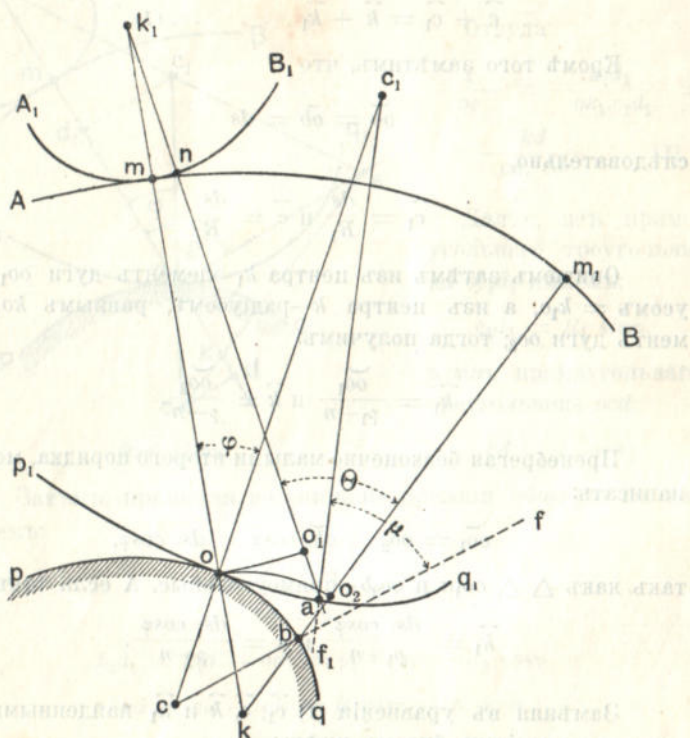
Фиг. 9-я

### 10. Формула Савари. Формула Савари, устанавли-

вающая связь между радиусами кривизны огибающихъ съ одной стороны и полоиды и серполоиды съ другой, даетъ удобное средство для изслѣдованія огибающихъ. Для вывода этой формулы предположимъ, что, при каченіи  $p_1q_1$  (фиг. 10) по  $pq$ , кривая  $A_1B_1$ , связанная съ первой кривой, при своемъ движеніи будетъ огибать кривую  $AB$ . Пусть для данного момента  $o$  есть мгновенный центръ и  $m$ —точка соприкосновенія  $AB$  и  $A_1B_1$ . Если  $c$  и  $c_1$  центры кривизны  $pq$  и  $p_1q_1$ , то  $cc_1$  ихъ общая нормаль въ точкѣ  $o$ . Предполагая, что въ слѣдующій моментъ на полоидѣ и серполоидѣ придутъ въ соприкосновеніе точки  $b$  и  $a$ , мы найдемъ точки  $n$  и  $m_1$ , которыми соприкоснутся въ тотъ же моментъ кривыя  $A_1B_1$  и  $AB$ , если изъ  $a$  и  $b$  проведемъ къ нимъ соотвѣтственно нормали. Очевидно, что центры кривизны  $k_1$  и  $k$  кривыхъ  $A_1B_1$  и  $AB$  по отношенію къ точкѣ  $m$  будутъ лежать: первый на пересѣченіи  $om$  и  $an$ ,



второй—на пересѣченіи  $bt_1$  и  $om$ . Наконецъ, легко сообразить, что  $c_1a$  есть нормаль къ  $p_1q_1$  въ точкѣ  $a$  и  $cb$ —нормаль къ  $p_1q_1$  въ точкѣ  $b$ .



Фиг. 10-я.

Обозначимъ радиусъ кривизны полоиды черезъ  $R$ , серполоиды черезъ  $R_1$ , кривой  $A_1B_1$  черезъ  $\rho_1$ , кривой  $AB$  черезъ  $\rho$ , длину  $to$  черезъ  $n$ ,  $\angle toc_1$  черезъ  $\varphi$ —и найдемъ зависимость между этими величинами.

Замѣтимъ, что когда придутъ въ соприкосновеніе точки  $b$  и  $a$ , то вся фигура повернется изъ даннаго положенія на уголь, равный углу между нормальми  $cf$  и  $c_1f_1$ ; а этотъ уголь, какъ внѣшній, равенъ суммѣ внутреннихъ угловъ, съ нимъ не смежныхъ, т. е.  $\mu = \widehat{c} + \widehat{c}_1$ .

Съ другой стороны, при совпадении точек  $b$  и  $a$ , нормаль  $an$  совпадетъ съ нормалью  $bm_1$ , т. е. фигура повернется на уголъ  $\theta$ , который, очевидно, равенъ суммѣ  $\tilde{k}_1 + \tilde{k}$ . Отсюда

$$\tilde{c} + \tilde{c}_1 = \tilde{k} + \tilde{k}_1 \dots \dots (1).$$

Кромѣ того замѣтимъ, что

$$\tilde{oa} = \tilde{ob} = ds$$

слѣдовательно,

$$\tilde{c}_1 = \frac{ds}{R_1} \text{ и } \tilde{c} = \frac{ds}{R}.$$

Опишемъ затѣмъ изъ центра  $k_1$  элементъ дуги  $oo_1$  радиусомъ  $= k_1o$ , а изъ центра  $k$ —радиусомъ, равнымъ  $ko$ , элементъ дуги  $oo_2$ ; тогда получимъ:

$$\tilde{k}_1 = \frac{\overset{\frown}{oo_1}}{\rho_1 + n} \text{ и } \tilde{k} = \frac{\overset{\frown}{oo_2}}{\rho - n}.$$

Пренебрегая безконечно малыми второго порядка, можемъ написать:

$$\overset{\frown}{oo_1} = \overset{\frown}{oo_2} = \overset{\frown}{ob} \cdot \cos \varphi = ds \cdot \cos \varphi,$$

такъ какъ  $\triangle \triangle oo_1a$  и  $oo_2b$ —прямоугольные. А если такъ, то

$$\tilde{k}_1 = \frac{ds \cdot \cos \varphi}{\rho_1 + n} \text{ и } \tilde{k} = \frac{ds \cdot \cos \varphi}{\rho - n}.$$

Замѣняя въ уравненіи (1)  $\tilde{c}_1$ ,  $\tilde{c}$ ,  $\tilde{k}$  и  $\tilde{k}_1$  найденными для нихъ выраженіями, будемъ имѣть:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} = \left( \frac{1}{\rho_1 + n} + \frac{1}{\rho - n} \right) \cos \varphi.$$

Соотношеніе это называется формулой Савари и даетъ возможность находить центръ кривизны огибающей или огибаемой, если извѣстны всѣ остальные величины.

Эта формула приводитъ къ очень простому построению. Проведемъ прямую  $k_1c_1$  (фиг. 11) до пересѣченія съ  $oe$ , перпендикуляромъ къ  $k_1k$  въ точкѣ  $o$ ; точку  $e$  соединимъ съ  $c$ , затѣмъ продолжимъ  $k_1o$  до пересѣченія съ  $ec$  въ точкѣ  $k$ , которая и будетъ искомымъ центромъ кривизны кривой  $AB$ . Для доказательства этого опустимъ изъ точекъ  $e$  и  $c_1$  перпендику-



ляры  $cd$  и  $c_1d_1$  на  $k_1k$ . Уголь  $k_1oc_1$  обозначимъ черезъ  $\varphi$ . Тогда изъ подобія треугольниковъ  $k_1d_1c_1$  и  $k_1oe$ ,  $oek$  и  $kcd$  получимъ:

$$\frac{oe}{c_1d_1} = \frac{ok_1}{k_1d_1}, \frac{oe}{cd} = \frac{ok}{kd}$$

Откуда:

$$\frac{1}{oe} = \frac{k_1d_1}{ok_1 \cdot c_1d_1} = \frac{kd}{ok \cdot cd} \dots (1).$$

Далѣ, изъ прямоугольнаго треугольника  $oc_1d_1$  имѣемъ:

$$c_1d_1 = R_1 \sin\varphi,$$

а изъ прямоугольнаго треугольника  $ocd$ :

$$cd = R \cdot \sin\varphi.$$

Фиг. 11-ая.

Затѣмъ, принимая во вниманіе прежнія обозначенія, напишемъ:

$$k_1o = \rho_1 + n,$$

$$ko = \rho - n,$$

$$k_1d_1 = k_1o - od_1 = \rho_1 + n - R_1 \cos\varphi$$

и  $kd = od - ok = R \cos\varphi - \rho + n.$

Подставивъ найденныя величины въ уравненіе (1), получимъ:

$$\frac{\rho_1 + n - R_1 \cos\varphi}{R_1(\rho_1 + n) \sin\varphi} = \frac{R \cos\varphi - \rho + n}{R(\rho - n) \sin\varphi},$$

или:

$$\frac{\rho_1 + n}{R_1(\rho_1 + n)} - \frac{R_1 \cos\varphi}{R_1(\rho_1 + n)} = \frac{R \cos\varphi}{R(\rho - n)} - \frac{\rho - n}{R(\rho - n)}.$$

откуда имѣемъ:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} = \cos\varphi \left( \frac{1}{\rho - n} + \frac{1}{\rho_1 + n} \right).$$

Такимъ образомъ, мы пришли къ формулѣ Савари. Это и подтверждаетъ намъ, что точка  $k$ , найденная вышеописаннымъ построениемъ, дѣйствительно есть центръ кривизны кривой  $AB$  въ точкѣ  $m$ .

Чтобы перейти къ тому случаю, когда кривая  $A_1B_1$  обращается въ точку, мы должны положить въ формулѣ Савари  $\rho_1 = 0$ . Слѣдовательно, для этого, болѣе простаго случая, мы получимъ слѣдующее соотношеніе:

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} = \cos \varphi \left( \frac{1}{\rho - n} + \frac{1}{n} \right) \dots (3)$$

Эта формула строится совершенно такъ же, какъ и общая формула Савари, только здѣсь роль центра кривизны  $k_1$  кривой  $A_1B_1$  будетъ играть сама точка  $m$ .

**11. Окружность перегибовъ.** Изъ формулы Савари явствуетъ, что кривизна огибающей зависитъ въ каждый данный моментъ времени не отъ вида катящихся кривыхъ, а отъ кривизны ихъ въ тѣхъ точкахъ, которыми онѣ въ данный моментъ соприкасаются. Отсюда слѣдуетъ, что для нахождения радіуса кривизны огибающей можно катящіяся кривыя замѣнить другими подъ условіемъ сохраненія величины суммы  $\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}$ .

Разъ это такъ, то естественно воспользоваться для этой цѣли самыми простыми кривыми, напимѣръ, прямой и окружностью радіуса  $d$ , получаемого изъ формулы:

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}.$$

Если  $oD = d$  (фиг. 12), то центръ кривизны  $k$ , на основаніи предыдущаго, можетъ быть построенъ слѣдующимъ образомъ. Ведемъ прямую черезъ  $k_1$  и  $D$  до пересѣченія въ точкѣ  $P$  съ перпендикуляромъ къ  $om$  въ точкѣ  $o$ , а затѣмъ изъ точки  $P$  ведемъ прямую параллельно  $Do$ . Точка пересѣченія этой прямой съ продолженіемъ  $mo$  и будетъ искомый центръ кривизны. Окружность, построенная на  $oD$ , какъ на діаметръ, называется окружностью перегибовъ.

При построеніи точки  $D$  надо соблюдать слѣдующія правила, которыя вытекаютъ изъ предположеній, сдѣланныхъ нами при выводѣ формулы Савари.



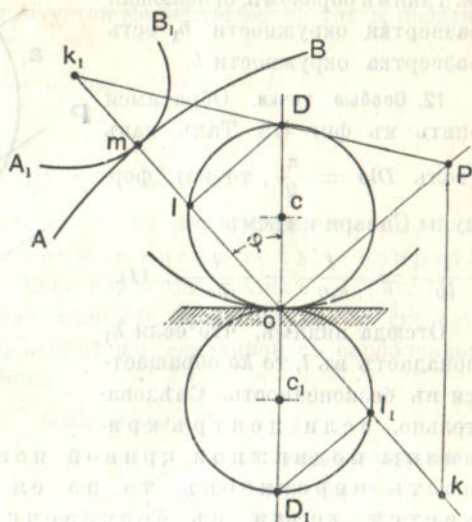
Если точки  $c$  и  $c_1$  (фиг. 11) лежатъ по одну сторону точки  $o$ , то мы должны считать  $R_1$  отрицательнымъ; въ противномъ случаѣ ему слѣдуетъ приписать знакъ  $+$ .

Если въ первомъ случаѣ  $d$  будетъ отрицательнымъ, то отръзокъ  $oD$  надо откладывать отъ  $o$  къ  $c$  (фиг. 11), въ противномъ случаѣ  $oD$  откладывается въ противоположную сторону.

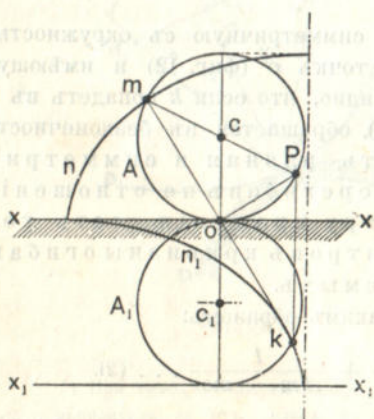
Примѣръ 1-й. Требуется найти центръ кривизны циклоиды въ точкѣ  $m$  (фиг. 13).

Легко сообразить, что точка  $P$  лежитъ на окружности  $A$  и что прямая  $Pk \parallel co$ ; отсюда слѣдуетъ, что  $\angle omc = \angle com = \angle Pko$ ,  $mk = 2mo$  и  $Pk = 2oc =$  диаметру окружности  $A$ . Очевидно, что точка  $k$  всегда находится на окружности  $A_1$ , симметричной съ  $A$  по отношенію точки  $o$ . Окружность  $A_1$  катится по прямой  $x_1x_1 \parallel xx$ , такъ что точка  $k$  описываетъ циклоиду  $n_1$ . Изъ этого слѣдуетъ, что циклоида  $n$  есть развертка циклоиды  $n_1$ .

Примѣръ 2-й. Требуется найти центръ кривизны огибающей развертки окружности  $b_1$ , (фиг. 14) concentрической съ окружностью  $a_1$ , которая катится по окружности  $a$ . Точка  $P$  лежитъ на безконечности, т. е.  $\angle ok_1c = \frac{\pi}{2}$ ,



Фиг. 12-я.



Фиг. 13-я.

откуда слѣдуетъ, что  $\angle okc$  также  $= \frac{\pi}{2}$  и прямая  $ok$  касается точкою  $k$  окружности  $b$ , описанной изъ  $c$  радиусомъ  $ck$ . Такимъ образомъ, огибающая развертки окружности  $b_1$  есть развертка окружности  $b$ .

**12. Особые точки.** Обратимся опять къ фиг. 12. Такъ какъ уголъ  $Dlo = \frac{\pi}{2}$ , то изъ формулы Савари имѣемъ:

$$\frac{1}{lo} = \frac{1}{k_1o} + \frac{1}{ko} \dots (1).$$

Отсюда видимъ, что если  $k_1$  попадаетъ въ  $l$ , то  $ko$  обращается въ бесконечность. Слѣдовательно, если центръ кривизны подвижной кривой попадаетъ на окружность перегибовъ, то на ея огибающей получается точка съ бесконечно большимъ радиусомъ кривизны, т. е. точка перегиба.

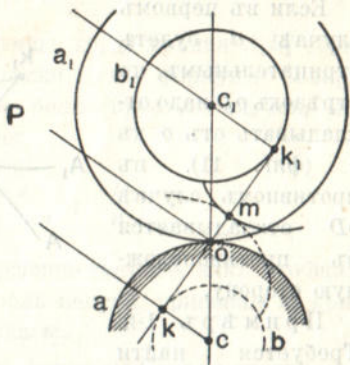
Въ частныхъ случаяхъ это положеніе приводитъ къ очень простымъ заключеніямъ. Если, напримѣръ, какая либо точка описываетъ прямую линію, она всегда находится на окружности перегибовъ.

Построимъ окружность, симметричную съ окружностью перегибовъ по отношенію къ точкѣ  $o$  (фиг. 12) и имѣющую съ нею равный радиусъ. Очевидно, что если  $k$  попадетъ въ  $l_1$ , то  $k_1o$ , на основаніи ур-ія (1), обращается въ бесконечность. Слѣдовательно, окружность, равная и симметричная съ окружностью перегибовъ по отношенію къ мгновенному центру вращенія, есть геометрическое мѣсто центровъ кривизны огибающихъ движущихся прямыхъ.

Перепишемъ ур-іе (1) такимъ образомъ:

$$\frac{1}{lo} = \frac{1}{k_1m + to} + \frac{1}{km - to} \dots (2).$$

Отсюда видно, что если движущаяся прямая проходитъ черезъ точки  $D_1$  и  $l_1$ , то  $km$  обращается въ ноль, ибо



Фиг. 14-я.



$$k_1 m + m_0 = \infty \text{ и } m_0 = l_1 o = -l_0^*),$$

т. е. прямая  $Dl_1$  огибает точку  $l_1$ .

Допустимъ, наконецъ, что движущаяся точка попала въ точку  $l_1$  (или другую точку той же окружности); тогда, полагая въ ур-ий (2).

$$k_1 m = 0 \text{ и } m_0 = l_1 o = -l_0,$$

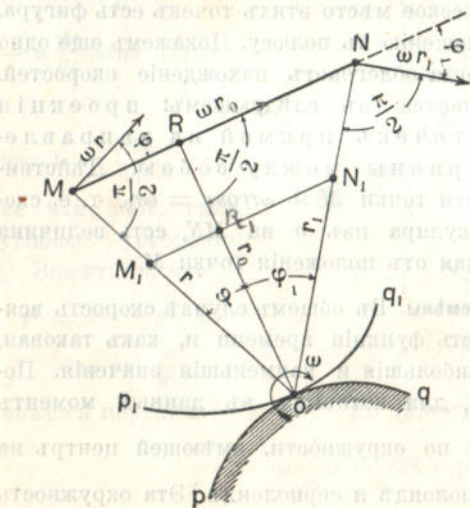
получимъ:

$$-\frac{2}{l_1 o} = \frac{1}{k_1 m + l_1 o}.$$

Если  $l_1$  совпадаетъ съ  $o$ , то  $k_1 m$  обращается въ ноль, т. е. полюсъ всегда описываетъ точку возврата.

13. Скорость точки. Если извѣстенъ полюсъ  $o$  (фиг. 15) и дана мгновенная угловая скорость вращения  $\omega$ , то скорость какойнибудь точки  $M$ , неизмѣнно связанной съ серполоидой, выразится произведениемъ

$$\omega \cdot oM = \omega \cdot r$$



Фиг. 15-я.

и будетъ направлена подъ прямымъ угломъ къ  $oM$ . Это есть простое слѣдствіе изъ принятаго нами геометрическаго представленія движенія. Допустимъ, что мы имѣемъ подвижную прямую  $MN$ ; найдемъ скорости концовъ ея  $M$  и  $N$  и отложимъ эти скорости по соответствующимъ мгновеннымъ радиусамъ по направленію къ полюсу, т. ч.  $MM_1 = \omega \cdot r$

\*) При выводѣ формулы Савари мы считали нормаль *от* положительной и направляли ее отъ полюса въ сторону центра кривизны серполоиды; здѣсь нормаль направлена въ обратную сторону и потому мы приписываемъ ей знакъ —.

и  $NN_1 = \omega r_1$ . Не трудно видѣть, что прямая  $M_1N_1$  будетъ параллельна прямой  $MN$ , ибо  $\triangle MNO$  и  $\triangle M_1N_1O$  подобны между собою. Такимъ образомъ, зная скорость одной точки прямой, положимъ, точки  $M$ , мы можемъ найти скорость всякой другой ея точки; для этого отложимъ скорость точки  $M$  къ полюсу и изъ конца ея  $M_1$  проведемъ прямую, параллельную данной. Отрѣзки мгновенныхъ радиусовъ вращенія между прямыми  $MN$  и  $M_1N_1$  и будутъ по величинѣ равняться скоростямъ соответственныхъ точекъ: такъ— $RR_1$  есть скорость точки  $R$ ,  $NN_1$ —скорость точки  $N$  и т. д.

Это положеніе можетъ быть обобщено. Ели мы будемъ имѣть какую-нибудь подвижную неизмѣняемую фигуру, то можемъ разсматривать ее состоящей изъ цѣлаго ряда элементовъ прямой линіи, для каждаго изъ которыхъ будетъ справедливо указанное заключеніе. Построивъ, такимъ образомъ, скорости для всѣхъ точекъ фигуры и отложивъ ихъ по соответствующимъ мгновеннымъ радиусамъ къ полюсу, мы легко найдемъ, что геометрическое мѣсто этихъ точекъ есть фигура, подобная данной по отношенію къ полюсу. Докажемъ еще одно положеніе, которое иногда облегчаетъ нахождение скоростей. Положеніе это заключается въ слѣдующемъ: проекціи скоростей всѣхъ точекъ прямой на направленіе этой прямой равны между собою. Дѣйствительно, проекція скорости точки  $M = \omega r \cos \varphi = \omega r_0$ , т. е. скорости конца перпендикуляра изъ  $o$  на  $MN$ , есть величина постоянная, не зависящая отъ положенія точки  $M$ .

**14. Окружность перемѣны.** Въ общемъ случаѣ скорость всякой подвижной точки есть функція времени и, какъ таковая, можетъ имѣть свои наибольшія и наименьшія значенія. Покажемъ, что всѣ точки, для которыхъ въ данный моментъ  $\frac{dv}{dt} = 0$ , располагаются по окружности, имѣющей центръ на общей касательной къ полондѣ и серполондѣ. Эта окружность называется окружностью перемѣны и играетъ большую роль при нахожденіи ускореній точекъ. Понятно, что на этой окружности всегда находятся точки, скорость которыхъ со временемъ не измѣняется.

Возьмемъ начало координатъ въ полюсѣ (фиг. 16), ось  $X$  направимъ по общей касательной къ  $pq$  и  $p_1q_1$ , а ось  $Y$ —по об-



шей ихъ нормали и найдемъ геометрическое мѣсто точекъ, для которыхъ  $\frac{dv}{dt} = 0$ .

Имѣемъ:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega r)}{dt} = \omega \frac{dr}{dt} + r \frac{d\omega}{dt} = 0 \dots (1).$$

Если въ слѣдующій моментъ кривыя  $pq$  и  $p_1q_1$  прикоснутся точками  $a$  и  $a_1$ , то очевидно, что

$$dr = -oa_2$$

гдѣ  $a_2$ —точка пересѣченія  $om$  съ дугой окружности  $a_1a_2$ , проведенной изъ центра  $m$  радиусомъ  $ma_1$ . Обозначая  $oa_1 = oa$  черезъ  $ds$  и  $\angle moY$  черезъ  $\varphi$ , найдемъ:

$$dr = -ds \sin\varphi,$$

такъ что изъ ур-я (1) имѣемъ:

$$\begin{aligned} -\omega \frac{ds}{dt} \sin\varphi + rk &= \\ &= 0 \dots (2) \end{aligned}$$

гдѣ  $k = \frac{d\omega}{dt}$  есть не что иное, какъ угловое ускореніе.

Замѣтивъ, что

$$r^2 = x^2 + y^2 \text{ и}$$

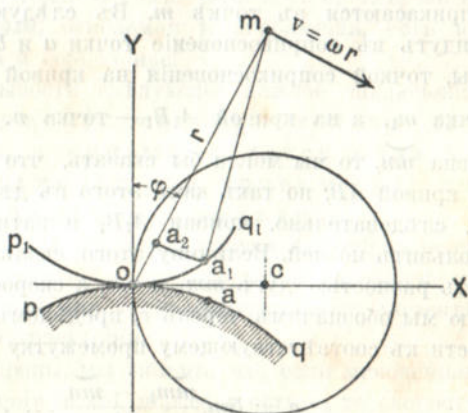
$$\sin\varphi = \frac{x}{r},$$

можемъ переписать ур-е (2) въ такомъ видѣ:

$$\frac{1}{r} \left\{ -\omega \frac{ds}{dt} x + (x^2 + y^2)k \right\} = 0,$$

откуда видно, что  $\frac{dv}{dt} = 0$  для точекъ, расположенныхъ по окружности

$$x^2 + y^2 - \frac{\omega}{k} x = 0 \dots (3).$$



Фиг. 16-я.

Если  $k$  величина положительная, то центр окружности располагается по оси  $OX$  въ сторону движенія; въ противномъ случаѣ онъ находится по другую сторону полюса.

Радиусъ окружности равняется  $\frac{\omega \frac{ds}{dt}}{2k} = \frac{\omega u}{2k}$ , гдѣ  $u = \frac{ds}{dt}$ , есть не что иное, какъ скорость перемѣщенія полюса по полюидѣ, которую называютъ обыкновенно скоростью каченія.

**15. Скорость скольженія.** Обратимся къ извѣстной уже намъ фиг. 10. Мы знаемъ, что кривыя  $AB$  и  $A_1B_1$  во всякій моментъ имѣютъ одну общую точку соприкосновенія. Въ разсматриваемый моментъ, когда полюсомъ служитъ точка  $o$ , эти кривыя соприкасаются въ точкѣ  $m$ . Въ слѣдующій моментъ, когда придутъ въ соприкосновеніе точки  $a$  и  $b$  полюиды и серполоиды, точкой соприкосновенія на кривой  $AB$  будетъ служить точка  $m_1$ , а на кривой  $A_1B_1$  — точка  $n$ . Если бы  $\widehat{mm_1}$  была равна  $\widehat{mn}$ , то мы могли бы сказать, что кривая  $A_1B_1$  катится по кривой  $AB$ ; но такъ какъ этого въ дѣйствительности нѣтъ, то, слѣдовательно, кривая  $A_1B_1$  и катится по кривой  $AB$ , и скользитъ по ней. Величину этого скольженія можно определить разностью дугъ  $\widehat{mm_1}$  и  $\widehat{mn}$ , а скорость скольженія, которую мы обозначимъ черезъ  $v$ , предѣломъ отношенія этой разности къ соответствующему промежутку времени, т. е.

$$v = \lim. \frac{\widehat{mm_1} - \widehat{mn}}{\Delta t} \dots (1).$$

Изъ той же фиг. 10-ой мы видимъ, что

$$\widehat{mm_1} = \rho \widehat{k} = \rho \frac{ds \cdot \cos \varphi}{\rho - n}$$

$$\text{и } \widehat{mn} = \rho_1 \widehat{k}_1 = \rho_1 \frac{ds \cdot \cos \varphi}{\rho_1 + n}$$

Такъ что

$$v = \frac{ds \cdot \cos \varphi}{dt} \left( \frac{\rho}{\rho - n} - \frac{\rho_1}{\rho_1 + n} \right)$$

или

$$v = \frac{ds \cdot \cos \varphi \cdot n \cdot (\rho + \rho_1)}{dt (\rho - n) (\rho_1 + n)} \dots (2).$$



Но изъ формулы Савари мы имѣемъ:

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} = \frac{\cos \varphi (\rho + \rho_1)}{(\rho - n)(\rho_1 + n)} \dots (3);$$

подставляя это выраженіе въ ур-іе (2), получимъ:

$$v = \frac{ds}{dt} \cdot n \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right) \dots (4)$$

или

$$v = un \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right) \dots (5).$$

Изъ этой формулы мы видимъ, что скорость скольженія равна нулю только въ томъ случаѣ, если  $n = \sigma$ , т. е. когда разсматриваемыя кривыя, огибаемая и огибающая, есть не что иное, какъ полоида и серполоида.

Отсюда можно вывести слѣдующее важное заключеніе: въ данной движущейся системѣ только двѣ взаимно огибающія кривыя катятся одна по другой безъ скольженія; эти кривыя суть полоида и серполоида даннаго движенія.

Въ томъ частномъ случаѣ, когда кривая  $A_1B_1$  обращается въ точку и  $AB$  въ ея траекторію,  $v$  въ формулѣ 5-й означаетъ скорость точки, съ которою она въ разсматриваемый моментъ перемѣщается по своей траекторіи.

Но, съ другой стороны, мы знаемъ, что если мгновенная угловая скорость вращенія около полюса  $o$  есть  $\omega$ , то скорость точки  $m$  въ данный моментъ  $= \omega \cdot n$ .

Сравнивая это второе выраженіе для скорости съ тѣмъ, которое даетъ формула 5-я, мы имѣемъ:

$$\omega n = un \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right) \dots (6)$$

или

$$\omega = u \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right) \dots (7)$$

Эта простая формула и устанавливаетъ зависимость между мгновенной угловой скоростью вращенія около полюса  $o$  и соотвѣтственной скоростью каченія серполоиды по полоидѣ.

**16. Центръ ускореній.** Покажемъ, что по отношенію ускоренія имѣеть мѣсто все то же, что и по отношенію скорости. Мы знаемъ, что всегда существуетъ такая точка подвижной системы, которая въ данный моментъ остается въ покоѣ, не имѣеть скорости; точка эта есть не что иное, какъ полюсъ или мгновенный центръ вращенія. Аналогично съ этимъ, всегда существуетъ такая точка подвижной системы, которая не имѣеть ускоренія; эту точку называютъ центромъ ускореній.

Для опредѣленія мѣста этой точки воспользуемся сдѣланными раньше выводами.

Извѣстно, что полное ускореніе точки складывается изъ двухъ векторовъ: а) ускоренія нормального  $= \frac{v^2}{\rho}$ , направленнаго къ центру кривизны, т. е. имѣющаго, слѣдовательно, направленіе мгновеннаго радіуса, и б) ускоренія тангенціального  $= \frac{dv}{dt}$ , направленнаго по касательной къ траекторіи точки.

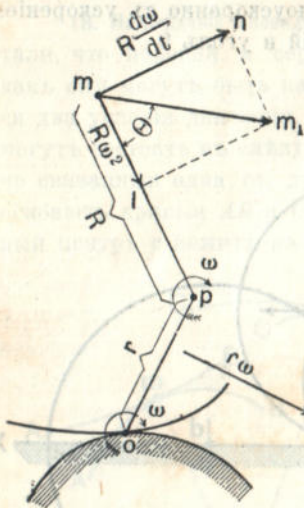
Мы доказали выше, что всѣ точки, расположенныя въ данный моментъ на окружности перегибовъ, кромѣ полюса, описываютъ прямолинейный элементъ ( $\rho = \infty$ ); очевидно, что нормальное ускореніе всѣхъ этихъ точекъ  $= 0$ . Такимъ образомъ, мы приходимъ къ слѣдующему заключенію: полное ускореніе всѣхъ точекъ, лежащихъ въ данный моментъ на окружности перегибовъ  $= \frac{dv}{dt}$  и направлено перпендикулярно къ соотвѣтствующимъ мгновеннымъ радіусамъ вращенія. Съ другой стороны, мы видѣли, что для всѣхъ точекъ, лежащихъ въ данный моментъ на окружности перегибовъ  $\frac{dv}{dt} = 0$ , т. ч. полное ускореніе всѣхъ этихъ точекъ  $= \frac{v^2}{\rho}$  и направлено по мгновенному радіусу вращенія. Послѣ этого становится очевиднымъ, что центръ ускореній есть точка пересѣченія окружности перегибовъ съ окружностью перегибовъ.

**17. Ускореніе точки.** Пусть  $p$  (фиг. 17) есть центръ ускореній,  $o$  — полюсъ и  $m$  — некоторая подвижная точка, ускореніе



которой мы ищем. Замѣняя вращеніе около  $o$  вращеніемъ около  $p$  съ той же угловою скоростью, мы должны прибавить

еще поступательное движеніе со скоростью  $op \cdot \omega = r \cdot \omega$  по направленію, перпендикулярному къ  $op$ . Такъ какъ это послѣднее движеніе есть движеніе центра ускореній, то его ускореніе равно нулю и ускореніе точки  $m$  есть ускореніе вращательнаго движенія около  $p$  съ угловою скоростью  $\omega$ . Составляющая этого ускоренія по  $mp = R\omega^2$ , гдѣ  $R = pm$ , и по направленію перпендикулярному къ  $op = \frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = Rk$ . \*  
Отсюда полное ускореніе.



Фиг. 17-я.

$$mm_1 = R\sqrt{\omega^4 + k^2}.$$

Мы видимъ, что полное ускореніе пропорціонально разстоянію отъ центра ускореній, подобно тому, какъ скорость пропорціональна разстоянію отъ полюса. Эта аналогія между скоростью и ускореніемъ идетъ и дальше.

Найдемъ уголъ  $\theta$ , образуемый  $mm_1$  съ  $mp$ ; имѣемъ:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{Rk}{R\omega^2} = \frac{k}{\omega^2}.$$

Слѣдовательно, уголъ  $\theta$  не зависитъ отъ положенія точки  $m$ , или, иначе сказать, есть величина постоянная для всѣхъ точекъ. На основаніи того, что было доказано для скорости, мы можемъ заключить, что откладывая ускоренія точекъ подвижной фигуры по направленію къ центру ускореній и соединяя концы со-

\*) Точка  $p$  въ теченіе двухъ безконечно-малыхъ элементовъ времени остается центромъ ускореній, по этому за безконечно-малый элементъ времени  $R$  не измѣняется.

отвѣтствующихъ векторовъ прямыми линиями, мы получимъ фигуру, подобную данной.

Примѣръ. Окружность катится по прямой (фиг. 18) такъ, что ея центръ движется равноускоренно съ ускореніемъ  $j$ ; требуется найти центръ ускореній и уголъ  $\theta$ .

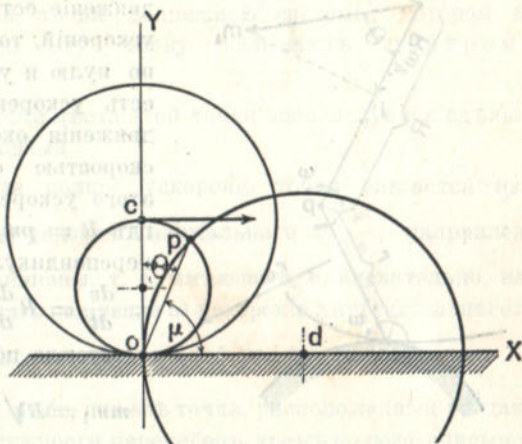
Если начальная скорость центра  $c$  есть  $v_0$ , то, очевидно, скорость его въ данный моментъ, равная скорости каченія, будетъ:

$$v = u = v_0 + jt,$$

откуда:

$$\omega = \frac{v_0 + jt}{r} \text{ и}$$

$$k = \frac{d\omega}{dt} = \frac{j}{r}.$$



фиг. 18-я.

Легко видѣть, что радиусъ окружности перегибовъ  $= \frac{r}{2}$  и радиусъ окружности перемѣны  $R = \frac{\omega u}{2k} = \frac{(v_0 + jt)^2}{2j}$ , такъ что ихъ ур-ія соотвѣтственно будутъ:

$$x^2 + y^2 - ry = 0 \text{ и } x^2 + y^2 - \frac{(v_0 + jt)^2}{j} y = 0,$$

откуда

$$tg\theta = \frac{y}{x} = \frac{(v_0 + jt)^2}{jr}$$

Для  $tg\theta$  имѣемъ слѣдующее выраженіе:

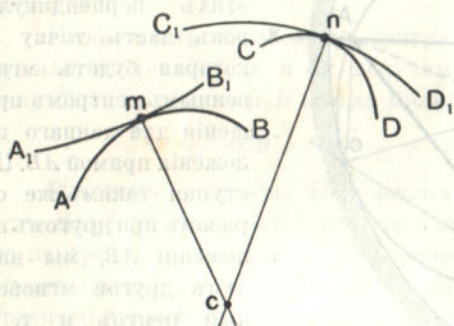
$$tg\theta = \frac{k}{\omega^2} = \frac{jr}{(v_0 + jt)^2}.$$

Въ случаѣ равномернаго движенія, когда  $j = 0$ ,  $p$  совпадаетъ съ  $c$  и  $\theta = 0$  т. е. ускоренія всѣхъ точекъ, связан-



ныхъ съ окружностью, будутъ направлены къ  $c$ . Тоже самое мы будемъ имѣть, если равноускоренное движеніе продолжается очень долго ( $t = \infty$ ).

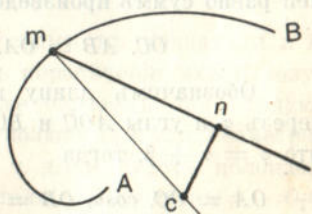
**18. Нахождение полюды и серполоиды.** До сихъ поръ мы считали, что полюда и серполоида намъ заданы; посмотримъ, какъ онѣ могутъ быть найдены. Для нахождения ихъ требуются два условія движенія, которыя въ самомъ общемъ случаѣ могутъ состоять въ слѣдующемъ: кривыя  $A_1B_1$  и  $C_1D_1$ , неизмѣнно связанныя одна съ другой, при движеніи соответственно огибаютъ кривыя  $AB$  и  $CD$  (фиг. 19). Очевидно, что мгновенный центръ  $c$  лежитъ на пересѣченіи нормалей въ точкахъ



фиг. 19-я.

касанія  $m$  и  $n$ . Давая кривымъ  $A_1B_1$  и  $C_1D_1$  новое положеніе, мы найдемъ новое положеніе полюса. Геометрическое мѣсто полюсовъ и есть полюда. Здѣсь могутъ быть различныя частныя случаи, напримѣръ, вмѣсто кривыхъ  $A_1B_1$  и  $C_1D_1$  могутъ быть заданы точки  $m$  и  $n$ , неиз-

мѣнно связанныя прямою, или даже одна изъ кривыхъ  $AB$  и  $CD$  можетъ обратиться въ точку. Въ случаѣ, изображенномъ на фиг. 20, прямая  $mn$  концомъ  $m$  скользитъ по кривой  $AB$  и постоянно проходитъ черезъ точку  $n$ . Очевидно, что полюсъ находится на пересѣченіи нормали къ  $AB$  въ точкѣ  $m$  и перпендикуляра къ  $mn$  въ точкѣ  $n$ . Замѣтимъ, что какъ бы ни была сложна задача нахождения полюды, она всегда можетъ быть легко рѣшена приблизительно графическимъ путемъ.



фиг. 20-я.

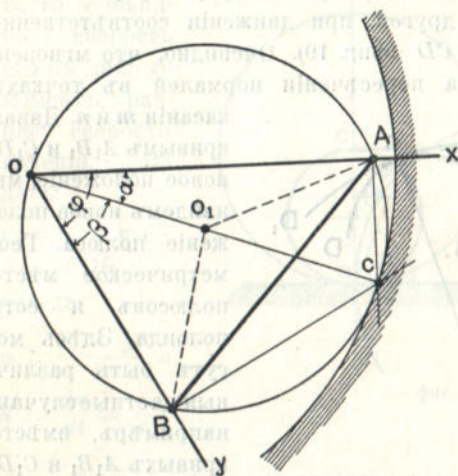
Для того, чтобы найти серполоиду, надо только обратить движеніе: считать, что кривыя  $AB$  и  $CD$  (фиг. 19), неизмѣнно

связанные между собою, движутся такъ, что постоянно соприкасаются соответственно съ неподвижными кривыми  $A_1B_1$  и  $C_1D_1$ .

Очевидно, что полоида этого обращеннаго движенія будетъ серполоидой даннаго.

Примѣръ 1-й. Прямая  $AB$  (фиг. 21) движется такъ, что постоянно опирается своими концами на стороны угла  $ХОУ$ . Требуется найти полоиду и серполоиду этого движенія.

Возставимъ перпендикуляры къ прямымъ  $ОХ$  и  $ОУ$  въ точкахъ  $A$  и  $B$ ; пересѣченіе этихъ перпендикуляровъ дастъ точку  $C$ , которая будетъ мгновеннымъ центромъ вращенія для даннаго положенія прямой  $AB$ . Поступая такимъ же образомъ при другомъ положеніи  $AB$ , мы найдемъ другой мгновенный центръ и т. д. Геометрическое мѣсто этихъ точекъ и будетъ полоида даннаго движенія.



фиг 21-я.

Найдемъ, какая это будетъ кривая. Соединимъ точку  $C$  съ точкой  $O$ . Такъ какъ четырехугольникъ  $OACB$  имѣетъ два противолежащихъ прямыхъ угла, то произведеніе его діагоналей равно суммѣ произведеній противоположныхъ сторонъ, т. е.

$$OC \cdot AB = OA \cdot BC + OB \cdot AC \dots (1)$$

Обозначимъ длину прямой  $AB$  черезъ  $l$ , уголъ  $ХОУ$  черезъ  $\varphi$  и углы  $AOC$  и  $BOC$  соответственно черезъ  $\alpha$  и  $\beta$ , такъ что  $\varphi = \alpha + \beta$ , тогда

$$OA = OC \cdot \cos\alpha, \quad OB = OC \cdot \cos\beta, \quad BC = OC \cdot \sin\beta, \quad AC = OC \cdot \sin\alpha.$$

Подставляя эти выраженія въ ур-іе (1), найдемъ:

$$l \cdot OC = (OC)^2 (\cos\alpha \sin\beta + \sin\alpha \cos\beta) = (OC)^2 \sin\varphi.$$



Откуда:

$$OC = \frac{l}{\sin \varphi} = \text{const.}$$

Отсюда видимъ, что разстояніе мгновеннаго центра вращенія отъ вершины  $O$  есть величина постоянная; слѣдовательно, полоида будетъ кругъ, описанный изъ  $O$  радіусомъ  $= \frac{l}{\sin \varphi}$ .

Найдемъ теперъ серполоиду. Для этого обратимъ движеніе: будемъ разсматривать движеніе сторонъ угла  $XOY$ , при томъ условіи, что онѣ всегда проходятъ черезъ концы  $A$  и  $B$  прямой  $AB$ .

Чтобы найти мгновенный центръ вращенія, возставимъ нормали въ точкахъ  $A$  и  $B$ ; получимъ въ пересѣченіи ихъ точку  $C$ . Углы при  $A$  и  $B$  всегда прямые, слѣдовательно:

$$\angle ACB = 180^\circ - \varphi = \text{const.}$$

Изъ этого слѣдуетъ, что вершина его движется по окружности діаметра  $OC$ . Такъ какъ окружность эта неподвижна, ибо центръ ея  $O_1$  находится на постоянномъ разстояніи отъ неподвижныхъ точекъ  $A$  и  $B$ , то, очевидно, это и есть полоида обратнаго движенія, или серполоида прямого.

Примѣръ 2-й. Прямая  $AB = l$  (фиг. 22) при своемъ движеніи опирается концами на двѣ окружности  $D$  и  $D_1$  съ центрами  $O$  и  $O_1$ . При этомъ мы будемъ предполагать, что радіусы этихъ окружностей  $r$  и  $r_1$  равны между собою и каждый изъ нихъ больше  $l$  и что  $OO_1 = l$ .

Найдемъ для даннаго положенія прямой  $AB$  мгновенный центръ вращенія.

Проведемъ нормали къ окружностямъ въ точкахъ  $A$  и  $B$  (т. е. проведя радіусы  $OA$  и  $O_1B$ ), въ пересѣченіи ихъ  $C$  получимъ искомый полюсъ. Подобнымъ же образомъ для слѣдующаго положенія  $AB$  найдемъ новый полюсъ  $C_1$  и т. д. Геометрическое мѣсто этихъ точекъ ( $C$ ,  $C_1$  и т. д.) и будетъ полоидой даннаго движенія. Обозначимъ разстояніе  $OC$  черезъ  $\rho$  и  $O_1C$  черезъ  $\rho_1$  и будемъ искать соотношеніе между ихъ величинами. Разсматривая треугольники  $OAO_1$  и  $O_1BA$ , мы замѣтимъ, что они равны между собою, ибо у нихъ сторона  $O_1A$  общая и по условію задачи  $AB = OO_1$  и  $AO = O_1B$ . А если это такъ, то

углы  $CAO_1$  и  $CO_1A$  равны между собой и  $\triangle ACO_1$  — равнобедренный, т. е.

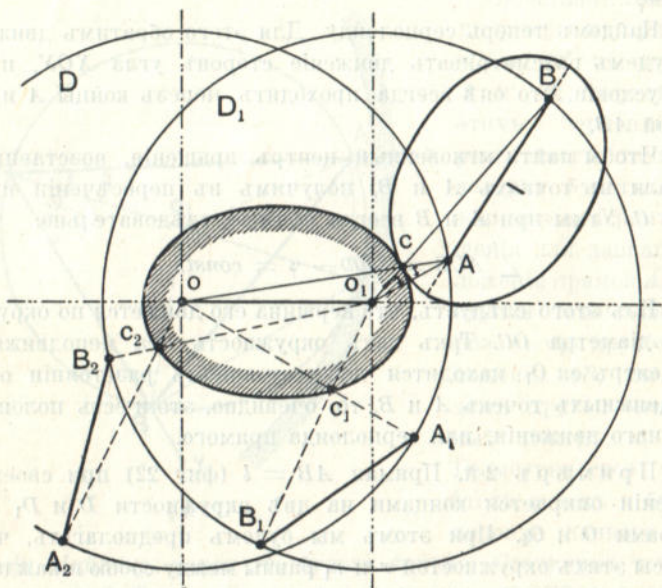
$$O_1C = AC \dots \dots \dots (1),$$

Но

$$O_1C = \rho_1 \text{ и } AC = r - \rho,$$

такъ что на основании равенства (1) имѣемъ:

$$\rho_1 + \rho = r \dots \dots \dots (2).$$



фиг. 22-я.

Слѣдовательно, геометрическое мѣсто точекъ  $C$  обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что сумма разстояній каждой его точки отъ двухъ неподвижныхъ точекъ  $O$  и  $O_1$  есть величина постоянная; а это значитъ, что рассматриваемое геометрическое мѣсто точекъ есть эллипсъ, имѣющій фокусы въ  $O$  и  $O_1$  и большую ось  $= r$ .

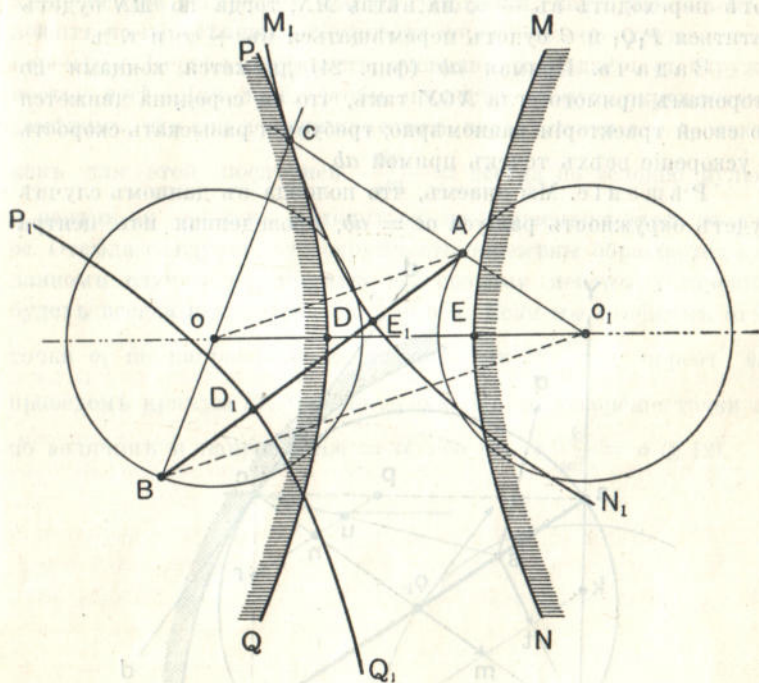
Для опредѣленія серполоиды обратимъ движеніе, т. е. сдѣлаемъ прямую  $AB$  неподвижной и будемъ двигать окружности  $D$  и  $D_1$ , не измѣняя ихъ взаимнаго расположенія, такимъ образомъ, чтобы онѣ постоянно проходили черезъ точки  $A$  и  $B$ . Въ такомъ случаѣ точки  $O$  и  $O_1$  будутъ описывать окружности



радиуса  $r$  соответственно около точек  $A$  и  $B$ ; так что все сведется къ тому, что роли прямых  $OO_1$  и  $AB$  перемѣнятся; поэтому, очевидно, что серполоида будетъ тоже эллипсъ и при томъ тождественный съ первымъ, только съ фокусами въ  $A$  и  $B$ .

Примѣръ 3-й. Условія задачи остаются тѣ же, только въ этомъ случаѣ  $AB = l > r$  (фиг. 23).

Мгновенный центръ вращения долженъ находиться въ точкѣ  $C$ , въ точкѣ пересѣченія радиусовъ  $O_1A$  и  $OB$ . Опредѣлимъ геометрическое мѣсто точекъ  $C$ , т. е. полоиду. Обозначимъ разстоянiе  $O_1C$  черезъ  $\rho$  и  $OC$  черезъ  $\rho_1$ .



фиг. 23-я.

Замѣтивъ, что  $\triangle BOO_1 = \triangle O_1AB$ , найдемъ, что  $\angle BOO_1 = \angle AO_1B$  и, слѣдовательно, что  $\triangle O_1CB$  равнобедренный, такъ что

$$O_1C = CB$$

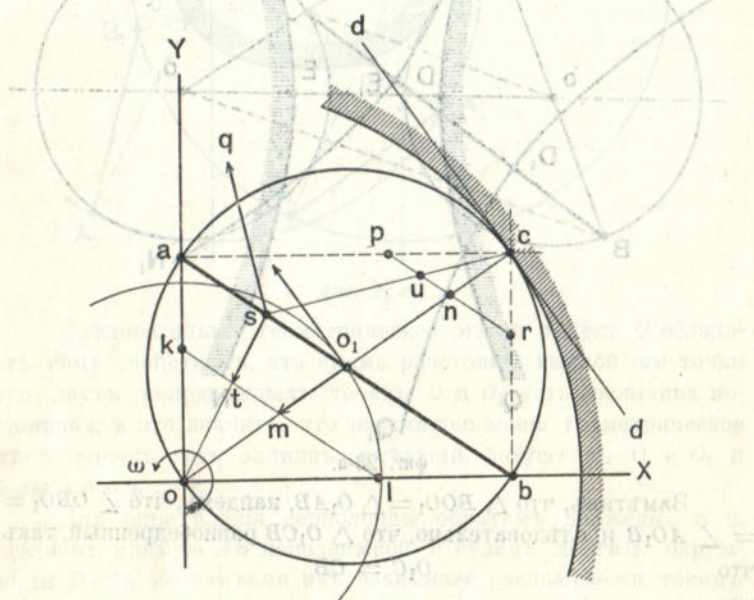
или

$$\rho - \rho_1 = r = const.$$

Таким образом мы видим, что разность расстояний мгновенного центра от двух неподвижных точек  $O$  и  $O_1$  есть величина постоянная. Отсюда следует, что полоида, или геометрическое место мгновенных центров, есть гипербола с фокусами в  $O$  и  $O_1$  и с действительной осью  $DE = r$ . Не трудно видеть, что серполоида есть тождественная гипербола с фокусами в  $A$  и  $B$  и с действительной осью  $D_1E_1 = r$ . Движение происходит так, как будто бы гипербола  $M_1N_1P_1Q_1$ , связанная с прямой  $AB$ , катится по неподвижной гиперболѣ  $MNPQ$ . Вѣтвь  $M_1N_1$  катится по вѣтви  $PQ$  и мгновенный центр  $C$  перемѣщается по  $PQ$  въ  $+\infty$ ; изъ  $+\infty$  точка  $C$  по асимптотѣ переходитъ въ  $-\infty$  на вѣтвь  $MN$ ; тогда по  $MN$  будетъ катиться  $P_1Q_1$  и  $C$  будетъ перемѣщаться въ  $+\infty$  и т. д.

**Задача.** Прямая  $ab$  (фиг. 24) движется концами по сторонамъ прямого угла  $XOY$  такъ, что ея середина движется по своей траекторіи равномерно; требуется разыскать скорость и ускореніе всѣхъ точекъ прямой  $ab$ .

**Рѣшеніе.** Мы знаемъ, что полоида въ данномъ случаѣ будетъ окружность радиуса  $oc = ab$ , проведенная изъ центра



фиг. 24-я.



$o$ , а серполоида—окружность радиуса  $o_1c = \frac{ab}{2}$ , проведенная из центра  $o_1$ , из середины прямой  $ab$ . Мы видели (§ 5), что в этом случае точка  $o_1$  будет описывать окружность около  $o$  радиусом  $= \frac{ab}{2}$ . Если скорость точки  $o_1$  отложим к  $c$  и проведем через конец ее  $n$  прямую  $pr$ , параллельную  $ab$ , то легко найдем величину скорости всякой точки. Таким образом, например, скорость точки  $s = sq = su$  и направлена под прямым углом к  $cs$ .

Чтобы найти ускорения точек прямой  $ab$ , найдем положение центра ускорений. Центр ускорений, как мы знаем, лежит на пересечении окружности перегибов с окружностью перембны. Первая окружность, очевидно, совпадает с окружностью  $oacv$ . Для того, чтобы провести вторую окружность, заметим, что она должна проходить через точки  $c$  и  $o_1$ , так как для этой последней  $\frac{dv}{dt} = 0$  всегда по условию нулю, и центр ее должен находиться на перпендикуляре  $cd$  к  $oc$ . Отсюда следует, что окружность перембны обращается в данном случае в прямую  $oc$ , поэтому центр ускорений будет всегда находиться в точке  $o$ . Если мы отложим от точки  $o_1$  по направлению к  $o$  длину  $o_1m = \frac{v^2}{\omega o_1}$  и через  $m$  проведем прямую  $kl$ , параллельную  $ab$ , то ускорение точки  $s$  по величине и направлению  $= st$ , ибо  $tg\phi = \frac{k}{\omega^2} = o$  (§ 12).

## ГЛАВА 2-ая

### Плоскіе механизмы.

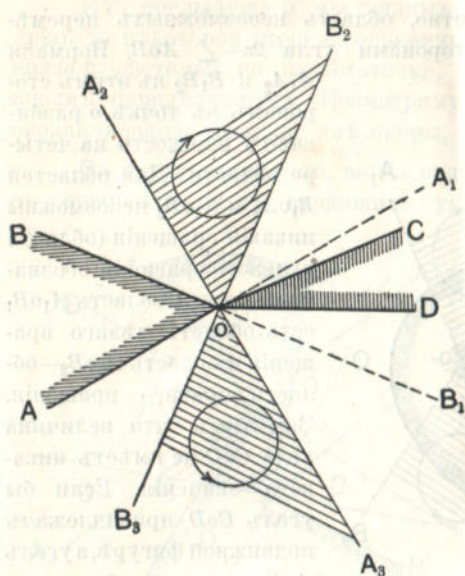
#### ОТДѢЛЬ 1-ый

#### *Синтезъ механизма.*

**19. Принужденное движеніе.** Мы говорили во вступленіи, что машинная система, или механизмъ, обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что каждая ея точка, или даже каждое входящее въ составъ ея твердое тѣло, имѣетъ вполнѣ опредѣленное, принужденное движеніе. Такъ какъ мы разсматриваемъ пока только плоскіе механизмы, то посмотримъ, какимъ образомъ мы должны опереть подвижную фигуру на фигуры неподвижныя, чтобы она имѣла въ каждый данный моментъ вполнѣ опредѣленное движеніе, или, иначе сказать, чтобы для каждаго ея положенія существовалъ вполнѣ опредѣленный мгновенный центръ вращенія. Мы будемъ при рѣшеніи этого вопроса итти методомъ синтетическимъ, т. е. предположимъ сначала, что подвижная фигура подперта въ одной точкѣ, и посмотримъ, въ какой мѣрѣ эта опора ограничиваетъ ея движеніе; затѣмъ введемъ вторую опору, потомъ третью и т. д., пока не получимъ вполнѣ опредѣленный мгновенный центръ вращенія.

Начнемъ со случая, изображеннаго на фиг. 25. Подвижная фигура опирается вершиной выступающаго угла  $A_0B$  на вершину неподвижнаго угла  $DoC$ . Посмотримъ, какія движенія угла  $A_0B$  будутъ возможны. Если мы продолжимъ стороны  $A_0$  и  $B_0$ , то легко усмотримъ, что никакія перемѣщенія внутри угла  $A_1_0B_1$  невозможны. Если поэтому мы проведемъ черезъ точку  $o$  нормали  $A_2A_3$  и  $B_2B_3$  соответственно къ  $AA_1$  и  $BB_1$ , то



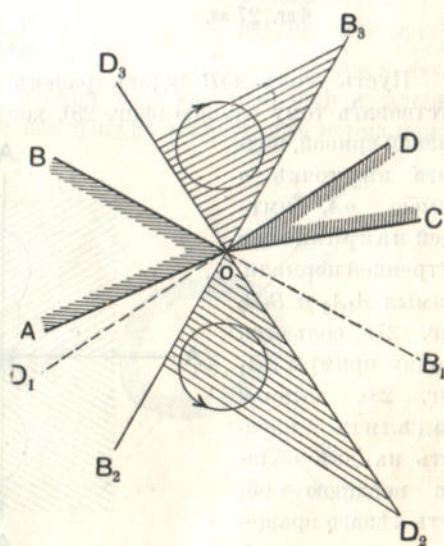


Фиг. 25-а.

эти нормали разделять плоскость на четыре области, причем около точек области  $A_2OB_2$  возможны вращения вправо (по стрелке часов)—это вращение мы будем называть правым вращением и обозначим штрихами, идущими снизу направо вверх,—затем, около точек области  $A_3OB_3$  возможно вращение только влево (против стрелки часов, левое вращение, штрихи идут снизу налево вверх) и, наконец, около точек областей  $A_2OB_3$  и

$B_2OA_3$  возможны вращения и вправо, и влево. Если бы одна из прямых  $OA_1$  и  $OB_1$ , или обе вместе прошли внутри угла  $CoD$ , то область невозможных перемещений определилась бы соответствующей стороной, или обеими сторонами угла  $CoD$ . Такой случай мы имеем на фиг. 26, которая не требует дальнейших пояснений.

Если подвижная фигура (фиг. 27) опирается вершиной входящего угла  $AoB$  на неподвиж-



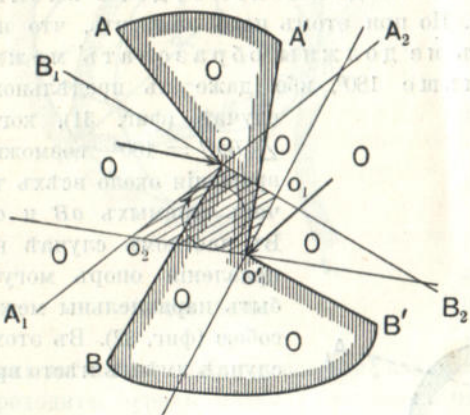
Фиг. 26-а.





Изъ предыдущего мы видимъ, что одна опора можетъ лишь до нѣкоторой степени ограничить свободу движенія подвижной системы, но недостаточна, чтобы сдѣлать движеніе вполне опредѣленнымъ. Посмотримъ теперь, въ какой мѣрѣ ограничиваютъ движеніе двѣ опоры.

Въ частномъ случаѣ, когда подвижная фигура подперта въ вершинахъ двухъ входящихъ угловъ (фиг. 29), возможно



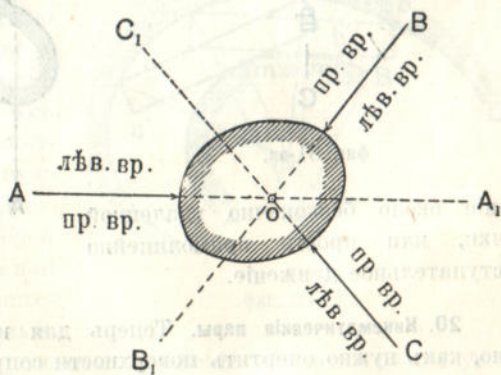
фиг. 29-ая.

совершенно устранить движеніе или сдѣлать его вполне опредѣленнымъ при помощи искусственнаго подбора мѣстъ для вершинъ  $o$  и  $o'$  и направленія сторонъ угловъ.

Въ нашемъ случаѣ возможно вращеніе по стрѣлкѣ часовъ около всѣхъ точекъ внутри четырехугольника  $oo_1o_2$ .

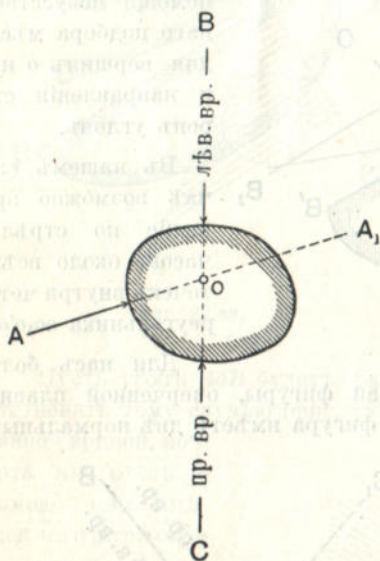
Для насъ болѣе интереснымъ является случай фигуры, очерченной плавной кривою (фиг. 30). Если такая фигура имѣетъ двѣ нормальныхъ опоры  $Ао$  и  $Со$ ,

то тогда очевидно, что существуетъ еще безконечное число возможныхъ вращеній, именно: около точекъ внутри угла  $АоС_1$  — противъ стрѣлки часовъ и около точекъ внутри угла  $СоА_1$  — по стрѣлкѣ часовъ; около точки



фиг. 30-ая.

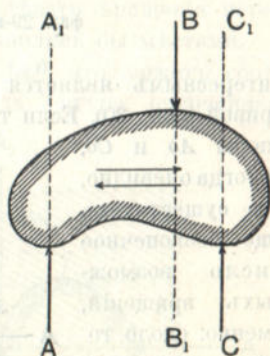
о возможно вращение и въ ту и въ другую сторону. Для того, чтобы точка  $o$  стала единственнымъ возможнымъ центромъ вращения, нужна еще третья нормальная опора  $Bo$ , пересекающаяся съ двумя первыми въ той же точкѣ  $o$ . Отсюда получается такой выводъ: если плоская фигура при своемъ движеніи постоянно опирается на три нормальныхъ опоры, направленія которыхъ пересекаются въ одной точкѣ, то ея движеніе будетъ вполне определеннымъ. Но при этомъ надо замѣтить, что направленія опоръ не должны образовать между собою угла, больше  $180^\circ$ , ибо даже въ предѣльномъ



фиг. 31-ая.

случаѣ (фиг. 31), когда  $\angle BoC = 180^\circ$ , возможны вращения около всѣхъ точекъ прямыхъ  $oB$  и  $oC$ . Въ частномъ случаѣ направленія опоръ могутъ быть параллельны между собою (фиг. 32). Въ этомъ случаѣ имѣетъ мѣсто вра-

ращение около всѣхъ точекъ прямыхъ  $oB$  и  $oC$ . Въ частномъ случаѣ направленія опоръ могутъ быть параллельны между собою (фиг. 32). Въ этомъ случаѣ имѣетъ мѣсто вра-

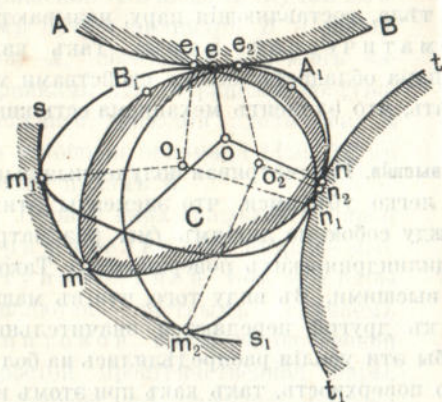


фиг. 32-ая.

**20. Кинематическія пары.** Теперь для насъ должно быть ясно, какъ нужно очертить поверхности соприкосновения двухъ тѣлъ, каждое изъ которыхъ должно имѣть определенное движеніе по отношенію къ другому. Допустимъ, что фигура  $C$



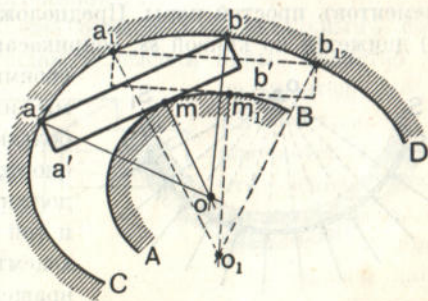
должна при своемъ движеніи постоянно опираться на кривыя  $ss_1$  и  $tt_1$  (фиг. 33). Чтобы сдѣлать это движеніе принужденнымъ, мы должны прибавить еще третью опору такимъ образомъ,



фиг. 33-ая.

чтобы ея направленіе проходило черезъ точку  $o$ , гдѣ пересѣкаются нормали въ точкахъ касанія контура фигуры  $C$  съ кривыми  $tt_1$  и  $ss_1$ . Очевидно, что для этого намъ къ двумъ даннымъ кривымъ надо прибавить еще третью кривую  $AB$ , которую будетъ огибать при заданномъ движеніи какая нибудь часть  $A_1B_1$  профиля фигуры  $C$ , ибо, какъ мы знаемъ, нор-

маль въ точкѣ соприкосновенія взаимно огибающихъ всегда проходитъ черезъ полюсъ; при этомъ часть  $A_1B_1$  мы должны выбрать такъ, чтобы углы между нормальми были всегда меньше  $180^\circ$ . Если мы теперь всѣ три кривыя  $AB, ss_1$  и  $tt_1$  соединимъ въ одно цѣлое, то по отношенію къ этой системѣ фигура  $C$  будетъ имѣть принужденное движеніе. Если бы мы сдѣлали неподвижной фигуру  $C$ , то система трехъ упомянутыхъ кривыхъ имѣла бы также по отношенію къ  $C$  принужденное движеніе. На фиг. 34 мы имѣемъ второй примѣръ полученія принужденнаго движенія. Дано, что прямо-



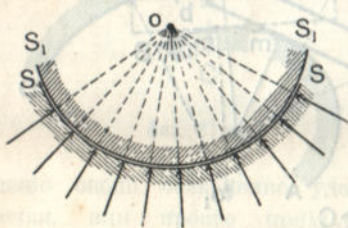
фиг. 34-ая.

угольникъ  $aba'b'$  при своемъ движеніи опирается на кривую  $CD$  двумя точками  $a$  и  $b$ . Чтобы сдѣлать его движеніе принужденнымъ, надо прибавить кривую  $AB$ , огибающую сторону  $a'b'$ . Въ

такомъ случаѣ какъ  $aba'b'$ , такъ и  $CD$  будутъ имѣть вполне опредѣленные движенія одно относительно другого.

Два тѣла, каждое изъ которыхъ имѣетъ принужденное движеніе относительно другого, составляютъ вмѣстѣ кинематическую пару; тѣла, составляющія пару, называются элементами кинематической пары. Такъ какъ всякая кинематическая пара обладаетъ всѣми свойствами механизма, то можно сказать, что элементъ механизма есть кинематическая пара.

**21. Пары простыя и высшія.** Разсматривая полученныя выше пары (фиг. 33 и 34), мы легко убѣдимся, что элементы этихъ паръ соприкасаются между собою по линіямъ (мы разсматриваемъ среднія сѣченія цилиндрическихъ поверхностей). Такого рода пары называются высшими. Въ виду того, что въ машинахъ отъ одной части къ другой передаются значительныя усилія, желательно, чтобы эти усилія распределялись на болѣе или менѣе значительную поверхность, такъ какъ при этомъ изнашивание поверхностей элементовъ паръ будетъ значительно меньше. Въ этомъ отношеніи высшія пары имѣютъ большой недостатокъ, ибо, какъ мы видѣли, ихъ элементы соприкасаются только по линіямъ, а иногда даже и по точкамъ. На основаніи этого въ машинахъ гораздо чаще примѣняются пары, элементы которыхъ соприкасаются между собою цѣлыми поверхностями. Такія пары называются низшими или простыми. Посмотримъ, какимъ условіямъ должна удовлетворять поверхность элементовъ простой пары. Предположимъ, что кривая  $s_1s_1$  (фиг. 35) движется по кривой  $ss$ , соприкасаясь съ послѣдней всѣми



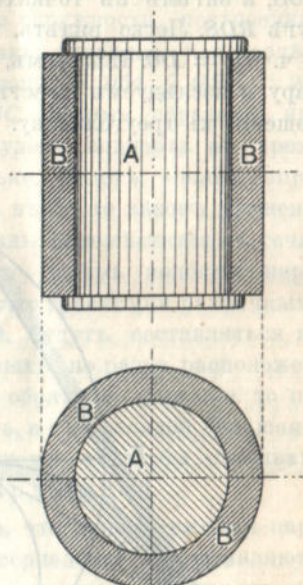
фиг. 35 ая.

своими точками. Очевидно, что мы имѣемъ здѣсь бесконечно большое число нормальныхъ опоръ, направленія которыхъ должны пересѣкаться въ одной и той же точкѣ, въ соответствующемъ мгновенномъ центрѣ вращенія. Отсюда слѣдуетъ, что обѣ кривыя не могутъ быть ничѣмъ инымъ, какъ окружностями.

ибо только окружность обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что всѣ нормали къ ней пересѣкаются въ одной точкѣ. Въ частномъ случаѣ, когда радиусъ окружности обращается въ бесконечность,



она обращается въ прямую линію. Соответственно съ этимъ могутъ быть только двѣ простыя пары: 1) сплошное тѣло вращения (фиг. 36) въ поломъ тѣлѣ вращения. (Въ нашемъ случаѣ имѣемъ полый цилиндръ *B* и сплошной—*A*; послѣдній снабженъ закраинами для устранения поступательнаго движенія вдоль оси) и 2) сплошная призма *A* (фиг. 37) въ полой призмѣ *B*.



фиг. 36-ая.

Первая пара называется парой вращательной, вторая — поступательной. Обѣ эти пары являются частнымъ случаемъ винтовой пары, единственной простой пространственной пары, состоящей изъ винтовой нарезки на поверхности круглаго цилиндра и соответствующей гайки.

Если уголъ наклона нарезки обращается въ нуль, винтовая пара становится парой вращательной,

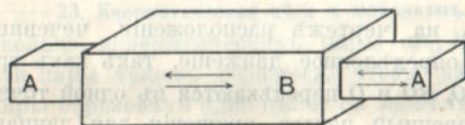
при уголѣ наклона, равномъ  $\frac{\pi}{2}$ , получается пара поступательная.

Низшія пары обладаютъ еще однимъ замѣчательнымъ свойствомъ, которымъ не обладаютъ высшія пары. Свойство это называется обратимостью и заключается въ томъ,

что всякая точка, соединенная съ однимъ изъ элементовъ низшей пары,

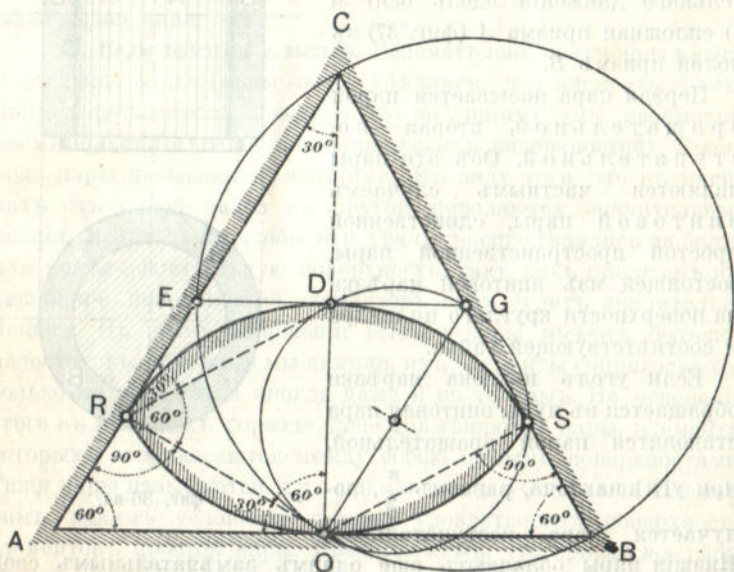
безразлично съ какимъ, будетъ относительно другого описывать одну и ту же траекторію. Чтобы выяснитъ, откуда протекаетъ это свойство, разсмотримъ одну высшую пару.

**22. Примѣръ высшей пары.** Составимъ такую пару. Изъ точекъ *O* и *D* опишемъ равными радиусами дуги *RDS* и *ROS* (фиг. 38) и примемъ чечевицу *RDSOR* за одинъ изъ элемен-



фиг. 37-ая.

товъ пары. Второй элементъ построимъ слѣдующимъ образомъ. Проведемъ въ точкѣ  $O$  касательную  $AB$  къ дугѣ  $ROS$ , а затѣмъ въ точкахъ  $R$  и  $S$  касательныя  $AC$  и  $BC$  къ дугѣ  $RDS$ . Легко видѣть, что  $\triangle ABC$  будетъ равносторонній, т. ч.  $OD = DC$ . Покажемъ, что двѣ эти фигуры составляютъ пару, и изслѣдуемъ вмѣстѣ съ тѣмъ движеніе чечевицы по отношенію къ треугольнику.



фиг. 38-ая.

При указанномъ на чертежѣ расположеніи, чечевица должна имѣть вполне определенное движеніе, такъ какъ три нормальныхъ опоры  $RO$ ,  $SO$  и  $O$  пересѣкаются въ одной точкѣ  $O$ , которая и есть мгновенный центръ вращения для данного положенія чечевицы. Будемъ теперь перемѣщать чечевицу такъ, чтобы дуга  $RD$  скользила по прямой  $CA$  отъ  $C$  къ  $A$ , а дуга  $ROS$ —по  $AB$  отъ  $A$  къ  $B$ . Покажемъ, что точка  $S$  будетъ при этомъ скользить по  $BC$ . Дѣйствительно, если дуга  $RD$  скользитъ по  $CA$ , то ея центръ  $O$  долженъ двигаться по  $OG$ , по прямой, параллельной  $CA$ . Такимъ же образомъ мы убѣдимся, что точка  $D$  будетъ двигаться по  $GE$ , если  $GE$  есть касательная въ точкѣ  $D$  къ дугѣ  $RDS$ . Отсюда мы видимъ, что



движеніе происходитъ такъ, какъ будто бы прямая  $OD$  своими концами скользитъ по сторонамъ угла  $EGO$ . Мы знаемъ, что полоида такого движенія будетъ окружность, проведенная изъ  $G$  радіусомъ  $GO$ , а серполоида тоже окружность, построенная на  $OG$ , какъ на діаметрѣ. Такъ какъ очевидно, что послѣдняя окружность проходитъ черезъ точку  $S$ , ибо  $\angle GSO = 90^\circ$ , то точка  $S$  будетъ двигаться по  $BC$ . Такимъ образомъ, при всякомъ положеніи чечевицы она будетъ подперта въ трехъ точкахъ и ея движеніе, слѣдовательно, будетъ вполнѣ определеннымъ. Когда точка  $O$  придетъ въ  $G$ , то законъ движенія не измѣнится, а лишь центръ полоиды перемѣстится въ точку  $E$ ; когда же она совпадетъ съ  $E$ , то центръ полоиды перемѣстится въ  $O$ . Отсюда мы видимъ, что траекторіи различныхъ точекъ, соединенныхъ съ чечевицей, будутъ состояться въ общемъ случаѣ изъ трехъ одинаковыхъ, но разно расположенныхъ дугъ эллипсовъ. Если бы мы обратили движеніе, то полоидой стала бы меньшая окружность, а серполоидой большая и точки, соединенныя съ треугольникомъ, стали бы описывать дуги кривой, называемой п е р и - к а р д і о и д о й.

Мы можемъ заключить отсюда, что данная высшая пара необратима оттого, что полоида и серполоида представляютъ собою различныя кривыя, тогда какъ въ простыхъ парахъ обѣ эти кривыя обращаются въ точки. Если бы даже случайно полоида и серполоида были бы совершенно тождественны, то всетаки онѣ иначе располагались бы на плоскости, поэтому и соединенныя съ ними точки описывали бы хотя и одинаковыя кривыя, но различно расположенныя на плоскости.

**23. Кинематическая цѣль и механизмъ.** Пусть мы имѣемъ нѣсколько кинематическихъ паръ:  $aa_1, bb_1, cc_1$  и т. д. Свяжемъ эти пары такимъ образомъ, чтобы каждый элементъ одной пары образовалъ одно цѣлое съ элементомъ другой. Это можно сдѣлать различными способами, напримѣръ:

$$a, a_1 - b, b_1 - c, c_1 - d, d_1$$

$$a, a_1 - b_1, b - c, c_1 - d_1, d \text{ и т. д.}$$

Совокупность связанныхъ между собою такимъ образомъ кинематическихъ паръ называется к и н е м а т и ч е с к о ю ц ѣ л ь ю; тѣла же, соединяющія въ себѣ два элемента сосѣд-

нихъ парь, называются звеньями кинематической цѣпи.

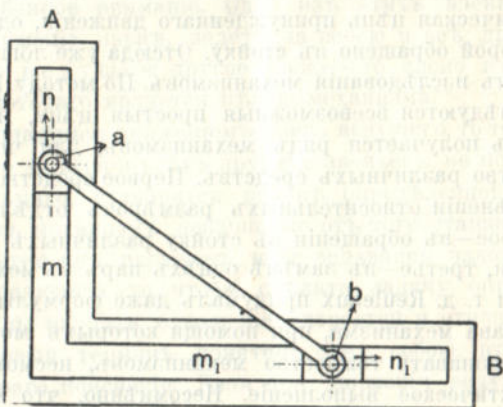
Если мы соединимъ послѣдній элементъ съ первымъ (въ нашемъ случаѣ  $d_1$  съ  $a$  или  $d$  съ  $a$ ), то получимъ замкнутую цѣпь; въ противномъ случаѣ она называется открытой. Если, наконецъ, замкнутая цѣпь составлена такъ, что каждое звено ея можетъ имѣть только одно опредѣленное движеніе относительно другихъ, то такая цѣпь называется цѣпью принужденнаго движенія. Пока такая цѣпь во всей своей совокупности можетъ перемѣщаться въ плоскости, то она остается цѣпью. Если же мы одно изъ ея звеньевъ сдѣлаемъ неподвижнымъ, то другія ея звенья будутъ уже совершать вполнѣ опредѣленные движенія на плоскости и она становится механизмомъ. Такимъ образомъ, механизмъ есть замкнутая кинематическая цѣпь принужденнаго движенія, одно звено которой сдѣлано неподвижнымъ. Очевидно, что дѣлая неподвижными по очереди различныя звенья одной и той-же цѣпи, мы получимъ изъ одной цѣпи столько различныхъ механизмовъ, сколько въ ней заключается звеньевъ. Все здѣсь сказанное относится одинаковымъ образомъ и къ пространственнымъ механизмамъ.

**24. Нѣкоторыя дополненія къ предыдущему.** Замѣтимъ, что иногда два тѣла становятся кинематической парой благодаря какой-нибудь внѣшней силѣ. Примѣромъ такой пары могутъ служить вагонное колесо и рельсъ, валь въ открытомъ подшипникѣ и т. п. Такія пары называются парами съ силовымъ замыканіемъ. Далѣе слѣдуетъ обратить вниманіе на то, что въ составъ кинематической цѣпи могутъ входить и такія пары, которыя сами по себѣ, независимо отъ соединенія съ другими парами, не даютъ опредѣленнаго движенія. Для поясненія разсмотримъ слѣдующій простой примѣръ. Положимъ, что мы имѣемъ такую цѣпь: двѣ полосы  $A$  и  $B$  (фиг. 39) образуютъ между собою прямой уголъ и снабжены прямоугольными прорѣзами  $m$  и  $m_1$ . Въ эти прорѣзы помѣщены ползушки  $n$  и  $n_1$  съ цапфами  $a$  и  $b$ , на которыя надѣтъ ушками стержень  $ab$ . Не трудно видѣть, что такого рода приборъ можетъ служить для вычерчиванія дугъ эллипса.

Сдѣлаемъ теперь такую замѣну. Устранимъ одну изъ ползушекъ, положимъ  $n_1$ , и придадимъ стержню  $ab$  такую

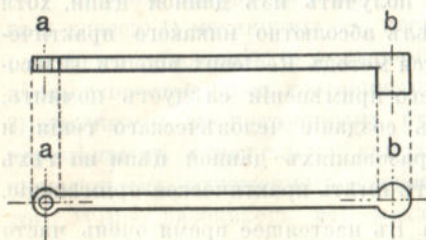


форму, какъ показано на (фиг. 40), т. е. сохранимъ ушко  $a$ , а вмѣсто ушка  $b$  присоединимъ къ нему цапфу  $b$  съ осью, перпендикулярной къ его оси, съ діаметромъ, равнымъ ширинѣ прорѣза. Такая цапфа и прямоугольный прорѣзъ сами по себѣ не образуютъ пары; но если мы вставимъ цапфу въ прорѣзъ и надѣнемъ въ то же время ушко  $a$  на цапфу ползушки  $n$ , то цапфа  $b$  получитъ вполнѣ определенное движеніе по отношенію къ прорѣзу  $m_1$ .



фиг. 39-ая.

Мы видимъ, что при такой замѣнѣ механизмъ даже упрощается. Раньше онъ состоялъ изъ четырехъ паръ: 1) поступательной, состоящей изъ прорѣза  $m$  и ползушки  $n$ ; 2) вращательной, — изъ цапфы  $a$  и ушка  $a$ ; 3) вращательной, — изъ цапфы  $b$  и ушка  $b$ , и 4) поступательной, — изъ прорѣза  $m_1$  и ползушки  $n_1$ . Послѣ замѣны мы имѣемъ только три пары: 3-я и 4-я пары замѣнены одной, состоящей изъ прорѣза  $m_1$  и цапфы  $b$  на концѣ стержня  $ab$ . Совершенно такимъ же образомъ мы могли бы замѣнить одной парой двѣ первыя пары и получили бы механизмъ, состоящій изъ двухъ паръ, каждая изъ которыхъ сама по себѣ, безъ соединенія съ другой, не была бы парой.



фиг. 40-ая.

**25. Методъ Reuleaux.** Весь синтезъ механизма, который мы изложили выше, принадлежит Reuleaux и изложенъ имъ въ цитированномъ выше его трудѣ. Въ концѣ концовъ Reuleaux приходитъ къ заключенію, что механизмъ есть замкнутая кинематическая цѣпь принужденнаго движенія, одно изъ звеньевъ которой обращено въ стойку. Отсюда уже логически вытекаетъ планъ изслѣдованія механизмовъ. По методу Reuleaux сначала изслѣдуются всевозможныя простыя цѣпи, изъ которыхъ затѣмъ получается рядъ механизмовъ, для чего имѣется множество различныхъ средствъ. Первое средство заключается въ измѣненіи относительныхъ размѣровъ отдѣльныхъ звеньевъ, второе—въ обращеніи въ стойку различныхъ звеньевъ той же цѣпи, третье—въ замѣнѣ однѣхъ паръ въ механизмахъ другими и т. д. Reuleaux придумалъ даже формулы для обозначенія состава механизма, при помощи которыхъ можно, напримѣръ, распознавать тождество механизмовъ, несмотря на различное практическое выполненіе. Несомнѣнно, что методъ Reuleaux остроуменъ и плодотворенъ; если имъ въ настоящее время мало пользуются, то это происходитъ оттого, что Reuleaux зашелъ въ своихъ изслѣдованіяхъ слишкомъ далеко, не говоря уже о тѣхъ противорѣчіяхъ, въ которыя онъ впалъ. Самая главная его ошибка заключается въ томъ, что онъ считаетъ машинную систему чѣмъ-то вродѣ явленія природы и потому не находитъ возможнымъ оставить безъ вниманія ни одного механизма, который можно получить изъ данной цѣпи, хотя бы этотъ механизмъ не имѣлъ абсолютно никакого практическаго значенія. Намъ кажется методъ Reuleaux вполне цѣлесообразнымъ, но только при его примѣненіи слѣдуетъ помнить, что машинная система есть созданіе человѣческаго генія, и останавливаться при преобразованіяхъ данной цѣпи на тѣхъ механизмахъ, которые могутъ имѣть практическое примѣненіе.

**26. Классификація Willis'a.** Въ настоящее время очень часто при изученіи механизмовъ пользуются классификаціей Willis'a\*). Классификація эта основана на весьма серьезныхъ соображеніяхъ о томъ, что и какъ нужно изучать въ механизмахъ. Траекторіи точекъ отдѣльныхъ частей механизма опредѣляются самымъ его устройствомъ, но направленія, въ которыхъ точки пробѣгаютъ свои траекторіи, и законы измѣненія скоро-

\*) Principles of mechanism.



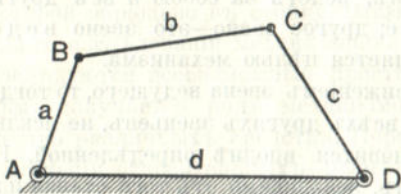
стей ихъ являются совершенно неопредѣленными, пока мы не задали себѣ направленіе движенія и законъ измѣненія движенія какой либо точки, или какого либо звена механизма. Во всякомъ механизмѣ существуютъ два звена, которыя обращаютъ на себя особенное вниманіе. Одно изъ этихъ звеньевъ, получая свое движеніе извнѣ, ведетъ за собою и всѣ другія звенья; это звено ведущее; другое звено—это звено ведомое, движеніе котораго является цѣлью механизма.

Если мы зададимся движеніемъ звена ведущего, то тогда, понятно, задача о движеніи всѣхъ другихъ звеньевъ, не исключая и звена ведомаго, становится вполне опредѣленной. Но если мы изучаемъ механизмъ, независимо отъ того станка или машины, въ которую онъ включенъ, и не задаваясь закономъ движенія звена ведущего, то, чтобы сдѣлать задачу опредѣленной, мы должны изучать отношеніе скоростей и отношеніе направленій. Первый терминъ понятенъ самъ собою, второй требуетъ нѣкотораго поясненія. Если при движеніи ведущаго звена въ какомъ-либо направленіи ведомое звено движется все время также въ одномъ опредѣленномъ направленіи, то Willis называетъ такое соотношеніе направленій постояннымъ отношеніемъ направленій; если второе звено совершаетъ колебательное движеніе въ то время, какъ первое движется въ одномъ и томъ же направленіи,—отношеніе направленій будетъ переменнымъ.

Соотвѣтственно съ этимъ Willis дѣлитъ всѣ механизмы на 4 класса: 1) механизмы съ постояннымъ отношеніемъ скоростей и направленій, 2) механизмы съ переменнымъ отношеніемъ скоростей, но съ постояннымъ отношеніемъ направленій, 3) механизмы съ постояннымъ отношеніемъ скоростей, но съ переменнымъ отношеніемъ направленій и 4) механизмы съ переменнымъ отношеніемъ скоростей и направленій. Кроме того Willis разбиваетъ всѣ механизмы на три группы. Къ первой группѣ относятся механизмы, въ которыхъ движеніе отъ звена ведущаго къ ведомому передается непосредственнымъ соприкосновеніемъ, ко второй—гдѣ движеніе передается при помощи твердыхъ тѣлъ, и къ третьей—гдѣ движеніе передается при помощи гибкихъ или жидкихъ тѣлъ. Эти группы до нѣкоторой степени напоминаютъ цѣпи Reuleaux.

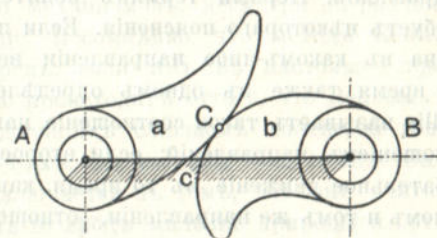
**27. Планъ дальнѣйшаго изложенія.** Въ дальнѣйшемъ мы будемъ при изслѣдованіи механизмовъ слѣдовать методу Reuleaux,

удерживаясь при преобразованіи цѣпей въ предѣлахъ, указываемыхъ практическимъ значеніемъ получаемыхъ механизмовъ, и рассмотримъ только три цѣпи, которыя будутъ какъ разъ соответствовать группамъ Willis'a. Цѣпи эти изображены на фигурахъ 41, 42 и 43. Первая цѣпь заключаетъ въ себѣ четыре

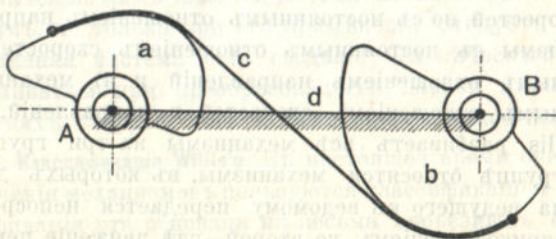


фиг. 41-я.

вращательныя пары  $A, B, C$  и  $D$  и четыре звена  $a, b, c$  и  $d$ . Цѣпь эта называется плоскимъ шарнирнымъ четырехугольникомъ и является самымъ простымъ случаемъ шарнирнаго механизма; движеніе здѣсь передается отъ  $a$  къ  $c$ , или обратно, при помощи твердаго тѣла  $b$ . Вторая цѣпь заключаетъ двѣ вращательныя пары  $A$  и  $B$  и одну высшую пару  $C$  и три звена  $a, b$  и  $c$ . Движеніе отъ  $a$  къ  $b$  передаетъ



фиг. 42-я.



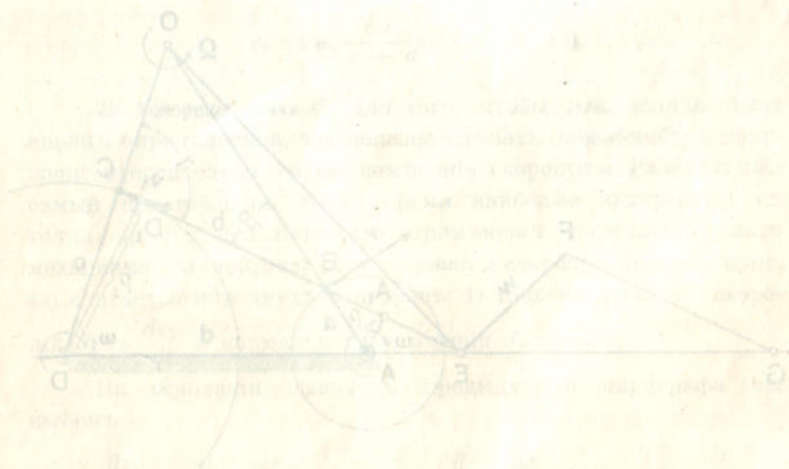
фиг. 43-я.

ся непосредственнымъ соприкосновеніемъ. Изъ этой цѣпи выводятся зубчатыя колеса. Третья цѣпь состоитъ также изъ



двухъ вращательныхъ паръ  $A$  и  $B$  и двухъ паръ особаго рода, которыя образуются гибкимъ тѣломъ  $c$  съ двумя твердыми тѣлами  $a$  и  $b$ . Здѣсь движеніе передается, слѣдовательно, при помощи гибкаго тѣла, которое, навиваясь на одно изъ твердыхъ тѣлъ, свивается съ другого.

Кромѣ этого мы удѣлимъ нѣкоторое вниманіе и болѣе сложнымъ механизмамъ.



## ОТДѢЛЪ 2-ой.

### Плоскій шарнирный четырехугольн. и его преобразования.

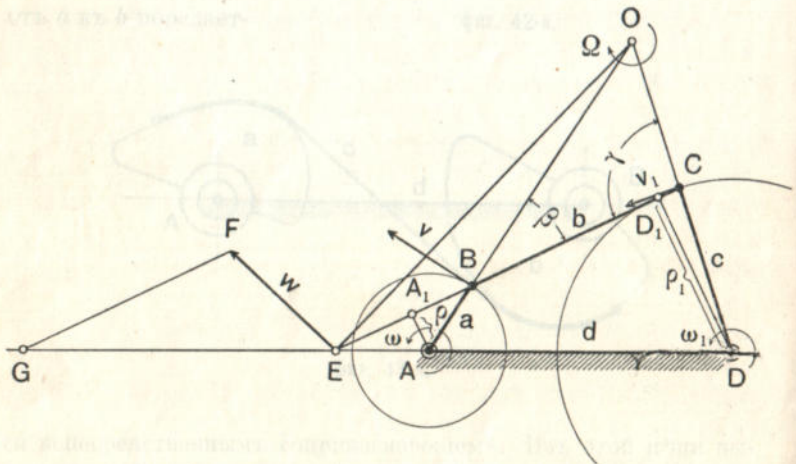
28. Законъ Willis'a. Допустимъ, что звено  $d$  (фиг. 44) сдѣлано стойкой, звено  $a$  вращается съ угловой скоростью  $\omega$  и звено  $c$  со скоростью  $\omega_1$ . Чтобы найти отношеніе между этими скоростями, рассмотримъ движеніе звена  $b$ . Очевидно, что соответствующій данному расположенію механизма мгновенный центръ вращенія звена  $b$  находится на пересѣченіи продолженій  $a$  и  $c$  въ точкѣ  $O$ . Если мы обозначимъ его мгновенную угловую скорость черезъ  $\Omega$ , то легко найдемъ скорости точекъ  $B$  и  $C$ ; онѣ будутъ:

$$v = \Omega \cdot \overline{OB} \text{ и } v_1 = \Omega \cdot \overline{OC} \dots \dots (1)$$

Съ другой стороны:

$$v = \omega \cdot a \text{ и } v_1 = \omega_1 \cdot c \dots \dots (2)$$

(мы буквами  $a$ ,  $b$  и т. д. обозначаемъ также и длину звеньевъ).



фиг. 44-я.



Изъ этихъ двухъ системъ ур-ій легко найдемъ:

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{a \cdot \overline{OC}}{c \cdot \overline{OB}} = \frac{a \cdot \sin \beta}{c \cdot \sin \gamma} = \frac{\rho}{\rho_1} \dots \dots (3),$$

гдѣ черезъ  $\rho$  и  $\rho_1$  обозначены соответственно длины перпендикуляровъ изъ  $A$  и  $D$  на  $CB$ .

Далѣе, принимая во вниманіе подобіе треугольниковъ  $AA_1E$  и  $DD_1E$ , окончательно получимъ слѣдующее выраженіе для отношенія скоростей:

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{AE}{DE} \dots \dots (4).$$

Если мы назовемъ линію, проходящую черезъ  $A$  и  $D$ , черезъ центры вращенія звеньевъ  $a$  и  $c$ , линіей центровъ, а продолженіе линіи  $BC$ , по направленію которой передается усиліе отъ звена  $a$  къ звену  $c$ , линіей дѣйствія, то ур-іе (4) можемъ выразить слѣдующей теоремой: линія дѣйствія дѣлитъ линію центровъ на части обратно пропорціональныя угловымъ скоростямъ. Это и есть законъ Willis'a; какъ увидимъ дальше, онъ имѣетъ мѣсто во всѣхъ трехъ нашихъ цѣняхъ. Разъ намъ извѣстны угловыя скорости звеньевъ  $a$  и  $c$ , то легко будетъ найти скорости всѣхъ ихъ точекъ, а затѣмъ также скорости и всѣхъ точекъ звена  $b$ . Обозначая  $AE$  черезъ  $x$ , имѣемъ

$$v_1 = \omega \cdot \frac{c \cdot x}{x + d} \dots \dots (5).$$

**29. Ускореніе точки  $C$ .** Для того, чтобы эта задача была вполне опредѣленной, мы должны сдѣлать какое-нибудь допущеніе относительно закона измѣненія скорости  $\omega$ . Разсмотримъ самый простой и въ то же время наиболѣе интересный съ точки зрѣнія пракческаго примѣненія разсматриваемаго механизма случай, когда  $\omega = const$ . Ускореніе точки  $C$  (фиг. 44) слагается изъ двухъ векторовъ: 1) тангенціального ускоренія  $J_t = \frac{dv_1}{dt}$  и нормального ускоренія  $J_n = \omega_1^2 c$ .

На основаніи выводовъ предыдущаго параграфа мы имѣемъ

$$= J_t \frac{dv_1}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\omega \cdot c \cdot x}{x + d} \right) = \omega c \frac{d}{dx} \frac{dx}{dt}, \quad J_n = c \cdot \omega^2 \frac{x^2}{(x + d)^2}.$$

Намъ нужно опредѣлить еще  $\frac{dx}{dt}$ —скорость точки  $E$ , какъ точки пересѣченія прямыхъ  $CE$  и  $DE$ , по линіи центровъ. Скорость эта складывается изъ скорости точки  $E$ , какъ точки линіи дѣйствія, и скорости этой точки по направленію линіи дѣйствія. Первую скорость  $w$  мы знаемъ по величинѣ и направленію; что касается второй скорости и скорости искомой, то намъ извѣстны ихъ направленія. Имѣя такія данныя, мы легко опредѣлимъ скорость точки  $E$  по линіи центровъ при помощи слѣдующаго построенія.

Изъ точки  $E$  ведемъ прямую, перпендикулярную къ  $OE$ , и откладываемъ на ней отрѣзокъ  $\overline{EF} = w = \Omega \cdot \overline{OE}$ ; затѣмъ изъ точки  $F$  ведемъ прямую, параллельную  $CE$ , до пересѣченія съ линіей центровъ. Очевидно, что  $\overline{EG} = \frac{dx}{dt}$ . Такимъ образомъ имѣемъ:

$$J_t = \omega \cdot c \cdot \frac{d}{(x+d)^2} \cdot \overline{EG}, \quad J_n = c \cdot \omega^2 \cdot \frac{x^2}{(x+d)^2}$$

и полное ускореніе

$$J = \frac{\omega \cdot d \cdot c}{(x+d)^2} \cdot \sqrt{\frac{\omega^2 x^4}{d^2} + \overline{EG}^2} \dots \dots (1)$$

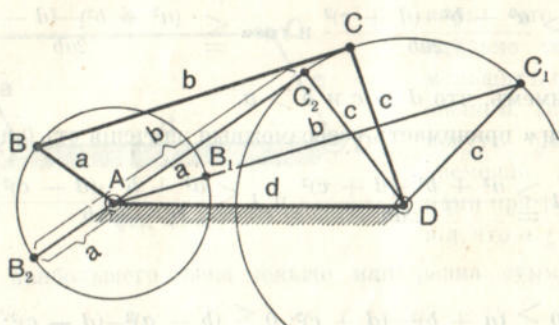
понятно, что будетъ имѣть направленіе діагонали прямоугольника, построеннаго на  $J_t$  и  $J_n$ .

**30. Точки возврата; мертвыя положенія.** Когда направленіе линіи дѣйствія (фиг. 45) проходитъ черезъ точку  $A$ , скорость точки  $C = 0$  (ф. 4, § 28). Допустимъ, что соотношеніе частей механизма таково, что звено  $a$  можетъ совершать полный оборотъ. Тогда очевидно, что скорость точки  $C$  въ двухъ положеніяхъ  $C_1$  и  $C_2$  будетъ равна нулю. Эти двѣ точки называются точками возврата, такъ какъ, дойдя до нихъ, точка  $C$  мѣняетъ направленіе своего движенія, т. е., иными словами, эти двѣ точки опредѣляютъ предѣлы колебанія точки  $C$ .

Допустимъ теперь, что ведущимъ звеномъ является звено  $c$ . При такомъ предположеніи механизмъ будетъ представлять собою ножной приводъ токарнаго станка, точильнаго станка, швейной машины и т. д., гдѣ  $c$  есть не что иное, какъ педаль, воспринимающая мускульную силу ноги. Если мы обратимъ опять вниманіе на фиг. 45, то замѣтимъ, что когда точка  $C$



будет находиться въ одной изъ точекъ возврата, направление вращения звена  $a$  становится неопредѣленнымъ, ибо усилие, передаваемое отъ педали звеномъ  $b$ , направляется вдоль оси  $a$ .



фиг. 45-я.

Такия положенія механизма, когда направление движенія ведомаго звена, при опредѣленномъ движеніи звена ведущаго, становится неопредѣленнымъ, называются мертвыми положеніями. Какъ увидимъ дальше, большинство механизмовъ, получаемыхъ изъ шарнирнаго четырехугольника, имѣютъ такія мертвыя положенія. Чтобы вывести механизмъ изъ мертваго положенія въ опредѣленномъ направлении, прибѣгаютъ чаще всего къ инерціи массъ и съ этою цѣлью на ось  $A$  насаживаютъ массивное колесо, называемое маховикомъ.

**31. Теорема Грасгофа.** Выяснимъ, при какихъ условіяхъ уголъ  $\alpha$  (фиг. 46) можетъ принимать всевозможныя значенія отъ  $0$  до  $2\pi$ , или, иными словами, при какихъ условіяхъ звенья  $a$  и  $b$  могутъ совершать полное вращеніе около оси пары  $B$ .

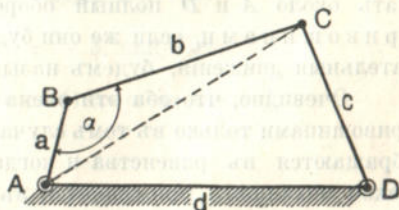
Соединивъ  $A$  съ  $C$  прямою, мы можемъ написать равенство:

$$\overline{AC}^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

и неравенства:

$$\overline{AC}^2 \geq (d - c)^2;$$

$$\overline{AC}^2 \leq (d + c)^2,$$



фиг. 46-я.

которыя обращаются въ равенства, если звенья  $d$  и  $c$  расположатся по одной прямой.

Отсюда мы легко найдемъ:

$$\cos \alpha \geq \frac{a^2 + b^2 - (d + c)^2}{2ab} \text{ и } \cos \alpha \leq \frac{(a^2 + b^2) - (d - c)^2}{2ab}.$$

Примемъ, что  $d > c$  и  $b > a$ .

Если  $\alpha$  принимаетъ всевозможныя значенія отъ 0 до  $2\pi$ , то:

$$-1 \geq \frac{a^2 + b^2 - (d + c)^2}{2ab} \text{ и } 1 \leq \frac{a^2 + b^2 - (d - c)^2}{2ab},$$

или:

$$0 \geq (a + b)^2 - (d + c)^2; \quad 0 \leq (b - a)^2 - (d - c)^2;$$

и, наконецъ:

$$d + c \geq a + b \dots (1); \quad b + c \geq d + a \dots (2).$$

Допустимъ, что  $d > b$ ; тогда оба неравенства удовлетворяются при условіи, что  $a < c$ . Если мы предположимъ, что  $b > d$ , то опять придемъ къ условію, что  $a < c$ .

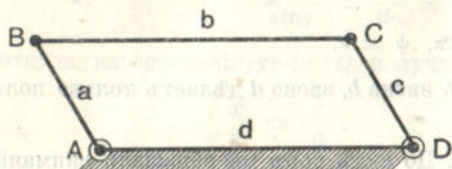
На основаніи этого мы приходимъ къ слѣдующему выводу: уголь  $\alpha$  можетъ принимать всевозможныя значенія между 0 и  $2\pi$ , если  $a$  есть наименьшее звено и если сумма наибольшаго и наименьшаго звена будетъ меньше или равна суммѣ двухъ другихъ. Это и есть теорема Грасгофа.

Посмотримъ, къ какимъ дальнѣйшимъ заключеніямъ она насъ приводитъ. Предположимъ, что стойкой сдѣлано одно изъ большихъ звеньевъ, звено  $d$ . Если звенья  $a$  и  $c$  будутъ совершать около  $A$  и  $D$  полный оборотъ, будемъ называть ихъ кривошипамн, если же они будутъ совершать только колебательныя движенія, будемъ называть ихъ коромыслами.

Очевидно, что оба эти звена могутъ быть одновременно кривошипамн только въ томъ случаѣ, когда неравенства (1) и (2) обращаются въ равенства и когда  $a = c$  и  $b = d$  (фиг. 47). Такой механизмъ примѣняется въ паровозахъ для соединенія колесъ. Здѣсь  $A$  и  $D$  оси двухъ колесъ,  $a$  и  $c$  соотвѣтственно ихъ спицы, и  $b$  спарникъ. Такъ какъ  $b$  пересѣкаетъ  $d$  всегда



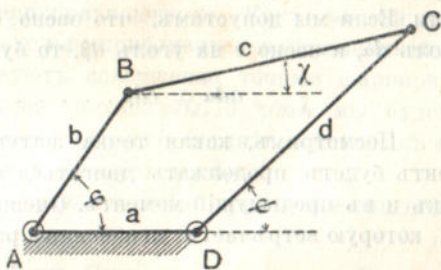
на бесконечности, то оба кривошипа вращаются всегда съ одною и той же угловою скоростью.



фиг. 47-я.

Предположим теперь, что стойкой сдѣлано одно изъ меньшихъ звеньевъ, звено  $a$ . Тогда  $b$  и  $d$  могутъ быть одновременно кривошипами при томъ условіи, что  $a < c$  и сумма  $a$  и наибольшаго звена меньше или равна суммѣ двухъ другихъ.

**32. Механизм Сильвестра.** Этотъ механизмъ представляетъ частный случай шарнирнаго четырехугольника (фиг. 48), когда стойкой сдѣлано одно изъ меньшихъ звеньевъ и когда рядомъ лежащія звенья попарно равны между собою, т. е.  $a = b$  и  $c = d$ . При этихъ условіяхъ  $b$  и  $d$  будутъ оба кривошипами, причемъ, при одномъ оборотѣ звена  $d$ , звено  $b$  дѣлаетъ два оборота. Дѣйствительно, проектируя звенья на направленіе  $AD$ , имѣемъ:



фиг. 48-я.

$$a + d \cos \psi = b \cos \varphi + c \cos \chi.$$

Имѣя въ виду, что  $\chi = \varphi - \psi$ , найдемъ:

$$(1 - \cos \varphi) (a + c \cos \psi) = c \sin \varphi \sin \psi,$$

или:

$$\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \frac{a}{c} + \frac{\cos \psi}{\sin \psi},$$

откуда при  $\varphi = 0, \psi = 0,$   
 $\varphi = \pi, \cos\psi = -\frac{a}{c}$  и  $\pi > \psi > \frac{\pi}{2}$   
 $\varphi = 2\pi, \psi = \pi,$

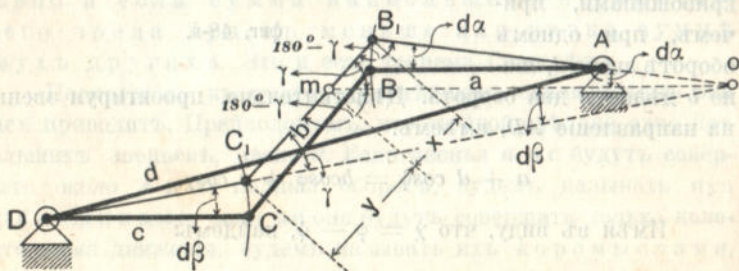
т. е. при одномъ оборотѣ звена  $b$ , звено  $d$  дѣлаетъ только полъ оборота.

**33. Механизмъ Уатта.** До сихъ поръ мы обращали вниманіе на движеніе звеньевъ, прилегающихъ къ стойкѣ. Обратимъ теперь вниманіе на движеніе нѣкоторыхъ точекъ промежуточнаго звена; это звено называется обыкновенно шатуномъ.

Разсмотримъ тотъ моментъ, когда оба звена  $a$  и  $c$  располагаются параллельно (фиг. 49). Такъ какъ мгновенный центръ вращения шатуна  $b$  находится на безконечности, то всѣ его точки въ теченіи безконечно малаго промежутка времени совершаютъ поступательное движеніе и проходятъ одинаковые пути. Если мы допустимъ, что звено  $a$  повернется на малый уголъ  $d\alpha$ , а звено  $c$  на уголъ  $d\beta$ , то будемъ имѣть:

$$ada = cd\beta \dots \dots (1).$$

Посмотримъ, какая точка шатуна и въ слѣдующій моментъ будетъ продолжать двигаться по тому же направленію, какъ и въ предыдущій моментъ. Очевидно, это будетъ та точка  $m$ , которую встрѣчаетъ мгновенный радиусъ  $om$ , параллельный



фиг. 49-я.

$a$  и  $c$  въ начальный моментъ. Найдемъ отношеніе отрезковъ  $mB_1 = x$  и  $mC_1 = y$ , на которыя эта точка дѣлитъ длину шатуна. Обозначая  $\angle B_1C_1o$  черезъ  $\gamma$ , мы найдемъ, вслѣдствіе малости



угловъ  $d\alpha$  и  $d\beta$ , что другіе углы будутъ имѣть ту величину, которая отмѣчена на чертежѣ. Изъ  $\triangle \triangle OB_1m$  и  $OmC_1$  имѣемъ:

$$\frac{om}{\sin\gamma} = \frac{x}{d\alpha} = \frac{y}{d\beta},$$

откуда, на основаніи ур-ія (1), получимъ:

$$\frac{x}{y} = \frac{c}{a} \dots \dots \dots (2)$$

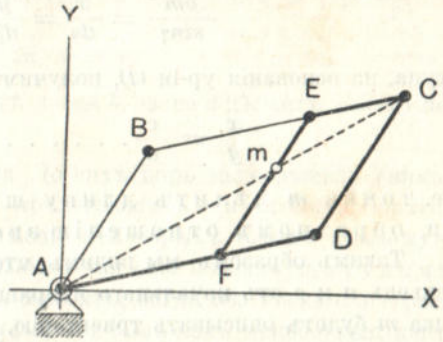
т. е. точка  $m$  дѣлитъ длину шатуна въ отношеніи, обратномъ отношенію звеньевъ  $a$  и  $c$ .

Такимъ образомъ мы видимъ, что пока углы отклоненія звеньевъ  $a$  и  $c$  отъ начальнаго направленія достаточно малы, точка  $m$  будетъ описывать траекторію, близко подходящую къ прямой. Если бы мы пожелали, чтобы какая-нибудь точка совершала прямолинейное движеніе, то мы могли бы совмѣстить ее съ точкой  $m$  механизма Уатта. Такого рода механизмы называются прямолинейно-направляющими. Какъ мы видимъ, механизмъ Уатта даетъ только приблизительно прямолинейное направленіе, но существуютъ совершенно точные шарнирные прямолинейно-направляющіе механизмы, о чемъ мы будемъ говорить дальше, только они гораздо сложнѣе, такъ какъ состоятъ изъ большаго числа звеньевъ и паръ.

Механизмъ Уатта находитъ себѣ примѣненіе въ индикаторахъ.

**34. Параллелограммъ Уатта.** Описанный механизмъ Уаттъ въ первый разъ примѣнилъ въ своей вертикальной паровой машинѣ съ коромысломъ для направленія стержня воздушнаго насоса. Чтобы въ то же время при помощи того же механизма дать и штоку поршня прямолинейное направленіе, Уаттъ соединилъ этотъ механизмъ съ изобрѣтеннымъ имъ же параллелограммомъ, который заключается въ слѣдующемъ. Пусть мы имѣемъ параллелограммъ  $ABCD$  (фиг. 50), состоящій изъ четырехъ шарнирно-соединенныхъ рычаговъ съ неподвижной точкой  $A$ . При движеніи точки  $C$  по нѣкоторой траекторіи, всякая точка  $m$ , лежащая на діагонали  $AC$ , будетъ описывать подобную же траекторію, ибо координаты точки  $m$  будутъ всегда пропорціональны координатамъ точки  $C$ . Наоборотъ, если точка  $m$  будетъ описывать нѣкоторую траекторію, то точка  $C$  будетъ описывать подобную же траекторію. Далѣе, мы

ничего не измѣнимъ, если проведемъ черезъ точку  $m$  линію  $EF \neq CD$  и выполнимъ затѣмъ эту линію въ видѣ рычага, соединеннаго шарнирами  $E$  и  $F$  съ  $BC$  и  $AD$ . Но разъ мы ввели этотъ стержень, то нисколько не измѣняя законовъ движенія, можемъ выбросить часть  $ABE$ . Оставшаяся же часть  $AFECD$  и будетъ параллелограммъ Уатта.



фиг. 50-я.

Теперь обратимся къ схемѣ вертикальной паровой машины

Уатта (фиг. 51) и посмотримъ, какимъ образомъ Уаттъ соединилъ свой направляющій механизмъ съ своимъ параллело-

граммомъ. Здѣсь  $A$ —паровой цилиндръ;  $B$ —воздушный насосъ;

$de$ —коромысло, которое качается около оси  $o_1$  и передаетъ вращеніе

валу  $o$  при помощи шатуна  $ef$  и кривошипа  $of$ . Для

соединенія коромысла  $de$  съ параллелограммомъ Уатта

использованъ стержень  $ab$ , соединенный шарнирами  $a$  и  $b$  съ

вершинами  $d$  и  $c$  параллелограмма. Стержень  $ab$  соединенъ

также шарниромъ  $a$  съ осью  $o_1$  коромысла  $de$ . Шарниръ  $b$

соединенъ шарниромъ  $c$  съ осью  $o_2$  парового цилиндра  $A$ .

Стержень  $ab$  соединенъ шарниромъ  $m$  съ стержнемъ  $ef$ .

Стержень  $ef$  соединенъ шарниромъ  $f$  съ кривошипомъ  $of$ .

Кривошипъ  $of$  соединенъ шарниромъ  $o$  съ валомъ  $o$ .

Воздушный насосъ  $B$  соединенъ шарниромъ  $b$  съ стержнемъ  $ab$ .

Паровой цилиндръ  $A$  соединенъ шарниромъ  $c$  съ стержнемъ  $ab$ .

Коромысло  $de$  соединено шарниромъ  $d$  съ стержнемъ  $ab$ .

Коромысло  $de$  соединено шарниромъ  $e$  съ осью  $o_1$ .

Шатунъ  $ef$  соединенъ шарниромъ  $e$  съ коромысломъ  $de$ .

Шатунъ  $ef$  соединенъ шарниромъ  $f$  съ кривошипомъ  $of$ .

Кривошипъ  $of$  соединенъ шарниромъ  $o$  съ валомъ  $o$ .

Воздушный насосъ  $B$  соединенъ шарниромъ  $b$  съ стержнемъ  $ab$ .

Паровой цилиндръ  $A$  соединенъ шарниромъ  $c$  съ стержнемъ  $ab$ .

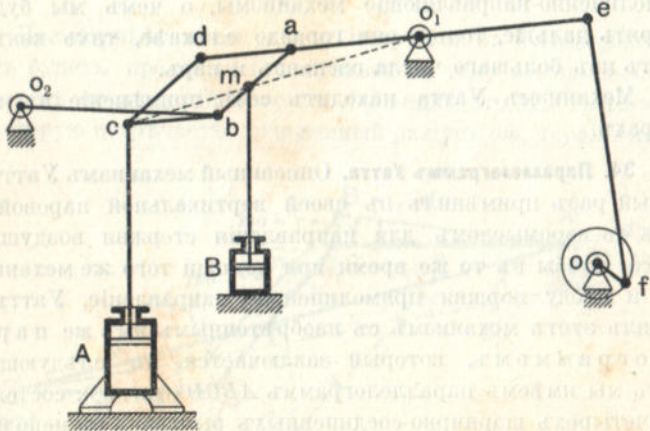
Коромысло  $de$  соединено шарниромъ  $d$  съ стержнемъ  $ab$ .

Коромысло  $de$  соединено шарниромъ  $e$  съ осью  $o_1$ .

Шатунъ  $ef$  соединенъ шарниромъ  $e$  съ коромысломъ  $de$ .

Шатунъ  $ef$  соединенъ шарниромъ  $f$  съ кривошипомъ  $of$ .

Кривошипъ  $of$  соединенъ шарниромъ  $o$  съ валомъ  $o$ .



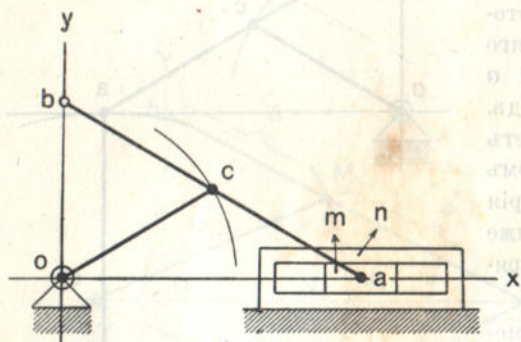
фиг. 51-я.

граммомъ. Здѣсь  $A$ —паровой цилиндръ;  $B$ —воздушный насосъ;  $de$ —коромысло, которое качается около оси  $o_1$  и передаетъ вращеніе валу  $o$  при помощи шатуна  $ef$  и кривошипа  $of$ . Для



того, чтобы штоки насоса и поршня имѣли всегда вертикальное направление, первый изъ нихъ соединенъ съ прямолинейно-направляющимъ механизмомъ  $o_2b-ba-ao_1$ , а второй—съ параллелограммомъ  $abcd$  такимъ образомъ, что точки  $c$  и  $m$  лежатъ на одной прямой съ точкой  $o_1$ .

**35. Механизмы Эвенса.** Прямолинейно-направляющие механизмы Эвенса основаны на слѣдующемъ извѣстномъ намъ (§§ 5 и 18) геометрическомъ положеніи: если прямая  $ab$  (фиг. 52) движется такъ, что своими концами постоянно опирается на стороны прямого угла  $xoy$ , то точка  $c$ , лежащая на срединѣ этой прямой, будетъ описывать окружность радиусомъ  $oc=ac=bc=\frac{ab}{2}$ .



фиг. 52-я.

Понятно по-этому, что точка  $b$  будетъ двигаться, по прямой  $oy$ , если  $a$  движется, благодаря ползушкѣ  $m$  и направляющей  $n$ , по прямой  $ox$ , а  $c$  описываетъ окружность около  $o$  радиусомъ  $oc=$

$\frac{ab}{2}$ , что и выполнено въ разсматриваемомъ механизмѣ.

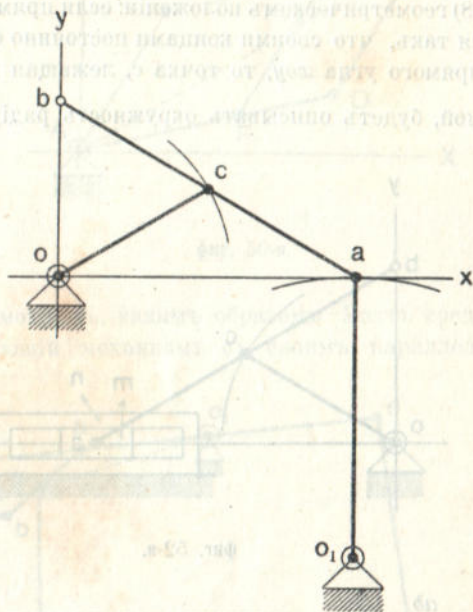
Этотъ механизмъ носить названіе точнаго механизма Эвенса. Онъ совершенно не вошелъ въ употребленіе вслѣдствіе практическихъ неудобствъ, которыя заключаются главнымъ образомъ въ томъ, что между ползушкой  $m$  и направляющей  $n$  развивается значительное треніе. Но отсюда легко уже получить цѣлый рядъ шарнирныхъ приблизительно прямолинейно-направляющихъ механизмовъ.

Одинъ изъ такихъ неточныхъ механизмовъ получается довольно просто изъ точнаго механизма Эвенса. Для этого стоитъ только замѣнить поступательное движеніе точки  $a$  вращательнымъ около нѣкоторой точки  $o_1$  (фиг. 53) при помощи стержня  $o_1a$ . Понятно, что чѣмъ длиннѣе рычагъ  $o_1a$ , тѣмъ

ближе будет совпадать траекторія точки  $b$  съ прямой  $ou$ . Кромѣ того, и самое положеніе точки  $o_1$  вліяетъ на точность механизма. Оно можетъ быть выбрано такъ, что окружность, описываемая точкой  $a$ , будетъ соприкасаться съ прямой  $ox$  въ точкѣ, соотвѣтствующей среднему положенію точки  $a$ , или такъ, что вышеупомянутая окружность будетъ пересѣкать линію  $ox$  въ точкахъ, соотвѣтствующихъ концамъ хода точки  $a$ , или, наконецъ, какъ рекомендуетъ извѣстный русскій ученый Чебышевъ, такъ, чтобы эта окружность пересѣкала линію  $ox$  въ точкахъ, отстоящихъ отъ средняго положенія точки  $a$  на 0,7 полухода. Какъ доказываетъ Чебышевъ, въ этомъ случаѣ траекторія точки  $b$  всего ближе подходит къ прямой  $ou$ .

Подобный же механизмъ можно получить еще слѣдующимъ образомъ. Извѣстно, что всякая точка прямой  $ab$  (фиг. 54) и всякая

точка на ея продолженіи описываетъ эллипсъ; если поэтому мы устроимъ механизмъ такъ, что въ то время, какъ точка  $a$ , подобно предыдущему, будетъ описывать окружность большого радіуса, близко подходящую къ прямой  $ox$ , нѣкоторая, произвольно выбранная, точка прямой  $ab$  или ея продолженія будетъ описывать приблизительно соотвѣтствующій эллипсъ, то точка  $b$  будетъ описывать приблизительно прямую  $ou$ . Замѣнивъ при этомъ дугу эллипса подходящей окружностью, мы получимъ приближенный прямолинейно-направляющій механизмъ. Возьмемъ точку  $M$  (фиг. 54) внутри угла  $XOY$  и опре-

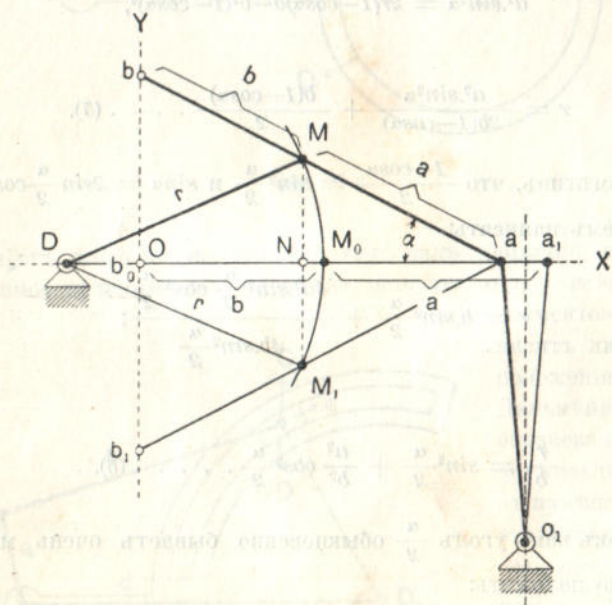


фиг. 53-я.



дѣлимъ радиусъ  $MD$  изъ того условія, что точка  $b$  при колебаніи отклоняется въ одну и въ другую сторону отъ точки  $O$  на одинаковую величину, и что въ двухъ крайнихъ и въ среднемъ положеніи она находится на прямой  $OY$ .

Чтобы получить соответственныя положенія точки  $M$ , надо отъ точекъ  $b$ ,  $b_0$  и  $b_1$  отложить величины  $bM = b_0M_0 = b_1M_1$ . Полученныя такимъ образомъ точки  $M$ ,  $M_0$  и  $M_1$  будутъ, очевидно, принадлежать окружности, которую описываетъ точка  $M$ . Зная три точки окружности мы уже безъ затрудненія можемъ опредѣлить центръ, а слѣдовательно и радиусъ этой окружности.



фиг. 54-я.

Опустимъ изъ  $M$  на  $b_0X$  перпендикуляръ  $MN$  и положимъ, что  $Mb = b$ ,  $Ma = a$  и  $MD = r$ . Такъ какъ  $M$  и  $M_0$  лежатъ на окружности, то

$$\overline{MN}^2 = (2r - \overline{M_0N})\overline{M_0N} \dots \dots (1).$$

Обозначивъ половину угла размаха прямой  $ab$  черезъ  $\alpha$ , найдемъ:

$$\overline{M_0N} = \overline{b_0M_0} - \overline{b_0N} = b(1 - \cos\alpha) \dots (2)$$

и

$$\overline{NM} = a \sin\alpha \dots (3)$$

Подставивъ эти выраженія въ уравненіе (1), будемъ имѣть:

$$a^2 \sin^2\alpha = [2r - b(1 - \cos\alpha)](1 - \cos\alpha)b \dots (4)$$

или:

$$a^2 \sin^2\alpha = 2r(1 - \cos\alpha)b - b^2(1 - \cos\alpha)^2,$$

откуда:

$$r = \frac{a^2 \sin^2\alpha}{2b(1 - \cos\alpha)} + \frac{b(1 - \cos\alpha)}{2} \dots (5)$$

Замѣтивъ, что  $\frac{1 - \cos\alpha}{2} = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$  и  $\sin\alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$ ,

мы можемъ написать:

$$r = b \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{4a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{4b \sin^2 \frac{\alpha}{2}};$$

отсюда:

$$\frac{r}{b} = \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{a^2}{b^2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \dots (6)$$

Такъ какъ уголь  $\frac{\alpha}{2}$  обыкновенно бываетъ очень малъ, то можно положить:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = 0 \text{ и } \cos \frac{\alpha}{2} = 1.$$

Тогда ур—іе (6) дастъ:

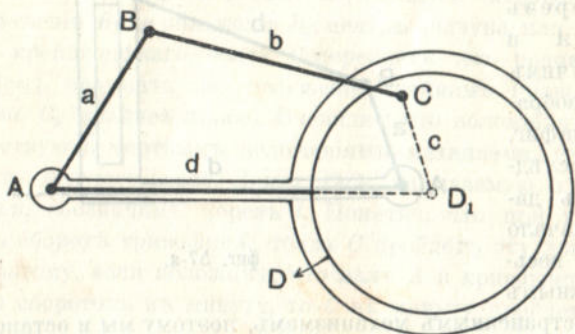
$$a^2 = rb \dots (7),$$

откуда не трудно уже опредѣлить и  $r$ , какъ четвертую пропорціональную.



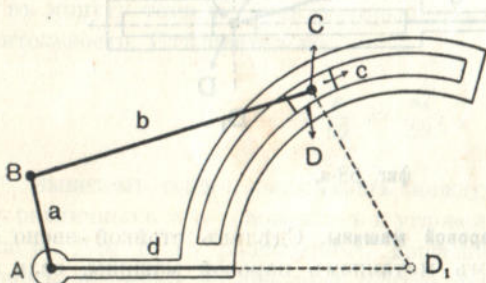
**36. За́мѣна одной вращательной пары парой поступательной.**

Будемъ преобразовывать пару  $D$  въ пару поступательную. Первый шагъ, который мы сдѣлаемъ въ этомъ направленіи будетъ заключаться въ уширеніи цапфы  $D$  (фиг. 55). Выполнимъ цапфу  $D$  съ радіусомъ, большимъ звена  $c$ ; тогда звено  $c$  будетъ представляться самою цапфой. Очевидно, что свойства



фиг. 55-я.

цѣпи, отъ этого не измѣнятся, такъ какъ движеніе, обуславливаемое вращательной парой, не зависитъ отъ размѣровъ ея

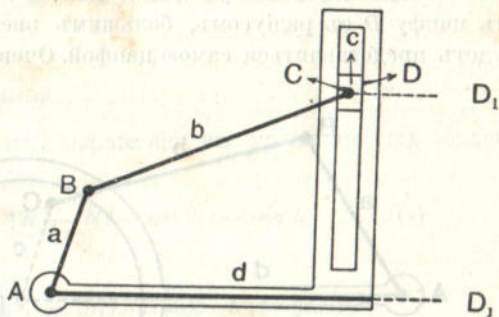


фиг. 56-я.

элементовъ, а зависитъ лишь отъ положенія ея оси. Дальнѣйшее преобразование будетъ заключаться въ измѣненіи конструктивной формы предыдущей цѣпи. Такъ какъ точка  $C$  совершаетъ колебательное движеніе, то, очевидно, мы можемъ выполнить цѣпь въ томъ видѣ, какъ она изображена на фигурѣ 56. Если мы теперь сдѣлаемъ радіусъ дугообразнаго прорѣза равнымъ безконечно большой величинѣ, то получимъ цѣпь, состоящую изъ трехъ враща-

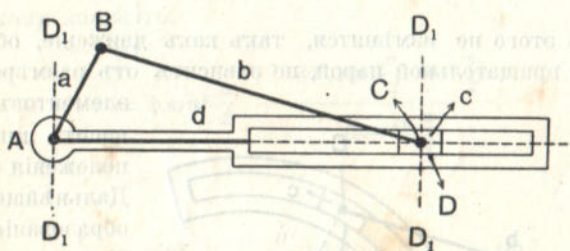
етъ элементовъ, а зависитъ лишь отъ положенія ея оси. Дальнѣйшее преобразование будетъ заключаться въ измѣненіи конструктивной формы предыдущей цѣпи. Такъ какъ точка  $C$  совершаетъ колебательное движеніе, то,

тельныхъ паръ  $A$ ,  $B$  и  $C$  (фиг. 57) и поступательной пары  $D$ . Если для такого преобразования мы возьмемъ шарнирный многоугольникъ, звенья  $d$  и  $e$  котораго равны между собою, то тогда средняя линия прорѣза, очевидно, пройдетъ черезъ точку  $A$  и мы получимъ цѣпь, изображенную на фиг. 58. Эта послѣдняя цѣпь дасть начало многимъ весьма важнымъ



фиг. 57-я.

и распространеннымъ механизмамъ, поэтому мы и остановимся на ея изученіи.



фиг. 58-я.

**37. Механизмъ паровой машины.** Сдѣлавъ стойкой звено  $d$  (фиг. 59), мы получимъ механизмъ паровой машины, если  $a$  будетъ совершать полный оборотъ, для чего нужно, чтобы  $b$  было больше  $a$ . Звено  $c$  принято называть ползуномъ или крейцкопфомъ; звено  $d$  есть станина машины, и та часть его, которая образуетъ элементъ поступательной пары, называется направляющими или параллелями;  $A$  есть главный валъ. Паровая машина устривается обыкновенно такъ, что кривошипъ  $a$  вращается съ постоянною угло-



вою скоростью, такъ что наша задача при изслѣдованіи даннаго механизма будетъ состоять въ опредѣленіи величины скорости и ускоренія ползуна или, что то же, скорости и ускоренія поршня.

Если кривошипъ вращается равномерно, то скорость ползуна, какъ мы увидимъ ниже, будетъ постоянно мѣняться. Когда цапфа кривошипа  $B$  (фиг. 59) опишетъ полуокружность изъ положенія  $B_1$  до положенія  $B_2$ , центръ ползуна, или, вѣрнѣе, центръ крейцкопфнаго болта  $C$  перейдетъ изъ положенія  $C_1$  (мы будемъ называть это положеніе крайнимъ правымъ) въ положеніе  $C_2$  (крайнее лѣвое). Очевидно, что положенія  $C_1$  и  $C_2$  соотвѣтствуютъ мертвымъ положеніямъ механизма, если ползунъ есть ведущее звено. Длину  $C_1C_2$ , называемую ходомъ поршня, обозначимъ черезъ  $l$ . Понятно, что при каждомъ полномъ оборотѣ кривошипа, точка  $C$  пройдетъ эту длину два раза. Поэтому, если положимъ, что валъ  $A$  и кривошипъ  $a$  дѣлаютъ  $n$  оборотовъ въ минуту, то  $C$  въ минуту пройдетъ путь

$$s = 2nl.$$

Для сравненія быстроты движенія ползуна или поршня въ различныхъ машинахъ очень часто говорятъ о средней скорости. Средней скоростью  $v_0$  въ секунду называется такая скорость, двигаясь съ которою равномерно ползунъ прошелъ бы въ минуту тотъ же путь, который онъ проходитъ въ дѣйствительности. Слѣдовательно,

$$v_0 = \frac{s}{60} = \frac{nl}{30}.$$

Выведемъ теперь зависимость между скоростью ползуна  $s$  въ различныхъ его положеніяхъ и угловой скоростью  $\omega$  кривошипа  $a$ . Для этого разсмотримъ движеніе шатуна  $CB$ . При данномъ положеніи мгновенный центръ вращенія шатуна находится въ точкѣ пересѣченія  $O$  продолженія радиуса  $AB$  съ перпендикуляромъ  $OC$  къ  $AC_1$  въ точкѣ  $C$ . Если обозначимъ скорость ползуна черезъ  $w$  и скорость точки  $B$  по окружности черезъ  $v$ , то будемъ имѣть:

$$\frac{w}{v} = \frac{OC}{OB}.$$





Теперь намъ нужно доказать, что здѣсь  $AE$  имѣетъ то же значеніе, что и въ формулѣ (1). Для этого мы должны вспомнить, что смыслъ преобразованія заключается въ томъ, что точка  $D$  удаляется на бесконечность въ направленіи, перпендикулярномъ къ  $AC$ ; слѣдовательно, въ нашемъ случаѣ линіей центровъ будетъ прямая  $B_4AB_3$ , а такъ какъ  $b$  есть линія дѣйствія, то  $AE$  въ форм. (1) имѣетъ то же самое значеніе, что и въ форм. (5) § 28. Отсюда мы можемъ заключить, что то преобразование, путемъ котораго мы получили изъ шарнирнаго четырехугольника изслѣдуемую цѣпь, не есть нѣчто искусственное, а, наоборотъ, соответствуетъ самому существованію этихъ двухъ цѣпей. Замѣтимъ, что мы получили бы то же самое выраженіе для скорости поршня, если бы  $c$  и не было равно  $d$ .

Если мы условимся выразить  $v$  длиной  $AB$ , то скорость  $w$  будетъ выражаться длиной  $AE$ , т. е. длиной перпендикуляра изъ центра вала  $A$  къ  $AC$  до пересѣченія съ направлениемъ шатуна.

Это правило даетъ возможность очень просто строить діаграмму скорости. Для этого возставимъ въ соответствующей точкѣ  $C$  перпендикуляръ и проведемъ черезъ точку  $E$  линію параллельную  $AC$  до встрѣчи съ этимъ перпендикуляромъ. Отрѣзокъ  $Cm$  и представляетъ собою скорость ползуна въ данномъ положеніи. Продѣлывая то же самое при другихъ положеніяхъ механизма, можно построить сколько угодно точекъ  $m$ , геометрическое мѣсто которыхъ и опредѣлитъ кривую скоростей или діаграмму скорости. На фиг. 59 показана только половина этой діаграммы; вторая половина будетъ симметрична съ первой относительно линіи  $AC$ .

Замѣтимъ, что когда  $B$  находится въ положеніи  $B_1$  (правое мертвое положеніе), то скорость точки  $C = 0$ ; при движеніи  $B$  отъ  $B_1$  до  $B_2$  скорость сначала возрастаетъ и достигаетъ maximum'a раньше, чѣмъ  $B$  придетъ въ положеніе  $B_3$  (это будетъ приблизительно тогда, когда кривошипъ будетъ перпендикуляренъ къ шатуну), вслѣдъ за этимъ скорость ползуна будетъ убывать и, когда  $B$  займетъ положеніе  $B_2$  (лѣвое мертвое положеніе), скорость точки  $C$  опять  $= 0$ . При дальнѣйшемъ движеніи  $B$  отъ  $B_2$  до  $B_1$ , скорость ползуна будетъ возрастать и достигнетъ maximum'a тогда, когда  $B$  перейдетъ положеніе  $B_4$ . Такимъ образомъ мы видимъ, что законъ измѣненія скорости ползуна при вращеніи кривошипа изъ праваго мертваго

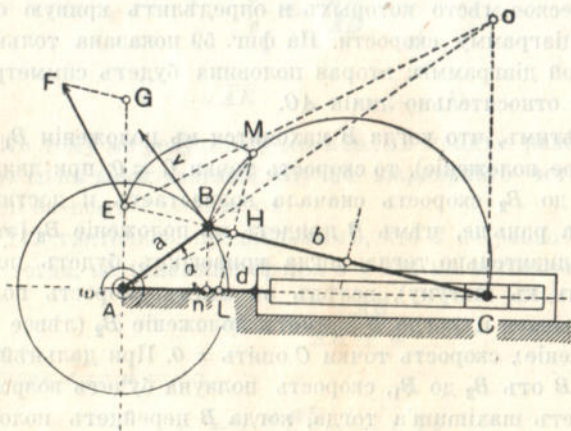
положенія къ лѣвому разнится отъ закона измѣненія скорости при вращеніи его изъ лѣваго къ правому.

Если мы предположимъ, что  $b = \infty$  (какъ увидимъ дальше существуетъ механизмъ, соотвѣтствующій этому предположенію), то и при томъ и другомъ движеніи скорость достигнетъ своего maximum'a, когда кривошипъ образуетъ прямой уголъ съ линіей мертвыхъ точекъ (линія  $B_1B_2$ ). Въ этомъ случаѣ кривая скоростей обратится въ окружность, тождественную съ окружностью  $B_1B_3B_2B_4$ . Дѣйствительно, перемѣщеніе ползуна будетъ тождественно съ передвиженіемъ точки  $n$ , конца перпендикуляра изъ  $B$  на линію  $AC$  и скорость ползуна при этомъ будетъ равна длинѣ  $nB$ . Это будетъ простое гармоническое движеніе.

Для опредѣленія ускоренія поршня мы воспользуемся форм. (1) § 29. Полагая въ ней  $c = \infty$  и  $d = \infty$  и имѣя въ виду, что обѣ безконечности имѣютъ одинъ и тотъ же порядокъ, найдемъ

$$J = \omega \cdot \overline{EG} \dots \dots \dots (2)$$

тотъ же самый результатъ мы могли бы получить непосредственно, пользуясь форм. (1) даннаго параграфа. Построеніе  $EG$  ясно изъ фиг. 60, гдѣ  $EF \perp OE$  и  $FG \parallel CE$ . Но для построенія  $EG$  надо построить полюсъ  $O$ , что при нѣкоторыхъ положе-



фиг. 60-я.



ніях механизма неудобно, поэтому дадимъ  $J$  другое выраже-  
ніе. Ведемъ  $AH$  параллельно  $OE$  и  $HL$  перпендикулярно къ  
 $CB$ ; тогда, изъ подобія  $\triangle EFG$  и  $AHL$ , имѣемъ:

$$\frac{EG}{EF} = \frac{AL}{AH} \dots \dots \dots (3)$$

и изъ подобія  $\triangle AHB$  и  $OEB$ :

$$\frac{AH}{AB} = \frac{OE}{OB} \dots \dots \dots (4).$$

Замѣчая, наконецъ, что

$$EF = OE \cdot \frac{v}{OB}, \dots \dots \dots (5),$$

изъ (3), (4) и (5) легко найдемъ:

$$EG = \frac{v}{AB} \cdot AL = \omega \cdot AL$$

и

$$J = \omega^2 \cdot \overline{AL} \dots \dots \dots (6).$$

Теперь, чтобы построить точку  $L$ , рассмотримъ подобные  
 $\triangle ABE$  и  $OBC$ , а также  $\triangle ABH$  и  $EBO$ ; имѣемъ:

$$\frac{BE}{BC} = \frac{AB}{OB} \text{ и } \frac{BH}{BE} = \frac{AB}{OB},$$

откуда

$$\overline{BE^2} = BH \cdot BC.$$

Если, такимъ образомъ, мы построимъ полуокружность  
на  $BC$ , какъ на діаметрѣ, засѣчемъ на ней точку  $M$  изъ центра  
 $B$  радіусомъ  $BE$ , опустимъ изъ  $M$  перпендикуляръ на  $BC$  и  
продолжимъ его до  $AC$ , то точка пересѣченія этого перпенди-  
куляра съ  $AC$  и будетъ искомая точка  $L$ .

Если бы шатунъ имѣлъ безконечно большую длину, то  
ускореніе ползуна было бы равно ускоренію проекціи  $B$  на  
линію  $AC$ , т. е.

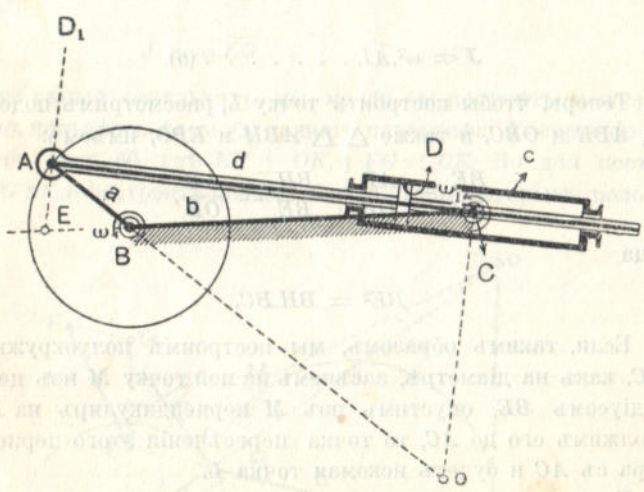
$$J = \omega^2 \cdot a \cdot \cos \alpha \dots \dots \dots (7).$$

**38. Механизм качающейся паровой машины.** Если мы сдѣла-  
емъ стойкой звено  $b$  (фиг. 61), то получимъ механизмъ кача-

ющейся паровой машины. Звенья этого механизма движутся слѣдующимъ образомъ: звено *a* совершаетъ непрерывно-вращательное движеніе около оси *B* (ось главного вала машины); звено *c* (цилиндръ машины) совершаетъ колебательное движеніе, вращаясь около оси пары *C*, и звено *d* (поршень и штокъ) движется такъ, что постоянно проходитъ черезъ точку *C*, въ то время какъ его точка *A* описываетъ окружность; соответствующій этому движенію мгновенный центръ *o* находится, очевидно, на пересѣченіи продолженія *AB* и перпендикуляра къ *CA* въ точкѣ *C*.

Для опредѣленія отношенія  $\omega_1$  къ  $\omega$  воспользуемся закономъ Willis'a, принявъ во вниманіе, что точка *D*<sub>1</sub> находится на бесконечности на прямой, проходящей черезъ точку *A* и перпендикулярной къ *CA*. Такимъ образомъ:

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{BE}{CE} \dots \dots \dots (1).$$



фиг. 61-я.

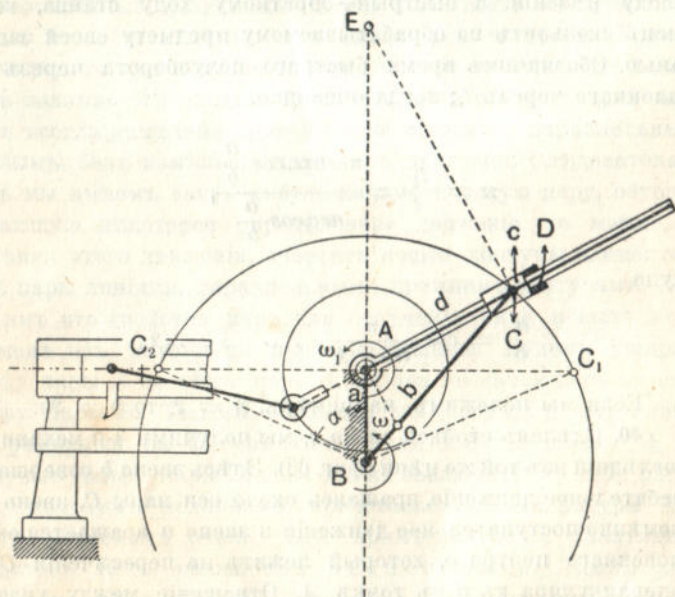
Отсюда видно что  $\omega_1$  будетъ = 0 при двухъ положеніяхъ механизма, когда *d* и *a* расположатся подъ прямымъ угломъ. Эти два положенія соответствуютъ крайнимъ положеніямъ звена *c*. Если ведущимъ звеномъ является *d*, то механизмъ



будетъ въ мертвыхъ положенiяхъ, когда точка  $A$  будетъ находиться на линiи центровъ.

Если будетъ дана скорость точки  $A$ , то легко будетъ найти скорость каждой точки звена  $d$ . Не трудно будетъ также найти угловое ускоренiе звена  $c$  при помощи построения, подобнаго тому, которымъ мы пользовались при опредѣленiи ускоренiя ползуна паровой машины.

**39. Механизмъ Витворта.** Если мы сдѣлаемъ стойкой звено  $a$ , то получимъ механизмъ, изображенный на фиг. 62-й. Здѣсь звенья  $d$  и  $b$  совершаютъ непрерывно-вращательныя движенiя соответственно около осей паръ  $A$  и  $B$ , а звено  $c$ , вращаясь около оси пары  $C$ , скользитъ въ то же время по звену  $d$ . Чтобы найти мгновенный центръ вращенiя звена  $c$ , вообразимъ, что съ нимъ соединена прямая, проходящая черезъ центръ пары  $C$  и параллельная звену  $d$ . При движенiи звена  $c$  прямая эта будетъ постоянно проходить черезъ точку  $A$ , въ то время какъ ее точка  $C$  будетъ описывать окружность около центра  $B$ . Очевидно, поэтому, что мгновенный центръ вращенiя  $o$  зве-



фиг. 62-я.

на  $s$  находится на пересѣченіи  $BC$  и перпендикуляра къ  $AC$  въ точкѣ  $A$ . Зная скорость точки  $C$ , мы найдемъ скорость всякой другой точки звена  $s$ .

Что касается отношенія  $\omega_1$  къ  $\omega$ , то мы и здѣсь можемъ найти его, пользуясь закономъ Willis'a и принимая во вниманіе, что линія дѣйствія проходитъ черезъ точку  $C$  перпендикулярно къ  $AC$ . Такимъ образомъ

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{BE}{AE} \dots \dots \dots (1).$$

Механизмъ этотъ обладаетъ однимъ замѣчательнымъ свойствомъ, которымъ и воспользовался Витвортъ для устройства своего строгального станка.

Допустимъ, что  $\omega = const$ ; тогда звено  $d$  будетъ совершать одинъ полуоборотъ, изъ положенія  $AC_1$  противъ стрѣлки часовъ въ положеніе  $AC_2$ , быстрее, чѣмъ другой, изъ положенія  $AC_2$  противъ стрѣлки часовъ въ положеніи  $AC_1$ . Движеніе звена  $d$  передается столу или рѣзцу строгального станка такимъ образомъ, что медленный полуоборотъ соотвѣтствуетъ періоду рѣзанія, а быстрый—обратному ходу станка, когда рѣзецъ скользитъ по обрабатываемому предмету своей задней гранью. Обозначимъ время быстрого полуоборота черезъ  $t$ , а медленнаго черезъ  $t_1$ ; тогда очевидно:

$$n = \frac{t_1}{t} = \frac{\pi - \text{arc. cos } \frac{a}{b}}{\text{arc. cos } \frac{a}{b}},$$

откуда

$$\frac{a}{b} = \cos \frac{\pi}{n+1} \dots \dots \dots (2).$$

Если мы положимъ, напримѣръ,  $n = 2$ , то  $b = 2a$ .

40. Сдѣлавъ стойкой звено  $s$ , мы получимъ 4-й механизмъ и послѣдній изъ той же цѣпи (фиг. 63). Здѣсь звено  $b$  совершаетъ колебательное движеніе, вращаясь около оси пары  $C$ , звено  $d$ —переменно поступательное движеніе и звено  $a$  вращается около мгновеннаго центра  $o$ , который лежитъ на пересѣченіи  $CB$  и перпендикуляра къ  $d$  въ точкѣ  $A$ . Отношеніе между угловой скоростью  $\omega$  звена  $b$  и скоростью скольженія звена  $d$  найдется

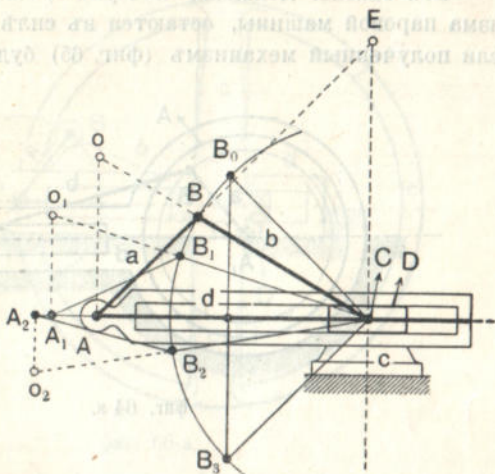


по ф. 5, § 28, если мы положимъ въ ней  $d = c = \infty$  и примемъ во вниманіе, что въ данномъ случаѣ линия центровъ есть прямая, проходящая черезъ  $C$  и перпендикулярная къ  $AC$ , а линия дѣйствія есть  $AB$ . Имѣемъ

$$w = \omega \cdot \overline{CE} \dots (1).$$

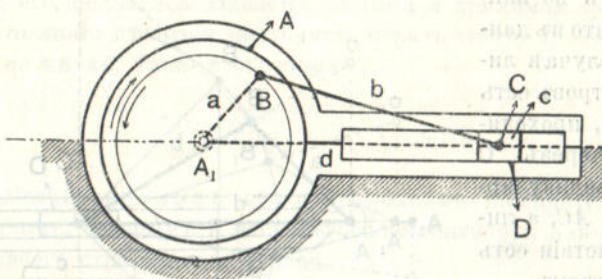
**41. Уширение цапфъ.** Нужно замѣтить, что все

вышеописанные механизмы можно выполнить въ совершенно иномъ видѣ, не измѣняя ихъ основныхъ свойствъ. Возможность такого видоизмѣненія заключается въ томъ, что всякая пара взаимно огибающихъ кривыхъ, какъ мы знаемъ, можетъ быть всегда замѣнена другой парой кривыхъ, параллельныхъ первымъ, безъ измѣненія характера движенія. Слѣдовательно, разъ мы имѣемъ какую-нибудь кинематическую пару, обуславливающую нѣкоторое опредѣленное движеніе, то можно, не измѣняя этого движенія, очертить новые контуры элементовъ этой пары линиями, параллельными прежнимъ контурамъ. Примѣнимъ это свойство паръ для полученія ряда новыхъ механизмовъ изъ механизма паровой машины. Будемъ уширять цапфу пары  $A$  до тѣхъ поръ, пока она не заключитъ въ себя цапфу пары  $B$ . Такимъ образомъ мы получимъ механизмъ, изображенный на фигурѣ 64-й. Если вмѣсто цапфы  $A$  мы уширимъ цапфу пары  $B$ , пока она не заключитъ въ себя цапфу  $A$ , то получимъ механизмъ, представленный на фигурѣ 65-й. Этотъ механизмъ очень часто примѣняется на практикѣ и извѣстенъ подъ названіемъ эксцентрика. Такого рода механизмъ употребляется, напримѣръ, для передвиженія парораспределительныхъ приборовъ въ паровой машинѣ.

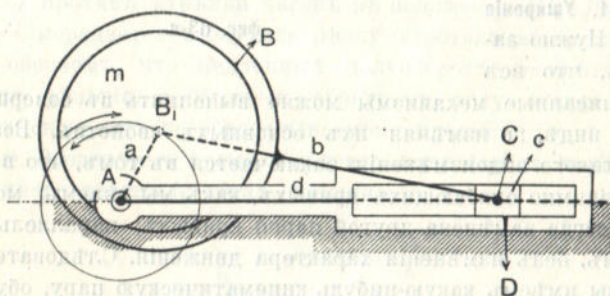


фиг. 63-я.

Всѣ законы движенія ползуна  $c$ , выведенные для механизма паровой машины, остаются въ силѣ и для эксцентрика. Если полученный механизм (фиг. 65) будемъ разсматривать



фиг. 64-я.

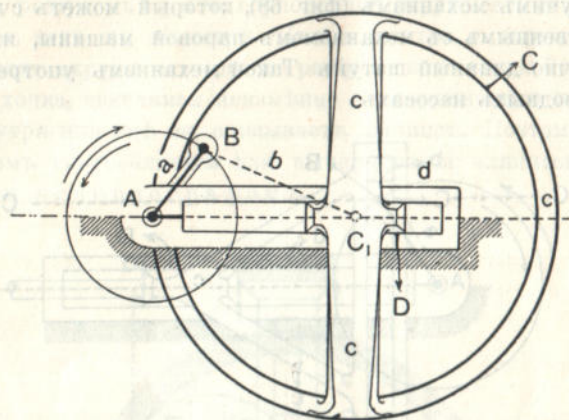


фиг. 65-я.

какъ цѣпь, то изъ него можно получить еще три механизма. Между ними заслуживаетъ вниманія тотъ, который получается, если сдѣлать стойкой звено  $a$ , т. е. въ данномъ случаѣ дискъ  $m$ . Этотъ механизмъ обладаетъ тѣми же свойствами, какъ и механизмъ, изображенный на фигурѣ 62-й, и въ такомъ то именно видѣ онъ и употребляется въ строгальномъ станкѣ Витворта.

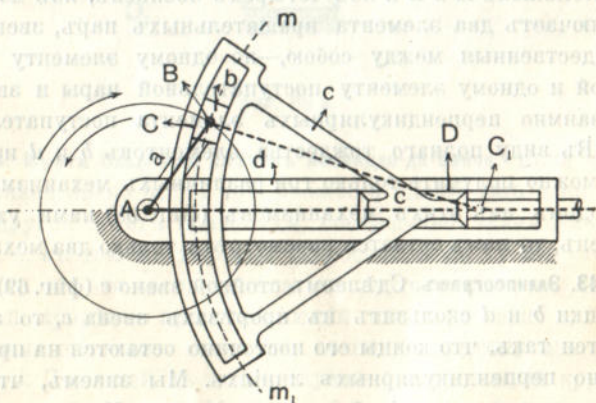
Уширимъ теперь цапфу  $C$  такъ, чтобы она заключила въ себя цапфу пары  $B$  (фиг. 66). Въ то время, какъ кривошипъ  $a$  вращается около центра  $A$ , цапфа пары  $B$  описываетъ полную окружность около того же центра и дискъ  $b$  колеблется около центра  $C_1$  цапфы пары  $C$ .





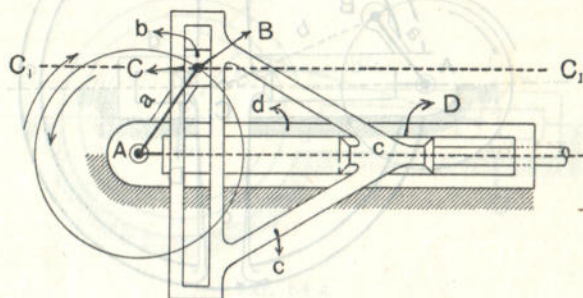
фиг. 66-я.

42. Замена пары  $C$  поступательной парой. Придавая последнему механизму другую конструктивную форму, получим механизм, изображенный на фигуре 67-й. Этот механизм по своим кинематическим свойствам вполне тождествен с механизмом паровой машины с длиной шатуна, равной радиусу средней окружности  $m_1$  дугового прореза, который представляет из себя полый элемент вращательной пары  $C$ . Увеличивая радиус этого дугового прореза до бесконечности,



фиг. 67-я.

мы получимъ механизмъ (фиг. 68), который можетъ считаться тождественнымъ съ механизмомъ паровой машины, имѣющей безконечно длинный шатунъ. Такой механизмъ употребляется въ приводныхъ насосахъ.



фиг. 68-я.

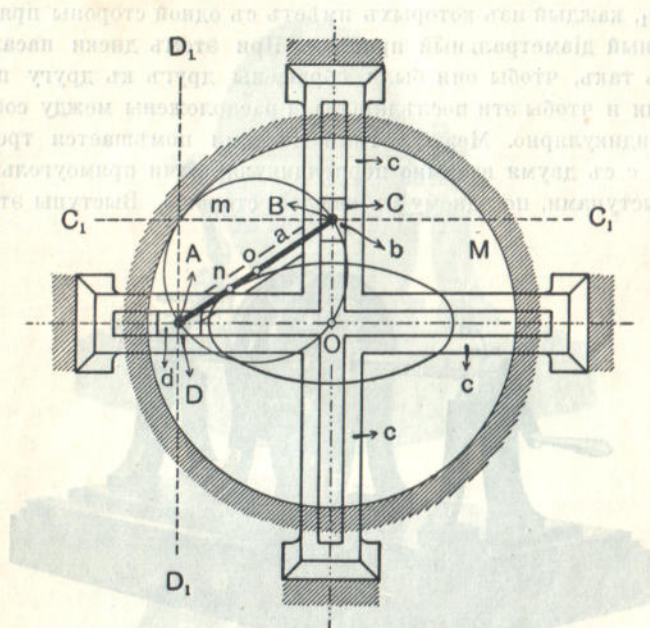
Но съ другой стороны этотъ механизмъ есть не что иное какъ четырехъ-звенный плоскій шарнирный четырехугольникъ, двѣ рядомъ стоящія вращательныя пары котораго (въ данномъ случаѣ  $D$  и  $C$ ) обращены въ поступательныя.

Если мы будемъ разсматривать этотъ механизмъ какъ цѣпь, то можемъ получить изъ него нѣсколько различныхъ механизмовъ, дѣлая стойкой то или другое звено. Цѣпь эта состоитъ изъ двухъ поступательныхъ паръ  $C$  и  $D$  и двухъ вращательныхъ  $A$  и  $B$  и изъ четырехъ звеньевъ, изъ которыхъ  $a$  заключаетъ два элемента вращательныхъ паръ, звенья  $b$  и  $d$ , тождественныя между собою,—по одному элементу вращательной и одному элементу поступательной пары и звено  $c$ —два взаимно перпендикулярныхъ элемента поступательныхъ паръ. Въ виду полного тождества элементовъ  $b$  и  $d$  изъ этой цѣпи можно получить только три различныхъ механизма. Такъ какъ одинъ изъ этихъ механизмовъ (фиг. 68) нами уже разсмотрѣнъ, то намъ остается разсмотрѣть только два механизма.

**43. Эллипсографъ.** Сдѣлаемъ стойкимъ звено  $c$  (фиг. 69). Когда ползушки  $b$  и  $d$  скользятъ въ прорѣзахъ звена  $c$ , то звено  $a$  движется такъ, что концы его постоянно остаются на прямыхъ, взаимно перпендикулярныхъ линияхъ. Мы знаемъ, что полондой въ этомъ движеніи будетъ окружность  $M$ , описанная изъ  $O$ , точки пересѣченія прямыхъ, по которымъ скользятъ концы



звена  $a$ , радиусомъ  $= a$  и серполоидой окружность  $m$ , описанная на  $a$ , какъ на диаметрѣ. Далѣе, центръ  $o$  окружности  $m$  описываетъ окружность того же радиуса около точки  $O$  и всякая другая точка, связанная неизмѣнно съ окружностью  $m$  и лежащая внутри или внѣ ея, описываетъ эллипсъ. Поэтому этотъ механизмъ употребляется для вычерчиванія эллипсовъ и называется эллипсографомъ.



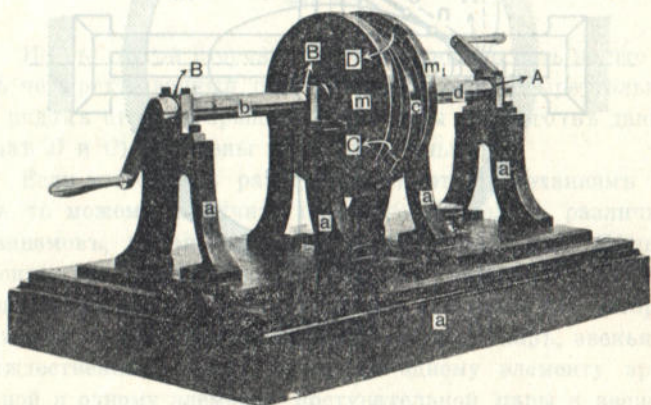
фиг. 69-я.

**44. Муфта Ольдгэма. Станокъ Леонардо-да-Винчи.** Если сдѣлаемъ стойкой звено  $a$ , то, при вращеніи одного изъ звеньевъ  $b$  или  $d$ , другое будетъ вращаться совершенно такимъ-же образомъ, т. е. съ тою же угловою скоростью и въ ту же сторону, такъ какъ оба эти звена кинематически тождественны. Крестообразный прорѣзъ, представляющій изъ себя звено  $c$ , будетъ совершенно одинаково скользить по тому и другому изъ звеньевъ  $b$  и  $d$ . Полоидой въ этомъ случаѣ будетъ малый кругъ  $m$ , а серполоидой большой  $M$ . Точка  $O$ , очевидно, будетъ описывать окружность  $m$  (чер. 69).

Этотъ механизмъ находитъ себѣ примѣненіе въ муфтѣ Ольдгэма (Oldham'a) и въ станкѣ Леонардо-да-Винчи.

Муфта Ольдгэма (фиг. 70) служитъ для соединенія двухъ параллельныхъ валовъ, вращающихся въ одну сторону и съ одинаковыми угловыми скоростями, если оси ихъ между собою не совпадаютъ.

Для этой цѣли на концы валовъ  $b$  и  $d$  насаживаются диски  $m$  и  $m_1$ , каждый изъ которыхъ имѣетъ съ одной стороны прямоугольный диаметральный прорѣзъ. При этомъ диски насаживаются такъ, чтобы они были обращены другъ къ другу прорѣзами и чтобы эти послѣдніе были расположены между собою перпендикулярно. Между этими дисками помѣщается третій дискъ  $c$  съ двумя взаимно перпендикулярными прямоугольными выступами, по одному съ каждой стороны. Выступы этого



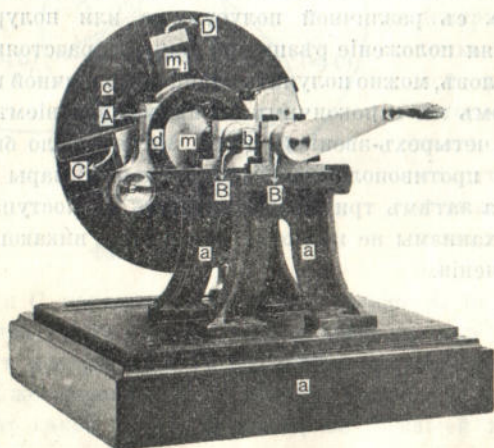
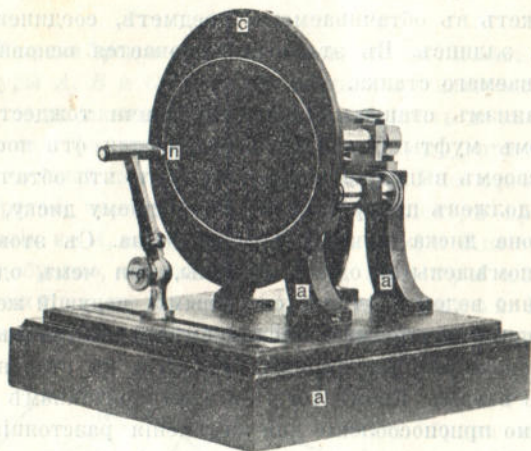
фиг. 70-я.

диска помѣщаются въ соответственные прорѣзы дисковъ  $m$  и  $m_1$ . Не трудно видѣть, что полученный такимъ образомъ механизмъ совершенно тождественъ съ предыдущимъ. Стойка, заключающая въ себѣ два элемента двухъ вращательныхъ паръ  $B$  и  $A$ , тождественна съ звеномъ  $a$ ; валы съ дисками, заключающіе въ себѣ по одному элементу вращательныхъ паръ  $A$  и  $B$  и по одному элементу поступательныхъ паръ  $C$  и  $D$ , тождественны съ звеньями  $b$  и  $d$  и средній дискъ  $c$ , несущій на себѣ два элемента поступательныхъ паръ  $C$  и  $D$ ,



тождественъ со звеномъ с. Понятно, что дискъ с во время движения будетъ скользить своими выступами въ соответственныхъ прорѣзахъ дисковъ  $m$  и  $m_1$ ; его центръ будетъ описывать окружность съ діаметромъ  $a =$  разстоянію между центрами валовъ  $b$  и  $d$ .

Станокъ Леонардо-да Винчи (фиг. 71) служитъ для обрабатыванія по эллипсамъ. Чтобы понять его устройство, обратимъ

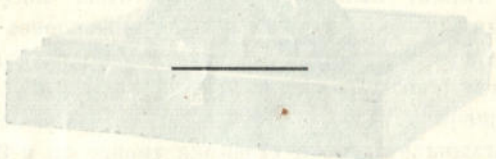


фиг. 71-а.

вниманіе на слѣдующее обстоятельство. Всякая точка, соединенная со звеномъ  $a$  въ механизмѣ (фиг. 69), какъ мы видѣли, описываетъ эллипсъ (за исключеніемъ точекъ, лежащихъ на окружности  $m$  и по срединѣ звена  $a$ ). Если мы соединимъ эллипсъ, описанный, напримѣръ, точкой  $n$  со звеномъ  $c$  и сдѣлаемъ звено  $a$  стойкой, то этотъ эллипсъ при движеніи звена  $c$  относительно звена  $a$  будетъ постоянно проходить черезъ точку  $n$ . Поэтому, если поставить въ этой точкѣ рѣзецъ, то онъ вырѣжетъ въ обрабатываемомъ предметѣ, соединенномъ со звеномъ  $c$ , эллипсъ. Въ этомъ и заключается основная идея разсматриваемаго станка.

Механизмъ станка Леонардо-да-Винчи тождественъ съ механизмомъ муфты Ольдгема и отличается отъ послѣдняго лишь въ своемъ выполненіи. Дѣло въ томъ, что обрабатываемый предметъ долженъ прикрѣпляться къ среднему диску, поэтому одна сторона диска должна быть свободна. Съ этою цѣлью оба вала помѣщены съ одной стороны, при чемъ одинъ изъ нихъ, именно ведомый, дѣлается полымъ, ведущій же, сплошной, проходитъ внутри его. Дискъ  $c$  вмѣсто выступовъ имѣетъ два взаимно перпендикулярныхъ прорѣза на сторонѣ, обращенной къ валамъ. Кромѣ того, въ этомъ механизмѣ имѣется обыкновенно приспособленіе для измѣненія разстоянія между центрами валовъ, въ силу чего даже при одномъ положеніи рѣзца относительно диска можно получать эллипсы различной формы, т. е. съ различной полусуммою или полуразностью осей. Измѣняя положеніе рѣзца при данномъ разстояніи между центрами валовъ, можно получать эллипсы различной величины.

На этомъ мы и покончимъ съ преобразованиемъ плоской шарнирной четырех-звенной цѣпи. Можно было бы еще обратить двѣ противоположныя вращательныя пары въ поступательныя, а затѣмъ три вращательныхъ въ поступательныя, но такіе механизмы не имѣютъ совершенно никакого пракческаго значенія.

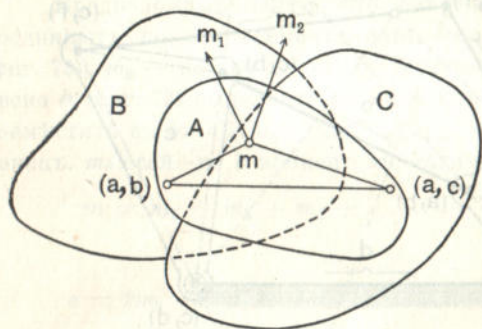




### ОТДѢЛЪ 3-й.

#### Сложные шарнирные механизмы.

**45. Теорема Аронгольда.** Положимъ, что мы имѣемъ три плоскихъ фигуры  $A$ ,  $B$  и  $C$  (фиг. 72), каждая изъ которыхъ какъ то движется по плоскости. Будемъ разсматривать движеніе каждой изъ этихъ фигуръ относительно двухъ другихъ и обозначимъ мгновенный центръ вращенія фигуры  $B$  по отношенію къ  $A$ , или обратно, черезъ  $(a, b)$ , мгновенный центръ вращенія  $C$  по отношенію къ  $A$ , или обратно, черезъ  $(a, c)$  и  $B$  по отношенію къ  $C$ , или обратно, черезъ  $(b, c)$ . Всѣ эти три мгновенныхъ центра лежатъ на одной прямой. Въ этомъ и состоитъ теорема Аронгольда. Для доказательства допустимъ,



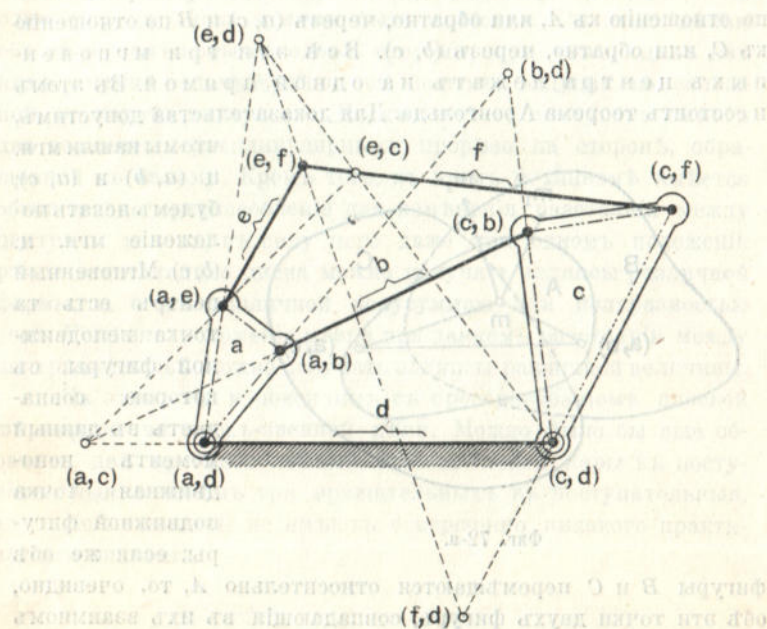
Фиг. 72-я.

что мы нашли мгн. ц.  $(a, b)$  и  $(a, c)$ ; будемъ искать положеніе мгн. ц.  $(b, c)$ . Мгновенный центръ есть та точка неподвижной фигуры, съ которою совпадаетъ въ данный моментъ неподвижная точка подвижной фигуры; если же объ

фигуры  $B$  и  $C$  перемѣщаются относительно  $A$ , то, очевидно, объ эти точки двухъ фигуръ, совпадающія въ ихъ взаимномъ мгновенномъ центрѣ, будутъ совершать относительно фигуры  $A$  одно и то же движеніе. Если мы допустимъ, что мгн. ц.  $(b, c)$  находится въ какой нибудь точкѣ  $m$ , не лежащей на прямой  $(a, b)$   $(a, c)$ , то тотчасъ же придемъ къ заключенію, что двѣ точки, совпадающія въ точкѣ  $m$ , будутъ, при движеніи фигуръ

$B$  и  $C$  относительно  $A$ , совершать различныя движенія: точка  $t$  фигуры  $B$  будетъ перемѣщаться по  $mt_1$ , по направленію перпендикулярному къ  $(a, b)t$ , а точка  $t$  фигуры  $C$ —по  $mt_2$ , по направленію перпендикулярному къ  $(a, c)t$ . Оба эти направленія совпадутъ лишь въ томъ случаѣ, если  $(b, c)$  расположится на линіи  $(a, b)$   $(a, c)$ . Покажемъ на примѣрѣ, какимъ образомъ при помощи теоремы Аронгольда можно изслѣдовать сложные шарнирные механизмы.

Примѣръ. Рассмотримъ шестизвенный механизмъ, у котораго стойкой сдѣлано звено  $d$  (фиг. 73). Звенья  $d, b, e$  и  $f$  заключаютъ въ себѣ по два элемента вращательныхъ паръ, а звенья  $a$  и  $c$ —по три. Чтобы знать движеніе всѣхъ частей механизма, надо найти всѣ мгновенныя центры по отношенію къ  $d$ . Мгн. центры  $(a, d)$  и  $(c, d)$  находятся непосредственно,



фиг. 73 а.

$(b, d)$ , очевидно, лежатъ на пересѣченіи  $(a, d)$   $(a, b)$  и  $(c, d)$   $(c, b)$ ; чтобы найти  $(e, d)$ , надо сначала найти  $(e, c)$ , который лежитъ



на пересѣченіи  $(a, c)$   $(a, e)$  и  $(c, f)$   $(e, f)$ , а затѣмъ найдется и  $(e, d)$ , пересѣченіемъ  $(e, c)$   $(c, d)$  и  $(a, d)$   $(a, e)$ . Наконецъ,  $(f, d)$  находится на пересѣченіи  $(e, d)$   $(e, f)$  и  $(c, f)$   $(c, d)$ . Если будетъ задана скорость какой нибудь одной точки механизма, то можно найти тотчасъ же скорость и всякой другой.

**46. Условія, которымъ долженъ удовлетворять шарнирный механизмъ.**

Вообразимъ себѣ шарнирный механизмъ, состоящій изъ  $n$  звеньевъ и  $m$  осей. Допустимъ, что изъ числа  $n$  звеньевъ  $n_2$  звеньевъ имѣютъ по два элемента кинематическихъ паръ, какъ напримѣръ, звенья  $e, b$  и т. д. (фиг. 73),  $n_3$  звеньевъ имѣютъ по три элемента паръ, напримѣръ, звенья  $a$  и  $c$  (фиг. 73),  $n_4$ —по четыре элемента и т. д.; наконецъ,  $n_i$  по  $i$  элементовъ; тогда мы имѣемъ:

$$n = n_2 + n_3 + n_4 + \dots + n_i \dots \dots (1);$$

число элементовъ

$$e = 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + \dots + in_i \dots \dots (2).$$

Предположимъ далѣе, что изъ числа  $m$  осей  $m_2$  осей соединяютъ по два элемента паръ [оси  $(a, d)$ ,  $(c, d)$  и т. д. (фиг. 73)],  $m_3$  — по три элемента [можно было бы, напримѣръ, звено  $a$  (фиг. 73) выполнить въ видѣ простого стержня и  $(a, e)$  совмѣстить съ  $(a, b)$ ],  $m_4$  — по четыре элемента и т. д.; наконецъ,  $m_k$  осей—по  $k$  элементовъ; такимъ образомъ, имѣемъ:

$$m = m_2 + m_3 + m_4 + \dots + m_k \dots \dots (3)$$

и

$$e = 2m_2 + 3m_3 + 4m_4 + \dots + km_k \dots \dots (4).$$

Чтобы выяснитъ себѣ, какими условіями будутъ связаны между собою величины  $n_2, n_3$  и т. д. съ величинами  $m_2, m_3$  и т. д., если наше шарнирное сочлененіе представляетъ собою механизмъ, замѣтимъ, что механизмъ обращается въ крѣпкую (неизмѣняемую) систему, если мы прибавимъ къ нему одинъ стержень. Въ самомъ дѣлѣ, соединивъ, напримѣръ, расположенныя по діагоналямъ точки шарнирнаго четырехугольника стержнемъ, мы обратимъ его въ неизмѣняемую систему, соединивъ точки  $(e, f)$  и  $(c, b)$  механизма, изображеннаго на фиг. 73, стержнемъ, мы также обратимъ его въ неизмѣняемую систему.

Вслѣдствіе этого механизмъ долженъ имѣть на одинъ стержень меньше, чѣмъ неизмѣняемая система съ тѣмъ же числомъ узловъ.

Извѣстно, что неизмѣняемая система, имѣющая  $m$  узловъ, должна заключать въ себѣ  $2m - 3$  стержня, поэтому всякій механизмъ долженъ удовлетворять слѣдующему равенству:

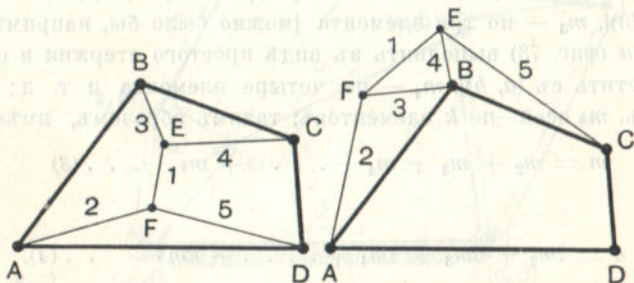
$$n_2 + 3n_3 + 5n_4 + \dots + (2i - 3)n_i + 1 = 2m - 3$$

или

$$n_2 + 3n_3 + 5n_4 + \dots + (2i - 3)n_i = 2m - 4 \dots (5),$$

такъ какъ звено, соединяющее два элемента паръ, равносильно одному стержню; соединяющее 3 элемента,—равносильно 3 стержнямъ; соединяющее 4 элемента,—5 стержнямъ и, вообще, соединяющее  $i$  элементовъ равносильно  $(2i - 3)$  стержнямъ.

Къ такому же соотношенію мы пришли бы и въ томъ случаѣ, если бы исходили изъ предположенія, что мы обращаемъ механизмъ въ неизмѣняемую систему введеніемъ двухъ новыхъ осей (фиг. 74), ибо при этомъ вводятся 5 новыхъ стержней.

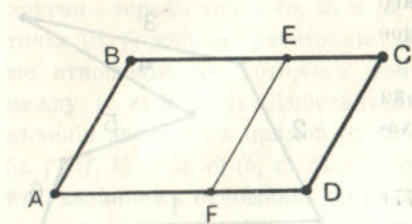


фиг. 74-я.

Условіе (5) является достаточнымъ признакомъ шарнирнаго механизма; однако же, при составленіи этого условія слѣдуетъ выключать, такъ называемые, лишніе стержни, т. е. стержни, соединяющіе двѣ точки, которыя и безъ того находились бы при всякомъ положеніи частей механизма на одномъ и томъ же разстояніи. Такъ напримѣръ, если мы примѣнимъ условіе (5) къ сочлененію, изображенному на фиг. 75, то при-



демъ къ заключенію, что это сочлененіе представляетъ собою неизмѣняемую систему, тогда какъ въ дѣйствительности это



фиг. 75-я.

есть механизмъ, такъ какъ стержень  $EF$ , равный и параллельный  $AB$  и  $DC$ , является лишнимъ стержнемъ. Понятно, что если шарнирное сочлененіе представляетъ крѣпкую систему, оно должно удовлетворять неравенству:

$$n_2 + 3n_3 + 5n_4 + \dots + (2i - 3)n_i > 2m - 4;$$

если же оно представляетъ цѣпь, но не принужденнаго движенія, то должно удовлетворять неравенству:

$$n_2 + 3n_3 + 5n_4 + \dots + (2i - 3)n_i < 2m - 4.$$

Выведемъ еще одинъ признакъ шарнирнаго механизма. Для этой цѣли сравнимъ вторыя части ур-ій (2) и (4) и умножимъ все члены на 2; получимъ:

$$4n_2 + 6n_3 + 8n_4 + \dots + 2in_i = 4m_2 + 6m_3 + \dots + 2km_k \dots (6).$$

Затѣмъ перепишемъ условіе (5) въ такомъ видѣ:

$$n_2 + 3n_3 + 5n_4 + \dots + (2i - 3)n_i = 2m_2 + 2m_3 + 2m_4 + \dots + 2m_k - 4$$

и будемъ вычитать его почленно изъ ур-ія (6); тогда получимъ:

$$3n = 2 \{ m_2 + 2m_3 + 3m_4 + \dots + (k - 1)m_k \} - 4 \dots (7).$$

Каково бы ни было число осей, мы во второй части ур-ія (7) имѣемъ четное число, слѣдовательно  $n$ —число звеньевъ шарнирнаго механизма—также должно быть числомъ четнымъ. Очевидно, что это условіе является условіемъ только необходимымъ, но не достаточнымъ. Если шарнирное сочлененіе имѣетъ нечетное число звеньевъ, то мы можемъ утверждать, что оно не представляетъ собою механизма; но если шарнирное сочлененіе имѣетъ четное чи-

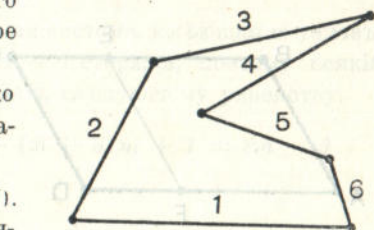
сло звеньевъ, то мы не можемъ сказать, что оно является механизмомъ. Такъ напримѣръ, сочлененіе, изобр. на фиг. 76, не есть цѣль принужденнаго движенія, хотя и имѣеть четное число звеньевъ.

Разсмотримъ нѣсколько сложныхъ шарнирныхъ механизмовъ.

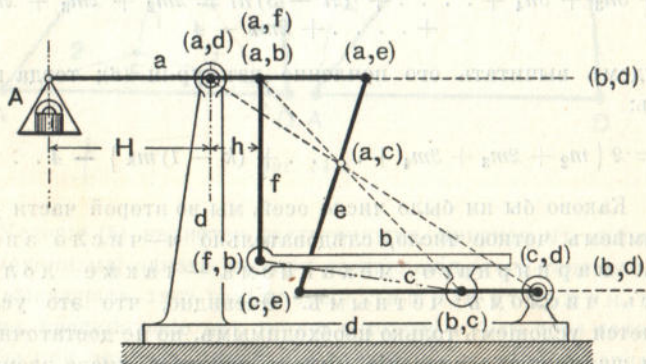
47. Вѣсы Квинтенца (фиг. 77).

Вѣсы Квинтенца представляютъ собою механизмъ, что легко обнаружить при помощи ур-ія

(5) предыдущаго параграфа, съ семью осями и шестью звеньями. Звено  $b$  есть платформа, на которую кладется взвѣшиваемый грузъ, а  $A$ —чашка для гирь. Размѣры частей механизма должны быть соображены такъ, чтобы платформа  $b$  перемѣщалась изъ положенія, изображеннаго на чертежѣ, когда звенья  $a$  и  $b$  горизонтальны, поступательно и при томъ на ту же величину, какъ и точка  $(a, b)$ . Въ такомъ случаѣ, очевидно, отношеніе вѣса груза къ вѣсу гирь, будетъ равно отношенію  $H$  къ  $h$ . Для этого необходимо, во первыхъ, чтобы стержень  $f$  имѣлъ вертикальное направленіе, ибо тогда перемѣщенія его концовъ должны быть одинаковы, а, во вторыхъ, чтобы мгновенный центръ вращенія  $(b, d)$  лежалъ на бесконечности, на пересѣченіи двухъ горизонтальныхъ прямыхъ. Одна изъ этихъ



фиг. 76-я.

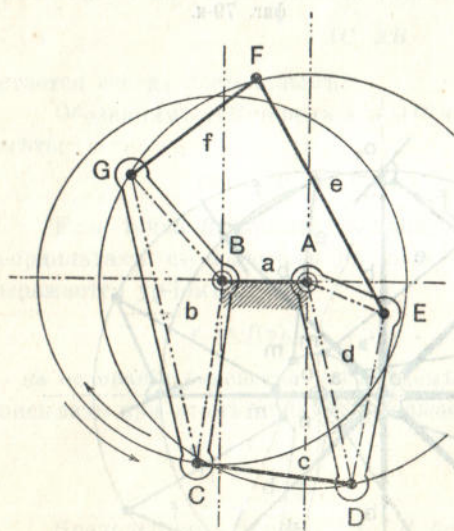


фиг. 77-я.



прямых проходить через точки  $(b, c)$  и  $(c, d)$ , поэтому эти точки должны быть расположены на одной горизонтали, а другая - через точки  $(a, d)$  и  $(a, b)$ , для чего требуется, чтобы точка  $(a, f)$  делила расстояние между  $(a, d)$  и  $(a, e)$  в том же отношении, в котором точка  $(b, c)$  делит расстояние между  $(c, e)$  и  $(c, d)$ . Действительно,  $(a, c)$  лежит на пересечении звена  $e$  с прямой  $(c, d)$   $(a, d)$  и  $(a, b)$  на пересечении  $(a, f)$   $(f, b)$  и  $(a, e)$   $(b, c)$ . Если точка  $(a, f)$  делит  $(a, d)$   $(a, e)$  в указанном отношении, то  $(a, b)$  совпадет с  $(a, f)$ .

48. Гребное колесо Моргана. Механизм колеса Моргана представляет многократное повторение механизма, изображенного на фиг. 78, который состоит из шарнирного четырехугольника  $ABCD$  с двумя кривошипами и еще двух звеньев  $e$  и  $f$ . Цель механизма заключается в поворачивании

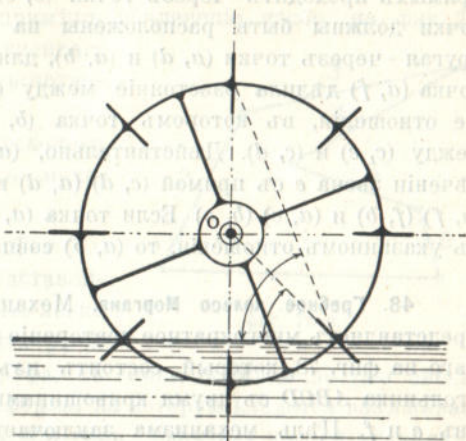


фиг. 78-я.

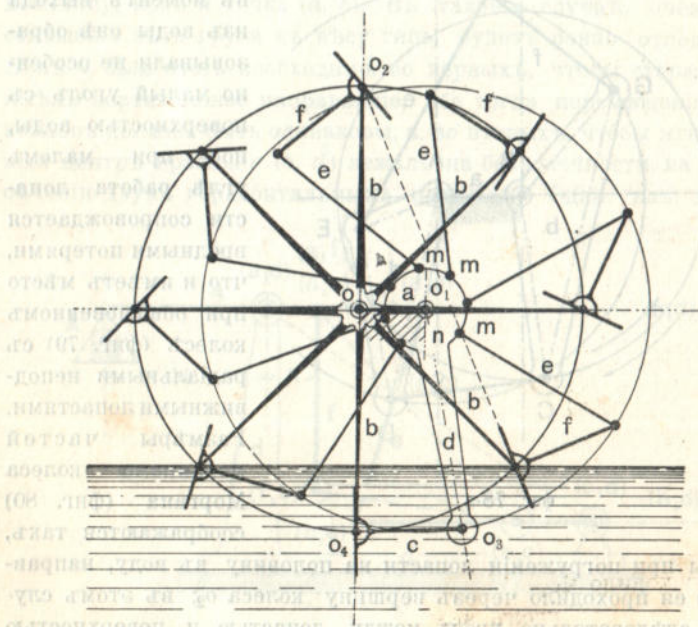
лопастей такъ, чтобы въ моментъ погруженія въ воду и въ моментъ выхода изъ воды онѣ образовывали не особенно малый уголъ съ поверхностью воды, ибо при маломъ углѣ работа лопасти сопровождается вредными потерями, что и имѣетъ мѣсто при обыкновенномъ колесѣ (фиг. 79) съ радіальными неподвижными лопастями. Размѣры частей механизма колеса Моргана (фиг. 80) соображаются такъ,

чтобы при погруженіи лопасти на половину въ воду, направление ея проходило черезъ вершину колеса  $o_2$ ; въ этомъ случаѣ, слѣдовательно, уголъ между лопастью и поверхностью воды при томъ же діаметрѣ колеса будетъ значительно больше.

чѣмъ въ случаѣ простого колеса. На фиг. 80 изображена схема расположенія частей колеса Моргана. На главный валъ  $o$  насажена крѣпко втулка, съ которою неизмѣнно соединены спицы  $b$ ; на нѣкоторомъ разстояніи отъ главнаго вала располагается неподвижная ось  $o_1$ , на которую свободно надѣвается дискъ  $n$ . Съ этимъ



фиг. 79-я.



фиг. 80-я.





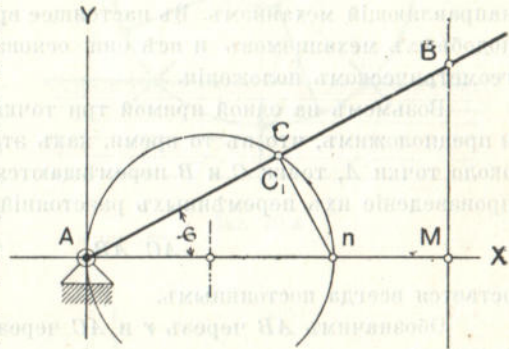
Найдемъ теперь ур-іе траекторіи точки  $C$  при условіи, что

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = r \cdot r_1 = b \dots \dots \dots (5).$$

Это уравненіе мы получимъ, исключивъ  $r$  изъ двухъ предыдущихъ ур-ій; такимъ образомъ, будемъ имѣть:

$$r_1 = \frac{b}{r} = \frac{b \cdot \cos \varphi}{a} \dots \dots \dots (6).$$

Не трудно показать, что кривая, выражаемая этимъ уравненіемъ, есть окружность съ діаметромъ  $\frac{b}{a}$ , проходящая черезъ точку  $A$  и съ центромъ на полярной оси. Действительно, отложивъ на прямой  $AX$  длину  $\overline{An} = \frac{b}{a}$  и



фиг. 81-я.

построивъ на ней, какъ на діаметрѣ, окружность, которая пересѣчетъ прямую  $AB$  въ нѣкоторой точкѣ, положимъ  $C_1$ , мы изъ прямоугольнаго треугольника  $AC_1n$  получимъ:

$$\overline{An} \cdot \cos \varphi = \overline{AC_1}$$

или:

$$\overline{AC_1} = \frac{b}{a} \cos \varphi \dots \dots \dots (7).$$

Сравнивая ур-ія (6) и (7), находимъ, что

$$\overline{AC_1} = \overline{AC} = r_1.$$

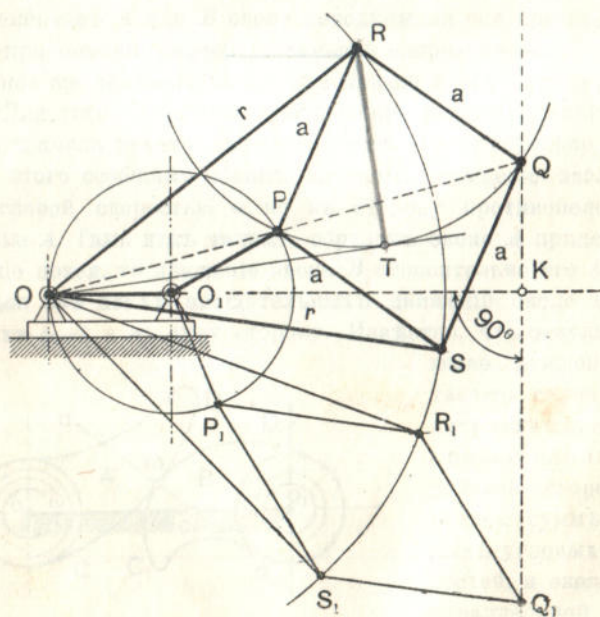
Понятно поэтому, что если мы составимъ такое шарнирное сочлененіе, въ которомъ будутъ выполнены три слѣдующихъ условія: 1) три точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ —лежатъ на одной прямой; 2)  $\overline{AC} \cdot \overline{AB} = const.$ , и 3) при неподвижной точкѣ  $A$ , точка  $C$  описываетъ окружность, проходящую черезъ точку  $A$ , то



точка  $B$  будетъ описывать прямую, перпендикулярную къ линіи, соединяющей точку  $A$  съ центромъ окружности, описываемой точкой  $C$ .

Всѣ эти условія и выполнены въ механизмѣ Peaucellier (фиг. 82). Устройство этого механизма таково. Взять шарнирный ромбъ  $PRQS$  со стороною  $a$  и двѣ вершины его  $R$  и  $S$  соединены рычагами равной длины  $r$  съ неподвижной точкой  $O$ , лежащей на продолженіи линіи  $QP$ . Очевидно, что при всѣхъ положеніяхъ механизма точки  $O$ ,  $P$  и  $Q$  будутъ оставаться на одной прямой. Первое условіе, слѣдовательно, выполнено. Легко показать, что и второе условіе также имѣетъ мѣсто. Дѣйствительно, опишемъ изъ точки  $R$  дугу окружности, проходящую черезъ  $P$  и  $Q$ , и проведемъ къ ней касательную  $OT$  изъ точки  $O$ ; тогда на основаніи известнаго положенія геометріи, что квадратъ касательной равняется произведенію сѣкущей на внѣшній отрѣзокъ, будемъ имѣть:

$$\overline{OT}^2 = \overline{OP} \cdot \overline{OQ}.$$



фиг. 82-я.

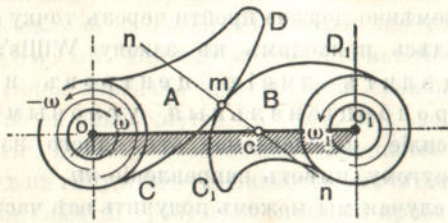




ОТДѢЛЪ 4-ый.

*Зубчатая передача.*

**50. Отношеніе скоростей.** Основаніемъ для зубчатой передачи служить цѣпь, состоящая изъ двухъ вращательныхъ паръ  $o$  и  $o_1$  (фиг. 83) и одной высшей пары, которую образуютъ элементы  $A$  и  $B$ . Понятно, что изъ этой цѣпи можно получить три механизма, такъ какъ она состоитъ изъ трехъ звеньевъ; но мы остановимся главнымъ образомъ на томъ случаѣ, когда стойкой сдѣлано звено, соединяющее два элемента вращательныхъ паръ. Въ этомъ случаѣ вращательное движеніе одного изъ элементовъ  $A$  или  $B$  около неподвижной оси преобразовывается при помощи непосредственнаго соприкосновенія во вращательное же движеніе около неподвижной оси другого элемента. Для того чтобы найти отношеніе угловыхъ скоростей, будемъ сначала искать движеніе звена  $B$  относительно звена  $A$ . Для этого сообщимъ обоимъ звеньямъ вращеніе около оси  $o$  съ угловой скоростью  $\omega$ , но въ сторону противоположную вращенію  $A$ . Такъ какъ такимъ образомъ звено  $A$  придетъ въ состояніе покоя, то движеніе звена  $B$  относительно его будетъ слагаться изъ двухъ вращательныхъ движеній около параллельныхъ осей и въ одну сторону. Извѣстно, что результирующее движеніе въ

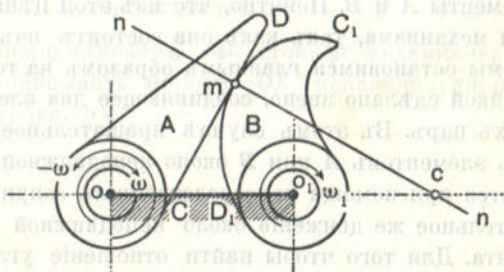


фиг. 83-я.

такоемъ случаѣ будетъ также движеніе вращательное съ угловой скоростью, равною суммѣ данныхъ угловыхъ скоростей, и около оси, параллельной даннымъ и лежащей съ

ними въ одной плоскости; при этомъ слѣдъ этой оси на плоскости, перпендикулярной къ ней, дѣлитъ разстояніе между слѣдами данныхъ осей вращения на части, обратно пропорціональныя угловымъ скоростямъ. Если звенья *A* и *B* вращаются въ одну сторону (фиг. 84), то движеніе одного изъ нихъ относительно другого опять сведется къ вращенію около оси, параллельной даннымъ и лежащей съ ними въ одной плоскости. Но въ этомъ случаѣ угловая скорость результирующаго вращения будетъ равна разности данныхъ и слѣдъ оси результирующаго вращения на плоскости, перпендикулярной къ осямъ, будетъ дѣлить разстояніе между слѣдами данныхъ осей внѣшнимъ образомъ на части, обратно пропорціональныя угловымъ скоростямъ и лежатъ въ сторонѣ большей угловой скорости. Такимъ образомъ, если точка *c* есть слѣдъ оси результирующаго вращения, то въ обоихъ случаяхъ

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{oc}{O_1c} \quad (I).$$



фиг. 84-я.

Но точка *c* есть не что иное, какъ мгновенный центръ вращения *B* по отношенію къ *A*; если же мы обратимъ вниманіе на то, что кривыя *CD* и *C1D1* находятся въ постоянномъ соприкосновеніи и являются, слѣдовательно, кривыми взаимно огибающими, то легко придетъ къ заключенію, что нормаль *mn* въ точкѣ соприкосновенія этихъ кривыхъ непременно должна пройти черезъ точку *c*. Очевидно, что мы и здѣсь приходимъ къ закону Willis'a: линія дѣйствія дѣлитъ линію центровъ на части, обратно пропорціональныя угловымъ скоростямъ, ибо усиліе, передаваемое отъ одного изъ звеньевъ *A* или *B* къ другому, имѣетъ направленіе *mn*.

Изъ этого общаго случая мы можемъ получить всѣ частные случаи зубчатой передачи, къ разсмотрѣнію которыхъ мы и перейдемъ.



Отношеніе скоростей постоянно; звенья  $A$  и  $B$  вращаются въ разныхъ стороны. Вышняя цилиндрическая передача.

51. Начальная окружности. При постоянномъ отношеніи скоростей, какъ видно изъ ур-ія (1) предыдущаго параграфа, точка  $c$  (фиг. 83) должна занимать постоянное положеніе на линіи центровъ. Очевидно поэтому, что геометрическое мѣсто точки  $c$  въ системѣ  $A$  будетъ окружность радіуса  $oc = r$  и въ системѣ  $B$ —окружность радіуса  $o_1c = r_1$ , т. ч.

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{r}{r_1} \dots \dots \dots (1).$$

Окружности эти называются начальными окружностями зубчатыхъ колесъ. Если кромѣ того задано разстояніе  $d$  между осями  $o$  и  $o_1$ , то

$$r + r_1 = d \dots \dots \dots (2).$$

Такимъ образомъ, при заданномъ отношеніи скоростей, задача объ опредѣленіи радіусовъ  $r$  и  $r_1$  является вполне опредѣленной.

Очевидно, что въ этомъ случаѣ движеніе приводится къ каченію одной изъ начальныхъ окружностей безъ скольженія по другой, или, такъ какъ зубчатые колеса имѣютъ иногда довольно значительную ширину,—къ каченію одного цилиндра по другому, направляющими которыхъ являются двѣ вышеупомянутыя окружности. Если мы выполнимъ эти цилиндры въ видѣ дисковъ нѣкоторой толщины, насадимъ ихъ крѣпко на валы  $o$  и  $o_1$  и прижмемъ съ нѣкоторымъ усиліемъ одинъ къ другому, чтобы въ мѣстѣ соприкосновенія ихъ боковыхъ поверхностей развилось достаточное треніе, то получимъ возможность передавать вращательное движеніе отъ вала  $o$  къ валу  $o_1$  и наоборотъ. Такая передача называется фрикціонной. Въ виду многихъ практическихъ неудобствъ, фрикціонная передача примѣняется сравнительно рѣдко. Неудобство ея заключается въ томъ, что, во первыхъ, усиліе, которымъ прижимаются диски, передается подшипникамъ валовъ, гдѣ въ виду этого развивается значительное треніе; во вторыхъ, для нажатія требуются сложныя приспособленія и, въ третьихъ, она не обезпечиваетъ постоянства отношенія скоростей, ибо диски въ силу случайныхъ причинъ могутъ скользить

одинъ по другому. Чтобы получить болѣе совершенную передачу, свободную отъ указанныхъ выше недостатковъ, диски снабжаютъ зубьями. Такимъ образомъ и получаютъ зубчатые колеса.

Мы видѣли, какимъ условіямъ должны удовлетворять профили зубцовъ: нормаль въ точкѣ ихъ соприкосновенія должна всегда проходить черезъ точку соприкосновенія начальныхъ окружностей; отсюда вытекаютъ всѣ способы построения профилей. Но прежде чѣмъ перейти къ болѣе детальному разсмотрѣнію всѣхъ этихъ способовъ, мы ознакомимся съ расположеніемъ зубцовъ относительно начальныхъ окружностей и выведемъ нѣсколько соотношеній, которыя весьма часто примѣняются при подсчетахъ зубчатой передачи.

**52. Основные соотношенія. Относительные размѣры зубцовъ.** Пусть  $A$  и  $B$ —центры валовъ (фиг. 85),  $m$  и  $m_1$  начальные окружности. Обозначая радиусы начальныхъ окружностей черезъ  $r$  и  $r_1$ , соответственные угловые скорости черезъ  $\omega$  и  $\omega_1$  и числа оборотовъ въ минуту—черезъ  $n$  и  $n_1$ , по предыдущему имѣемъ:

$$k = \frac{\omega_1}{\omega} = \frac{r}{r_1} = \frac{n_1}{n} = \text{const} \dots \dots (1).$$

Если  $A$  есть ведущее колесо, то постоянная величина  $k$  называется передаточнымъ числомъ.

Разстояніе между двумя соответственными точками  $a$  и  $b$  двухъ смежныхъ зубцовъ одного и того же колеса, считаемое по начальной окружности, называется шагомъ зацѣпленія и обозначается обыкновенно черезъ  $t$ . Такъ какъ воображаемыя окружности  $m$  и  $m_1$  катятся одна по другой безъ скольженія, то для правильности передачи шагъ зацѣпленія на обоихъ колесахъ долженъ быть одинаковъ. Меньшее изъ колесъ принято называть шестерней, а большее просто колесомъ. Если обозначимъ числа зубцовъ соответственно черезъ  $z$  и  $z_1$ , то легко найдемъ:

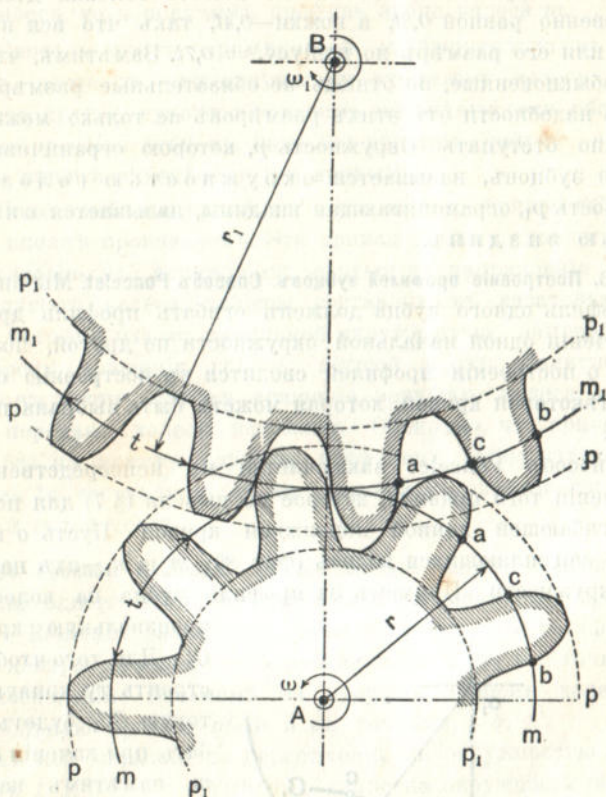
$$t = \frac{2\pi r}{z} = \frac{2\pi r_1}{z_1},$$

откуда, на основаніи ур-ія (1), имѣемъ:

$$\frac{z_1}{z} = \frac{r_1}{r} = \frac{\omega}{\omega_1} \dots \dots (2),$$



т. е. числа зубцовъ обратно пропорціональны угловымъ скоростямъ.



фиг. 85-я.

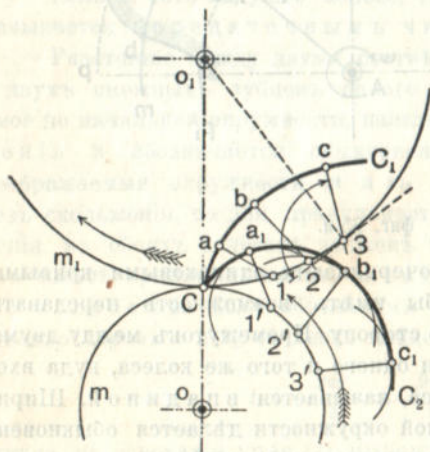
Зубцы обыкновенно очерчиваютъ одинаковыми кривыми съ обѣихъ сторонъ, чтобы имѣть возможность передавать движеніе и въ ту и другую сторону. Промежутокъ между двумя рядомъ стоящими зубцами одного и того же колеса, куда входитъ зубецъ другого колеса, называется впадиной. Ширина впадины  $ac$  по начальной окружности дѣлается обыкновенно нѣсколько больше толщины зубца  $cb$ :

$$cb = \frac{19}{40} t \text{ и } ac = \frac{21}{40} t.$$

Часть зуба, лежащая въ начальной окружности, называется головкою, а та часть, которая лежитъ внутри начальной окружности,—ножкой. Высота головки дѣлается обыкновенно равной  $0,3t$ , а ножки— $0,4t$ , такъ что вся высота зуба, или его размѣръ по радиусу, =  $0,7t$ . Замѣтимъ, что это лишь обыкновенные, но отнюдь не обязательные размѣры; въ случаѣ надобности отъ этихъ размѣровъ не только можно, но и должно отступать. Окружность  $p$ , которою ограничиваются головки зубцовъ, называется окружностью головокъ; окружность  $p_1$ , ограничивающая впадины, называется окружностью впадинъ.

**53. Построеніе профилей зубцовъ. Способъ Poncelet.** Мы видѣли, что профиль одного зубца долженъ огибать профиль другого при каченіи одной начальной окружности по другой, поэтому задача о построеніи профилей сводится къ построенію огибающей нѣкоторой кривой, которая можетъ быть выбрана произвольно.

Способъ Poncelet заключается въ непосредственномъ примѣненіи того правила, которое мы вывели (§ 7) для построенія огибающей данной подвижной кривой. Пусть  $o$  и  $o_1$ —центры зацепляющихся колесъ (фиг. 86),  $m$  и  $m_1$ —ихъ начальныя окружности.



фиг. 86-я.

произвольную кривую  $CC_1$ . Для того чтобы построить ту кривую, которую  $CC_1$  будетъ огибать при каченіи  $m_1$  по  $m$ , намѣтимъ на ней нѣсколько произвольныхъ точекъ  $a, b, c$  и т. д. и проведемъ въ этихъ точкахъ къ ней нормали  $a1, b2$  и  $c3$  до пересѣченія съ окружностью  $m_1$ ; затѣмъ отмѣтимъ на окружности  $m$  точки  $1', 2'$  и  $3'$  такъ, чтобы  $\widehat{C1'} = \widehat{C1}$ ,  $\widehat{1'2'} = \widehat{12}$  и  $\widehat{2'3'} = \widehat{23}$ ,



и опишемъ изъ этихъ точекъ, какъ изъ центровъ, соответственно окружности радиусами  $1'a_1 = 1a$ ,  $2'b_1 = 2b$  и  $3'c = 3c$ . Если мы проведемъ кривую  $CC_2$ , огибающую эти элементарныя окружности, то и получимъ профиль зубца колеса  $m$ .

Способъ этотъ примѣняется исключительно въ томъ случаѣ, когда къ существующему зубчатому колесу нужно устроить другое, правильно съ нимъ зацѣпляющееся, ибо обыкновенно профили зубцовъ, какъ мы увидимъ дальше, очерчиваются вполне опредѣленными кривыми.

Надо замѣтить кромѣ того, что выборъ кривой  $CC_1$  (фиг. 86) не вполне произволенъ. Эта кривая должна удовлетворять тому условію, что нормали ея, взятая въ направленіи давленія ведущаго колеса, должны составлять съ касательной въ точкѣ встрѣчи ихъ съ начальной окружностью, направленной въ сторону вращенія колесъ, острый уголъ. Понятно, что только въ такомъ случаѣ вращеніе ведущаго колеса можетъ быть передано колесу ведомому. Очевидно, что кривая  $CC_1$  (фиг. 86) не можетъ служить профилемъ зубца, такъ какъ нормаль  $3c$  составляетъ съ касательной къ окружности  $m_1$  въ точкѣ  $3$  тупой уголъ.

**54. Способъ Reuleaux.** Ту же самую задачу о нахожденіи профиля одного зубца по произвольно выбранному профилю другого Reuleaux разрѣшаетъ инымъ путемъ. Пусть (фиг. 87)  $o$  и  $o_1$  центры начальныхъ окружностей  $m$  и  $m_1$  и  $c$  точка ихъ соприкосновенія. Возьмемъ за профиль зубцовъ колеса  $m_1$  произвольную кривую  $abcde$  и въ точкахъ  $a, b, c, \dots$  проведемъ къ ней нормали до пересѣченія съ окружностью  $m_1$  въ точкахъ  $1, 2, 3, \dots$ . Отмѣтимъ далѣе на окружности  $m$  точки  $1', 2', 3', \dots$  такимъ образомъ, чтобы  $\widehat{12} = \widehat{1'2'}$ ,  $\widehat{23} = \widehat{2'3'}$  и т. д. Когда начальныя окружности соприкоснутся точками  $1$  и  $1'$ , т. е. когда эти двѣ послѣднія точки придутъ на линію центровъ и займутъ положеніе точки  $c$ , точка  $a$  придетъ въ соприкосновеніе съ соотвѣтствующей ей точкой искомага профиля зубца колеса  $m$ . Это ясно изъ того, что нормали въ точкѣ соприкосновенія огибающихъ проходитъ всегда черезъ мгновенный центръ. Точка плоскости  $s_1$ , въ которую придутъ въ данный моментъ эти обѣ точки, лежитъ на пересѣченіи двухъ окружностей: окружности, описанной изъ  $c$  радиусомъ  $= 1a$ , и окружности, описанной изъ  $o_1$  радиусомъ  $o_1a$ . Такимъ же образомъ





кривую, называемую кривой зацѣпленія. Съ ней связаны нѣкоторые положенія, весьма важныя для теоріи зацѣпленія. Эта кривая характеризуетъ зацѣпленіе и даетъ возможность сравнивать пригодность различныхъ кривыхъ для этой цѣли. Дѣйствительно, если мы соединимъ точки  $s$  съ точкой  $c$  прямыми, то эти прямыя дадутъ намъ направленіе давленія ведущаго зубца на ведомый. Очевидно, что только составляющая давленія по касательной къ начальнымъ окружностямъ въ точкѣ  $c$  идетъ на преодоленіе полезныхъ сопротивленій; слагающая же по общей нормали, т. е. по линіи центровъ, увеличиваетъ вредныя сопротивленія. Поэтому понятно, что зацѣпленіе тѣмъ совершеннѣй, чѣмъ меньше общія нормали къ кривымъ профилямъ зубцовъ въ точкахъ касанія отклоняются отъ направленія касательной къ начальнымъ окружностямъ въ точкѣ  $c$ .

Кромѣ направленія нормалей, надо принимать во вниманіе и длину ихъ. Мы видѣли выше, что скорость скольженія двухъ взаимно огибающихъ кривыхъ одной по другой выражается такъ (§ 15):

$$v = n.u \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} \right) \dots \dots \dots (I)$$

гдѣ  $n$  есть длина общей нормали къ кривымъ въ точкѣ ихъ соприкосновенія,  $u$ —скорость перемѣщенія мгновеннаго центра по полоидѣ (въ данномъ случаѣ это есть общая скорость по начальнымъ окружностямъ),  $r$  и  $r_1$ —радіусы кривизны полоиды и серполоиды (въ данномъ случаѣ радіусы начальныхъ окружностей). Отсюда мы и видимъ, что чѣмъ больше  $n$ , тѣмъ, при прочихъ равныхъ условіяхъ, больше  $v$  и, слѣдовательно, работа тренія. Въ силу этого желательно, съ одной стороны, чтобы линія зацѣпленія, разъ она должна имѣть опредѣленную длину, располагалась бы по обѣ стороны линіи центровъ; съ другой стороны, чтобы она была возможно короче. Но въ послѣднемъ отношеніи нельзя итти далѣе нѣкотораго предѣла, который опредѣляется изъ слѣдующихъ соображеній. Для правильной передачи движенія необходимо, чтобы прежде чѣмъ одна пара зубцовъ выходила изъ зацѣпленія, другая пара входила бы въ зацѣпленіе; слѣдовательно, требуется, чтобы, пока точка зацѣпленія ( $s$ ) проходитъ кривую зацѣпленія, общая точка соприкосновенія начальныхъ окружностей

прошла бы дугу, большую одного шага. Эта дуга называется дугою зацѣпленія. Если  $l$  есть длина кривой зацѣпленія,  $w$ —скорость по ней точки зацѣпленія, то длина  $d$  дуги зацѣпленія опредѣлится такимъ образомъ:

$$\frac{l}{w} = \frac{d}{u} \quad (2)$$

Откуда

$$d = \frac{u.l}{w} \quad (3)$$

причемъ

$$d \text{ должно быть } > t \quad (4)$$

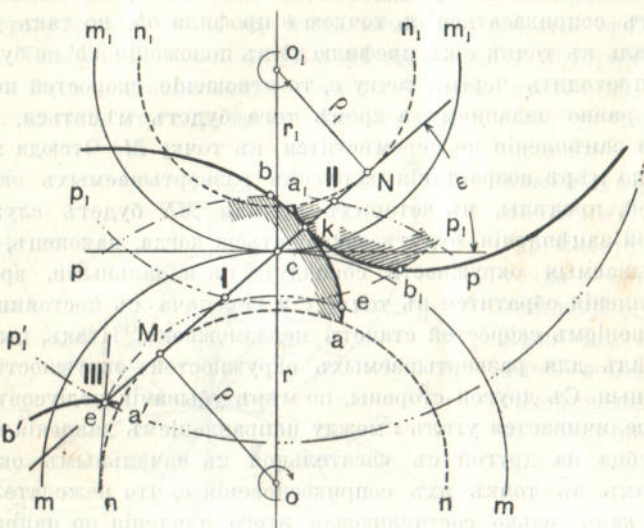
**55. Зацѣпленіе по развертывающей окружности.** При проектированіи новыхъ колесъ пользуются нѣсколькими способами очерчиванія профилей зубцовъ; но чаще всего зубцы очерчиваютъ по развертывающей окружности. Мы видѣли раньше (§ 6), что при каченіи окружности  $m_1$  по  $m$ , (фиг. 88) развертка круга  $n_1$ , концентрическаго съ  $m_1$ , будетъ огибать развертку круга  $n$ , концентрическаго съ  $m$ , причемъ имѣетъ мѣсто соотношеніе:

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{r_1}{r} = \frac{\rho_1}{\rho} \quad (1)$$

Развертки  $ab$  и  $a_1b_1$  строятся по точкамъ. Для обсужденія достоинства этого зацѣпленія воспользуемся методомъ Reuleaux. Кривая зацѣпленія здѣсь представится прямою  $MN$ , касательною къ развертываемымъ окружностямъ и проходящею черезъ точку  $c$ . Для доказательства этого вспомнимъ, что нормаль въ точкѣ соприкосновенія зубцовъ должна проходить всегда черезъ точку соприкосновенія начальныхъ окружностей. Такъ какъ по свойству развертки нормаль къ ней въ любой точкѣ всегда касается въ соответствующей точкѣ развертываемой окружности, то, очевидно, что нормаль въ точкѣ соприкосновенія зубцовъ должна всегда совпадать съ прямою  $MN$ , или съ прямою ей симметричною по отношенію къ линіи центровъ  $oo_1$ , причемъ эта послѣдняя будетъ служить кривою зацѣпленія при вращеніи колесъ въ обратную сторону. Предѣлы, въ которыхъ прямая  $MN$  служитъ кривою зацѣпленія, опредѣляютъ



ся точками пересечения ее с окружностями головок колес  $p$  и  $p_1$ . В точкѣ I крайняя точка головки зубца колеса  $m_1$  будетъ соприкасаться съ соответствующей ей точкою профили



фиг. 88-я.

$ab$ , которую легко найти построением Reuleaux, а въ точкѣ II крайняя точка головки зубца колеса  $m$  съ соответствующей ей точкою профили  $a_1b_1$ . Если мы знаемъ длину  $II = l$ , то легко опредѣлить число зубцовъ, находящихся постоянно въ зацепленіи. По формулѣ (3) предыдущаго параграфа это число равняется цѣлому частнаго:

$$\frac{d}{t} = \frac{l \cdot u}{w \cdot t}.$$

Если  $l$  известно, то остается найти только отношеніе  $\frac{u}{w}$ , которое очевидно  $= \cos \varepsilon$ , т. к.  $w = u \cdot \cos \varepsilon$ , т. е. скорости по окружностямъ  $n$  и  $n_1$ . При построении этого зацепленія радиусъ одной изъ окружностей  $n$  или  $n_1$  можетъ быть выбранъ произвольно; однако же здѣсь должны быть приняты во вниманіе нѣкоторыя ограниченія. Замѣтимъ прежде всего, что точки I и II не могутъ лежать за предѣлами M и N.

Допустимъ, что мы придали зубцу колеса  $m_1$  такую высоту, что окружность его головки пересѣчетъ прямую  $MN$  въ точкѣ  $III$ . На основаніи построенія Reuleaux мы легко найдемъ, что въ этой точкѣ крайняя точка головки зубца колеса  $m_1$  будетъ соприкасаться съ точкою  $e$  профиля  $ab$ ; но такъ какъ нормаль въ точкѣ  $e$  къ профилю  $ab$  въ положеніи  $a'b'$  не будетъ уже проходить черезъ точку  $c$ , то отношеніе скоростей не будетъ равно заданному, а кромѣ того будетъ мѣняться, пока точка зацѣпленія не перемѣстится въ точку  $M$ . Отсюда ясно, что, по мѣрѣ возрастанія радіусовъ развертываемыхъ окружностей, предѣлы, въ которыхъ прямая  $MN$  будетъ служить кривой зацѣпленія, будутъ сокращаться; когда, наконецъ, развертываемыя окружности совпадутъ съ начальными, кривая зацѣпленія обратится въ точку  $c$  и передача съ постояннымъ отношеніемъ скоростей станетъ невозможною. Итакъ, высшій предѣлъ для развертываемыхъ окружностей—окружности начальные. Съ другой стороны, по мѣрѣ убыванія радіусовъ  $\rho$  и  $\rho_1$ , увеличивается уголъ  $\epsilon$  между направлениемъ давленія одного зубца на другой съ касательной къ начальнымъ окружностямъ въ точкѣ ихъ соприкосновенія  $c$ , что нежелательно, такъ какъ только составляющая этого давленія по направленію касательной совершаетъ полезную работу, а составляющая по линіи центровъ увеличиваетъ лишь вредныя сопротивленія. Изъ всего предыдущаго можно сдѣлать такой выводъ: уголъ  $\epsilon$  нужно брать возможно малымъ, но достаточнымъ, чтобы получить желательное число зубцовъ въ зацѣпленіи.

Отмѣтимъ нѣкоторыя хорошія свойства разсматриваемаго зацѣпленія. На основаніи соотношенія (1) мы можемъ легко заключить, что при очерчиваніи профилей по развертывающимъ окружностямъ неточная установка разстоянія между осями колесъ не имѣетъ вліянія на измѣненіе отношенія скоростей, такъ какъ это отношеніе равно отношенію радіусовъ развертываемыхъ окружностей. Правильность передачи не нарушается и въ томъ случаѣ, если зубцы снашиваются по всей поверхности равномерно, ибо кривая, параллельная разверткѣ, есть развертка того же круга. Зацѣпленіе по развертывающимъ окружностямъ даетъ возможность устройства безъ всякихъ затрудненій и неудобствъ цѣлой системы колесъ, каждое изъ которыхъ будетъ правильно зацѣпляться съ каждымъ дру-

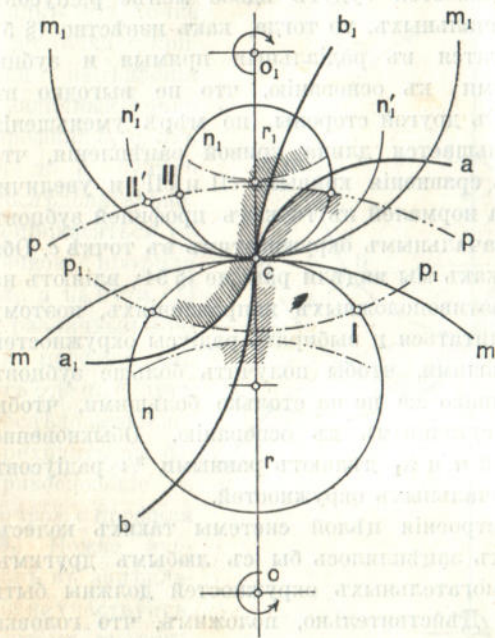


гимъ. Для этого, очевидно, нужно выбирать для всехъ колесъ одинъ и тотъ же уголъ  $\varepsilon$ .

**56. Эпициклическое зацепление.** Построение эпициклическаго зацепления основано на теоремѣ Камуса (§ 8). Пусть  $o$  и  $o_1$  центры валовъ,  $m$  и  $m_1$ —начальные окружности (фиг. 89).

Возьмемъ третью окружность  $n_1$ , лежащую внутри окружности  $m_1$  и соприкасающуюся съ начальными въ точкѣ  $c$ . Если мы покатаемъ эту окружность по окружности  $m_1$ , то точка  $c$

опишетъ гипоциклоиду  $cb_1$ , если покатаемъ ее по окружности  $m$ , то точка  $c$  опишетъ эпициклоиду  $ca$ . Если мы соединимъ неизмѣнно гипоциклоиду  $cb_1$  съ окружностью  $m_1$  и покатаемъ послѣднюю по окружности  $m$ , то  $cb_1$  будетъ огибать  $ca$ , т. е. эти кривыя могутъ служить профилями зубцовъ. Въ виду того, что кривая  $cb_1$  находится внутри окружности  $m_1$ , а кривая  $ca$  снару-



Фиг. 89-я.

жи окружности  $m$ , то этими кривыми можно очертить только ножку зубцовъ колеса  $m_1$  и головку зубцовъ колеса  $m$ . Если мы возьмемъ вторую подобную же окружность  $n$ , но расположенную внутри окружности  $m$ , то при помощи ея такимъ же образомъ получимъ профиль  $cb$  (гипоциклоида) ножки колеса  $m$  и профиль  $ca_1$  (эпициклоида) головки колеса  $m_1$ .

Кривая зацепления будетъ, очевидно, состояться изъ дугъ вспомогательныхъ окружностей  $nc$  и  $c_1I$ , такъ какъ образующія профили зубцовъ точки находятся на этихъ окружно-

стях, приче́мъ точки *I* и *II* получа́ются пересѣченіемъ окружностей *n* и *n*<sub>1</sub> съ окружностями головокъ зубцовъ *p* и *p*<sub>1</sub>. Въ виду того, что вспомога́тельные окружности катя́тся по нача́льнымъ съ тою же скоростью, съ которою послѣднія катя́тся другъ по другу, въ данномъ случаѣ длина кривой зацѣпле́нія равна длинѣ дуги зацѣпле́нія.

Выборъ ради́усовъ вспомога́тельныхъ окружностей *n* и *n*<sub>1</sub> производится на основаніи слѣдующихъ соображеній. Если ради́усы эти́хъ окружностей будутъ вдвое менѣе ради́усовъ соотвѣтственныхъ нача́льныхъ, то тогда, какъ извѣстно (§ 5), гипоциклоиды обратя́тся въ радіальныя прямыя и зубцы получа́тся суженными къ основанію, что не выгодно въ смыслѣ прочно́сти. Съ другой стороны, по мѣрѣ уменьше́нія ихъ ради́усовъ, уменьша́ется длина кривой зацѣпле́нія, что легко заклю́чить изъ сравне́нія кривыхъ *cII* и *cI'*, и увеличива́ются углы накло́на нормалей въ точкахъ профилей зубцовъ съ касательной къ нача́льнымъ окружностямъ въ точкѣ *c*. Оба эти обстоя́тельства, какъ мы видѣли раньше (§ 54), влія́ютъ на работу тренія въ противоположныхъ направле́ніяхъ, поэ́тому съ ними можно не счита́ться и выбира́ть ради́усы окружностей *n* и *n*<sub>1</sub> возможно большими, чтобы получи́ть больше зубцовъ въ зацѣпле́ніи; но однако же не на столько большими, чтобы зубецъ получа́лся суженнымъ къ основанію. Обыкновенно діаметры окружностей *n* и *n*<sub>1</sub> дѣла́ютъ равными <sup>3</sup>/<sub>4</sub> ради́усовъ соотвѣтственныхъ нача́льныхъ окружностей.

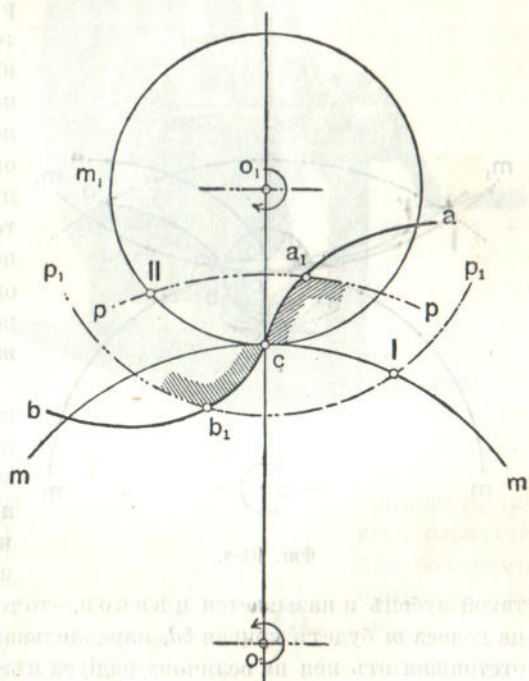
Въ случаѣ постро́енія цѣлой системы такихъ колесъ, каждое изъ которыхъ зацѣпля́лось бы съ любымъ другимъ, ради́усы всѣ́хъ вспомога́тельныхъ окружностей должны быть равны между собою. Дѣйстви́тельно, положимъ, что головки ка́кого нибудь третья́го колеса *m*<sub>2</sub> очерчены по эпициклоидамъ, образованнымъ при помощи окружности *n* (фиг. 89), а впадины по гипоциклоидамъ, образованнымъ при помощи окружности *n*<sub>1</sub>; тогда такое колесо могло бы правильно зацѣпля́ться съ колесомъ *m*, но не могло бы зацѣпля́ться съ колесомъ *m*<sub>1</sub>. Это обстоя́тельство явля́ется, очевидно, недостаткомъ эпициклическа́го зацѣпле́нія, такъ какъ лиша́етъ возможности выбрать для ка́ждаго колеса болѣе цѣлесообразныя размѣры вспомога́тельной окружности.

**57. Зацѣпле́ніе по двумъ точкамъ.** Это зацѣпле́ніе представля́етъ собою частный случай предыдуща́го. Положимъ, что



мы выбираемъ за профиль зубца колеса  $m_1$  (фиг. 90) точку  $c$ ; тогда профилемъ головки колеса  $m$  будетъ эпициклоида  $ca$ , описываемая точкой  $c$  при качении  $m_1$  по  $m$ . Если мы обратно примемъ точку  $c$  за профиль зубцовъ колеса  $m$ , то головка зубца на колесѣ  $m_1$  будетъ очерчена по эпициклоидѣ  $cb$ .

Если же мы объ головке очертимъ упомянутыми эпициклоидами  $ca$  и  $cb$ , то защвление будетъ происходить въ слѣдующемъ порядкѣ: отъ точки I до точки  $c$  кривой защвления различныя точки профиля  $b_1 c$ , отъ  $b_1$  до  $c$ , будутъ послѣдовательно соприкасаться съ точкою  $c$  профиля  $ca_1$ , а на пути  $cII$  — различныя точки профиля  $ca_1$ , отъ  $c$  до  $a_1$ , будутъ послѣдовательно приходить въ соприкосновение съ точкою  $c$  профиля  $cb_1$ . Ножка зубцовъ въ защвленіи не участвуетъ, поэтому впадинѣ можетъ быть придана произвольная форма, лишь бы только одинъ зубецъ не задѣвалъ за другой. Недостатокъ этой передачи заключается въ быстромъ изнашиваніи зубцовъ около точки  $c$ ; но зато съ другой стороны здѣсь получается длинная кривая защвления, поэтому такое защвление съ успѣхомъ примѣняется въ периодически дѣйствующихъ передачахъ, гдѣ при малыхъ размѣрахъ одного изъ колесъ желательно получить возможно большое число зубцовъ въ защвленіи.



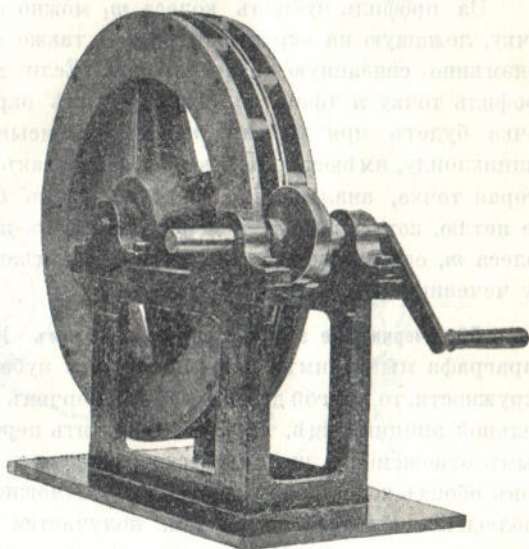
Фиг. 90-я,



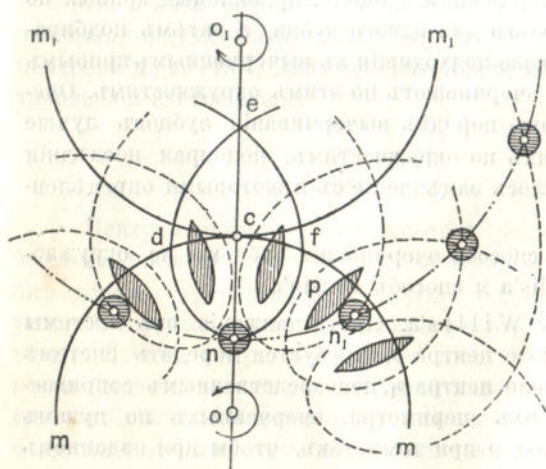


лагается по одну сторону линіи центровъ; однако же оно обладаетъ и нѣкоторымъ преимуществомъ передъ другими зацѣплениями, которое заключается въ простотѣ формы зубцовъ, что и является причиной распространения цѣвочнаго зацѣпления въ примитивныхъ устройствахъ (вѣтряныхъ и водяныхъ мельницахъ), гдѣ цѣвки выполняются изъ круглыхъ дубовыхъ палочекъ.

Имѣя въ виду указанную простоту формы и значительную длину кривой зацѣпления, Гриссонъ предложилъ



Фиг. 92-я.



Фиг. 93-я.

примѣнять такую передачу при большомъ передаточномъ числѣ.

Какъ видно изъ прилагаемой фигуры (фиг. 92), въ передачѣ Гриссона малое колесо имѣетъ только одинъ сердцевидной формы зубецъ. Такъ какъ, оче-

видно, при одномъ зубцѣ передача не можетъ происходить непрерывно, здѣсь въ одно цѣлое соединены двѣ пары колесъ, причеиъ зубцы ихъ смѣщены относительно другъ друга по окружности на половину шага.

За профиль зубцовъ колеса  $m_1$  можно взять не только точку, лежащую на окружности  $m_1$ , но также и всякую другую, неизмѣнно связанную съ нею точку. Если мы возьмемъ за профиль точку  $n$  (фиг. 93), лежащую внѣ окружности, то эта точка будетъ при каченіи  $m_1$  по  $m$  описывать удлинненную эпициклоиду, имѣющую петлю  $n\text{def}$ . Такъ какъ сосѣдній зубецъ, вторая точка, аналогичная точкѣ  $n$ , будетъ описывать такую же петлю, которая можетъ пересѣкаться съ первою, то зубцы колеса  $m$ , если вмѣсто точекъ возьмемъ цѣвки, примуть форму чечевицы  $p$ .

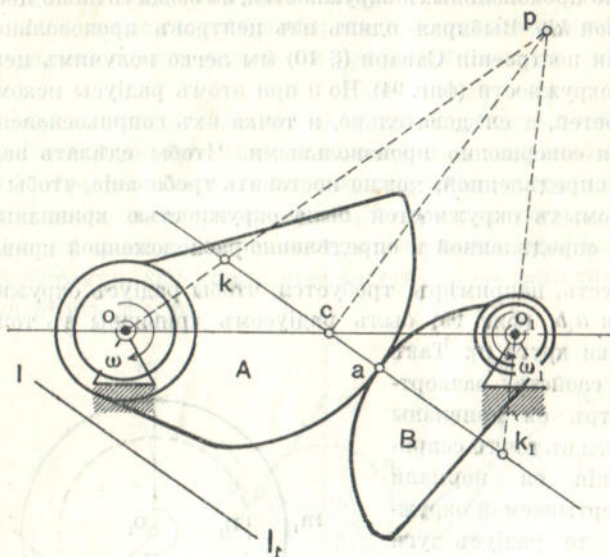
**59. Очерчиваніе зубцовъ по окружностямъ.** Изъ предыдущаго параграфа мы видимъ, что если одинъ зубецъ очерченъ по окружности, то другой долженъ быть очерченъ по кривой, параллельной эпициклоидѣ, такъ что получить передачу съ постояннымъ отношеніемъ угловыхъ скоростей при очерчиваніи зубцовъ обоихъ колесъ окружностями, невозможно. Однако же, при соблюденіи нѣкоторыхъ условій, получается достаточная для практическихъ цѣлей точность. Смысль такого зацѣпленія заключается въ слѣдующемъ: обыкновенно, каковъ бы ни былъ выбранъ способъ очерчиванія зубцовъ, правильныя кривыя по точкамъ строить только для одного зубца, а затѣмъ подбираютъ окружности, близко подходящія къ вычерченнымъ кривымъ и остальные зубцы очерчиваютъ по этимъ окружностямъ. Очевидно, что при такомъ порядкѣ вычерчиванія зубцовъ лучше сразу очерчивать ихъ по окружностямъ, подбирая послѣднія такъ, чтобы получилось зацѣпленіе съ нѣкоторыми опредѣленными свойствами.

Опишемъ два способа очерчиванія зубцовъ по окружностямъ: способъ Willis'a и способъ Unwin'a.

1) Способъ Willis'a. Пусть движеніе отъ системы  $A$ , вращающейся около центра  $o$ , требуется передать системѣ  $B$ , вращающейся около центра  $o_1$ , непосредственнымъ соприкосновеніемъ частей ихъ периметра, очерченныхъ по дугамъ окружностей (фиг. 94), и при томъ такъ, чтобы при заданномъ относительномъ расположеніи системъ отношеніе угловыхъ



скоростей их было равно некоторому заданному числу и давление ведущей системы на ведомую имѣло направление  $U_1$ .



Фиг. 94-я.

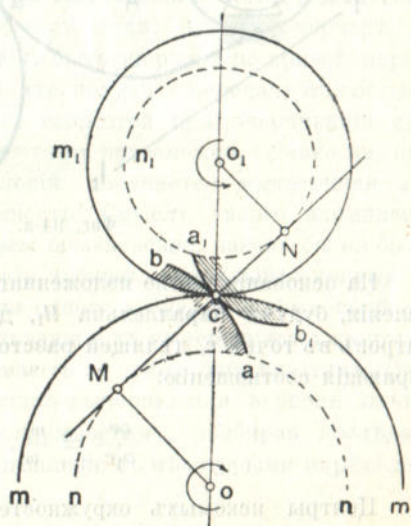
На основаніи ранѣе изложеннаго (§ 50) понятно, что линія давления, будучи параллельна  $U_1$ , должна пересѣкать линію центровъ въ точкѣ  $c$ , дѣлящей разстояніе  $oo_1$  на части, удовлетворяющія соотношенію:

$$\frac{oc}{o_1c} = \frac{\omega_1}{\omega}.$$

Центры искоемыхъ окружностей должны, очевидно, лежать на линіи  $kk_1$  и это есть единственное условіе, которому онѣ должны удовлетворять. Отсюда видно, что кромѣ тѣхъ условій, которыя были поставлены раньше, можно ввести еще новыя. Весьма, напримѣръ, желательно, чтобы искомыя окружности были окружностями кривизны пары взаимно огибающихъ кривыхъ въ предположеніи, что полоида и серполоида суть окружности радиусовъ  $oc$  и  $o_1c$ ; такъ какъ окружности кривизны имѣютъ съ соответственными кривыми три общія точки, то заданная величина отношенія угловыхъ скоростей будетъ

имѣть мѣсто въ теченіе двухъ безконечно малыхъ промежутковъ времени, а не одного, какъ это было бы въ случаѣ совершенно произвольныхъ окружностей, имѣющихъ лишь центры на прямой  $kk_1$ . Выбирая одинъ изъ центровъ произвольно, на основаніи построенія Савари (§ 10) мы легко получимъ центръ второй окружности (фиг. 94). Но и при этомъ радіусы искомыхъ окружностей, а слѣдовательно, и точка ихъ соприкосновенія  $a$ , остаются совершенно произвольными. Чтобы сдѣлать задачу вполне опредѣленной, можно поставить требованіе, чтобы одна изъ искомыхъ окружностей была окружностью кривизны нѣкоторой опредѣленной и опредѣленно-расположенной кривой.

Пусть, напримѣръ, требуется, чтобы радіусъ окружности профиля  $a_1b_1$  (фиг. 95) былъ радіусомъ кривизны въ точкѣ с развертки круга  $n_1$ . Такъ какъ по свойству развертки центръ ея кривизны находится въ точкѣ соприкосновенія ея нормали съ развертываемой окружностью, то радіусъ дуги  $a_1b_1$  будетъ  $cN$  и центръ ея —  $N$ . Очевидно, что радіусъ профиля  $ab$  зубца колеса  $m$  будетъ  $Mc$ , а центръ — точка  $M$ . Построенное такимъ образомъ зацепленіе будетъ съ достаточною точностью удовлетворять условію постоянства скоростей и по своимъ свойствамъ близко подходить къ зацепленію по развертывающимъ окружностямъ.



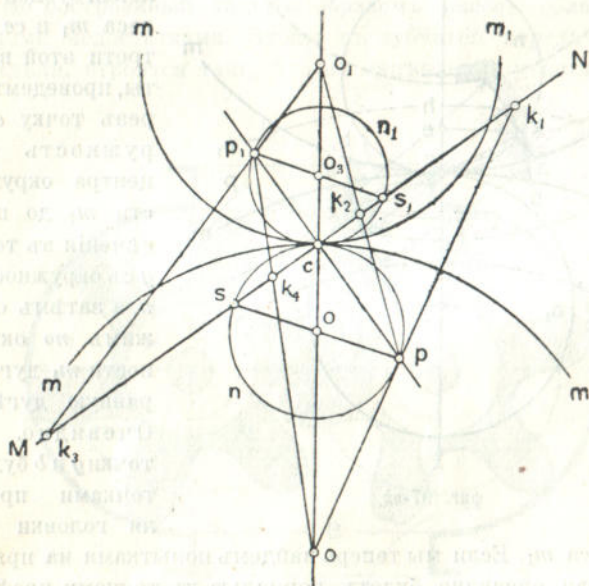
фиг. 95-аа.

Можно также построить зацепленіе по окружностямъ, близкое по свойствамъ къ эпициклическому, построенному при помощи вспомогательныхъ окружностей  $n$  и  $n_1$  (фиг. 96). Поставимъ условіе, чтобы зацепленіе было точно въ двухъ точкахъ  $s$  и  $s_1$ , лежащихъ на одной прямой  $MN$ , проходящей че-



резъ точку соприкосновенія начальныхъ окружностей. Очевидно, что въ моментъ зацѣпленія въ точкахъ  $s$  и  $s_1$  давленіе одного зубца на другой будетъ направлено по  $MN$ . Замѣтимъ, что точки  $s$  и  $s_1$  слѣдуетъ выбирать въ предѣлахъ кривой зацѣпленія, соответствующей желательной высотѣ головокъ зубцовъ.

Задача, слѣдовательно, сводится къ нахожденію радиусовъ и центровъ кривизны эпициклоиды и гипоциклоиды въ точкѣ  $s$ , образуемыхъ этою точкою при каченіи окружности  $n$  соответственно по окружностямъ  $m_1$  и  $m$ , и центровъ кривизны и радиусовъ кривизны эпициклоиды и гипоциклоиды въ точкѣ  $s_1$ , образуемыхъ каченіемъ окружности  $n_1$  соответственно по окружностямъ  $m$  и  $m_1$ .

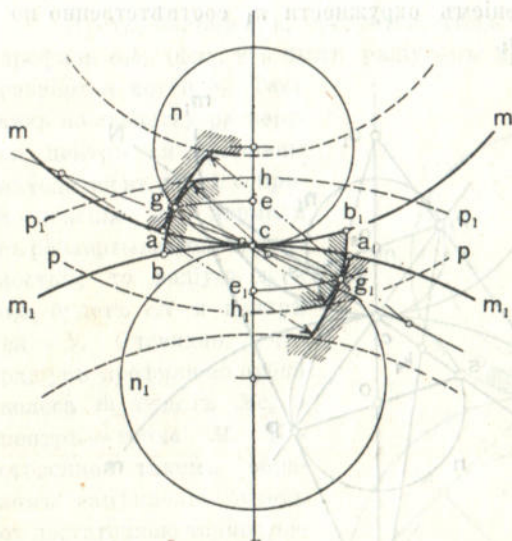


фиг. 96-ая.

Всѣ искомыя центры кривизны располагаются, очевидно, на прямой  $MN$  и находятъ весьма просто построеніемъ Савари (§ 10). Такъ, напримѣръ, для нахожденія центра кривизны  $k_1$  гипоциклоиды въ точкѣ  $s$ , ведемъ прямую  $sp$  черезъ центръ окружности  $n$  (центръ кривизны серполоиды) до встрѣ-

чи съ перпендикуляромъ изъ точки  $c$  (полюсъ) къ прямой  $MN$  (нормаль въ точкѣ соприкосновенія огибающихъ), а затѣмъ ведемъ прямую черезъ  $o$  (центръ кривизны полюды) и  $p$ , которая и пересѣчетъ прямую  $MN$  въ искомомъ центрѣ кривизны  $k_1$ . Подобнымъ же образомъ находятся и остальные центры кривизны  $k_2, k_3$  и  $k_4$ .

2) Способъ Unwin'a. Способъ Unwin'a для замѣны профилей зубцовъ окружностями въ эпициклическомъ зацепленіи состоитъ въ слѣдующемъ. Пусть  $m$  и  $m_1$  (фиг. 97) начальныя, а  $n$  и  $n_1$  вспомогательныя окружности. Предполагая,



фиг. 97-ая.

что  $ch$  есть полная высота головки зубцовъ колеса  $m_1$  и  $ce$  двѣ трети этой высоты, проведемъ черезъ точку  $e$  окружность изъ центра окружности  $m_1$  до пересѣченія въ точкѣ  $g$  съ окружностью  $n$ , а затѣмъ отложимъ  $no$  окружности  $m_1$  дугу  $cb$ , равную дугѣ  $cg$ . Очевидно, что точки  $g$  и  $b$  будутъ точками профиля головки зубцовъ

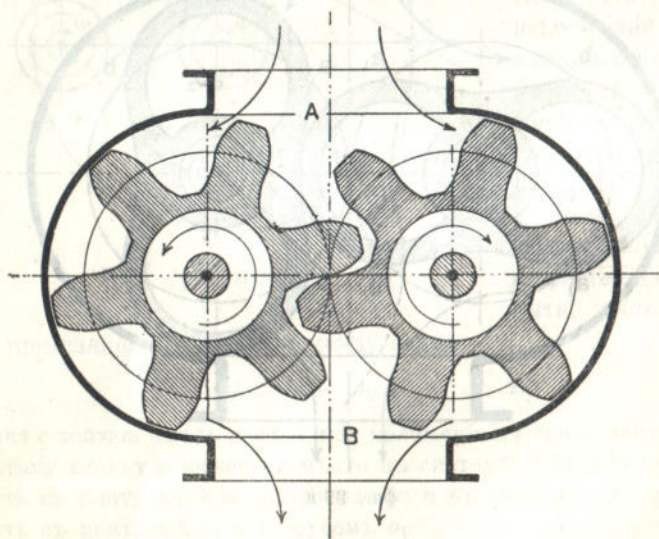
колеса  $m_1$ . Если мы теперь найдемъ попытками на прямой  $gc$ ,—которая, очевидно, будетъ нормалью къ точному профилю въ точкѣ  $g$ ,—или на ея продолженіи, центръ окружности, которая проходила бы черезъ точки  $g$  и  $b$ , то можемъ этой окружностью очертить профиль головки колеса  $m_1$ . Профиль ножки колеса  $m$  можетъ быть очерченъ, очевидно, по окружности, проходящей черезъ точки  $g$  и  $a$ , если  $\widehat{ca} = \widehat{cg}$ , изъ нѣкотораго центра на прямой  $cg$ . Подобнымъ же образомъ можно очертить профиль головки колеса  $m$  и профиль ножки колеса  $m_1$ .



**60. Коловратные насосы.** Механизм коловратных насосовъ есть частный случай разсмотрѣнной нами вышней цилиндрической передачи.

Коловратный насосъ можетъ быть образованъ при помощи двухъ равныхъ зубчатыхъ колесъ съ зубцами, построенными при помощи одного изъ описанныхъ способовъ. Если мы помѣстимъ пару такихъ колесъ въ плотно облегающій ихъ кожухъ (фиг. 98), то внутри кожуха образуются два отдѣленныхъ другъ отъ друга пространства *A* и *B*, такъ какъ по крайней мѣрѣ одна пара зубцовъ всегда будетъ находиться между собою въ соприкосновеніи. При вращеніи колесъ по стрѣлкамъ жидкость изъ пространства *A* будетъ захватываться въ промежутки между зубцами и кожухомъ и перемѣщаться въ пространство *B*, откуда будетъ поступать дальше.

Но построенный такимъ образомъ насосъ обладалъ бы большими недостатками. Зубцы въ зубчатой передачѣ, какъ мы видѣли, строятся такъ, что въ зацѣпленіи участвуютъ не

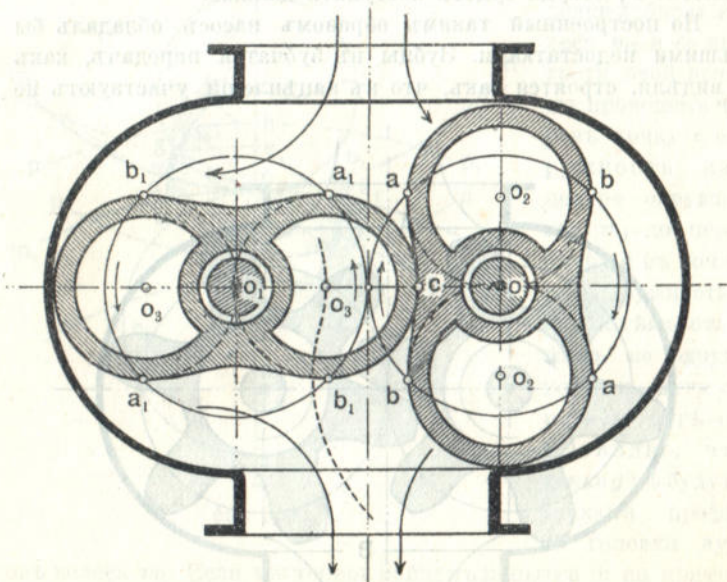


фиг. 98-я.

всѣ точки периметра колесъ, поэтому между головками и впадинами образуются промежутки и часть жидкости, попавшая въ эти промежутки, будетъ перемѣщаться обратно изъ про-

пространства  $B$  въ пространство  $A$ . Такъ какъ кромѣ того пространство между двумя парами зацѣпляющихся зубцовъ при вращеніи измѣняется по объему, то обратное перемѣщеніе жидкости будетъ связано съ бесполезной работою ея сжиманія.

Въ виду этого зубцы колесъ коловратныхъ насосовъ строятся такъ, что въ зацѣпленіи участвуютъ послѣдовательно всѣ точки периферіи колесъ. Для примѣра разсмотримъ вентиляторъ Рута (фиг. 99). Каждое изъ равныхъ и одинаковыхъ колесъ, вращающихся съ одной и той же угловой скоростью около осей  $o$  и  $o_1$ , имѣетъ здѣсь только два зубца, очерченныхъ по окружностямъ изъ центровъ  $o_2$  и  $o_3$ , и двѣ впадины  $ab$  и  $a_1b_1$ , которыя должны быть очерчены, очевидно, по кривымъ, параллельнымъ сокращенной эпициклоидѣ. Но при



фиг. 99-а.

такомъ способѣ очерчиванія колесъ возникаетъ то неудобство, что здѣсь не можетъ быть передачи вращенія отъ одного колеса къ другому, такъ какъ нормаль въ точкѣ соприкосновенія зубцовъ не всегда имѣетъ надлежащее направленіе; такъ напримѣръ, при положеніи колесъ, изображенномъ на чертежѣ, нормаль въ точкѣ  $c$  проходитъ черезъ центры  $o$  и  $o_1$ . Въ виду



этого снаружи кожуха на продолжении осей  $o$  и  $o_1$  насаживаются два равных обыкновенных зубчатых колеса, при помощи которых вращение от одной оси передается другой с той же угловой скоростью в противоположную сторону.

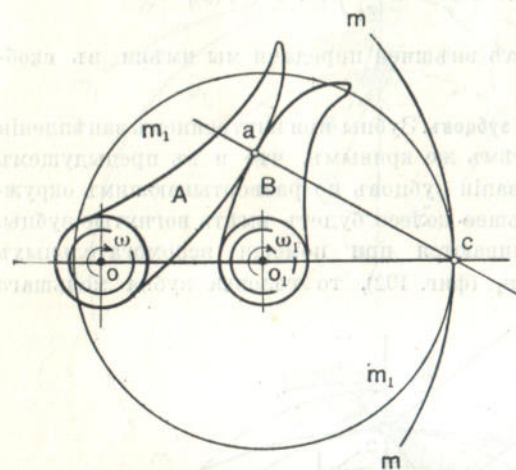
Колеса вращаются в разные стороны. Отношение угловых скоростей постоянно. Внутренняя цилиндрическая зубчатая передача.

61. Начальные окружности. Мы видели раньше (§ 50), что в случае вращения звеньев  $A$  и  $B$  (фиг. 100) в разные стороны угловые скорости удовлетворяют отношению:

$$k = \frac{\omega_1}{\omega} = \frac{oc}{o_1c} \quad (1),$$

где  $c$  есть точка пересечения нормали в точках соприкосновения звеньев  $A$  и  $B$  с линией центров.

Если задано, что отношение скоростей должно быть постоянно,



фиг. 100-я.

то при данном расстоянии между осями

$$oo_1 = d = oc - o_1c \dots \dots (2),$$

точка  $c$  должна иметь постоянное положение на линии центров, поэтому геометрическое ее место в системе  $A$  будет окружность с центром  $o$  и радиусом  $oc$ , а в системе  $B$ —окружность с центром  $o_1$  и радиусом  $o_1c$ .

Как мы видим, эти окружности  $m$  и  $m_1$ , которые мы будем называть начальными окружностями зубчатых колес, соприкасаются внутренним образом. Очевидно, что для осуществления передачи с постоянным отношением скоростей, зубцы должны иметь такие очертания, чтобы нормаль в их точках соприкосновения проходила всегда через точку  $c$ ,

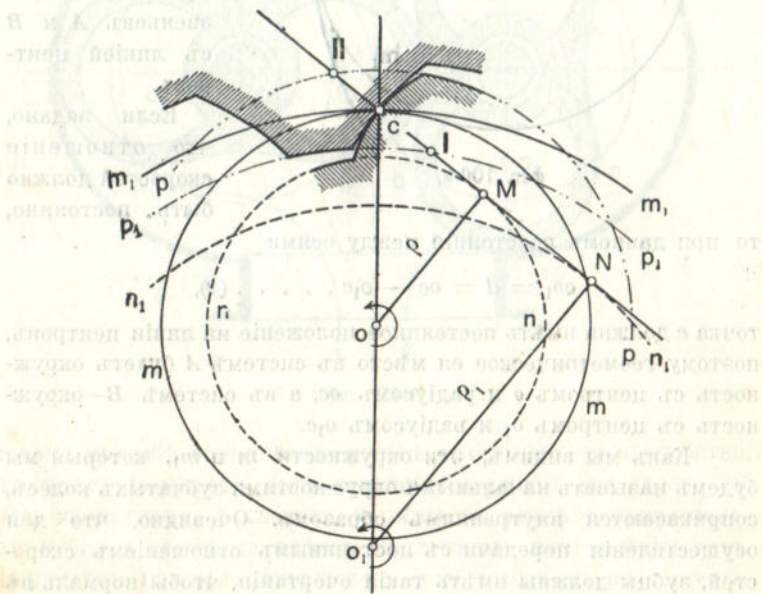
определяемую по ур-ямъ (1) и (2), иначе говоря, профиль зубца одного колеса долженъ быть огибающей профиля зубца другого колеса при качении одной начальной окружности по другой.

Внутренняя цилиндрическая передача применяется рѣдко, вслѣдствіе неудобствъ чисто конструктивнаго характера, хотя въ отношеніи работы тренія она имѣетъ преимущество передъ внѣшней цилиндрической передачей. Дѣйствительно, скорость скольженія здѣсь имѣетъ слѣдующее выраженіе:

$$v = \omega r \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) \dots \dots (3),$$

тогда какъ въ случаѣ внѣшней передачи мы имѣли въ скобкахъ знакъ плюсь.

**62. Очерчиваніе зубцовъ.** Зубцы при внутреннемъ зацѣпленіи очерчиваются по тѣмъ же кривымъ, что и въ предыдущемъ случаѣ. При очерчиваніи зубцовъ по развертывающимся окружностямъ (фиг. 101), большее колесо будетъ имѣть вогнутые зубцы. Если зубцы очерчиваются при помощи вспомогательныхъ окружностей  $n$  и  $n_1$  (фиг. 102), то головка зубца меньшаго

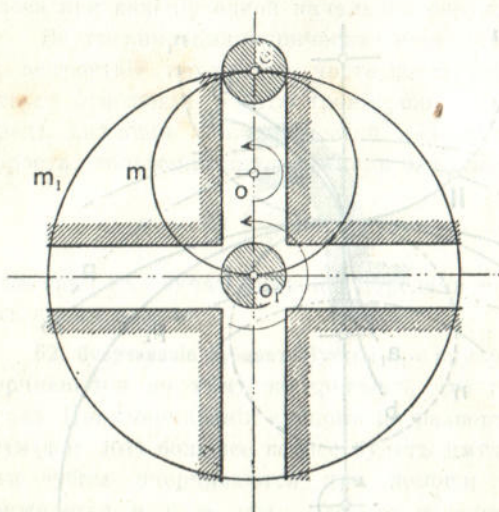


фиг. 101-я.





около параллельныхъ осей съ одинаковыми угловыми скоростями, но въ разныя стороны.



фиг. 103-я.

Какъ извѣстно, въ такомъ случаѣ результирующее движеніе будетъ движеніе поступательное по направленію, перпендикулярному къ линіи центровъ, со скоростью

$$u = \omega \cdot d \dots (4),$$

гдѣ  $d$ —разстояніе между осями  $o$  и  $o_1$  (фиг. 104).

Оказывается, что и въ данномъ случаѣ возможно

передавать движеніе отъ звена  $A$ , соединеннаго съ осью  $o$ , звену  $B$ , соединенному съ осью  $o_1$ , при помощи непосредственнаго между ними соприкосновенія. Возьмемъ звено  $B$  въ какомъ нибудь другомъ положеніи  $o_1'c'$ . Такъ какъ движеніе звена  $B$  есть движеніе поступательное, то  $o_1'c' \parallel o_1c$ .

Соединивъ  $o_1'$  съ  $o$  и  $c'$  съ  $o_2$ , гдѣ  $oo_2 = o_1c = o_1'c'$ , мы легко найдемъ, что

$$oo_1' = o_2c' = oo_1 = d = const \dots (5).$$

Изъ этого слѣдуетъ, что при движеніи звена  $B$  относительно звена  $A$  всякая точка перваго описываетъ окружность радиуса, равнаго разстоянію между осями, около нѣкоторой точки послѣдняго, занимающей по отношенію къ оси  $o$  такое же положеніе, какое движущаяся точка занимаетъ относительно оси  $o_1$ .

Принявъ точку  $c$  за профиль зубца колеса  $B$ , мы должны будемъ, очевидно, принять за профиль зубца колеса  $A$  окружность  $n$ . Если же за профиль зубца колеса  $B$  мы возьмемъ









Звенья  $A$  и  $B$  (фиг. 83) вращаются въ разные стороны; отношеніе угловыхъ скоростей переменнo.

63. Формулы Эйлера. Соотношенія, выведенныя въ §§ 50 и 51, остаются, очевидно, справедливыми и для данного случая, такъ что (фиг. 83)

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{oc}{o_1c} = \frac{r}{r_1} \dots (1);$$

$$r + r_1 = d \dots (2).$$

Если отношеніе скоростей измѣняется, то точка  $c$  не будетъ уже занимать на линіи центровъ опредѣленнаго положенія, а будетъ перемѣщаться въ зависимости отъ заданнаго измѣненія отношенія угловыхъ скоростей, причемъ, понятно, можно всегда опредѣлить ея геометрическое мѣсто какъ въ звенѣ  $A$ , такъ и въ звенѣ  $B$ .

Допустимъ, что углы поворота звеньевъ  $A$  и  $B$ , отсчитываемые отъ нѣкоторыхъ начальныхъ положеній, заданы какъ функціи времени:

$$\varphi = f(t) \dots (3) \text{ и } \varphi_1 = f_1(t) \dots (4);$$

тогда

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \frac{d\varphi}{dt} = f'(t) \\ \omega_1 &= \frac{d\varphi_1}{dt} = f_1'(t) \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

и, на основаніи ур-ія (1),

$$rf'(t) = r_1f_1'(t) \dots (6).$$

Исключая изъ ур-ія (6) при помощи ур-ія (2)  $r_1$ , найдемъ:

$$rf'(t) = (d - r)f_1'(t) \dots (7),$$

откуда

$$r = \frac{d \cdot f_1'(t)}{f'(t) + f_1'(t)} \dots (8) \text{ и } r_1 = d - r = \frac{d \cdot f'(t)}{f'(t) + f_1'(t)} \dots (9).$$

Исключая изъ послѣднихъ ур-ій при помощи ур-ій (3) и (4)  $t$ , найдемъ:

$$r = F(\varphi) \dots (10) \text{ и } r_1 = F_1(\varphi_1) \dots (11).$$

Это и будут ур-ія геометрических мѣстъ точки с въ системахъ  $A$  и  $B$ ; кривыя, выражаемыя ур-іями (10) и (11), катятся, очевидно, одна по другой безъ скольженія.

**64. Постановка задачи при практическихъ примѣненіяхъ.** При практическихъ примѣненіяхъ передачи съ переменнымъ отношеніемъ угловыхъ скоростей задача ставится нѣсколько иначе въ виду того, что обыкновенно задается не законъ измѣненія отношенія угловыхъ скоростей, а при постоянной угловой скорости одного изъ колесъ, предѣлы измѣненія угловой скорости другого.

Очевидно, что такая задача не имѣетъ опредѣленнаго рѣшенія, такъ какъ по такимъ даннымъ можно подобрать большое число кривыхъ, которыя, вращаясь около соответственныхъ осей, будутъ въ то же время катиться одна по другой безъ скольженія. Кривыя эти должны удовлетворять слѣдующимъ условіямъ. На основаніи ур-ій (1) и (5) предыдущаго параграфа, имѣемъ:

$$r d\varphi = r_1 d\varphi_1 . . . . . (1).$$

Дифференцируя дальше ур-іе (2) предыд. параграфа, найдемъ:

$$dr = - dr_1 . . . . . (2).$$

Если мы раздѣлимъ почленно ур-іе (1) на ур-іе (2), получимъ:

$$r \frac{d\varphi}{dr} = - r_1 \frac{d\varphi_1}{dr_1} . . . . . (3).$$

Такъ какъ выраженіе вида  $r \frac{d\varphi}{dr}$  есть тангенсъ угла между радіусомъ векторомъ какой-нибудь точки кривой и касательной въ этой точкѣ, то, обозначая углы эти соответственно черезъ  $\mu$  и  $\mu_1$ , изъ ур-ія (3) найдемъ:

$$\mu = 180^\circ - \mu_1 . . . . . (4).$$

Вотъ тѣ условія, которымъ должны удовлетворять искомыя кривыя. Такъ какъ условіе (3) есть слѣдствіе двухъ первыхъ, то, очевидно, достаточно, чтобы удовлетворялись только два изъ нихъ, ибо тогда третье будетъ также непременно удовлетворено. Покажемъ, что кривыя, удовлетворя-



юція этимъ условіямъ, катятся одна по другой безъ скольженія. Возьмемъ для этого ур-ія (1) и (2) въ квадратъ и сложимъ:

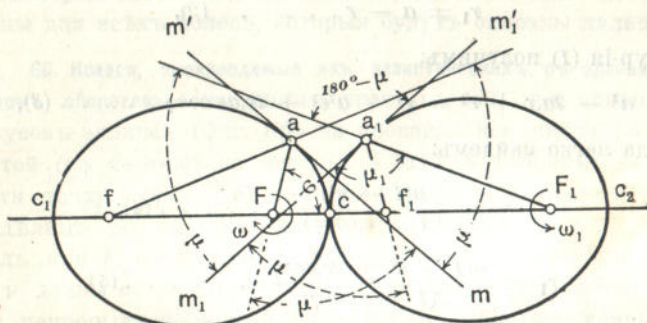
$$dr^2 + r^2 d\varphi^2 = dr_1^2 + r_1^2 d\varphi_1^2,$$

или

$$ds = ds_1,$$

гдѣ  $ds$  и  $ds_1$  безконечно малыя дуги на той и другой кривой, что и доказываетъ, что кривыя, удовлетворяющія условіямъ (1) и (2), катятся одна по другой безъ скольженія.

65. Эллиптическія колеса. Возьмемъ два равныхъ соприкасающихся между собою вершинами эллипса (фиг. 106) и допустимъ, что они вращаются соответственно около фокусовъ  $F$  и



фиг. 106-я.

$F_1$ . Докажемъ, что эти эллипсы будутъ удовлетворять выведеннымъ выше условіямъ, т. е. будутъ катиться одинъ по другому безъ скольженія.

Отложимъ отъ точки ихъ соприкосновенія с равныя дуги  $ca$  и  $ca_1$  и проведемъ въ точкахъ  $a$  и  $a_1$  касательныя  $mm'$  и  $m_1m_1'$ . Такъ какъ касательная къ эллипсу дѣлитъ внѣшній уголъ между радиусами векторами пополамъ, то легко видѣть что

$$\angle Fam = \angle m_1a_1f_1,$$

или

$$\mu = 180^\circ - \mu_1.$$

Обозначая через  $a$  длину большой полуоси, имѣемъ:

$$Fa + fa = a = Fa + F_1a_1.$$

Отсюда видно, что два равныхъ эллипса, вращающихся около одноименныхъ фокусовъ и соприкасающихся въ начальный моментъ вершинами, будутъ катиться одинъ по другому безъ скольженія. Найдемъ теперь законъ измѣненія отношенія угловыхъ скоростей. Обозначая  $Fa$  черезъ  $r$  и  $F_1a_1 = fa$  черезъ  $r_1$ , изъ  $\triangle faF$  имѣемъ:

$$r_1^2 = r^2 + a^2e^2 + 2rae \cos \varphi, \quad (1)$$

гдѣ  $e$ —эксцентриситетъ эллипса, который, какъ извѣстно, равняется отношенію фокуснаго разстоянія къ большой оси. Замѣтивъ, что

$$r_1 = a - r \quad (2),$$

изъ ур-ія (1) получимъ:

$$a^2 - 2ar + r^2 = r^2 + a^2e^2 + 2rae \cos \varphi \quad (3),$$

откуда легко найдемъ:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{2(1 + e \cos \varphi)} \quad (4);$$

$$r_1 = \frac{a(1 + e^2 + 2e \cos \varphi)}{2(1 + e \cos \varphi)} \quad (5)$$

и, на основаніи ур-ія (1 § 63),

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{r}{r_1} = \frac{1 - e^2}{1 + e^2 + 2e \cos \varphi} \quad (6).$$

Легко видѣть, что

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)_{\max} = \frac{1 + e}{1 - e} \quad (7) \text{ и } \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)_{\min} = \frac{1 - e}{1 + e} \quad (8)$$

и, предполагая, что  $\omega = \text{const}$ ,

$$n = \frac{(\omega_1)_{\max}}{(\omega_1)_{\min}} = \frac{F_1c_1^2}{Fc^2} = \frac{(1 + e)^2}{(1 - e)^2} \quad (9).$$

Отсюда, задаваясь величиной  $n$  и длиной оси, т. е. иначе разстояніемъ между осями вращенія, найдемъ всѣ элементы эллипса.

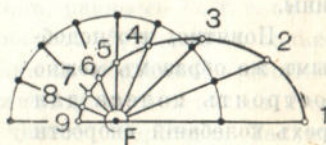


До сихъ поръ мы говорили лишь о начальныхъ кривыхъ зубчатыхъ колесъ и совершенно не касались вопроса о формѣ и расположеніи зубцовъ.

Что касается расположенія зубцовъ относительно начальныхъ кривыхъ, то и здѣсь, подобно передачѣ съ постояннымъ отношеніемъ скоростей, часть зубца располагается внѣ начальной кривой, часть внутри ея.

Профили зубцовъ должны быть, очевидно, взаимно огибающими при каченіи одного эллипса по другому. Практической приѣмъ построенія зубцовъ заключается въ томъ, что вся дуга эллипса дѣлится на цѣлое число частей, равныхъ шагу, а затѣмъ части дуги, содержащія цѣлое число шаговъ, замѣняются подходящими окружностями и на каждой изъ этихъ отдѣльныхъ частей зубцы строятся по тѣмъ же правиламъ, какъ въ предыдущихъ передачахъ. Подобнымъ же образомъ можно построить зубцы для всѣхъ колесъ, которые будутъ описаны дальше.

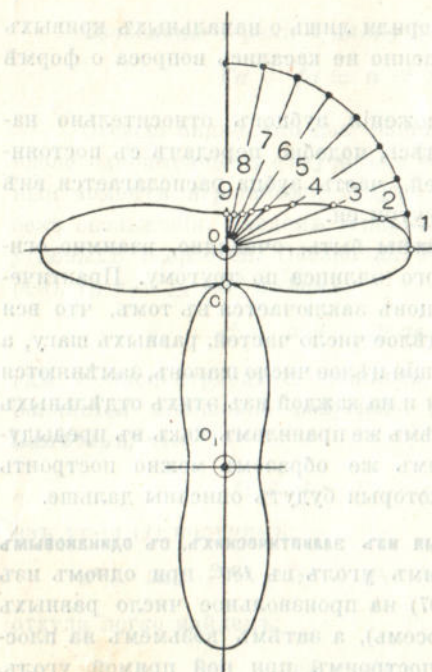
**66. Колеса, производимыя изъ эллиптическихъ, съ одинаковымъ числомъ оборотовъ.** Раздѣлимъ уголъ въ  $180^\circ$  при одномъ изъ фокусовъ эллипса (фиг. 107) на произвольное число равныхъ частей (на чертежѣ на восемь), а затѣмъ возьмемъ на плоскости точку  $o$  (фиг. 108), построимъ при ней прямой уголъ, раздѣлимъ его на такое же число равныхъ частей, какъ и уголъ при  $F$ , и отложимъ на полученныхъ радиусахъ векторахъ длины  $o1 = F1$ ,  $o2 = F2$  и т. д. Соединивъ точки 1, 2 и т. д. непрерывной кривой и построивъ такія же кривыя въ трехъ остальныхъ прямыхъ углахъ около точки  $o$ , мы получимъ замкнутую кривую. Двѣ такихъ кривыхъ, вращаясь около точекъ  $o$  и  $o_1$  и соприкасаясь между собою какъ показано на фигурѣ, будутъ, очевидно, катиться одна по другой безъ скольженія и, слѣдовательно, могутъ послужить начальными кривыми для зубчатыхъ колесъ.



фиг. 107-я.

Дѣйствительно, изъ самаго построенія мы видимъ, что сумма радиусовъ векторовъ двухъ кривыхъ въ точкѣ ихъ соприкосновенія будетъ величина постоянная, т. е.

$$r + r_1 = const. . . . . (1).$$



фиг. 108-я.

оборота осей два колебанія скорости отъ наибольшей до наименьшей величины.

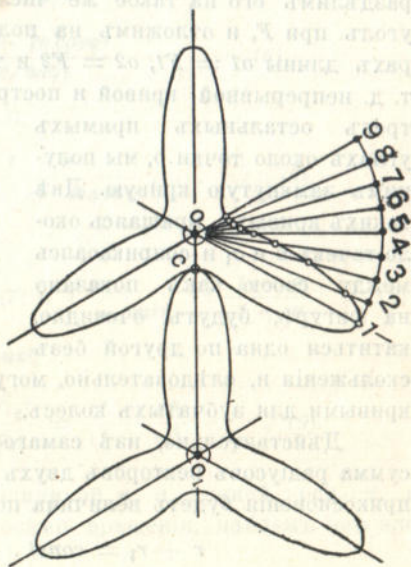
Понятно, что подобнымъ же образомъ можно построить колеса для трехъ колебаній скорости (фиг. 109), если взять около точки  $o$  уголъ въ  $60^\circ$  и раздѣлить его на то же число частей, какъ уголъ при  $F$  (фиг. 107). Взявъ уголъ при точкѣ  $o$  въ  $45^\circ$ , мы получимъ четыре колебанія, при углѣ въ  $36^\circ$ —пять колебаній и т. д.

Затѣмъ, такъ какъ ур-іе этой кривой будетъ отличаться отъ ур-ія эллипса только тѣмъ, что вмѣсто  $\varphi$  надо поставить  $2\varphi$ , то, очевидно, удовлетворится и условіе

$$r \frac{d\varphi}{dr} = r_1 \frac{d\varphi_1}{dr_1} \dots (2).$$

Разъ эти два условія удовлетворяются, то, какъ мы видѣли въ § 64, кривыя будутъ катиться одна по другой безъ скольженія.

Такимъ образомъ, при помощи описаннаго преобразованія эллипса мы можемъ получить за время одного



фиг. 109-я.





полюсовъ  $o$  и  $o_1$ , будутъ катиться одна по другой безъ скольжения, если только радіусы векторы одной спирали возрастаютъ вверхъ отъ линіи центровъ, а другой внизъ. При этомъ совершенно безразлично какими точками онѣ соприкасаются въ начальный моментъ.

Отложимъ отъ точки соприкосновения  $c$  равныя элементарныя дуги  $ca$  и  $cb$  и проведемъ въ точкахъ  $a$  и  $b$  касательныя  $mm$  и  $m_1m_1$ . Легко видѣть, что

$$\angle \mu = 180^\circ - \angle \mu_1 \dots (1).$$

Дѣйствительно, урѣе логарифмической спирали въ полярныхъ координатахъ, съ началомъ въ полюсѣ спирали, имѣеть слѣдующій видъ:

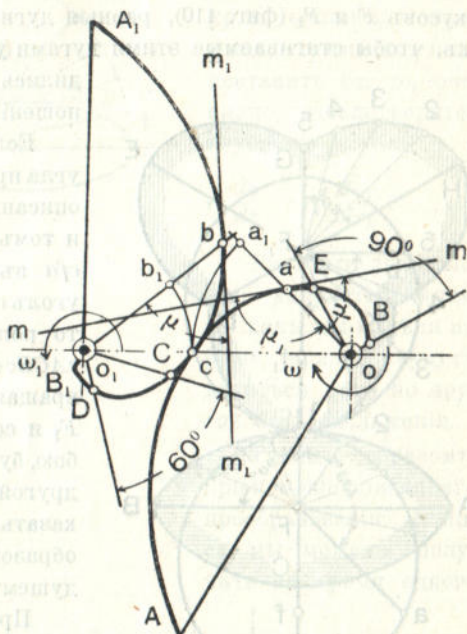
$$r = r_0 e^{m\theta} \dots (2),$$

гдѣ  $e$ —основаніе натуральныхъ логарифмовъ,  $\theta$ —уголъ радіуса вектора съ полярной осью, а  $r_0$  и  $m$ —постоянныя величины. Отсюда легко найдемъ, что

$$\operatorname{tg} \mu = r \frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{m} = \operatorname{const} \dots (3),$$

т. е. уголъ между касательной и радіусомъ векторомъ есть величина постоянная для всѣхъ точекъ спирали, вслѣдствіе чего для точекъ  $a$  и  $b$  и имѣеть мѣсто соотношеніе (1).

Опишемъ изъ точекъ  $o$  и  $o_1$  соответственными радіусами  $oc$  и  $o_1c$  дуги окружностей  $ca_1$  и  $cb_1$  до пересѣченія съ радіусами



фиг. 111-а.



векторами  $oa$  и  $o_1b$ . Изъ прямоугольныхъ треугольниковъ  $ca_1a$  и  $cb_1b$  имѣемъ:

$$a_1a = \overline{ca} \cdot \cos \mu \quad \text{и} \quad bb_1 = \overline{cb} \cdot \cos \mu,$$

откуда, принимая во вниманіе равенство дугъ  $ca$  и  $cb$ , имѣемъ:

$$a_1a = bb_1.$$

Но, очевидно, что

$$a_1a = -dr \quad \text{и} \quad bb_1 = dr_1;$$

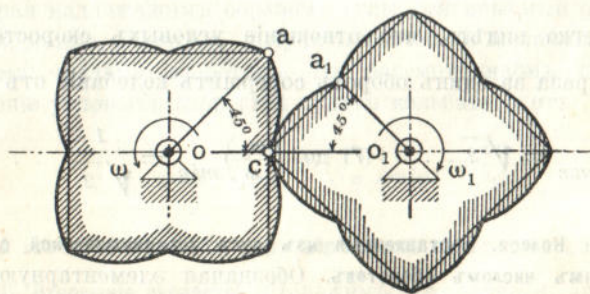
такъ что

$$dr = -dr_1$$

или

$$r + r_1 = \text{const} = oo_1. \quad (4)$$

Мы видимъ такимъ образомъ, что двѣ равныя логариомическія спирали, вращающіяся около своихъ полюсовъ, удовлетворяютъ тѣмъ условіямъ, которымъ должны удовлетворять начальныя кривыя зубчатыхъ колесъ. Такъ какъ логариомическая спираль—кривая незамкнутая, то для передачи непрерывно вращательнаго движенія въ одномъ и томъ же направленіи поступаютъ слѣдующимъ образомъ. Берутъ два какіе нибудь правильные и равные многоугольника, на примѣръ два квадрата (фиг. 112), съ центрами въ полюсахъ спиралей  $o$  и  $o$



фиг. 112-я.

и каждую сторону замѣняютъ двумя равными дугами логариомическихъ спиралей. Ур-іе этихъ дугъ находится просто.

Обозначая сторону квадратовъ черезъ  $2a$  и разстояніе  $oo_1$ — черезъ  $d$ , имѣемъ:

$$a = \frac{d}{1 + \sqrt{2}} \dots \dots (5).$$

Далѣе, замѣчая, что координаты точки  $c$  дуги  $ca$  будутъ

$$\theta = 0 \text{ и } r = a,$$

а точки  $a$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ и } r = a\sqrt{2},$$

легко найдемъ въ ур-іи (2) постоянныя  $r_0$  и  $m$ . Дѣйствительно, подставляя въ это ур-іе координаты точекъ  $c$  и  $a$ , находимъ:

$$r_0 = a \text{ и } m = \frac{2}{\pi} \lg 2.$$

Такимъ образомъ, ур-іе дуги  $ac$ , а, слѣдовательно, и всѣхъ другихъ, напишется такъ:

$$r = a \cdot 2^{\frac{\theta}{\pi}} \dots \dots (6).$$

Этимъ ур-іемъ и можно воспользоваться для построенія дугъ по точкамъ.

Легко видѣть, что отношеніе угловыхъ скоростей  $\frac{\omega_1}{\omega}$  четыре раза за одинъ оборотъ совершить колебаніе отъ

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)_{max} = \sqrt{2} \dots \dots (7) \text{ до } \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)_{min} = \frac{1}{\sqrt{2}} \dots \dots (8).$$

69. Колеса, составленныя изъ дугъ логариѳмической спирали, съ разнымъ числомъ оборотовъ. Обозначая элементарную дугу логариѳмической спирали черезъ  $ds$ , мы на основаніи ур-ія (3) предыдущаго параграфа имѣемъ:

$$ds = \sqrt{1 + r^2 \frac{d\varphi^2}{dr^2}} \cdot dr = \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}} \cdot dr \dots (1).$$

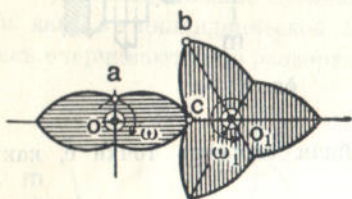


Интегрируя это выраженіе въ предѣлахъ между двумя точками, соответственные радіусы векторы которыхъ разнятся на длину  $l$ , имѣемъ:

$$s = \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}} \cdot l \dots (2),$$

т. е. длина дуги логариѣмической спирали пропорціональна разности радіусовъ векторовъ ея концовъ.

Отсюда слѣдуетъ, что если мы возьмемъ на логариѣмической спирали двѣ равныя дуги, то разность радіусовъ векторовъ, соответствующихъ ихъ концамъ, будетъ для обѣихъ дугъ одна и та же. Эти двѣ дуги мы можемъ выбрать такъ, чтобы одна изъ нихъ  $BE$  (фиг. 111) стягивала, напримѣръ, прямой уголь, а другая  $CD$ —уголь въ  $60^\circ$ . Если мы составимъ изъ этихъ дугъ замкнутыя фигуры (фиг. 113), то онѣ, вращаясь около точекъ  $o$  и  $o_1$ , гдѣ



фиг. 113-я.

сходятся вершины стягиваемыхъ соответственными дугами угловъ, будутъ катиться одна по другой безъ скольженія и могутъ, такимъ образомъ, послужить начальными кривыми зубчатыхъ колесъ, одно изъ которыхъ будетъ дѣлать три оборота, пока второе сдѣлаетъ только два.

Подбирая надлежащимъ образомъ углы, стягиваемые равными дугами, можно, очевидно, получить колеса съ желаемыми различными числами оборотовъ. Въ разсмотрѣнномъ примѣрѣ отношеніе угловыхъ скоростей будетъ колебаться отъ

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)_{max} = \frac{oc}{o_1c} \text{ до } \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)_{min} = \frac{oa}{o_1b}.$$

Одна изъ вращательныхъ паръ обращается въ поступательную.

**70. Отношеніе скоростей.** Положимъ, что звено  $A$ , вращаясь около оси  $o$  (фиг. 114), сообщаетъ непосредственнымъ соприкосновеніемъ звену  $B$ , движущемуся въ направляющихъ  $D$ , поступательное движеніе. Найдемъ отношеніе между угловой скоростью  $\omega$  звена  $A$  и скоростью  $u$  поступательнаго движенія звена  $B$ .

Очевидно, что данную цѣпь мы можемъ разсматривать какъ частный случай цѣпи, изображенной на фиг. 83, когда центръ вращенія звена *B* удаленъ на безконечность въ направленіи, перпендикулярномъ къ направленію скорости *u*.

Если мы проведемъ нормаль въ точкѣ соприкосновенія звеньевъ *A* и *B* до пересѣченія съ линіей центровъ  $o_1o_1$ , то будемъ по предыдущему имѣть:

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{oc}{o_1c} \dots (1).$$

На основаніи этого, линейная скорость точки *c*, какъ точки звена *B*, будетъ

$$u = \omega_1 o_1c = \omega oc \dots (2).$$

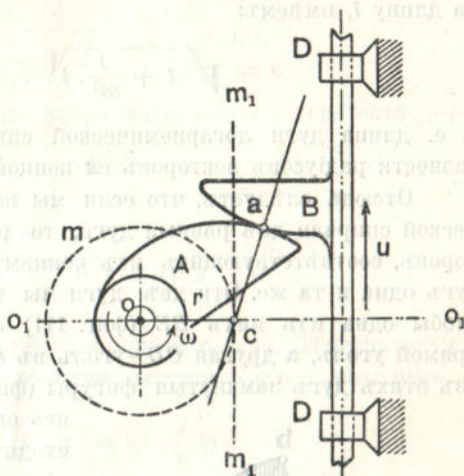
Если  $o_1$  удаляется на безконечность, то  $\omega_1$  становится безконечно малой величиной, а  $o_1c$ —безконечно большой, но произведеніе ихъ, какъ видно изъ ур-ія (2), есть величина конечная, равная скорости поступательнаго движенія звена *B*.

Ур-іе (2) и устанавливаетъ отношеніе между  $\omega$  и *u*. Обозначая *oc* черезъ *r*, имѣемъ:

$$\frac{u}{\omega} = r \dots (3).$$

Точка *c*, очевидно, есть мгновенный центръ въ относительномъ движеніи одного изъ звеньевъ по отношенію къ другому.

**71. Отношеніе скоростей постоянно.** Если отношеніе *u* къ  $\omega$  будетъ при всякихъ положеніяхъ звеньевъ *A* и *B* (фиг. 114) имѣть постоянную величину, то геометрическое мѣсто точки *c* въ системѣ *A* будетъ окружность *m*, описанная изъ *o* ради-



фиг. 114-я.



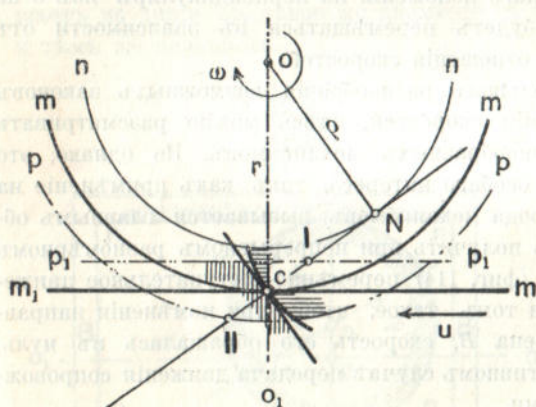
уюсь  $r$ , а въ системѣ  $B$ —прямая  $m_1m_1$ , параллельная скорости  $u$ . Движеніе будетъ происходить такъ, какъ будто прямая  $m_1m_1$  катится по окружности  $m$ , или обратно.

Очевидно, что для удовлетворенія условія постоянства скоростей необходимо очертить соприкасающіяся части звеньевъ  $A$  и  $B$  такъ, чтобы нормаль въ общей точкѣ ихъ соприкосновенія всегда проходила черезъ точку  $c$ , или, иначе, чтобы при каченіи прямой  $m_1m_1$  по окружности  $m$  профиль зубца звена  $B$  огибалъ профиль зубца звена  $A$ .

Что касается расположенія зубцовъ колеса относительно начальной окружности  $m$  и зубцовъ рейки относительно начальной прямой  $m_1m_1$ , то здѣсь обыкновенно придерживаются тѣхъ же соотношеній, что и въ цилиндрической зубчатой передачѣ (§ 52).

Для очерчиванія зубцовъ пользуются тѣми же способами, какъ въ цилиндрической передачѣ. Чаще всего зубцы колесъ очерчиваются по развертывающей окружности  $n$  (фиг. 115),

концентрической съ начальной. Въ этомъ случаѣ профиль зубца рейки будетъ прямая, перпендикулярная къ касательной окружности  $n$ , проведенной изъ точки  $c$ . Это ясно изъ того, что нормали во всѣхъ точкахъ этого профиля должны быть параллельны пря-



фиг. 115-я.

мой  $cN$ . Головки и впадины зубцовъ колеса ограничиваются окружностями, концентрическими съ  $m$ , а головки и впадины зубцовъ рейки—прямыми, параллельными  $m_1m_1$ . Зацепленіе зубцовъ будетъ происходить на прямой  $cN$  въ предѣлахъ отъ точки  $I$  до  $II$ , гдѣ ее пересѣкаютъ прямая головокъ рейки и окружность головокъ колеса.

На основаніи изложеннаго въ (§ 55), точка  $I$  не должна выходить за точку  $N$ ; что касается до точки  $II$ , то ея положеніе на прямой  $sN$  ничѣмъ не ограничено.

Возможно, конечно, очерчивать профили зубцовъ и другими кривыми. При построеніи зубцовъ при помощи вспомогательныхъ окружностей, головки зубца колеса будутъ очерчены по эпициклоидѣ, а ножки по гипоциклоидѣ; на рейкѣ и ножки, и головки будутъ очерчены по циклоидѣ. Если за профиль зубца рейки возьмемъ цѣвку съ центромъ на прямой  $m_1m_1$ , то на колесѣ зубецъ долженъ быть очерченъ по развертывающей начальной окружности  $m$ . Если, наоборотъ, цѣвку съ центромъ на окружности  $m$  возьмемъ за профиль зубца колеса, то зубецъ рейки долженъ быть очерченъ по кривой, параллельной циклоидѣ, описываемой какой-нибудь точкою окружности  $m$  при ея каченіи по прямой  $m_1m_1$ .

**72. Отношеніе скоростей перемѣнно.** При перемѣнномъ отношеніи скоростей  $u$  и  $\omega$ , точка  $c$  (фиг. 114) не будетъ уже занимать постояннаго положенія на перпендикулярѣ изъ  $o$  на направленіе  $u$ , а будетъ перемѣщаться въ зависимости отъ закона измѣненія отношенія скоростей.

Въ виду большого разнообразія возможныхъ законовъ измѣненія отношенія скоростей, здѣсь можно разсматривать цѣлый рядъ разнообразныхъ механизмовъ. Но однако, это не представляетъ особаго интереса, такъ какъ примѣненіе на практикѣ такого рода механизмовъ вызывается главнымъ образомъ желаніемъ получить при непрерывномъ равномерномъ вращеніи звена  $A$  (фиг. 114) перемѣнно-поступательное движеніе звена  $B$ , и при томъ такое, чтобы при измѣненіи направленія движенія звена  $B$ , скорость его обращалась въ нуль, такъ какъ въ противномъ случаѣ передача движенія сопровождалась бы толчками.

Однимъ изъ простѣйшихъ движеній, удовлетворяющихъ такимъ условіямъ, является движеніе гармоническое, выражаемое уравненіемъ:

$$s = a \sin at \dots \dots \dots (1),$$

гдѣ  $s$ —разстояніе точки, за движеніемъ которой мы слѣдимъ, отъ средняго положенія,  $a$ —амплитуда колебанія, т. е. наибольшее возможное разстояніе движущейся точки отъ средняго положенія,  $t$ —время, отсчитываемое отъ момента прохожденія



точки через среднее положение и  $\alpha = \frac{2\pi}{T}t$ , гдѣ  $T$ —периодъ, т. е. время полного колебанія точки взадь и впередъ.

Взявъ отъ обѣихъ частей ур-ія (1) производную по  $t$ , получимъ:

$$u = \frac{ds}{dt} = a.\alpha.\cos\alpha t \dots (2).$$

Если мы вернемся къ нашей цѣпи (фиг. 114) и замѣтимъ, что время полного обращенія звена  $A$  равно, очевидно,  $T$ , то, полагая  $\omega = \text{const}$ , найдемъ:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \alpha,$$

такъ что, на основаніи ур-ія (2), имѣемъ:

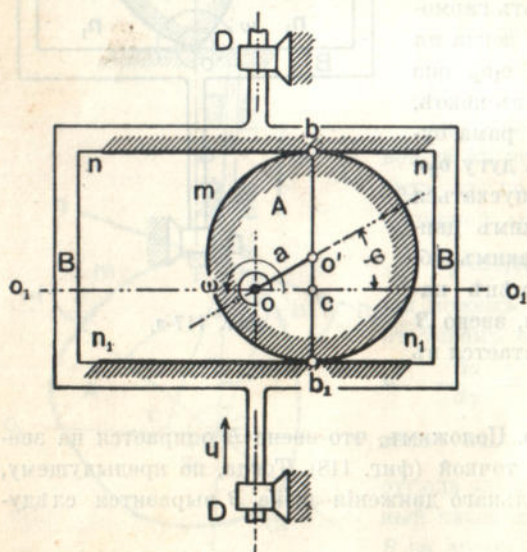
$$r = \frac{u}{\omega} = a.\cos\alpha t \dots (3),$$

т. е., если звено  $B$  движется гармонически, то и точка  $c$  совершаетъ по линіи  $oo_1$  такое же движеніе съ тою же амплитудой и тѣмъ же періодомъ.

Если обозначимъ уголъ поворота звена  $A$  отъ начальнаго положенія, отъ котораго мы отсчитываемъ время, черезъ  $\varphi$ , то можемъ переписать ур-іе (3) въ слѣдующемъ видѣ:

$$r = \frac{u}{\omega} = a.\cos\varphi \dots (4).$$

Выберемъ за профиль зубца звена  $B$  прямую  $mn$  (фиг. 116), перпендикулярную

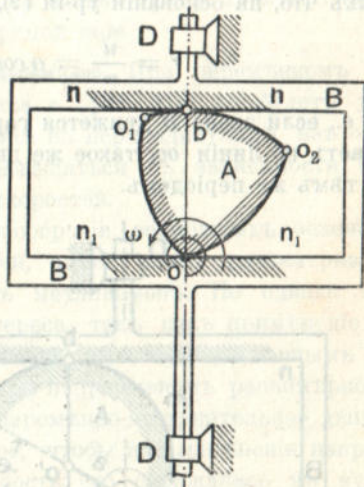


фиг. 116-я.

къ направленію скорости  $u$ . Легко видѣть, что зубецъ звена  $A$  долженъ быть очерченъ по окружности произвольнаго радиуса изъ центра  $o'$ , лежащаго отъ  $o$  на разстояніи  $oo' = a$ , ибо нормаль въ точкѣ соприкосновенія окружности  $m$  съ прямою  $mn$  всегда будетъ проходить черезъ  $o'$  и оставаться параллельною  $u$ , въ виду чего треугольникъ  $oo's$  будетъ всегда прямоугольнымъ и  $os$  будетъ удовлетворять ур-ю (4).

Если звено  $B$  будетъ прижато къ  $A$  нѣкоторымъ усиленіемъ, направленнымъ сверху внизъ, то оно будетъ всегда слѣдовать за звеномъ  $A$ . Чтобы избѣжать нажатія, звену  $B$  можно придать форму рамы съ двумя параллельными сторонами  $mn$  и  $n_1n_1$ , отстоящими другъ отъ друга на величину діаметра окружности  $m$ .

Въ механизмѣ, изображенномъ на фиг. 117, звено  $A$ , вращающееся около точки  $o$ , очерчено тремя дугами равныхъ окружностей изъ центровъ  $o$ ,  $o_1$  и  $o_2$ . Пока прямая  $mn$  опирается на дугу  $oo_1$ , звено  $B$  будетъ имѣть гармоническое движеніе; когда  $mn$  опирается на дугу  $o_1o_2$ , оно будетъ оставаться въ покоѣ, и, наконецъ, когда рама будетъ опираться на дугу  $o_2o$ , звено  $B$  будетъ опускаться внизъ гармоническимъ движеніемъ. Здѣсь, такимъ образомъ, при перемѣнѣ направленія движенія, звено  $B$  нѣкоторое время остается въ состояніи покоя.



фиг. 117-я.

**73. Эксцентрики.** Положимъ, что звено  $B$  опирается на звено  $A$  только одной точкой (фиг. 118). Тогда, по предыдущему, скорость поступательнаго движенія звена  $B$  выразится слѣдующимъ образомъ:

$$u = \omega \cdot oc = \omega \cdot r \dots \dots \dots (I),$$



гдѣ  $oc$ —отрѣзокъ прямой  $oo_1$ , перпендикулярной къ направлению  $u$ , между центромъ вращения  $o$  звена  $A$  и точкой пересѣченія ея съ нормалю  $ac$  къ кривой  $m$  въ точкѣ опоры.

Разсмотримъ здѣсь тотъ частный случай, когда  $b$  всегда совпадаетъ съ  $o$  (фиг. 119). Въ этомъ случаѣ звено  $A$  называютъ обыкновенно эксцентрикомъ.

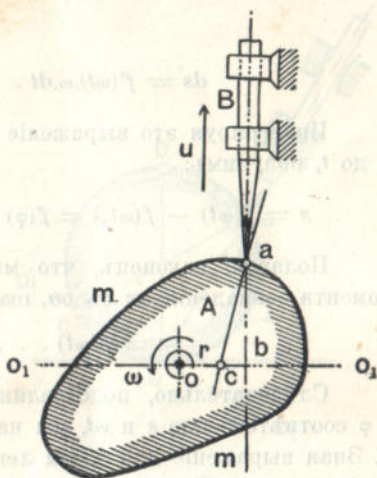
Изъ ур-ія (1) имѣемъ:

$$u = -\omega \cdot oc \dots (2).$$

Если мы обозначимъ уголъ между касательной  $mn$  къ кривой  $m$  въ точкѣ  $a$  и радиусомъ векторомъ  $oa$  черезъ  $\mu$ , то легко найдемъ:

$$oc = \rho \cdot ctg\mu \dots (3)$$

и  $u = -\omega \cdot \rho \cdot ctg\mu \dots (4).$



фиг. 118-я.

Изъ ур-ія (4) видно, что  $u$  будетъ направлено вверхъ, если  $\angle \mu < 90^\circ$  и внизъ, если  $\angle \mu > 90^\circ$ .

Предполагая, что ур-іе кривой  $m$  въ полярныхъ координатахъ съ полюсомъ въ  $o$  и съ полярной осью  $ox$  будетъ

$$\rho = f(\varphi) \dots (5),$$

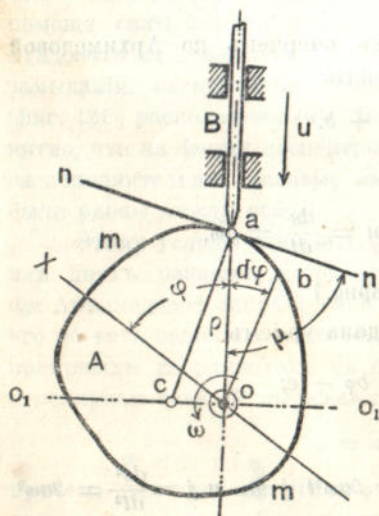
мы можемъ ур-іе (4) переписать въ такомъ видѣ:

$$u = \omega \frac{d\rho}{d\varphi} = \omega f'(\varphi) \dots (6),$$

$O_1$  такъ какъ  $ctg\mu = -\frac{d\rho}{\rho d\varphi}$ ;

отсюда элементъ пути, пройденный какой нибудь точкою звена  $B$  за время  $dt$ , будетъ

$$ds = \omega \cdot f'(\varphi) \cdot dt \dots (7).$$



фиг. 119-я.

Если за то же время эксцентрик  $A$  повернется на угол  $d\varphi$ , то, предполагая, что  $\omega = \text{const}$ , будемъ имѣть:

$$\omega dt = d\varphi \dots \dots \dots (8)$$

и

$$ds = f(\omega t) \cdot \omega \cdot dt \dots \dots \dots (9).$$

Интегрируя это выраженіе въ предѣлахъ времени отъ  $t_0$  до  $t$ , получимъ:

$$s = f(\omega t) - f(\omega t_0) = f(\varphi) - f(\varphi_0) \dots \dots \dots (10).$$

Полагая, наконецъ, что мы ведемъ счетъ времени отъ момента совпаденія  $oa$  съ  $oa$ , окончательно имѣемъ:

$$s = f(\omega t) \dots \dots \dots (11).$$

Слѣдовательно, подставляя въ ур-іе кривой  $m$  вмѣсто  $\rho$  и  $\varphi$  соответственно  $s$  и  $\omega t$ , мы найдемъ законъ движенія звена  $B$ . Зная выраженіе для  $s$ , мы легко найдемъ и скорость и ускореніе звена  $B$ .

Можно, конечно, такимъ же образомъ рѣшать и обратную задачу, т. е. искать ур-іе кривой  $m$  по заданному закону движенія.

**Примѣръ 1.** Эксцентрикъ очерченъ по Архимедовой спирали, ур-іе которой имѣетъ видъ:

$$s = a\varphi + b.$$

Тогда имѣемъ:

$$s = a\omega t + b \text{ и } u = \frac{ds}{dt} = a\omega.$$

Звено  $B$  движется равномерно.

**Примѣръ 2.** Кривая  $m$  дана ур-іемъ

$$\rho = a\varphi^2 + b\varphi + c;$$

отсюда:

$$s = a\omega^2 t^2 + b\omega t + c; u = \frac{ds}{dt} = 2a\omega^2 t + b \text{ и } j = \frac{d^2s}{dt^2} = 2a\omega^2.$$

Звено  $B$  движется равномерно ускореннымъ движеніемъ.

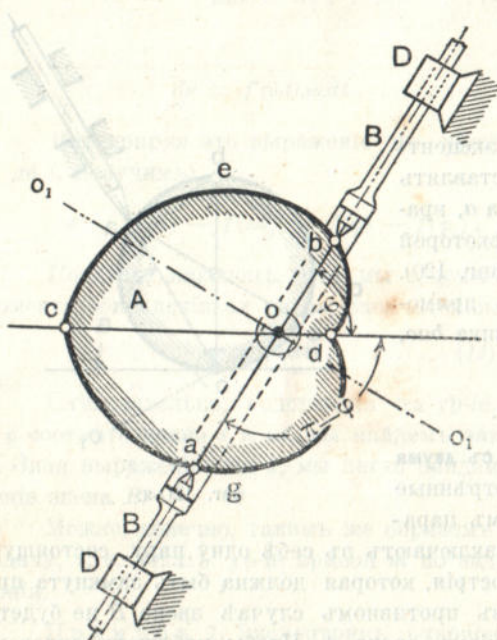




Мы знаем (§ 73), что такой эксцентрик при равномерном вращении сообщает звену *B* равномерно-поступательное

движение, так что, когда звено *B* изменяет направление своего движения, скорость его от некоторой величины *u* сразу переходит к  $-u$ .

Это обстоятельство является большим недостатком рассматриваемого эксцентрика, так как такое быстрое изменение скорости всегда сопровождается ударами и сотрясениями, вредно отзывающимися на прочности частей механизма.



фиг. 121-я.

Так как в такого рода механизмах граничные условия гораздо важнее, чем закон движения, то Моренъ задался целью составить такой эксцентрик, который, имея все диаметры между собою равными, обуславливал бы в то же время при концах хода скорость, равную нулю.

Эксцентрик Морена (фиг. 122) состоит из четырех дуг полярных парабол, расположенных попарно симметрично относительно прямой *ac*. Углы дуг *ab* и *ab<sub>1</sub>* (углы *boa* и *b<sub>1</sub>oa* равны  $\frac{\pi}{2}$ ) в полярных координатах с полюсом в центре вращения *o* и с полярной осью *ac*, имеют вид:

$$\rho = a\varphi^2 + b \dots \dots \dots (12),$$

а дуг *b<sub>1</sub>c* и *bc* в тех же координатах:

$$\rho_1 = a_1\varphi^2 + b_1\varphi + c_1 \dots \dots \dots (13).$$



Постоянные въ этихъ ур-яхъ опредѣляются на основаніи слѣдующихъ условий:

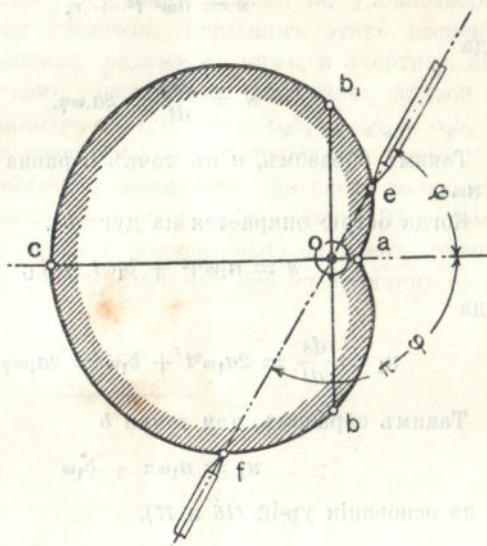
Для  $\varphi = 90^\circ$   
имѣемъ:

$$a \frac{\pi^2}{4} + b = a_1 \frac{\pi^2}{4} + b_1 \frac{\pi}{4} + c_1. \quad (14).$$

Разность  $oc - oa =$  ходу звена  $B = h$ , т. е.

$$h = (\rho_1)_{\varphi=\pi} - (\rho)_{\rho=0} = a_1 \pi^2 + b_1 \pi + c_1 - b. \quad (15).$$

Всѣ діаметры эксцентрика равны между собою, т. е.



фиг. 122-я.

$$ef = oe + of = a\varphi^2 + b + a_1\pi^2 - 2a_1\pi\varphi + a_1\varphi^2 + b_1\pi - b_1\varphi + c_1 = const,$$

откуда, такъ какъ коэффициенты при  $\varphi$  должны обращаться въ нуль,

$$a = -a_1 \dots \dots \dots (16),$$

$$2a_1\pi + b_1 = 0 \dots \dots \dots (17).$$

Постоянная  $b = oa$  можетъ быть выбрана произвольно, на основаніи соображеній конструктивнаго характера, а тогда остальные четыре опредѣлятся изъ ур-ій (14—17).

Покажемъ теперь, что при такомъ очертаніи эксцентрика скорость звена  $B$  въ концахъ хода равна нулю и въ точкахъ  $b$  и  $b_1$ , гдѣ сопрягаются дуги двухъ различныхъ кривыхъ, измѣняется непрерывно.

Когда остріе опирается на дугу  $ab$ , законъ движенія звена  $B$ , по предыдущему, выразится слѣдующимъ образомъ:

$$s = a\omega^2 t^2 + c_0$$

откуда

$$u = \frac{ds}{dt} = 2a\omega t.$$

Такимъ образомъ,  $u$  въ точкѣ  $a$  равна нулю, а въ точкѣ  $b = a\omega\pi$ .

Когда остріе опирается на дугу  $bc$ ,

$$s = a_1\omega^2 t^2 + b_1\omega t + c_1,$$

откуда

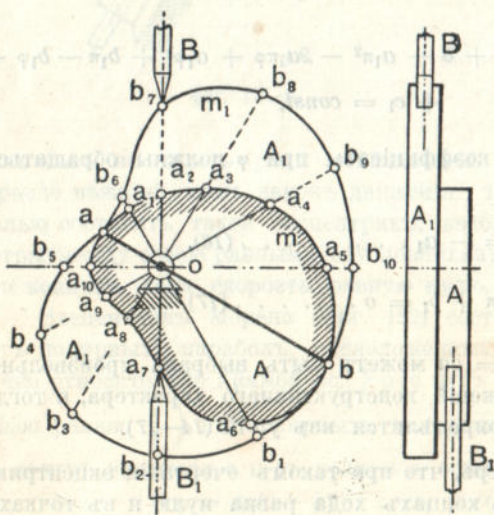
$$u_1 = \frac{ds}{dt} = 2a_1\omega t + b_1\omega = 2a_1\omega\varphi + b_1\omega.$$

Такимъ образомъ, для точки  $b$

$$u_1 = a_1\omega\pi + b_1\omega$$

или, на основаніи ур-ій (16 и 17),

$$u_1 = a_1\omega\pi - 2a_1\pi\omega = a\pi\omega,$$



фиг. 123-я.

слѣдовательно, при переходѣ черезъ точку  $b$  скорость измѣняется непрерывно.

Наконецъ, для точки  $c$ , имѣя въ виду ур-іе (17), получимъ:

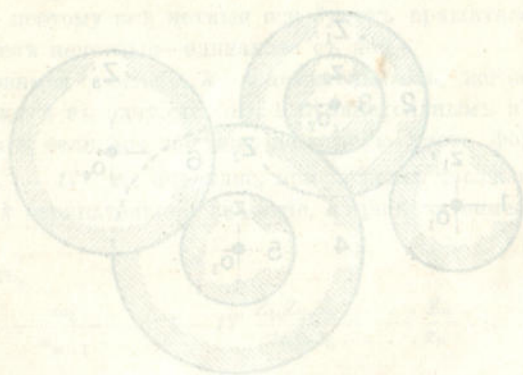
$$u_1 = 2a_1\omega\pi + b_1\omega = 0.$$

Если острія  $B$  и  $B_1$  (фиг. 123) будутъ размѣщены въ разныхъ плоскостяхъ, то тогда, при помощи весьма простого по-



строения, можно достигнуть того, чтобы всякій эксцентрикъ удовлетворялъ условію постоянства длины діаметровъ. Положимъ, что эксцентрикъ  $A$  очерченъ кривою  $m$ , удовлетворяющею заданному закону движенія. Дополнимъ этотъ эксцентрикъ другимъ  $A_1$ , стоящимъ рядомъ съ нимъ, и очертимъ его кривою, которую получимъ, откладывая отъ точекъ кривой  $m$  длину наибольшаго діаметра  $ab$ , т. е.  $a_1b_1 = a_2b_2 = a_3b_3 = a_4b_4 = \dots = ab$ , и соединяя точки  $b_1b_2\dots$  непрерывной кривою.

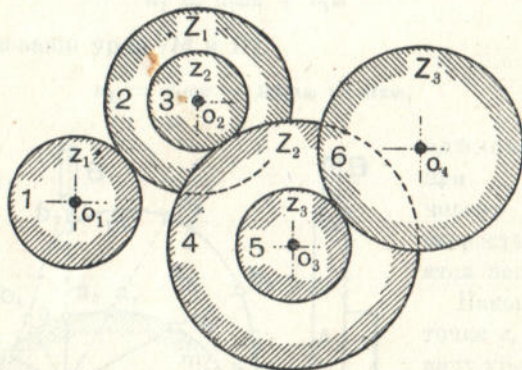
Замѣтимъ, что остріе можетъ быть замѣнено роликомъ, слѣдъ оси котораго совпадаетъ съ концомъ острія. Въ такомъ случаѣ, очевидно, эксцентрикъ долженъ быть очерченъ кривою, параллельной данной и отстоящей отъ нея на величину радіуса ролика.



ОТДѢЛЪ 5-ый.

*Сложные механизмы, состоящие изъ зубчатыхъ колесъ.*

**75. Рядовое соединеніе.** Пусть колесо 1 (фиг. 124), имѣющее  $z_1$  зубцовъ и насаженное на ось  $o_1$ , зацѣпляется съ колесомъ 2, имѣющимъ  $Z_1$  зубцовъ и насаженнымъ на ось  $o_2$ . Пусть далѣе на той же оси  $o_2$  насажено колесо 3, имѣющее  $z_2$  зубцовъ и, въ свою очередь, зацѣпляющееся съ колесомъ 4, имѣющимъ  $Z_2$  зубцовъ и насаженнымъ на ось  $o_3$  и т. д. Такое соединеніе зубчатыхъ колесъ и называется рядовымъ.



фиг. 124 а.

Наша задача при изученіи этого рода механизмовъ будетъ состоять въ опредѣленіи отношенія между угловыми скоростями крайнихъ осей. Итакъ, пусть въ соединеніе входят  $(n + 1)$  осей. Обозначимъ ихъ угловыя скорости послѣдовательно черезъ  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n+1}$ . Если при этомъ числа зубцовъ колесъ четнаго порядка будутъ соотвѣтственно  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ , а числа зубцовъ колесъ нечетнаго порядка  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , то,—на основаніи выведеннаго въ теоріи цилиндри-



ческого зацепления положения (§ 52), что угловые скорости зацепляющихся колесъ обратно пропорциональны числамъ зубцовъ,—будемъ имѣть:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{Z_1}{z_1}; \quad \frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{Z_2}{z_2}; \quad \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{Z_3}{z_3} \dots \frac{\omega_n}{\omega_{n+1}} = \frac{Z_n}{z_n}.$$

Перемножая все эти равенства почленно, найдемъ:

$$k = \frac{\omega_1}{\omega_{n+1}} = \frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \dots Z_n}{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \dots z_n} \dots \dots (I).$$

Отсюда мы видимъ, что отношеніе угловыхъ скоростей крайнихъ осей равняется отношенію произведенія чиселъ зубцовъ колесъ четнаго порядка къ произведенію чиселъ зубцовъ колесъ нечетнаго порядка.

Обратимъ вниманіе на направленіе вращеній крайнихъ осей. Замѣтимъ, что каждая двѣ смежныя оси вращаются въ обратномъ направленіи, а взятая черезъ одну—въ одномъ направленіи; поэтому все четныя оси будутъ вращаться обратно первой, а все нечетныя—одинаково съ ней.

Условимся считать  $k$  положительнымъ, когда крайнія оси вращаются въ одну сторону, и отрицательнымъ въ противномъ случаѣ; если мы введемъ во вторую часть формулы (I) множитель  $(-1)^n$ , то очевидно, при четномъ числѣ осей получимъ для  $k$  отрицательное значеніе, а при нечетномъ—положительное.

Итакъ,

$$k = \frac{\omega_1}{\omega_{n+1}} = (-1)^n \frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \dots Z_n}{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \dots z_n} \dots (2).$$

Если положимъ, что  $Z_1 = Z_2 = Z_3 = \dots = Z_n = Z$

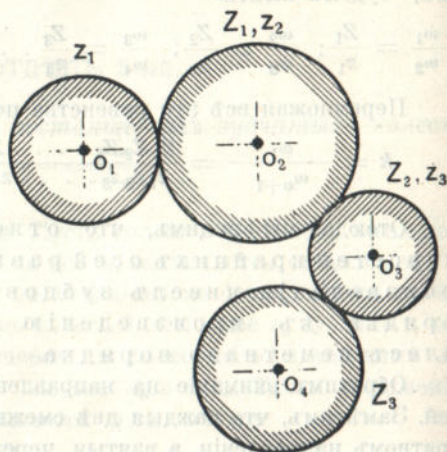
и  $z_1 = z_2 = z_3 = \dots = z_n = z$ , то

$$k = \frac{\omega_1}{\omega_{n+1}} = (-1)^n \left( \frac{Z}{z} \right)^n.$$

Для другого частнаго случая, когда  $Z_1 = z_2$ ,  $Z_2 = z_3$ ,  $Z_3 = z_4 \dots Z_{n-1} = z_n$ , т. е. когда на каждой изъ осей имѣется только по одному колесу (фиг. 125), находимъ:

$$k = \frac{\omega_1}{\omega_{n+1}} = (-1)^n \frac{Z_n}{z_1},$$

т. е. въ такомъ случаѣ движеніе будетъ передаваться такъ какъ будто бы промежуточныхъ колесъ совсѣмъ не было. Промежуточные колеса могутъ только мѣнять направленіе; такъ, на примѣръ, передачу вращенія между двумя осями въ одну сторону можно получить при помощи трехъ колесъ внѣшняго зацепленія.



фиг. 125-я.

Какъ мы видимъ, задача объ опредѣленіи  $k$  по даннымъ числамъ зубцовъ не представляетъ затрудненія. Гораздо сложнѣе обратная задача; именно, задача о построеніи рядового соединенія по данному  $k$ . Конечно, эта задача неопредѣленная; однако существуютъ нѣкоторыя ограниченія, которыя должны быть удовлетворены. Чѣмъ, на примѣръ, число осей меньше, тѣмъ лучше; но нельзя переходить и практически допустимыхъ maximum'a и minimum'a чиселъ зубцовъ. Ходъ рѣшенія задачи таковъ. Передаточное число  $k$  задается обыкновенно въ видѣ нѣкоторой дроби. Чтобы построить рядовое соединеніе, числителя и знаменателя этой дроби разлагаютъ на первоначальные множители:

$$k = \frac{\omega_1}{\omega_{n+1}} = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n}{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_n}$$

Затѣмъ группируютъ эти множители и составляютъ отдѣльные произведенія, положимъ такъ:

$$k = \frac{a_1 \cdot a_2}{b_1} \cdot \frac{a_3}{b_2 \cdot b_3} \cdot \dots$$

соображая число отдѣльныхъ множителей съ направлениемъ вращенія крайнихъ осей. Разъ такая группировка произведена, то можно полагать отдѣльные множители равными



передаточнымъ числамъ отдѣльныхъ паръ зацѣпляющихся между собою колесъ:

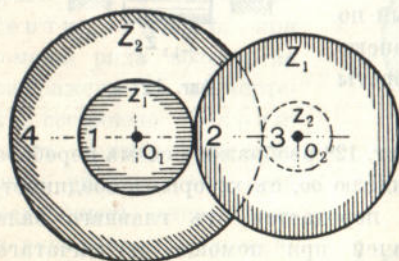
$$a_1 a_2 = Z_1, a_3 = Z_2 \dots; b_1 = z_1, b_2 b_3 = z_2 \dots$$

Если одинъ изъ множителей будетъ представлять большое и въ то же время первоначальное число (напр. 191), то точное рѣшеніе не всегда возможно, ибо иногда трудно выполнить одно колесо съ такимъ большимъ числомъ зубцовъ. Въ такомъ случаѣ довольствуются приблизительнымъ рѣшеніемъ. Для этого  $k$  разлагаютъ въ непрерывную дробь

$$k = a + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

и вычисляютъ приближенныя дроби, каждая изъ которыхъ съ большею или меньшею степенью точности можетъ быть принята за данную, если только она удовлетворяетъ условію разложимости.

**76. Возвратный рядъ.** Пусть  $o_1$  и  $o_2$  (фиг. 126) оси, параллельныя между собою и перпендикулярныя къ плоскости чертежа. На каждую изъ осей насажено по два зубчатыхъ колеса,



фиг. 126-а.

причемъ на оси  $o_2$  оба колеса насажены крѣпко, а на оси  $o_1$  одно изъ колесъ, положимъ 4, сидитъ вольно. Движеніе отъ колеса 1, насаженнаго на ось  $o_1$ , при помощи колесъ 2 и 3 передается колесу 4, т. е. возвращается опять къ той же оси  $o_1$ . Поэтому такое соединеніе зубчатыхъ колесъ и называется воз-

вратнымъ рядомъ колесъ.

Опредѣлимъ скорость вращенія колеса 1 относительно колеса 4.

Если обозначимъ угловую скорость колеса 1 черезъ  $\omega_1$ , колеса 4 черезъ  $\omega_4$  и числа зубцовъ колесъ соотвѣтственно

черезъ  $z_1$ ,  $Z_1$ ,  $z_2$  и  $Z_2$ , то, на основаніи ур-ія (1) предыдущаго параграфа, найдемъ:

$$\frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{z_1 \cdot z_2} = \frac{n_1}{n_4} \dots \dots \dots (1)$$

гдѣ  $n_1$  и  $n_4$  соответственные числа оборотовъ колесъ 1-го и 4-го за одно и тоже время.

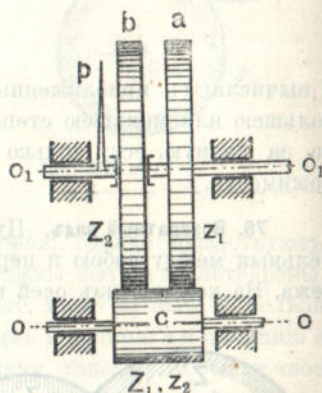
**Примѣръ 1-ый.** На чертежѣ 127-мъ представлена схема счетчика числа оборотовъ.

Колесо  $b$  сидитъ на оси  $o_1 o_1$  вольно, а колесо  $a$  и указатель  $p$ —крѣпко. Оба колеса  $a$  и  $b$  зацѣпляются съ однимъ колесомъ  $c$ , насаженнымъ на оси  $oo$ .

Полагая, что число зубцовъ на колесѣ  $b = Z_2 = 100$ , а на колесѣ  $a = z_1 = 101$ , на основаніи ур-ія (1) получимъ

$$\frac{n_1}{n_4} = \frac{100}{101}, \text{ т. к. } Z_1 = z_2.$$

Откуда видно, что при одномъ оборотѣ колеса  $a$  колесо  $b$  опередитъ указатель на  $0,01$  своего оборота. Если поэтому мы присоединимъ къ колесу  $b$  раздѣленный по окружности на 100 частей дискъ то можемъ отсчитывать обороты оси  $o_1 o_1$  до ста.



фиг. 127-я.

**Примѣръ 2 ой.** На фиг. 128 изображена схема перебора самоточки. Движеніе къ шпинделю  $oo$ , съ которымъ соединяется обрабатываемый предметъ, передается отъ главнаго вала мастерской ременной передачей при помощи ступенчатаго шкива  $c$ . Этотъ шкивъ сидитъ вольно на шпинделѣ  $oo$  и составляетъ одно цѣлое съ шестерней  $a$ . На томъ же шпинделѣ  $oo$  насажено крѣпко зубчатое колесо  $B$ , которое въ случаѣ надобности, посредствомъ особаго приспособленія, можетъ соединяться со ступенчатымъ шкивомъ  $c$ . Если при этомъ ось  $o_1 o_1$ , на которой крѣпко насажено зубчатое колесо  $A$ , зацѣпляющееся съ шестерней  $a$  и шестерня  $b$ , зацѣпляющаяся съ колесомъ  $B$ , отодвинута въ сторону (для чего опять имѣется



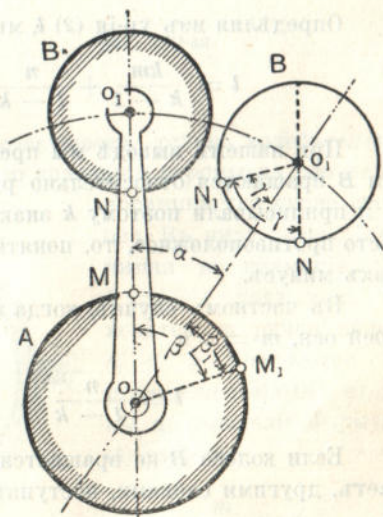
особое приспособление) такъ, что  $A$  и  $b$  выходятъ изъ зацѣпленія съ  $a$  и  $B$ , то вращеніе передается обрабатываемому предмету непосредственно отъ шкива  $c$ . Когда нужно сдѣлать вращеніе болѣе медленнымъ, то, отцѣпивъ  $B$  отъ  $c$ , передвигаютъ ось  $o_1o_1$  такъ, чтобы установилось зацѣпленіе  $a$  съ  $A$  и  $b$  съ  $B$ . Обозначимъ угловую скорость вращенія шкива  $c$  черезъ  $\omega_0$ , числа зубцовъ на шестернѣ  $a$  черезъ  $z_1$ , на колесѣ  $A$  черезъ  $Z_1$ , на шестернѣ  $b$ —черезъ  $z_2$  и на колесѣ  $B$ —черезъ  $Z_2$ ; тогда угловая скорость шпинделя  $\omega$ , на основаніи ур-ня (1),

выразится такъ:

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{z_1 z_2}{Z_1 Z_2}$$

Отсюда и видно, что если  $z_1 z_2 < Z_1 Z_2$  то  $\omega < \omega_0$ .

**77. Эпициклическое соединеніе.** Пусть колесо  $A$  (фиг. 129), называемое центральнымъ, при помощи ряда колесъ, не изображенныхъ на чертежѣ, соединено съ крайнимъ колесомъ  $B$ , причемъ опоры всѣхъ осей составляютъ одно цѣлое съ ручкой  $oo_1$ , вращающейся около оси  $o$ . Такого рода соединеніе колесъ называется эпициклическимъ или планетнымъ, ибо такимъ соединеніемъ пользуются для воспроизведенія движенія планетъ.



фиг. 129-я.

Задача заключается въ установленіи соотношенія между числами оборотовъ колесъ *A* и *B* около ихъ осей и числомъ оборотовъ ручки при данномъ передаточномъ числѣ *k* между колесами *B* и *A*, которое, какъ мы видѣли (§ 75), опредѣляется по числу зубцовъ входящихъ въ соединеніе колесъ.

Предположимъ, что при поворотѣ ручки на уголъ  $\alpha$ , колесо *A* повернется около своей оси на уголъ  $\beta$ , а колесо *B* — на уголъ  $\gamma$ . Обозначая число оборотовъ ручки и обоихъ колесъ около ихъ осей за одно и то же время соотвѣтственно черезъ *l*, *m* и *n*, будемъ, очевидно, имѣть:

$$\frac{\alpha}{l} = \frac{\beta}{m} = \frac{\gamma}{n} \dots \dots (1).$$

Если въ то же время колеса *A* и *B* повернутся относительно ручки въ одну и ту же сторону соотвѣтственно на углы  $\beta_1$  и  $\gamma_1$  то

$$k = \frac{\gamma_1}{\beta_1} = \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{n - l}{m - l} \dots \dots (2),$$

ибо легко видѣть, что

$$\gamma_1 = \gamma - \alpha \text{ и } \beta_1 = \beta - \alpha.$$

Опредѣляя изъ ур-ія (2) *l*, мы получимъ формулу Willis'a:

$$l = \frac{km}{k-1} + \frac{n}{1-k} \dots \dots (3).$$

При нашемъ выводѣ мы предположили, что оба колеса *A* и *B* вращаются относительно ручки въ одну и ту же сторону и приписывали поэтому *k* знакъ плюсъ; если будетъ имѣть мѣсто противоположное, то, понятно, *k* слѣдуетъ приписывать знакъ минусъ.

Въ частномъ случаѣ, когда колесо *A* не вращается около своей оси,  $m = 0$  и

$$l = \frac{n}{1-k} \dots \dots (4).$$

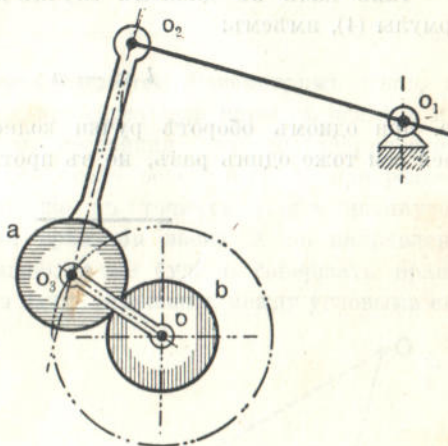
Если колесо *B* не вращается около своей оси, т. е. совершаетъ, другими словами, поступательное движеніе,  $n = 0$  и

$$l = \frac{km}{k-1} \dots \dots (5).$$



Примѣръ 1-ый. Планетный механизмъ Уатта (фиг. 130). Уаттъ примѣнилъ эпициклическое соединеніе для передачи движенія отъ коромысла паровой машины  $o_1o_2$  къ главному валу  $o$ ; онъ не могъ воспользоваться для этой цѣли шатуннымъ механизмомъ, такъ какъ послѣдній былъ въ то время патентованъ.

Преобразование колебательнаго движенія коромысла  $o_1o_2$  во вращательное движеніе вала  $o$  производится при помощи двухъ равныхъ зубчатыхъ колесъ  $a$  и  $b$ , первое изъ которыхъ соединено неизмѣнно съ шатуномъ  $o_2o_3$ , а второе крѣпко насажено на главномъ валу машины  $o$ . Оси колесъ соединены свободно вращающейся на нихъ ручкой  $oo_3$ .

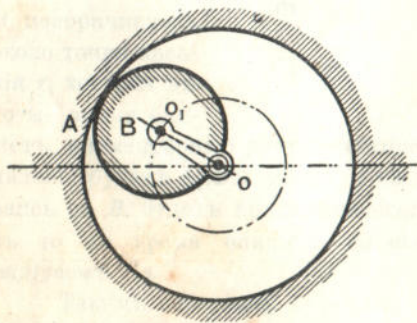


Фиг. 130-ая.

Такъ какъ колесо  $a$  совершаетъ только колебательное движеніе, то за время полнаго колебанія коромысла оно не поворачивается около своей оси. Въ виду этого, принимая во вниманіе, что

$k = -1$ , такъ какъ относительно ручки колеса  $a$  и  $b$  вращаются въ противоположныя стороны, на основаніи формулы (5) имѣемъ:

$$\frac{m}{l} = 2,$$



фиг. 131-ая.

т. е. за время одного полного колебания коромысла валъ о дѣлаетъ два оборота.

Примѣръ 2-ой. Механизмъ Лагира (фиг. 131). Здѣсь центральное неподвижное колесо *A* зацѣпляется внутреннимъ образомъ съ колесомъ *B*, имѣющимъ вдвое меньшій діаметръ. Оси колесъ соединены ручкой  $oo_1$ .

Такъ какъ въ данномъ случаѣ  $k = 2$ , то, на основаніи формулы (4), имѣемъ:

$$l = -n$$

т. е. при одномъ оборотѣ ручки колесо *B* повернется около своей оси тоже одинъ разъ, но въ противоположную сторону.



фиг. 131-я.

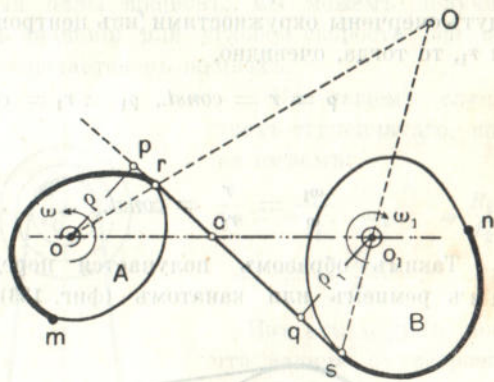


ОТДѢЛЪ 6-ой.

Ременная и канатная передачи.

**78. Отношеніе угловыхъ скоростей.** Рассмотримъ цѣпь, заключающую въ себѣ двѣ вращательныя пары съ осями  $o$  и  $o_1$  (фиг. 132) и двѣ пары, состоящія изъ цилиндрическихъ тѣлъ  $A$  и  $B$ , вращающихся около осей  $o$  и  $o_1$ , и прикрѣпленнаго къ нимъ соответственно въ точкахъ  $m$  и  $n$  натянутого гибкаго тѣла  $тсп$ . При вращеніи звена  $A$  по направленію стрѣлки звено  $B$ , очевидно, также будетъ совершать вращательное движеніе. Чтобы найти отношеніе между угловыми скоростями звеньевъ  $A$  и  $B$ , замѣтимъ,

что при поворотѣ звена  $A$  на безконечно малый уголъ по направленію стрѣлки гибкое тѣло, оставаясь натянутымъ, будетъ навиваться на  $A$ , поворачиваясь около точки касанія  $r$ , которая въ то же время опишетъ элементарную дугу окружности радиусомъ  $or$ . Такое же явленіе будетъ имѣть мѣсто и на звенѣ  $B$ : гибкое тѣло, свиваясь съ  $B$ , будетъ вращаться около точки касанія  $s$ , которая въ то же время опишетъ элементарную дугу окружности радиусомъ  $o_1s$ .



фиг. 132-ая.

Такимъ образомъ, очевидно, что за всякій безконечно малый промежутокъ времени движеніе въ разсматриваемой цѣпи будетъ передаваться такъ, какъ будто бы четырехуголь-

никъ  $ots_0$  представлялъ собою четырехъ-звенный шарнирный четырехугольник (§ 28). На этомъ основаніи:

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{oc}{o_1c} = \frac{\rho}{\rho_1} \dots \dots (1)$$

гдѣ  $\rho$  и  $\rho_1$  обозначаютъ длины перпендикуляровъ  $op$  и  $o_1q$ , опущенныхъ изъ  $o$  и  $o_1$  на направленіе  $rs$ .

Мы видимъ, что и здѣсь имѣеть мѣсто законъ Willis'a: линія дѣйствія дѣлитъ линію центровъ на части, обратно пропорціональныя угловымъ скоростямъ.

Ур-іе (1) можно было бы вывести и непосредственно, разсматривая движеніе за безконечно малый промежутокъ времени отрѣзка гибкаго тѣла  $rs$ . Понятно, что ур-іе (1) имѣеть мѣсто и тогда, когда точка  $c$  лежитъ внѣ центровъ вращенія; въ этомъ послѣднемъ случаѣ звенья  $A$  и  $B$  будутъ вращаться въ одну сторону.

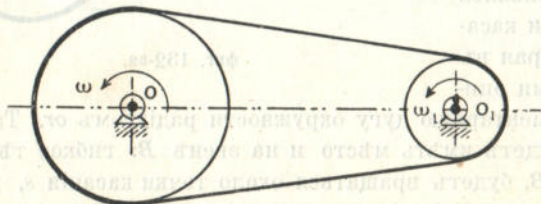
**79. Отношеніе скоростей постоянно.** Если звенья  $A$  и  $B$  (фиг. 132) будутъ очерчены окружностями [изъ центровъ  $o$  и  $o_1$  радиусами  $r$  и  $r_1$ , то тогда, очевидно,

$$\rho = r = \text{const.}, \quad \rho_1 = r_1 = \text{const.}$$

и

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{r}{r_1} = \text{const.} \dots \dots (1)$$

Такимъ образомъ получается передача съ открытымъ ремнемъ или канатомъ (фиг. 133) и перекрест-

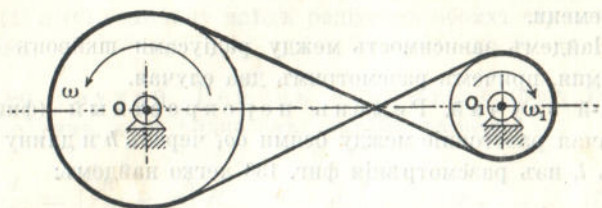


фиг. 133-ая.

нымъ ремнемъ (фиг. 134); передача съ перекрестнымъ канатомъ не примѣняется, въ виду сильнаго истиранія каната.



Въ первомъ случаѣ оба цилиндра, которые называются въ ременной передачѣ шкивами, а въ канатной—блоками, вращаются въ одну сторону, а во второмъ—въ разныя.



фиг. 134-ая.

**80. Ременная передача съ переменнымъ отношеніемъ скоростей.**

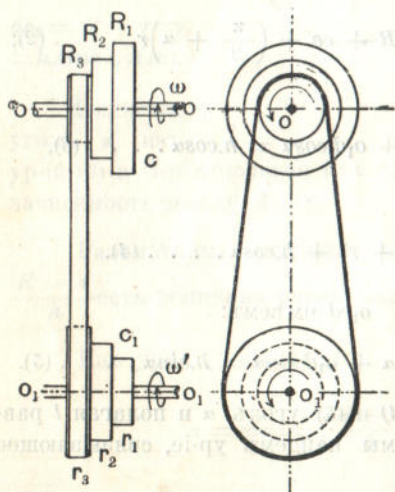
Измѣненіе отношенія скоростей въ ременной передачѣ достигается при помощи ступенчатыхъ шкивовъ с и с<sub>1</sub> (фиг. 135) Очевидно, что если ось *oo* вращается равномерно, то надѣвая ремень на различныя пары шкивовъ, мы можемъ получить столько различныхъ значеній для угловой скорости оси *o<sub>1</sub>o<sub>1</sub>*, сколько ступеней заключается въ шкивахъ.

Въ нашемъ случаѣ трехъ-ступенчатого шкива имѣемъ:

$$\omega'_1 = \omega \frac{R_1}{r_1}, \quad \omega'_2 = \omega \frac{R_2}{r_2} \text{ и}$$

$$\omega'_3 = \omega \frac{R_3}{r_3} \dots (1).$$

Изъ этихъ ур-ій ясно, что задача о построении ступенчатыхъ шкивовъ по даннымъ величинамъ  $\omega$  и  $\omega'$  является неопредѣленной, такъ что радіусы одного изъ ступенчатыхъ шкивовъ можно выбирать совершенно произвольно. Въ виду этого оказывается возможнымъ поставить



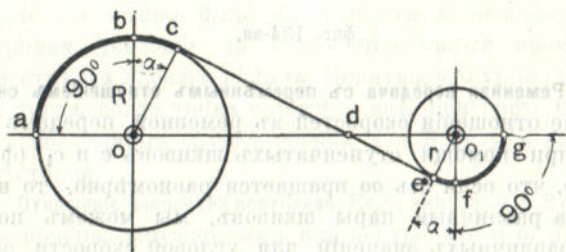
фиг. 135-ая.

требованіе, чтобы ремень, на какую бы онъ ни былъ надѣтъ пару шкивовъ, имѣлъ постоянную длину.

Такое требованіе вполне рационально, такъ какъ въ противномъ случаѣ при перестановкѣ ремня съ одной пары шкивовъ на другую необходимо было бы его расшивать и затѣмъ опять сшивать, что сопряжено съ значительной потерей времени.

Найдемъ зависимость между радиусами шкивовъ и длиной ремня, причѣмъ рассмотримъ два случая.

1-й случай. Ремень перекрестный (фиг. 136). Обозначая разстояніе между осями  $o_1$  черезъ  $h$  и длину ремня черезъ  $l$ , изъ разсмотрѣнія фиг. 136 легко найдемъ:



фиг. 136-ая.

$$\frac{l}{2} = abcdefg = \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) R + ce + \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) r \dots (2);$$

но

$$ce = cd + de = od \cdot \cos \alpha + o_1 d \cdot \cos \alpha = h \cdot \cos \alpha \dots (3),$$

такъ что

$$\frac{l}{2} = \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) (R + r) + h \cdot \cos \alpha \dots (4).$$

Далѣе, изъ  $\triangle ocd$  и  $o_1ed$  имѣемъ:

$$oc + o_1e = R + r = od \cdot \sin \alpha + o_1 d \cdot \sin \alpha = h \cdot \sin \alpha \dots (5).$$

Исключая изъ ур-ій (4) и (5) уголъ  $\alpha$  и полагая  $l$  равнымъ постоянной величинѣ, мы найдемъ ур-іе, связывающее  $R$  и  $r$ .

Но легко непосредственно убѣдиться, что ур-ія (4) и (5) при  $l = \text{const.}$  удовлетворяются положеніемъ:

$$R + r = \text{const.} \dots (6),$$



такъ что въ случаѣ перекрестнаго ремня при  $l = const.$  сумма радиусовъ парныхъ шкивовъ должна быть также величиной постоянной. Выбирая значеніе постоянной въ ур-и (6) произвольно, мы легко найдемъ изъ ур-ий (1) и (6) величину всѣхъ радиусовъ обоихъ ступенчатыхъ шкивовъ.

2-й случай. Ремень открытый (фиг. 137). Въ этомъ случаѣ, какъ видно изъ чертежа, имѣемъ:

$$\frac{l}{2} = \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)R + ce + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)r \dots (7);$$

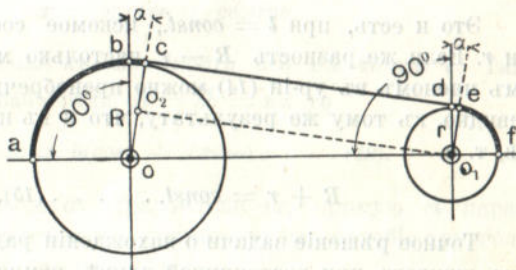
$$ce = o_1o_2 = h \cdot \cos \alpha \dots (8),$$

такъ что

$$\begin{aligned} \frac{l}{2} &= \frac{\pi}{2}(R+r) + \\ &+ \alpha(R-r) + \\ &+ h \cdot \cos \alpha \dots (9) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} oo_2 &= R - r = \\ &= h \cdot \sin \alpha \dots (10). \end{aligned}$$



фиг. 137-ая.

Исключая уголъ  $\alpha$  изъ ур-ий (9) и (10) и полагая  $l = const.$ , мы и найдемъ искомую зависимость между  $R$  и  $r$ .

Разсмотримъ сначала тотъ случай, когда отношеніе  $\frac{R-r}{h}$  есть величина очень малая.

Изъ ур-ия (10) имѣемъ:

$$\alpha = \sin \alpha = \frac{R-r}{h} \dots (11)$$

и

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{R-r}{h}\right)^2} \dots (12).$$

Разлагая выражение (12) по стокрѣ Ньютона и откидывая члены, содержащіе отношеніе  $\frac{R-r}{h}$  въ степени, выше второй, получимъ:

$$\cos \alpha = 1 - \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{R-r}{h} \right)^2 \dots \dots (13).$$

Подставляя выраженія для  $\alpha$  и  $\cos \alpha$  въ ур-іе (9), найдемъ:

$$l = \pi(R+r) + \frac{2(R-r)^2}{h} + 2h - \frac{(R-r)^2}{h}$$

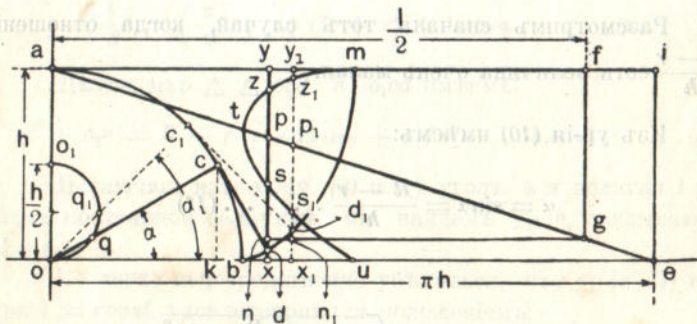
или

$$l = \pi(R+r) + 2h + \frac{(R-r)^2}{h} \dots \dots (14).$$

Это и есть, при  $l = const.$ , искомое соотношеніе между  $R$  и  $r$ . Если же разность  $R-r$  настолько мала, что послѣднимъ членомъ въ ур-іи (14) можно пренебречь, мы приходимъ, очевидно, къ тому же результату, что и въ предыдущемъ случаѣ, т. е.

$$R+r = const. \dots \dots (15).$$

Точное рѣшеніе задачи о нахожденіи радиусовъ ступенчатыхъ шкивовъ при постоянной длинѣ ремня по ур-іямъ (9) и (10) при заданныхъ отношеніяхъ угловыхъ скоростей возможно лишь при помощи попытокъ. Рѣшеніе однако же значительно облегчается, если воспользоваться диаграммой Reuleaux (фиг. 138).



фиг. 138-ая



Изъ ур-ій (9) и (10) легко находимъ:

$$R = \frac{l}{2\pi} - \frac{h}{\pi}(\cos\alpha + a.\sin\alpha) + \frac{h.\sin\alpha}{2} \dots (16)$$

и

$$r = \frac{l}{2\pi} - \frac{h}{\pi}(\cos\alpha + a.\sin\alpha) - \frac{h.\sin\alpha}{2} \dots (17).$$

Возьмемъ прямоугольныя оси  $oa$  и  $oe$  и отложимъ  $oa = h$  и  $oe = \pi h$ . Изъ центра  $o$  проведемъ радіусомъ  $h$  четверть окружности  $acb$  и построимъ ея развертку  $bdm$ .

Если мы возьмемъ на разверткѣ какую нибудь точку  $d$  и спроектируемъ ее на ось  $oe$  въ точку  $x$ , то

$$ox = oc.\cos\alpha + cd.\sin\alpha,$$

гдѣ  $cd$  — касательная къ окружности  $acb$  въ точкѣ  $c$ . Такъ какъ по свойству развертки  $cd = \overset{\frown}{cb} = h\alpha$ , то

$$ay = ox = h(\cos\alpha + a.\sin\alpha) \dots (18).$$

Проведа прямую  $ai$  параллельно  $oe$ , прямую  $ei$  параллельно  $oa$  и соединивъ  $a$  и  $e$  прямою  $ae$ , изъ подобія треугольниковъ  $aie$  и  $ayp$  легко найдемъ:

$$yp = ay \cdot \frac{ei}{ai} = \frac{h}{\pi}(\cos\alpha + a.\sin\alpha) \dots (19).$$

Если мы отложимъ  $af = \frac{l}{2}$  и проведемъ прямыя  $fg$  и  $gn$  соответственно параллельно  $oa$  и  $oe$ , то изъ подобія треугольниковъ  $aie$  и  $afg$  получимъ:

$$gn = fg = \frac{l}{2\pi} \dots (20),$$

такъ что

$$pn = gn - yp = \frac{l}{2\pi} - h(\cos\alpha + a.\sin\alpha) \dots (21).$$

Если, наконецъ, мы проведемъ полуокружность  $oqo_1$  радіусомъ  $\frac{h}{4}$ , то, очевидно, отсѣчемъ ею на  $oc$  отрѣзокъ

$oq = \frac{h}{2} \sin \alpha$ . Откладывая отъ точки  $p$  вверхъ и внизъ длины  $pz$  и  $ps$ , равныя  $oq$ , получимъ:

$$nz = R, \quad ns = r \quad \text{и} \quad sz = R - r,$$

что ясно изъ ур-ий (16) и (17).

Совершая такое же построение для какого нибудь другого угла  $\alpha_1$ , мы найдемъ:

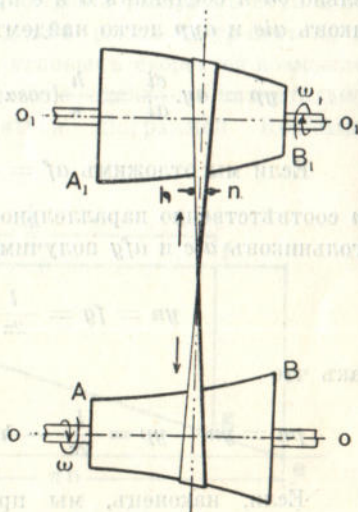
$$R_1 = n_1 z_1 \quad \text{и} \quad r_1 = s_1 n_1.$$

Геометрическое мѣсто точекъ  $z$  и  $s$  представитъ собою кривую  $mztsu$ .

При помощи діаграммы Reuleaux задача о построении ступенчатого шкива для открытаго ремня можетъ быть разрѣшена въ слѣдующемъ порядкѣ.

Выбираемъ одинъ радиусъ  $R_1$  или  $r_1$  произвольно, а затѣмъ по первому изъ ур-ий (1) опредѣляемъ другой. Далѣе, по ур-ю (9) по данному  $h$  и по найденнымъ  $R_1$  и  $r_1$  опредѣлимъ  $l$  и строимъ діаграмму Reuleaux. Проводя въ ней линіи  $xy$ ,  $x_1y_1$  и т. д. такъ, чтобы отрѣзки  $nz$  и  $ns$  удовлетворяли послѣдовательно ур-ямъ (1), мы найдемъ радиусы  $R_2, R_3, r_2, r_3, \dots$  и т. д.

**81. Ременная передача съ непрерывнымъ измѣненіемъ отношенія скоростей.** При ступенчатыхъ шкивахъ отношеніе скоростей измѣняется скачками. Если разность между радиусами смежныхъ шкивовъ одного и того же ступенчатого шкива сдѣлать бесконечно малою и число шкивовъ бесконечно большимъ, то получатся два барабана (фиг. 139), одинъ изъ которыхъ образуется вращеніемъ около оси  $oo$  кривой  $AB$ , а другой—около оси  $o_1o_1$  кривой  $A_1B_1$ . Въ этомъ случаѣ, очевидно, при передвиженіи ремня перпендикулярно къ плоскости вращенія от-



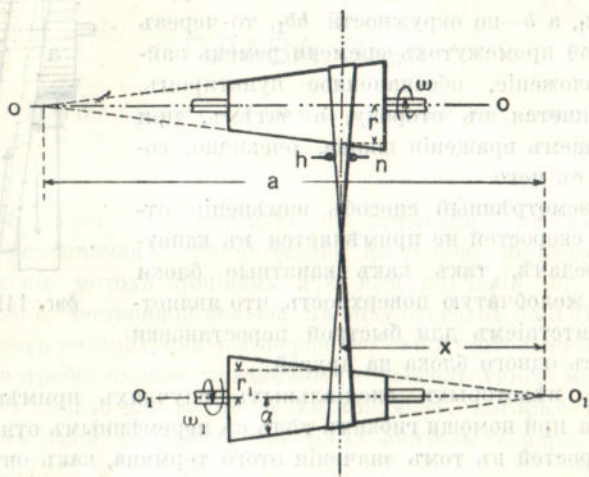
фиг. 139-ва.



ношеніе угловыхъ скоростей будетъ измѣняться непрерывно по закону, который опредѣляется видомъ кривыхъ  $AB$  и  $A_1B_1$ .

Въ случаѣ перекрестнаго ремня кривыя  $AB$  и  $A_1B_1$ , при сближеніи барабановъ до соприкосновенія, должны совпадать между собою.

Для примѣра разсмотримъ два одинаковыхъ коническихъ барабана (фиг. 140).



фиг. 140-ая.

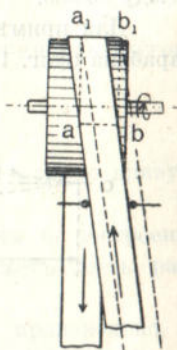
Пусть разстояніе между вершинами конусовъ =  $a$  и пусть ремень находится на разстояніи  $x$  отъ одной изъ вершинъ; тогда, очевидно,

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{r}{r_1} = \frac{(a-x)\operatorname{tg}\alpha}{x\operatorname{tg}\alpha} = \frac{a-x}{x}.$$

Въ то время какъ при ступенчатыхъ шкивахъ для перестановки ремня необходимо остановить механизмъ, здѣсь ремень можетъ быть переставленъ во время хода нажатіемъ вилкой  $hn$  (фиг. 140) сбоку на набѣгающую часть ремня на тотъ шкивъ, около котораго вилка находится.

Ремень удерживается на шкивъ треніемъ и потому требуется всегда значительное усиліе, чтобы сдвинуть его со шкива во время хода, если нажимать на сбѣгающую часть. Напротивъ, онъ тотчасъ же соскочитъ со шкива, если даже

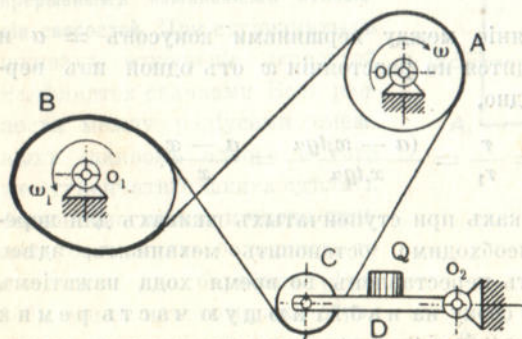
легко нажать на набѣгающую часть. Объясняется это слѣдующимъ образомъ. Пусть средняя линия набѣгающей части ремня (фиг. 141) не лежитъ въ плоскости, перпендикулярной къ оси шкива, и ремень при набѣганіи соприкасается со шкивомъ по образующей  $ab$ . Такъ какъ, вслѣдствіе тренія между ремнемъ и шкивомъ, точка  $a$  ремня будетъ далѣе двигаться по окружности  $aa_1$ , а  $b$  — по окружности  $bb_1$ , то черезъ небольшой промежутокъ времени ремень займетъ положеніе, обозначенное пунктиромъ, т. е. сдвинется въ сторону, а затѣмъ, при дальнѣйшемъ вращеніи шкива, очевидно, соскочитъ съ него.



фиг. 141-аа.

Разсмотрѣнный способъ измѣненія отношенія скоростей не примѣняется въ канатной передачѣ, такъ какъ канатные блоки имѣютъ желобчатую поверхность, что является препятствіемъ для быстрой перестановки каната съ одного блока на другой.


Въ нѣкоторыхъ специальныхъ случаяхъ примѣняется передача при помощи гибкихъ тѣлъ съ переменнымъ отношеніемъ скоростей въ томъ значеніи этого термина, какъ онъ разсматривался въ шарнирныхъ механизмахъ и зубчатой передачѣ.



фиг 142-аа.

Схема такой передачи изображена на фиг. 142. Здѣсь, при равномерномъ вращеніи цилиндрическаго шкива или блока  $A$ , блокъ или шкивъ  $B$  будетъ вращаться съ переменною скоростью. Гибкое тѣло охватываетъ направляющій блокъ или шкивъ  $c$  и при помощи груза  $Q$  всегда находится въ натянутомъ состояніи.





## ГЛАВА 3-ья

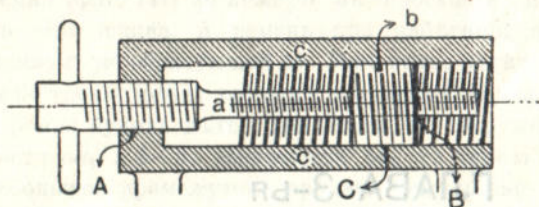
### Пространственные механизмы.

82. Число применяемых на практикѣ пространственных механизмовъ сравнительно настолько ничтожно, что применение метода Reuleaux для ихъ изученія не можетъ принести существенной пользы. Въ виду этого, въ дальнѣйшемъ мы будемъ разсматривать совершенно самостоятельно отдѣльные употребительные механизмы и воспользуемся методомъ Reuleaux только для изученія механизмовъ, которые получаются изъ цѣпи, состоящей изъ трехъ винтовыхъ паръ.

83. Цѣпь, состоящая изъ трехъ винтовыхъ паръ, и ея преобразованія. Винты бываютъ правые и лѣвые. Правыми называются такіе винты, которые для ввинчиванія въ гайку слѣдуетъ вращать по стрѣлкѣ часовъ; лѣвый винтъ завинчивается при вращеніи въ обратную сторону. И въ томъ и другомъ случаѣ предполагается, что винтъ удаляется отъ наблюдателя. Чтобы различать правый и лѣвый винтъ аналитически, можно условно считать шагъ праваго винта положительнымъ, а шагъ лѣваго — отрицательнымъ. Далѣе, если мы примемъ направленія движеній поступательнаго и вращательнаго, соотвѣтствующихъ ввинчиванію праваго винта, за положительные, то, очевидно, оба отрицательныя перемѣщенія будутъ соотвѣтствовать вывинчиванію того же винта, положительное поступательное перемѣщеніе съ отрицательнымъ вращательнымъ — ввинчиванію лѣваго винта и, наконецъ, отрицательное поступательное и положительное вращательное — вывинчиванію лѣваго винта.

Возьмемъ цѣпь, состоящую изъ трехъ соосныхъ винтовыхъ паръ (фиг. 143) *A*, *B* и *C* и трехъ звеньевъ *a*, *b*, и *c*.

Предполагая, что все три винта имеют правую нарезку, обозначим шаг пары  $A$  через  $x$ , пары  $B$ —через  $y$  и пары



$C$ —через  $z$  и будем исследовать тот механизм, который мы получим, сделав стойкой звено  $c$ .

фиг. 143-а.

Задача в данном слу-

чае, как и вообще, заключается в определении зависимости между движением звеньев, прилегающих к стойке  $c$  в том предположении, что одно из них, звено ведущее, движется как-нибудь произвольно, но определенным в каждом отдельном случае образом.

Предполагая, что ведущим является звено  $a$ , допустим, что мы повернули его по стрелке часов на  $\alpha$  оборотов, вследствие чего оно переместилось поступательно на величину  $\alpha x$ . Если бы  $x = y$ , то звено  $b$  оставалось бы неподвижным, но в общем случае оно будет также перемещаться. Понятно, что сумма перемещений звена  $a$  относительно  $b$  и  $b$  относительно  $c$  равна перемещению звена  $a$  относительно  $c$ .

Предположим, что звено  $a$  повернулось относительно  $b$  на  $\beta$  оборотов и  $b$  относительно  $c$  на  $\gamma$  оборотов; тогда, считая, что  $\beta$  и  $\gamma$  положительны (легко сообразить, что так будет в том случае, если  $x > y$ ), будем иметь:

$$\alpha = \beta + \gamma \dots \dots \dots (1);$$

$$\alpha x = \beta y + \gamma z \dots \dots \dots (2).$$

Из этих двух ур-ий, при данных  $x, y, z$  и  $\alpha$ , мы можем найти  $\beta$  и  $\gamma$ .

Замытим, что в таком общем виде этот механизм не имеет почти никакого практического применения; гораздо чаще встречаются его видоизменения, когда какая-либо из винтовых пар обращается или в поступательную, или во вращательную. И ту и другую пару можно разсматривать как частный случай винтовой, причем шаг первой надо счи-



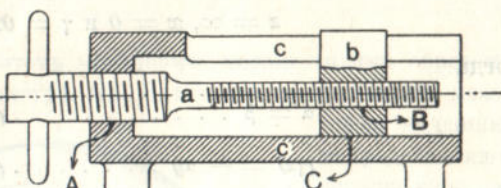
татъ равнымъ безконечно большой величинѣ, а шагъ второй — нулю.

Предположимъ, что винтовая пара с обращается въ поступательную (фиг. 144). Для этого случая надо положить въ ур-яяхъ (1) и (2)

$$z = \infty \text{ и } \gamma = 0;$$

Тогда будемъ имѣть:

$$\alpha = \beta \dots (3)$$



фиг. 144 я.

( $\gamma z$ ) = поступат. перемѣщеніе звена  $b = \alpha(x - y) \dots (4)$ .

Если оба винта одноименны, то, уменьшая разность  $(x - y)$ , можно сдѣлать перемѣщеніе звена  $b$  сколь угодно малымъ. Такого рода соотношенія выполнены въ дифференціальномъ винтѣ Рупу, который примѣняется для точныхъ установокъ въ астрономическихъ и физическихъ инструментахъ.

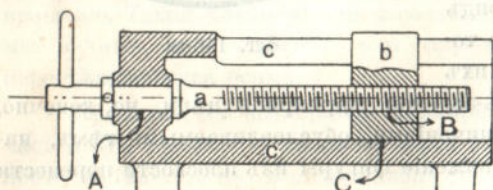
Если винтъ пары  $B$  имѣеть лѣвую нарезку, то

$$(\gamma z) = \alpha(x + y) \dots (5)$$

Въ томъ случаѣ, когда  $x$  и  $y$  равны по абсолютной величинѣ

$$(\gamma z) = 2\alpha x \dots (6)$$

Въ такомъ видѣ этотъ механизмъ примѣняется для соединенія вагоновъ съ цѣлю болѣе быстрого ихъ сдѣшленія, ибо при одномъ оборотѣ винта  $a$ , вагоны сближаются на двойную величину его поступательнаго перемѣщенія относительно каждаго изъ нихъ.



фиг. 145-я.

Положимъ теперь, что въ предыдущемъ механизмѣ пара  $A$  обратилась въ пару вращательную. При такомъ преобразованіи по-

лучимъ весьма распространенный механизмъ, въ которомъ винтъ  $a$  (фиг. 145), вращаясь въ  $c$ , будетъ сообщать поступательное движеніе гайкѣ  $b$ . Чтобы примѣнить къ данному случаю ур-ія (1) и (2), мы должны положить въ нихъ

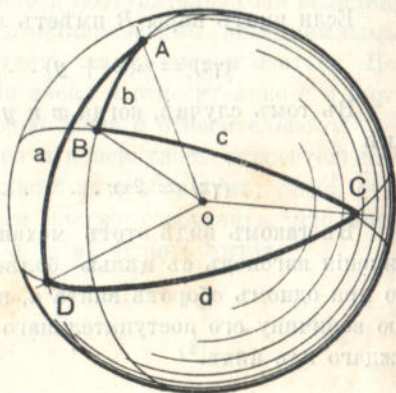
$$z = \infty, x = 0 \text{ и } \gamma = 0;$$

тогда

$$a = \beta \dots \dots \dots (7).$$

$$(\gamma z) = -\alpha y \dots \dots \dots (8).$$

**84. Шарниръ Гука.** Шарниръ Гука есть частный случай сферической четырехзвенной шарнирной цѣпи. Эту цѣпь мы можемъ разсматривать, какъ обобщеніе плоской шарнирной цѣпи, предположивъ, что всѣ оси шарнировъ пересекаются въ одной точкѣ  $o$  (фиг. 146). Опишемъ изъ этой точки сферу. Пусть она пересѣчетъ оси въ точкахъ  $A, B, C$  и  $D$ , которыя мы соединимъ дугами большого круга  $a, b, c$  и  $d$ . Если мы выполнимъ эти дуги въ видѣ стержней и сочленимъ ихъ между собой шарнирами  $A, B, C$  и  $D$ , оси которыхъ будутъ совпадать съ линіями  $oA, oB, oC$  и  $oD$ , то получимъ четырехзвенную сферическую шарнирную цѣпь. Дѣлая въ ней неподвижнымъ то или другое звено, мы можемъ получить изъ нея четыре различныхъ механизма. Изъ такой цѣпи можно было бы при помощи преобразованій получить цѣлый рядъ механизмовъ, подобно тому какъ мы получали ихъ изъ плоской четырехзвенной шарнирной цѣпи, но, конечно, съ нѣкоторыми ограниченіями, обуславливаемыми тѣмъ, насколько мы можемъ движеніе фигуры изъ плоскости перенести на сферу. Между различными механизмами, получаемыми изъ сферической четырехзвенной шарнирной цѣпи, особеннаго



фиг. 146-ая.

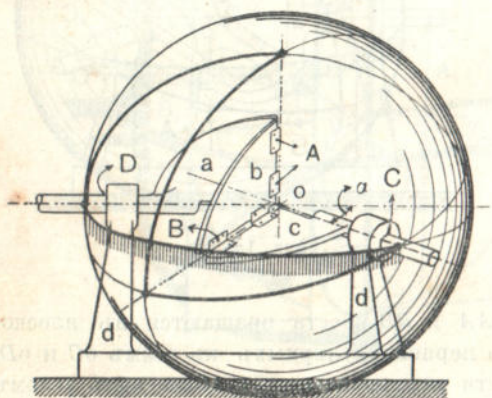
изъ плоской четырехзвенной шарнирной цѣпи, но, конечно, съ нѣкоторыми ограниченіями, обуславливаемыми тѣмъ, насколько мы можемъ движеніе фигуры изъ плоскости перенести на сферу. Между различными механизмами, получаемыми изъ сферической четырехзвенной шарнирной цѣпи, особеннаго



вниманія заслуживаетъ тотъ, въ которомъ всѣ три подвижныхъ звена стягиваютъ прямые углы, т. е.

$$\overset{\frown}{a} = \overset{\frown}{b} = \overset{\frown}{c} = \frac{\pi}{2} oA.$$

Осуществить этотъ механизмъ можно такимъ образомъ, какъ показано на фигурѣ 147. Здѣсь два соединенныхъ между собою подшипника представляютъ неподвижное звено  $d$  съ двумя элементами вращательныхъ паръ  $C$  и  $D$ . Звенья  $a$  и  $c$  выполнены въ видѣ секторовъ, соединенныхъ соответственно съ валами  $oD$  и  $oC$ , а звено  $b$  представляетъ собою просто секторъ, сочлененный съ



фиг. 147-ая.

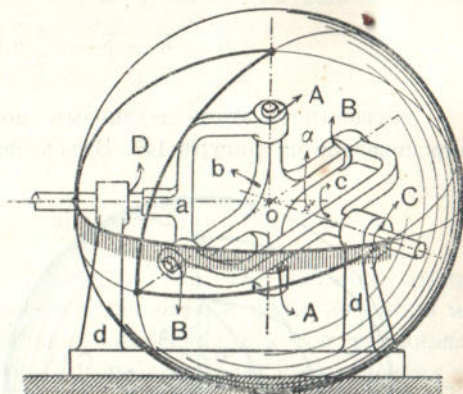
секторами звеньевъ  $a$  и  $c$  при помощи петель. Всѣ три сектора имѣютъ въ вершинѣ прямой уголъ. Каждое изъ звеньевъ  $a$ ,  $b$  и  $c$  заключаетъ въ себѣ по два элемента вращательныхъ паръ: звено  $a$ —пары  $D$  и  $A$ , звено  $b$ —пары  $A$  и  $B$  и звено  $c$ —пары  $B$  и  $C$ .

Если мы будемъ вращать ось  $oD$ , то она при помощи сектора  $b$  увлечетъ во вращеніе ось  $oC$ ; при непрерывномъ вращеніи первой и вторая придетъ также въ непрерывное вращеніе. Такой механизмъ называется шарниромъ Гюка. Какъ мы видимъ, онъ служитъ для передачи вращенія между пересѣкающимися осями.

Если мы будемъ вращать ось  $oD$ , то она при помощи сектора  $b$  увлечетъ во вращеніе ось  $oC$ ; при непрерывномъ вращеніи первой и вторая придетъ также въ непрерывное вращеніе. Такой механизмъ называется шарниромъ Гюка. Какъ мы видимъ, онъ служитъ для передачи вращенія между пересѣкающимися осями.

Практическое выполненіе шарнира Гюка нѣсколько отличается отъ только что рассмотрѣнной схемы. Каждый изъ валовъ снабжается на концѣ вилкой съ двумя втулками; при этомъ вилки располагаются такъ (фиг. 148), что оси втулокъ, будучи перпендикулярными къ осямъ соответствующихъ ва-

ловъ, пересекаются между собою подъ прямымъ угломъ въ той же точкѣ  $o$ , гдѣ и оси валовъ. Въ эти втулки вилокъ вставляется одинъ общій крестъ  $AABB$ , который и представляетъ собою промежуточное звено  $b$ . Замѣтимъ, что при вращеніи валовъ крестъ не скользитъ во втулкахъ, а только вращается, ибо, какъ мы видѣли, пары  $A$  и  $B$ —вращательныя пары.



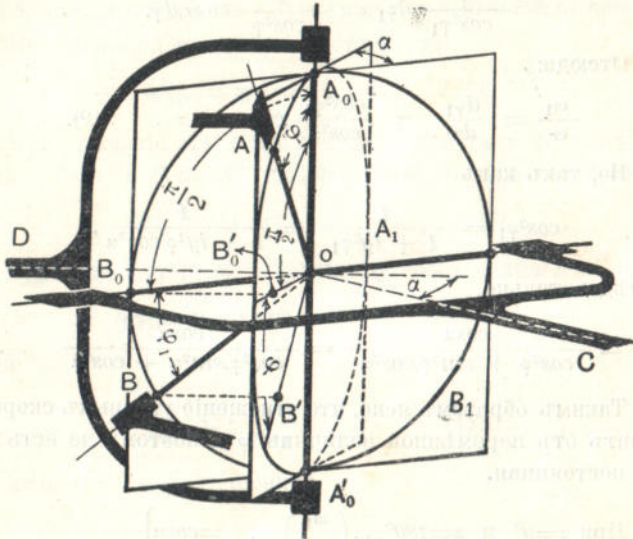
фиг. 148-ая.

Выведемъ теперь законъ передачи движенія. Не трудно видѣть, что стержни  $AA$  и  $BB$  креста вращаются въ плоскостяхъ, соответственно перпендикулярныхъ къ осямъ  $oC$  и  $oD$ , причемъ эти плоскости наклонены между собою подъ угломъ  $\alpha$ , равномъ углу между осями  $oD$  и  $oC$ . Выберемъ на осяхъ  $AA$  и  $BB$  креста одинаково удаленныя отъ центра  $o$  точки и предположимъ, что описываемыя этими точками въ соответствующихъ плоскостяхъ окружности въ перспективѣ изображаются пересекающимися въ точкахъ  $A_0$  и  $A'_0$  кривыми  $A_0AA'_0A_1$  и  $A_0B_0A'_0B_1$  (фиг. 149), причемъ очевидно, что  $A_0A'_0$  есть линия пересѣченія плоскостей, перпендикулярныхъ къ  $oD$  и  $oC$ . Допустимъ, что въ начальный моментъ стержень  $AA$  занимаетъ положеніе  $oA_0$ , а стержень  $BB$ —положеніе  $oB_0$ . Проекція  $oB'_0$  стержня  $oB_0$  на плоскость  $A_0AA'_0A_1$  образуетъ съ  $oA_0$  прямой уголъ, ибо  $\angle A_0oB_0 = \frac{\pi}{2}$  и одна сторона этого угла лежитъ въ плоскости проекціи.

Предположимъ теперь, что стержень  $oA_0$ , повернувшись на уголъ  $\varphi$ , занялъ положеніе  $oA$ , а стержень  $oB_0$ , повернувшись въ то же время на уголъ  $\varphi_1$ , занялъ положеніе  $oB$ . Такъ какъ  $\angle A_0oB$  проектируется на плоскость  $A_0AA'_0A_1$  въ видѣ прямого угла, то, очевидно, уголъ между  $oB'_0$  и  $oB'$ , проекціей  $oB$ , равенъ  $\varphi$ .



Такимъ образомъ, уголъ  $\varphi$  есть проекція угла  $\varphi_1$  на плоскость, образующую съ плоскостью послѣдняго уголъ  $\alpha$ ,



фиг. 149-ая.

причемъ одна изъ сторонъ угла  $\varphi$ , перпендикулярна къ линіи пересѣченія обѣихъ плоскостей. Легко видѣть, что при такихъ условіяхъ имѣютъ мѣсто слѣдующія соотношенія (фиг. 150), если для простоты мы положимъ, что прямая  $a_1b_1$  параллельна линіи пересѣченія плоскостей угловъ  $\varphi$  и  $\varphi_1$ ,

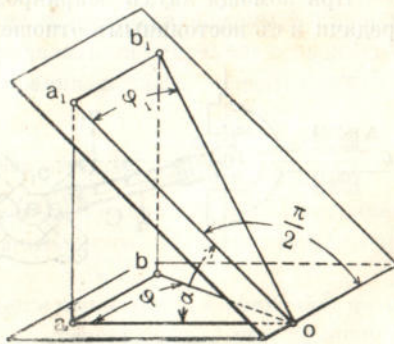
$$ab = a_1b_1, \quad \frac{a_1b_1}{oa_1} = \operatorname{tg}\varphi_1$$

$$\text{и } \frac{ab}{oa} = \operatorname{tg}\varphi,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}\varphi \cdot \cos\alpha \dots (1).$$

Отъ этой зависимости между углами посредствомъ дифференцирова-



фиг. 150-ая.

ния переходимъ къ скоростямъ; тогда законъ передачи движенія найдется такимъ путемъ:

$$\frac{1}{\cos^2\varphi_1} d\varphi_1 = \frac{1}{\cos^2\varphi} \cos\alpha d\varphi.$$

Отсюда:

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{d\varphi_1}{d\varphi} = \frac{\cos^2\varphi_1}{\cos^2\varphi} \cos\alpha \dots \dots \dots (2).$$

Но, такъ какъ

$$\cos^2\varphi_1 = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi_1} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi \cos^2\alpha},$$

то, слѣдовательно,

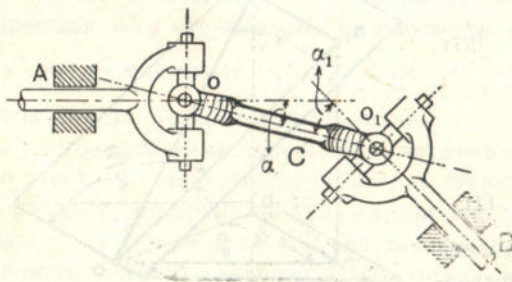
$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{\cos\alpha}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi \cos^2\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\cos^2\varphi \sin^2\alpha + \cos^2\alpha} \dots \dots (3).$$

Такимъ образомъ ясно, что отношеніе угловыхъ скоростей зависитъ отъ переменнй величины  $\varphi$  и поэтому не есть величина постоянная.

$$\left. \begin{array}{l} \text{При } \varphi=0^\circ \text{ и } \varphi=180^\circ \dots \left( \frac{\omega_1}{\omega} \right)_{\min.} = \cos\alpha \\ \text{При } \varphi=90^\circ \text{ и } \varphi=270^\circ \dots \left( \frac{\omega_1}{\omega} \right)_{\max.} = \frac{1}{\cos\alpha} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (4).$$

Очевидно, что если уголъ  $\alpha$  не великъ, то это отношеніе колеблется въ узкихъ предѣлахъ, а если  $\alpha = 90^\circ$ , то передача движенія становится невозможною.

При помощи двухъ шарнировъ Лука можно достигнуть передачи и съ постояннымъ отношеніемъ скоростей. Положимъ,



что между двумя валами  $A$  и  $B$  (фиг. 151), оси которыхъ находятся въ одной плоскости, помѣщается третій валъ  $C$ , причемъ вилки первыхъ двухъ расположены въ начальный

фиг. 151-ая.



моментъ въ одной и той же плоскости, а вилки послѣдняго въ плоскости перпендикулярной. Обозначимъ синхроническіе углы поворота валовъ соотвѣтственно черезъ  $\varphi$ ,  $\varphi_1$  и  $\varphi_0$ , уголъ между осями валовъ  $A$  и  $C$  черезъ  $\alpha$  и уголъ между осями  $B$  и  $C$ —черезъ  $\alpha_1$ .

На основаніи предыдущаго имѣемъ:

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \operatorname{tg}\varphi \cdot \cos\alpha \dots \dots \dots (5).$$

Ясно, что движеніе отъ  $C$  къ  $B$  передается такъ же, какъ передавалась бы отъ  $C$  къ  $A$ ; слѣдовательно мы можемъ написать:

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \operatorname{tg}\varphi_1 \cdot \cos\alpha_1 \dots \dots \dots (6).$$

Сравнивая ур-ія (5) и (6) между собою, найдемъ:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 \cdot \cos\alpha_1 = \operatorname{tg}\varphi \cdot \cos\alpha \dots \dots \dots (7),$$

откуда

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi_1}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_1} \dots \dots \dots (8).$$

Если  $\alpha = \alpha_1$ , то, очевидно,

$$\frac{\omega_1}{\omega} = 1 \dots \dots \dots (9).$$

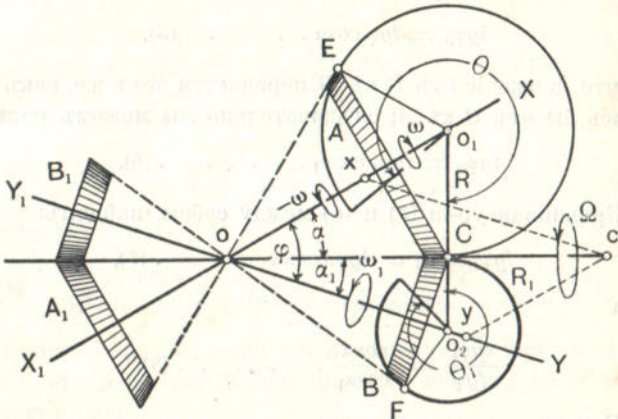
Понятно, что при помощи двухъ шарнировъ Гука возможно передавать вращательное движеніе и между осями пересѣкающимися. Если при этомъ желательно получить постоянное отношеніе скоростей, надо, во-первыхъ, вилки крайнихъ валовъ располагать такимъ образомъ, чтобы оси соотвѣствующихъ имъ стержней крестовъ одновременно приходили на линіи пересѣченія плоскостей, перпендикулярныхъ къ осямъ валовъ, и, во-вторыхъ, располагать ось средняго вала такъ, чтобы она пересѣкала оси крайнихъ подь однимъ и тѣмъ же угломъ.

### Зубчатая передача.

**85. Коническія зубчатая колеса.** Коническія зубчатая колеса служатъ для передачи вращательнаго движенія между пересѣкающимися осями.

Пусть требуется вращеніе около оси  $OX$  (фиг. 152) съ постоянной угловой скоростью  $\omega$  преобразовать, при помощи непосредственнаго зацепленія, во вращеніе около оси  $OY$ , пере-

сѣкающейся съ первой въ точкѣ  $o$  подъ угломъ  $\varphi$ , съ угловой скоростью  $\omega_1$  такъ, чтобы отношеніе  $\frac{\omega_1}{\omega}$  оставалось всегда постояннымъ.



фиг. 152-я.

Движеніе нѣкоторой неизмѣняемой системы, связанной съ осью  $oY$ , относительно таковой же системы, связанной съ осью  $oX$ , будетъ, очевидно, слагаться изъ двухъ вращательныхъ движеній: около оси  $oY$  съ угловой скоростью  $\omega_1$  и около оси  $oX$  съ угловой скоростью  $\omega$ , но въ сторону противоположную данной.

Результирующее движеніе будетъ также движеніе вращательное около оси  $oc$ , которая будетъ имѣть направленіе диагонали параллелограмма, построеннаго на отрѣзкахъ  $ox = -\omega$  и  $oy = \omega_1$ ; при этомъ обѣ угловыя скорости должны быть отложены такъ, чтобы наблюдатель, смотрящій отъ конца къ началу, т. е. отъ  $X$  и  $Y$  къ  $o$ , видѣлъ вращеніе около обѣихъ осей въ одну и ту же сторону. Разсматривая треугольникъ  $ocx$ , легко найдемъ:

$$\frac{\omega_1}{\sin \alpha} = \frac{\omega}{\sin \alpha_1} \dots \dots \dots (1)$$

И въ этомъ случаѣ при наблюденіи отъ конца къ началу, т. е. отъ  $X$  и  $Y$  къ  $o$ , имѣемъ:

$$\alpha + \alpha_1 = \varphi \dots \dots \dots (2)$$



откуда ясно, что при данных  $\omega$ ,  $\omega_1$  и  $\varphi$ , углы  $\alpha$  и  $\alpha_1$  будут имѣть постоянное значеніе, слѣдовательно, движеніе системы, связанной съ осью  $oY$ , относительно оси  $oX$  можетъ быть изображено каченіемъ усѣченнаго конуса  $B$  по усѣченному конусу  $A$ . Если два такихъ конуса, выполненныхъ изъ какого-либо матеріала, насадить крѣпко на соответствующія оси, то движеніе отъ одной оси къ другой можетъ быть передано желаемымъ образомъ при помощи тренія на боковыхъ поверхностяхъ конусовъ. Такая передача называется конической фрикціонной передачей. Передача эта обладаетъ тѣми же недостатками, какъ и фрикціонная цилиндрическая передача (§ 51). Чтобы устранить эти недостатки, конусы снабжаются зубцами. Такимъ образомъ получается коническая зубчатая передача. Замѣтимъ, что для одной и той же передачи можно воспользоваться или конусами  $A$  и  $B$ , или конусами  $A_1$  и  $B_1$ , расположенными на продолженіи осей  $oX$  и  $oY$  въ другую сторону отъ точки  $o$ .

Здѣсь, также какъ и въ случаѣ цилиндрической передачи, самымъ существеннымъ вопросомъ является вопросъ о нахожденіи профилей зубцовъ. Самые зубцы представляютъ изъ себя въ данномъ случаѣ коническія поверхности, образуемыя прямыми, проходящими черезъ различныя точки профиля и общую вершину конусовъ  $o$ .

Окружности  $EC$  и  $FC$  основаній конусовъ  $A$  и  $B$  будутъ, очевидно, лежать на сферѣ, описанной изъ  $o$  радиусомъ  $oC$ , и при каченіи одного конуса по другому будутъ также катиться одна по другой безъ скольженія. Задача о построеніи профилей зубцовъ сводится, такимъ образомъ, къ построенію взаимно огибающихъ кривыхъ на сферѣ, неизмѣнно связанныхъ соответственно съ окружностями  $EC$  и  $FC$ . Точное рѣшеніе такой задачи возможно; но, въ виду его сложности, на практикѣ довольствуются приблизительнымъ рѣшеніемъ, предложеннымъ Tredgold'омъ.

Способъ Tredgold'a заключается въ слѣдующемъ. Проведемъ къ упомянутой выше сферѣ въ точкѣ  $C$  касательную плоскость; плоскость эта изобразится на плоскости фигуры 152 прямою  $o_1o_2$ , перпендикулярной къ  $oC$ . Если мы вообразимъ, что отрѣзки этой прямой  $o_1C$  и  $o_2C$  связаны соответственно неизмѣнно съ осями  $oX$  и  $oY$ , то при вращеніи послѣднихъ отрѣзокъ  $o_1C$  опишетъ конусъ  $Eo_1C$ , дополнительный конусу

$oEC$ , а отрезок  $o_2C$  опишет конус  $Co_2F$ , дополнительный конусу  $oCF$ , так как

$$\angle Co_1E + \angle EoC = \angle CoF + Co_2F = 180^\circ.$$

Так как высота зубцов очень незначительна в сравнении с радиусом сферы и профили их занимают очень узкую сферическую полосу, то можно с достаточной точностью допустить, что эта полоса лежит не на сфере, а на поверхности дополнительного конуса. От такого предположения получается та выгода, что профили переносятся с неразвертываемой на плоскости сферы на поверхность развертываемую. Сделаем далее еще одно допущение, упрощающее решение задачи. Легко видеть, что соприкосновение зубцов происходит на небольшом расстоянии в ту и другую сторону от точки  $C$ , лежащей на касательной плоскости  $o_1Co_2$ : по одну сторону точки  $C$  зубцы приходят в зацепление и по другую расцепляются. Таким образом, только одна точка линии зацепления, именно точка  $C$ , лежит в касательной плоскости. Но так как размеры зубцов всегда очень незначительны и линия зацепления располагается по обе стороны точки  $C$ , то можно допустить, что зацепление происходит в касательной плоскости. Не трудно видеть, что движение при этом будет происходить так, как будто бы оно передавалось при помощи цилиндрических колес радиусов  $o_1C = R$  и  $o_2C = R_1$ , вращающихся в касательной плоскости  $o_1Co_2$  около осей, проходящих через точки  $o_1$  и  $o_2$ . Теперь, сделав такие допущения, перейдем к изложению способа построения профилей зубцов.

Развернем поверхности дополнительных конусов на плоскости чертежа; тогда они представляются в виде двух круговых секторов радиусов  $R$  и  $R_1$ . Углы этих секторов  $\theta$  и  $\theta_1$  определяются из следующих очевидных равенств:

$$R\theta = 2\pi r \dots \dots \dots (3)$$

и

$$R_1\theta_1 = 2\pi r_1 \dots \dots \dots (4)$$

где  $r$  и  $r_1$  суть радиусы оснований конусов  $A$  и  $B$ .

Отсюда имеем:

$$\theta = \frac{2\pi r}{R} \text{ и } \theta_1 = \frac{2\pi r_1}{R_1} \dots \dots \dots (5)$$



Разсматривая прямоугольные треугольники  $oCo_1$  и  $oCo_2$ , найдемъ:

$$r = R \cos \alpha \quad \text{и} \quad r_1 = R_1 \cos \alpha_1.$$

Подставляя эти выраженія въ ур-ія (5), получимъ:

$$\left. \begin{aligned} \theta &= 2\pi \cos \alpha \\ \theta_1 &= 2\pi \cos \alpha_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6).$$

Далѣе, вычертимъ на дугахъ секторовъ, по одному изъ указанныхъ для цилиндрическихъ колесъ способовъ, профили зубцовъ и навернемъ эти секторы на поверхности дополнительныхъ конусовъ. Соединяя затѣмъ точки профилей зубцовъ съ точкой  $o$ , получимъ и самые зубцы.

Замѣтимъ, что всѣ законы зацѣпленія, выведенные для цилиндрической передачи (§ 52), имѣютъ мѣсто и здѣсь.

Изъ ур-ія 2-го мы имѣемъ:

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_1} = k \dots \dots \dots (7),$$

гдѣ  $k$  есть передаточное число, если  $oX$ —ведущая ось.

Имѣя въ виду, что радиусы оснований конусовъ  $A$  и  $B$  равны соответственно  $r$  и  $r_1$ , легко получить слѣдующее соотношение:

$$oC = \frac{r}{\sin \alpha} = \frac{r_1}{\sin \alpha_1},$$

откуда:

$$\frac{r}{r_1} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_1} \dots \dots \dots (8).$$

На основаніи этого, изъ равенства (7) найдемъ:

$$k = \frac{\omega_1}{\omega} = \frac{r}{r_1} \dots \dots \dots (9),$$

т. е. угловые скорости обратно пропорціональны радиусамъ начальныхъ окружностей.

Такимъ же образомъ не трудно найти, что

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{z}{z_1} = \frac{n_1}{n} \dots \dots \dots (10).$$

Здѣсь слѣдуетъ обратить вниманіе еще на работу тренія между зубцами колесъ, которая, какъ мы знаемъ, характеризуется скоростью скольженія одного зубца по другому. Эту скорость можно получить приблизительно, исходя изъ того предположенія, что зацѣпленіе происходитъ въ касательной плоскости, по формулѣ:

$$v = n.u \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right),$$

выведенной нами раньше для плоскаго движенія.

Такъ какъ въ нашемъ случаѣ

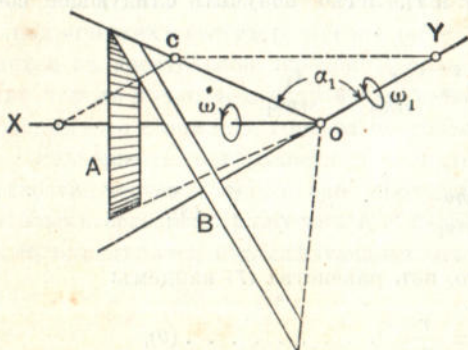
$$R \cos \alpha = r \quad \text{и} \quad R_1 \cos \alpha_1 = r_1,$$

то

$$v = n.u \left( \frac{\cos \alpha}{r} + \frac{\cos \alpha_1}{r_1} \right) \dots \dots \dots (11).$$

Эта формула показываетъ, что скорость скольженія зубцовъ коническихъ колесъ меньше, чѣмъ цилиндрическихъ—тѣхъ же радиусовъ. Конечно, она изображаетъ только приблизительно то, что происходитъ въ дѣйствительности.

Можетъ случиться, что одинъ изъ угловъ  $\alpha$  или  $\alpha_1$  будетъ больше  $90^\circ$ ; въ такомъ случаѣ получится внутреннее коническое зацѣпленіе (фиг. 153).



фиг. 153-я.

Понятно, что при этомъ угловыя скорости  $\omega_1$  и  $\omega$  должны быть отложены по осямъ  $oY$  и  $oX$  такъ, чтобы наблюдатель, смотрящій отъ  $X$  и  $Y$  къ  $o$ , видѣлъ вращеніе около обѣихъ осей въ одну и ту же сторону.

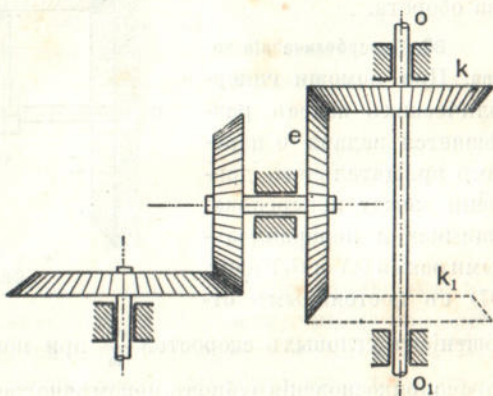
Если ось  $oc$  будетъ перпендикулярна къ одной изъ осей  $oX$  или  $oY$ , то получится зацѣпленіе колеса съ дискомъ.

Возможны сложные механизмы, состоящіе изъ коническихъ зубчатыхъ колесъ. Формулы, выведенныя для сложныхъ



механизмовъ, состоящихъ изъ цилиндрическихъ колесъ, имѣютъ мѣсто и здѣсь, съ тою лишь разницей, что направленіе вращенія крайней оси въ рядовомъ соединеніи обуславливается не только числомъ осей, но также и взаимнымъ расположеніемъ колесъ. Такъ напримѣръ, при вращеніи колеса  $e$  (фиг. 154) въ опредѣленную сторону, ось  $oo_1$  можетъ вращаться или въ ту или въ другую сторону въ зависимости отъ того, какимъ изъ колесъ— $k$  или  $k_1$  передается къ ней движеніе.

Для примѣра разсмотримъ случай эпициклическаго соединенія коническихъ колесъ, изображенный на фиг. 155. Здѣсь колесо  $Z$  насажено на ось  $ao$  крѣпко, а  $z$  вольно; оба колеса  $Z_1$  и  $z_1$  сидятъ на ручкѣ  $a_1o_1$  вольно.



фиг. 154-я.

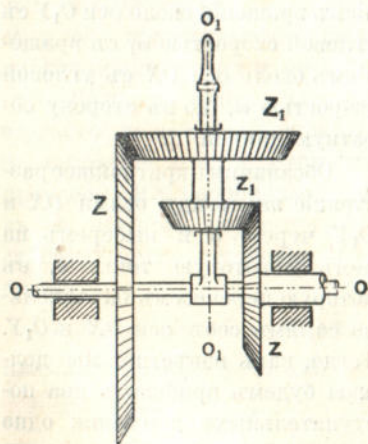
Такъ какъ колеса  $Z$  и  $z$  относительно ручки вращаются въ разныя стороны, то передаточное число

$$k = - \frac{z_1 \cdot Z}{z \cdot Z_1}.$$

Если мы предположимъ, что колесо  $Z$  неподвижно, то число оборотовъ колеса  $z$  найдемъ по формулѣ (§ 71, форм. 4)

$$n = \left(1 + \frac{z_1 \cdot Z}{z \cdot Z_1}\right) l,$$

гдѣ  $l$  число оборотовъ ручки



фиг. 155-я.





ростью  $\omega \cdot om = \omega \cdot r$ , а другое по направленію, перпендикулярному къ плоскости осей  $O_1Y$  и  $op_1$ , со скоростью  $\omega_1 \cdot om = \omega_1 \cdot r_1$ .

Складывая вращательныя движенія по правилу параллелограмма, стороны котораго  $op$  и  $op_1$  равны соответственнымъ угловымъ скоростямъ, отложеннымъ въ такомъ направленіи, чтобы наблюдатель, смотрящій отъ конца къ началу, видѣлъ вращеніе въ одну сторону, мы получимъ ось  $oc$  результирующаго вращенія, длина которой даетъ намъ величину угловой скорости этого вращенія. Разсмотрѣвъ треугольникъ  $opc$ , мы легко найдемъ:

$$\Omega = \omega \cdot \cos \alpha + \omega_1 \cdot \cos \alpha_1 \dots \dots \dots (1)$$

и

$$\omega \cdot \sin \alpha_1 = \omega \cdot \sin \alpha \dots \dots \dots (2)$$

Намъ остается сложить еще два поступательныхъ движенія. Для удобства возьмемъ за плоскость чертежа плоскость, перпендикулярную къ  $mn$  и проходящую черезъ точку  $o$ . Такъ какъ кратчайшее разстояніе  $mn$  перпендикулярно къ осямъ  $OX$  и  $O_1Y$ , то параллелограммъ  $opcp_1$  будетъ лежать въ плоскости чертежа (фиг. 158), проекціи осей  $OX$  и  $O_1Y$  сольются соответственно съ  $op$  и  $op_1$  и скорости поступательныхъ движеній  $\omega \cdot r$  и  $\omega_1 \cdot r_1$  будутъ проектироваться также въ натуральную величину по линиямъ  $ok$  и  $ok_1$ , соответственно перпендикулярнымъ къ  $op$  и  $op_1$ .

Разлагая каждую изъ этихъ скоростей на двѣ слагающихъ: одну по направленію  $oc$ , а другую по направленію  $MN$ , перпендикулярному къ  $oc$ , найдемъ, что скорость поступательнаго движенія по  $oc$  будетъ:

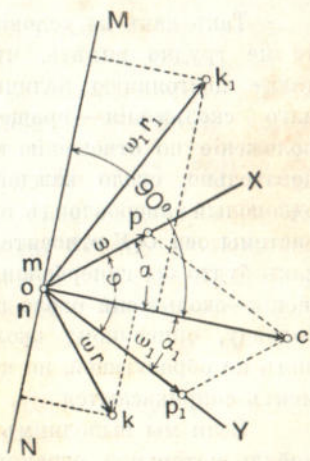
$$v = \omega \cdot r \cdot \sin \alpha + \omega_1 \cdot r_1 \cdot \sin \alpha_1$$

или, на основаніи ур-ія (2),

$$v = \omega \cdot d \cdot \sin \alpha \dots \dots \dots (3),$$

гдѣ  $d = mn$ , а по направленію  $MN$ :

$$u = \omega \cdot r \cdot \cos \alpha - \omega_1 \cdot r_1 \cdot \cos \alpha_1 \dots \dots \dots (4).$$



фиг. 158-я.

До сихъ поръ мы ничѣмъ не ограничивали выбора точки  $o$  (фиг. 157). Выберемъ ее такъ, чтобы  $u = 0$ ; тогда изъ ур-ія (4) получимъ:

$$\omega.r.\cos\alpha = \omega_1.r_1.\cos\alpha_1 \dots \dots (5).$$

Раздѣливъ это равенство почленно на равенство (2), найдемъ:

$$\frac{r}{r_1} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha_1} \dots \dots \dots (6).$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что движеніе системы оси  $O_1Y$  относительно системы оси  $OX$  сводится къ вращенію около оси  $oc$  съ угловой скоростью  $\Omega$ , опредѣляемой по ур-ію (1), и скольженію вдоль этой же оси со скоростью  $v$ , опредѣляемой изъ ур-ія (3).

Положеніе оси  $oc$  находится въ каждый моментъ по ур-іямъ (2), (6) и по ур-іямъ:

$$r + r_1 = d \dots \dots \dots (7),$$

$$\alpha + \alpha_1 = \varphi \dots \dots \dots (8).$$

Такъ какъ по условію  $\omega$ ,  $\omega_1$ ,  $d$  и  $\varphi$  величины постоянныя, то не трудно видѣть, что и  $r$ ,  $r_1$ ,  $\alpha$  и  $\alpha_1$  будутъ имѣть также постоянную величину. Отсюда ясно, что ось мгновеннаго скольженія—вращенія будетъ занимать постоянное положеніе по отношенію къ осямъ  $OX$  и  $O_1Y$  и опишетъ, слѣдовательно, около каждой изъ этихъ осей соотвѣтственный однополый гиперболоидъ вращенія. Такимъ образомъ, движеніе системы оси  $O_1Y$  относительно системы оси  $OX$  будетъ таково, какъ будто бы гиперболоидъ, описанный мгновенной осью вращенія—скольженія около первой, катился по такому же гиперболоиду, описанному около оси  $OX$ , и въ то же время скользилъ по образующей, по которой гиперболоиды въ данный моментъ соприкасаются.

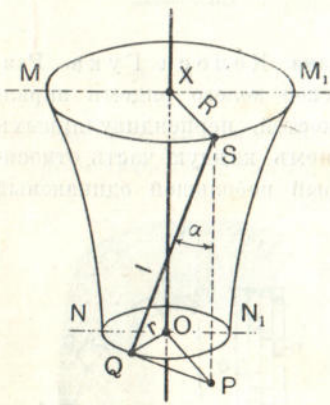
Если мы выполнимъ два такихъ гиперболоида изъ какого-нибудь матерьяла, ограничившись отрѣзками ихъ, заключенными между двумя перпендикулярными къ осямъ плоскостями, насадимъ ихъ крѣпко на соотвѣтственные оси и нажмемъ одинъ на другой, то можемъ получить требуемую передачу движенія при помощи тренія на ихъ боковыхъ поверхностяхъ.



Такая передача называется гиперболической фрикціонной передачей.

Чтобы сдѣлать передачу независимой отъ тренія, гиперboloиды снабжаются зубцами. Однако же до настоящаго времени задача о построеніи профилей зубцовъ гиперболическихъ колесъ не имѣетъ удовлетворительнаго рѣшенія, поэтому мы и не будемъ на ней останавливаться. Передача вращательнаго движенія между двумя непараллельными и непересѣкающимися осями осуществляется обыкновенно при помощи двухъ паръ коническихъ колесъ, ибо понятно, что всегда можно провести прямую, пересѣкающую двѣ другихъ прямыхъ. Замѣтимъ только, что гиперболическая зубчатая передача представляетъ еще ту особенность, что шаги зацѣпленія обоихъ колесъ, т. е. разстоянія между одноименными точками зубцовъ по окружностямъ, которыя получаютъ въ пересѣченіи гиперболоидовъ съ плоскостями, перпендикулярными къ ихъ осямъ, не равны между собою.

Пусть  $MM_1$  (фиг. 159) есть какое нибудь сѣченіе гиперболоида плоскостью, перпендикулярною къ оси  $OX$ ,  $NN_1$ —горловой кругъ,  $SQ$ —образующая гиперболоида и  $PQ$ —ея проекція на плоскость горловаго круга. Какъ извѣстно, проекція образующей на плоскость горловаго круга будетъ касательной къ этому кругу, слѣдовательно, уголь  $PQO = \frac{\pi}{2}$ .



фиг. 159-ая.

Далѣе, такъ какъ проектирующая прямая  $SP$  параллельна оси гиперболоида, то уголь между нею и образующей  $SQ$  равенъ углу между осью  $OX$  и осью  $oc$  (фиг. 157).

Изъ треугольника  $OPQ$  (фиг. 159) имѣемъ:

$$R = \sqrt{r^2 + l^2 \sin^2 \alpha} \dots \dots \dots (9)$$

гдѣ  $R = \overline{OP}$  и  $l = \overline{SQ}$ .

Такъ какъ числа зубцовъ обратно пропорціональны угловымъ скоростямъ, то принимая во вниманіе ур-іе (2), мы можемъ написать:

$$\frac{z}{z_1} = \frac{\omega_1}{\omega} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_1} \dots \dots \dots (10).$$

Обозначая шаги соответственно черезъ  $t$  и  $t_1$ , найдемъ:

$$t = \frac{2\pi R}{z} \text{ и } t_1 = \frac{2\pi R_1}{z_1} \dots \dots \dots (11);$$

откуда, на основаніи ур-ій (9) и (10), получимъ:

$$\frac{t}{t_1} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha} \cdot \sqrt{\frac{r^2 + l^2 \sin^2 \alpha}{r_1^2 + l^2 \sin^2 \alpha_1}} \dots \dots \dots (12).$$

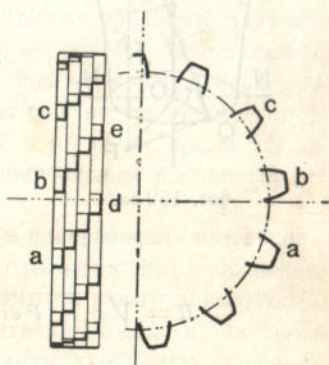
Принимая во вниманіе ур-іе (6) и полагая  $l = 0$ , для горлового круга получимъ:

$$\frac{t}{t_1} = \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha} \dots \dots \dots (13);$$

полагая  $l = \infty$ , найдемъ:

$$t = t_1.$$

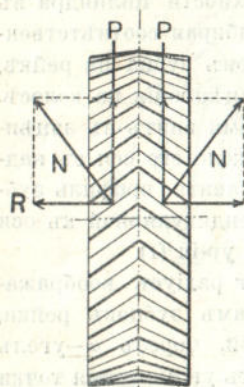
**87. Колеса съ винтовыми зубцами.** Колеса Гука. Разрѣжемъ обыкновенное цилиндрическое колесо рядомъ параллельныхъ эквидистантныхъ плоскостей, перпендикулярныхъ оси, на нѣсколько частей и повернемъ каждую часть относительно рядомъ стоящей на нѣкоторый небольшой одинаковый уголъ въ одну и ту же сторону; тогда колесо приметъ видъ, изображенный схематически на фиг. 160. Цѣль такого видоизмѣненія цилиндрическихъ колесъ заключается въ болѣе плавной передачѣ движенія. Дѣйствительно, если трудно иногда достигнуть, чтобы три зубца  $a$ ,  $b$  и  $c$  одного колеса находились въ одновременномъ зацѣпленіи, то при указанномъ преобразованіи легко, напри-  
мѣръ, достигнуть, чтобы одно-



фиг. 160-ая.

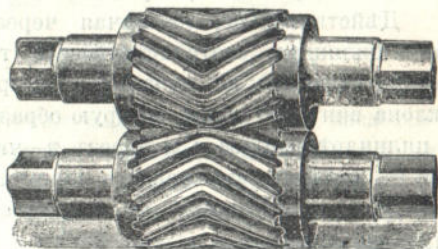


временно зацѣплялись четыре зубца *a*, *b*, *d* и *e*. Увеличивая число дѣлений до бесконечности и поворачивая каждую часть относительно сосѣдней на бесконечно-малый уголъ, мы преобразуемъ цилиндрической зубецъ въ винтовой. При винтовых зубцахъ передача движенія становится еще болѣе плавною, чѣмъ при ступенчатыхъ; однако же винтовые зубцы имѣютъ то неудобство, что давленіе между ними даетъ слагающую



фиг. 161-я.

вдоль оси. Если зубецъ будетъ составленъ изъ двухъ винтовыхъ поверхностей, пересѣкающихся въ средней плоскости колеса (фиг. 161), тогда, очевидно, слагающія давленія по оси на обѣ половины зубца взаимно уравниваются. Такія колеса и называются, по имени изобрѣтателя, колесами Гука



фиг. 162-я.

(фиг. 162). Колеса Гука, собственно говоря,



фиг. 163-я.

представляютъ собою плоскій механизмъ, но мы описываемъ ихъ здѣсь, въ виду связи съ послѣдующими механизмами. Очевидно, что такимъ же образомъ можно преобразовать и коническія колеса (фиг. 163).

Червячная передача. Преобразуя вышеуказаннымъ способомъ колесо и зубчатую рейку, мы получимъ, очевидно, на колесѣ винтовые зубцы, а на рейкѣ наклонные. Если колесо вращается съ угловою скоростью  $\omega_1$  и радиусъ его начальной окружности  $= r_1$ , то

рейка и, следовательно, профили ея зубцовъ, какъ мы видѣли (§ 70), будутъ перемѣщаться со скоростью

$$u = \omega_1 r_1 \dots \dots \dots (1).$$

Положимъ, что мы, взявши рейку съ косыми зубьями, уничтожили на ней всѣ зубцы, кромѣ одного, и свернули ее въ цилиндръ около оси, параллельной начальной ея прямой. Зубецъ, очевидно, расположится на поверхности цилиндра въ видѣ винтовой наръзки, шагъ которой, подбирая соответственнымъ образомъ радиусъ цилиндра и наклонъ зубца на рейкѣ, можно всегда сдѣлать равнымъ шагу зацѣпленія на колесѣ. Если мы приведемъ теперь полученный нами винтъ въ зацѣпленіе съ колесомъ, то, вращая винтъ около его оси съ надлежащей угловой скоростью, можемъ заставить профиль зубцовъ перемѣщаться въ плоскости, перпендикулярной къ оси колеса, со скоростью  $u$ , определяемой изъ ур-ія (1).

Дѣйствительно, обозначая черезъ  $r$  радиусъ воображаемаго цилиндра, соответствующаго точкамъ зубцовъ рейки, располагающимся на начальной ея прямой, черезъ  $\alpha$ —уголъ наклона винтовой линіи, которую образуютъ упомянутыя точки на цилиндрѣ радиуса  $r$ , и черезъ  $n$ —число оборотовъ винта въ минуту, найдемъ, что скорость перемѣщенія профилей въ плоскости, перпендикулярной къ оси колеса, выразится слѣдующимъ образомъ:

$$u = \frac{2\pi r \operatorname{tg} \alpha \cdot n}{60} \dots \dots \dots (2).$$

Сравнивая ур-іе (1) и (2) и принимая во вниманіе, что

$$\frac{2\pi \cdot n}{60} = \omega \dots \dots \dots (3),$$

гдѣ  $\omega$  угловая скорость винта, найдемъ:

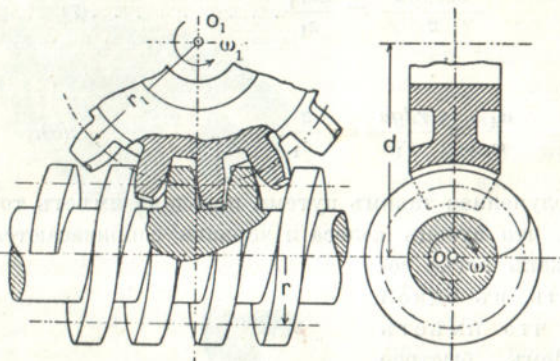
$$k = \frac{\omega_1}{\omega} = \frac{r \operatorname{tg} \alpha}{r_1} \dots \dots \dots (4).$$

Итакъ, послѣдовательнымъ преобразованиемъ зацѣпляющихся между собою рейки и колеса мы пришли къ новой передачѣ, называемой червячною (фиг. 164) (цилиндръ съ накрученнымъ на него зубцомъ называется червякомъ), служащей для передачи вращательнаго движенія между осями



перпендикулярными, но не пересѣкающимися. Для расчета этой передачи нужно принимать во вниманіе, кромѣ ур-ія (4), еще слѣдующее ур-іе:

$$r + r_1 = d. \dots \dots \dots (5),$$



фиг. 164-я.

гдѣ  $d$ —кратчайшее разстояніе между осями. Что касается до угла  $\alpha$ , то онъ опредѣляется условіями динамическими, которыя будутъ выяснены въ курсѣ „общей теоріи машинъ“. Зубцы на червякѣ въ меридіональной плоскости и на колесѣ, какъ мы видѣли, очерчиваются по правиламъ зацѣпленія колеса съ зубчатой рейкой.

Выведемъ еще одно соотношеніе, которое позволитъ намъ обобщить червячную передачу.

Мы говорили выше, что шагъ винтового хода червяка долженъ равняться шагу зацѣпленія на червячномъ колесѣ. Обозначая число зубцовъ на колесѣ через  $z_1$ , имѣемъ

$$2\pi r \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\pi r_1}{z_1} \dots \dots \dots (5),$$

откуда, принимая во вниманіе ур-іе (4), найдемъ:

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{r \cdot \operatorname{tg} \alpha}{r_1} = \frac{1}{z_1} \dots \dots \dots (6).$$

Допустимъ, что мы взяли на рейкѣ не одинъ зубецъ, а  $z$  зубцовъ, и затѣмъ свернули рейку въ цилиндръ. Очевидно, мы получимъ на червякѣ  $z$  винтовыхъ ходовъ; но для пра-

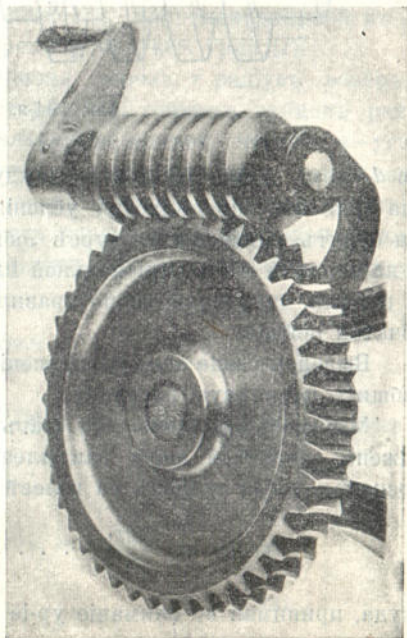
вильного зацепления надо, чтобы расстояние между смежными ходами было равно шагу зацепления. Так как это расстояние равно  $\frac{1}{z}$  части шага каждого хода, то мы имеем:

$$\frac{2\pi r \cdot \operatorname{tg} \alpha}{z} = \frac{2\pi r_1}{z_1} \dots \dots \dots (7)$$

и

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{r \cdot \operatorname{tg} \alpha}{r_1} = \frac{z}{z_1} \dots \dots \dots (8).$$

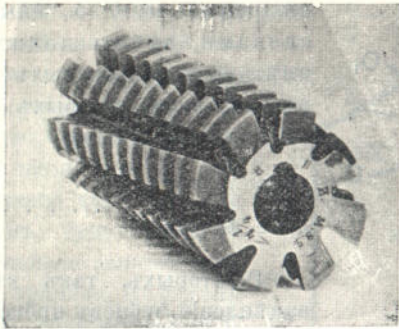
Полученная такимъ путемъ передача имѣетъ тотъ недостатокъ, что зубецъ колеса и червяка соприкасаются между собою, какъ легко сообразить, въ одной точкѣ, что имѣетъ слѣдствіемъ быстрое снашивание зубцовъ. Чтобы достигнуть болѣе тѣснаго соприкосновенія между зубцами, въ настоящее время зубцы колеса въ меридіональной плоскости ограничиваютъ не прямыми линіями, а окружностями, концентрическими съ червякомъ (фиг. 164 и 165). Задача вычерчиванія такихъ зубцовъ весьма сложна; но изготовленіе подобной червячной передачи облегчается въ настоящее время тѣмъ, что зубцы червячного колеса нарѣзаются непосредственно червякомъ, обращеннымъ во фрезъ (фиг. 166). При нарѣзкѣ колесо и червякъ приводятся во вращательное движеніе съ угловыми ско-



фиг. 165-я.



ростями, соответствующими ур-ю (4), причем, по мѣрѣ нарѣзанія зубцовъ на колеса, оси ихъ сближаются. Если зубцы



фиг. 166-я.

на колеса очерчены по разерткѣ окружности, а на червякѣ имѣютъ форму соответствующей трапеціи, то изменение разстоянія между осями не вліяетъ на форму нарѣзываемыхъ зубцовъ.

Винтовые колеса. Для передачи вращательнаго движенія между осями непараллельными и не-

пересѣкающимися пользуются иногда приблизительно выполненной гиперболической передачею, замѣняя гиперболоиды цилиндрами, діаметры которыхъ дѣлаютъ равными діаметрамъ соответствующихъ горловыхъ круговъ (фиг. 167).



фиг. 167-я.

Пусть плоскость чертежа (фиг. 168) есть плоскость, перпендикулярная къ кратчайшему разстоянію между осями колесъ  $OX$  и  $O_1Y$ , а  $os$  — соответствующая мгновенная ось вращенія—скольженія. Если дано отношеніе угловыхъ скоростей  $\frac{\omega_1}{\omega}$ , кратчайшее разстояніе между осями  $d$  и уголъ между ними  $\varphi$ , то по предыдущему (§ 86) имѣемъ:

$$\omega \cdot \sin \alpha = \omega_1 \cdot \sin \alpha_1 \dots \dots \dots (1); \quad \frac{r}{r_1} = \frac{tg \alpha}{tg \alpha_1} \dots \dots \dots (2);$$

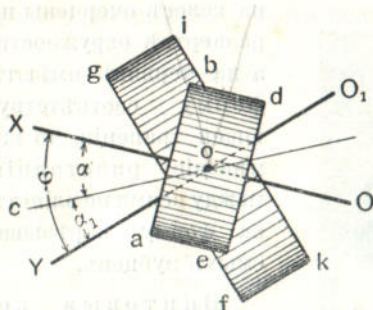
$$r + r_1 = d \dots \dots \dots (3), \quad \text{и} \quad \alpha + \alpha_1 = \varphi \dots \dots \dots (4),$$

откуда найдемъ  $\alpha$ ,  $\alpha_1$ ,  $r$  и  $r_1$ . Если, кромѣ того, обозначимъ шаги зубцовъ по окружностямъ основаній цилиндровъ  $abde$  и  $fgik$  соответственно черезъ  $t$  и  $t_1$ , то должны имѣть:

$$t \cdot \cos \alpha = t_1 \cdot \cos \alpha_1 \dots \dots \dots (5).$$

Чтобы выяснитъ форму зубцовъ, замѣтимъ, что движеніе одного начальнаго цилиндра относительно другого сводится

къ вращенію около оси  $os$  и скольженію вдоль нея. На основаніи этого, во-первыхъ,  $os$  должна быть общей касательной къ



Фиг. 168-я.

зубцамъ въ точкѣ касанія цилиндровъ  $o$ , т. е., иными словами, зубцы должны имѣть форму винтовыхъ нарѣзокъ, шаги которыхъ соответственно равны:

$$\left. \begin{aligned} h &= 2\pi r \cdot ctg \alpha \\ h_1 &= 2\pi r_1 \cdot ctg \alpha_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots (6).$$

Во-вторыхъ, такъ какъ зацѣпленіе зубцовъ происходитъ въ плоскости перпендикулярной къ  $os$  и проходящей черезъ точку  $o$ , то въ этой плоскости они должны быть очерчены по правиламъ цилиндрической передачи, какъ зубцы колесъ радиусовъ  $\frac{r}{\cos^2 \alpha}$  и

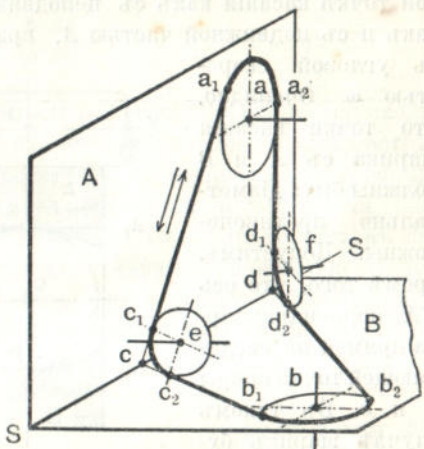
$\frac{r_1}{\cos^2 \alpha_1}$ . Дѣйствительно, упомянутая плоскость зацѣпленія пересѣчетъ начальные цилиндры по эллипсамъ, малыя полуоси которыхъ будутъ равны соответственно  $r$  и  $r_1$ , а большія— $\frac{r}{\cos \alpha}$  и  $\frac{r_1}{\cos \alpha_1}$ ; эллипсы эти соприкасаются въ точкѣ  $o$  точками, соответствующими концамъ малыхъ полуосей; поэтому въ качествѣ начальныхъ окружностей мы и должны взять окружности кривизны эллипсовъ въ этихъ точкахъ.

**88. Ременная передача.** При устройствѣ ременной передачи между непараллельными осями нужно соблюдать слѣдующее правило, значеніе котораго было выяснено въ § 81: средняя линія набѣгающей части ремня должна лежать въ средней плоскости шкива.

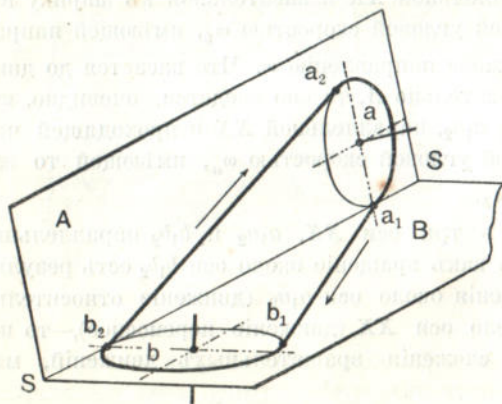
Для удобства будемъ разсматривать вмѣсто ремня его среднюю линію, а вмѣсто шкива окружность. Въ самомъ общемъ случаѣ ременная передача между непараллельными осями можетъ быть устроена слѣдующимъ образомъ. Пусть  $a$  и  $b$ —шкивы и  $A$  и  $B$ —ихъ плоскости (фиг. 169). Возьмемъ на линіи пересѣченія этихъ плоскостей  $SS$  двѣ произвольныхъ точки  $c$  и  $d$  и проведемъ изъ нихъ касательныя къ шкивамъ,



а затѣмъ въ плоскости, образуемой касательными  $da_2$  и  $db_2$  помѣстимъ направляющій шкивъ  $f$ , а въ плоскости касательныхъ  $ca_1$  и  $cb_1$  направляющій шкивъ  $e$ . Если мы обогнемъ все четыре шкива ремнемъ  $a_1c_1c_2b_1b_2d_2d_1a_2a_1$ , то очевидно, передача окажется возможной въ обѣ стороны, такъ какъ при этомъ будетъ всегда соблюдено вышеуказанное правило. Въ случаѣ осей непересекающихся (фиг. 170) можно устроить передачу и безъ направляющихъ шкивовъ. Дѣйствительно, если мы передвинемъ



фиг. 169-я.



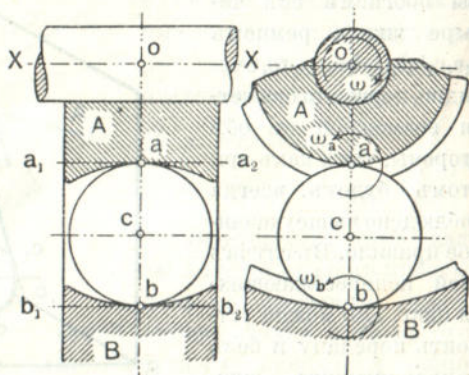
фиг. 170-я.

шкивы  $a$  и  $b$  въ ихъ плоскостяхъ до соприкосновенія съ  $SS$ , то передача становится возможной при перемѣщеніи ремня по направленію стрѣлокъ, ибо часть его  $a_1b_1$ , набѣгающая на шкивъ  $b$ , лежитъ въ плоскости  $B$ , а часть  $b_2a_2$ , набѣгающая на шкивъ  $a$ , лежитъ въ

плоскости  $A$ . Отсюда вытекаетъ такое правило: при передачѣ между осями непараллельными и непересекающимися ремень долженъ оставлять шкивы въ точкахъ касанія ихъ съ линіей пересеченія ихъ плоскостей.

89. Движение шариковъ въ подшипникахъ и подпятникахъ. Рассмотримъ сначала тотъ случай, когда шарикъ имѣеть по одной точкѣ касанія какъ съ неподвижною опорой  $B$  (фиг. 171), такъ и съ подвижною частью  $A$ , вращающейся около оси  $XX$  съ угловою скоростью  $\omega$ . Очевидно,

что точки касанія шарика съ  $A$  и  $B$  должны быть диаметрально противоположны. Допустимъ, кромѣ того, что ось  $XX$  перпендикулярна прямой  $ab$ , соединяющей точки опоры  $a$  и  $b$ . Въ такомъ случаѣ шарикъ будетъ катиться по опорѣ  $B$ , вращаясь



фиг. 171-я.

около оси  $b_1b_2$ , параллельной  $XX$  и касательной къ шару въ точкѣ  $b$ , съ нѣкоторою угловою скоростью  $\omega_b$ , имѣющей направленіе противоположное направленію  $\omega$ . Что касается до движенія шарика относительно  $A$ , то оно сведется, очевидно, къ вращенію около оси  $a_1a_2$ , параллельной  $XX$  и проходящей черезъ  $a$ , съ нѣкоторою угловою скоростью  $\omega_a$ , имѣющей то же направленіе, что и  $\omega_b$ .

Такъ какъ всѣ три оси  $XX$ ,  $a_1a_2$  и  $b_1b_2$  параллельны между собою и такъ какъ вращеніе около оси  $b_1b_2$  есть результатъ сложенія вращенія около оси  $a_1a_2$  (движеніе относительное) и вращенія около оси  $XX$  (движеніе переносное),—то на основаніи правилъ сложенія вращательныхъ движеній, мы имѣемъ:

$$\omega_b = \omega_a - \omega \dots \dots (1) \quad \text{и} \quad \omega_a \cdot ab = \omega \cdot ob \dots \dots (2),$$

откуда легко найдемъ:

$$\omega_a = \omega \cdot \frac{ob}{ab} \dots \dots (3) \quad \text{и} \quad \omega_b = \omega \cdot \frac{oa}{ab} \dots \dots (4).$$

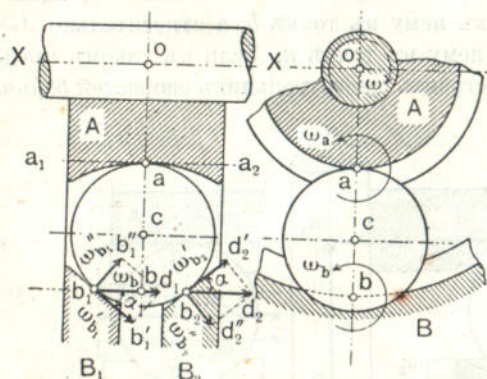
Центръ шарика  $c$  будетъ вращаться около оси  $XX$  съ нѣкоторою угловою скоростью  $\omega_c$ , которая легко найдется изъ



сравненія линейной скорости  $s$  по отношенію къ  $B$  и оси  $XX$ , именно:

$$\omega_0 = \omega_b \cdot \frac{bc}{oc} = \omega \cdot \frac{bc \cdot oa}{oc \cdot ab} \dots \dots \dots (5).$$

Разсмотрѣнный нами случай, гдѣ движеніе шариковъ, какъ мы видѣли, сводится къ чистому каченію, изрѣдка встрѣчающійся въ подшипникахъ, имѣеть то неудобство, что, вслѣдствіе снашивания опорныхъ поверхностей и отсутствія возможности сблизить ихъ, подшипникъ скоро приходитъ въ негодное состояніе. Въ виду этого чаще неподвижную опору, или подвижную, или, наконецъ, и ту и другую дѣлають изъ двухъ частей (фиг. 172). Сближая эти отдѣльныя части, можно всегда установить надлежащее соприкосновеніе шарика съ опорами.



фиг. 172-а.

Если точки соприкосновенія шарика  $b_1$  и  $b_2$  съ неподвижными опорами  $B_1$  и  $B_2$  будутъ лежать на одной прямой, параллельной оси  $XX$ , то движеніе шарика относительно этихъ опоръ сведется къ вращенію около оси  $b_1b_2$ , а относительно  $A$ , какъ и въ предыдущемъ случаѣ,—къ вращенію

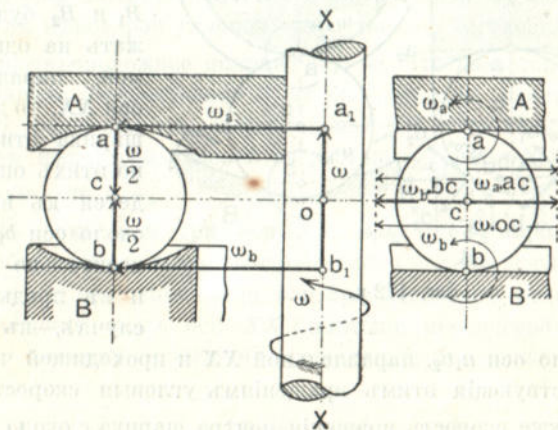
около оси  $a_1a_2$ , параллельной  $XX$  и проходящей черезъ  $a$ . Соответствующія этимъ вращеніямъ угловыя скорости  $\omega_b$  и  $\omega_a$ , а также скорость вращенія центра шарика  $s$  около оси  $XX$ , найдутся по формуламъ (3), (4) и (5). Но въ данномъ случаѣ движеніе шариковъ не сводится къ одному каченію. Дѣйстви-тельно, отложимъ отъ точки  $b_1$  по направленію  $b_1b_2$  въ нѣкоторомъ масштабѣ угловую скорость  $\omega_b$  въ видѣ отрѣзка  $b_1d_1$ . Наблюдатель, смотрящій отъ конца къ началу, т. е. отъ  $d_1$  къ  $b_1$ , будетъ видѣть вращеніе по стрѣлкѣ часовъ. Очевидно мы

можем разложить  $b_1d_1$  на двѣ составляющих: одну по направлению опоры  $b_1b'_1$  и другую по перпендикуляру къ ней  $b_1b''_1$ . Такимъ образомъ, движеніе шарика относительно опоры  $B_1$  сведется къ каченію по ней, т. е. къ вращенію около оси  $b_1b'_1$ , и къ вращенію около оси, перпендикулярной къ ней. Таково же будетъ движеніе шарика относительно опоры  $B_2$ . Легко видѣть, что

$$\omega'_{b_1} = \omega'_{b_2} = \omega_b \cdot \cos \alpha \dots (6) \text{ и } \omega''_{b_1} = \omega''_{b_2} = \omega_b \cdot \sin \alpha \dots (7).$$

Направления вращеній около всѣхъ этихъ осей опредѣляется тѣмъ, что наблюдатель, смотрящій отъ конца къ началу, видитъ вращеніе по стрѣлкѣ часовъ.

Разсмотримъ далѣе тотъ случай, когда шарикъ опирается на  $A$  и  $B$  (фиг. 173) концами діаметра, параллельнаго оси вращенія  $XX$  подвижной опоры  $A$ . Это будетъ случай подпятника. Предположимъ, что шарикъ относительно  $B$  вращается около касательной къ нему въ точкѣ  $b$ , а относительно  $A$  — около касательной къ нему въ точкѣ  $a$ . Если въ такомъ предположеніи мы будемъ строить многоугольникъ скоростей  $bb_1a_1a$ ,



фиг. 173-я.

то увидимъ, что онъ будетъ разомкнутъ. Отсюда слѣдуетъ, что шарикъ будетъ совершать еще вращеніе около оси  $ab$  или относительно опоры  $B$ , или относительно опоры  $A$ , или, наконецъ, относительно и той, и другой. Чтобы рѣшить, которое



изъ этихъ трехъ предположеній соотвѣтствуетъ дѣйствительности, найдемъ  $\omega_a$ ,  $\omega_b$  и угловую скорость  $\omega_0$  вращенія центра шарика  $c$  около оси  $XX$ .

Линейная абсолютная скорость центра шарика складывается изъ скорости относительной и скорости той точки системы  $A$ , которая совпадаетъ въ данный моментъ съ  $c$ . Такъ какъ все эти три скорости имѣютъ одно направленіе, то мы найдемъ:

$$\omega_b \cdot bc = \omega \cdot oc - \omega_a \cdot ac \dots \dots \dots (8)$$

Такъ какъ  $\omega_a = \omega_b$ , что видно изъ многоугольника скоростей, то на основаніи ур-ія (8)

$$\omega_a = \omega_b = \frac{\omega \cdot oc}{ab} \dots \dots \dots (9),$$

т. е. если мы положимъ  $\omega = b_1 a_1$ , то въ томъ же масштабѣ  $\omega_a = \omega_b = oc$ .

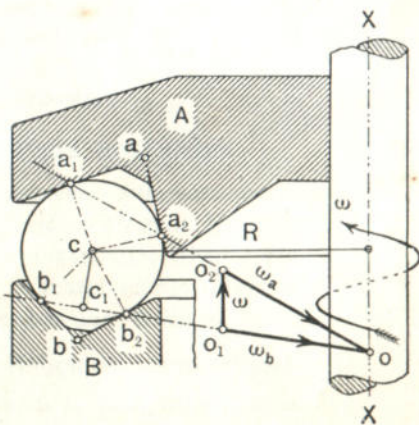
Далѣе, легко видѣть, что

$$\omega_0 = \omega_b \cdot \frac{bc}{oc} = \frac{\omega}{2} \dots \dots \dots (10),$$

откуда слѣдуетъ, что шарикъ вращается около оси  $ab$  и относительно  $A$  и относительно  $B$  съ угловой скоростью  $\frac{\omega}{2}$ .

Откладывая отъ  $a$  внизъ  $ac = \frac{\omega}{2}$  и отъ  $b$  вверхъ  $bc = \frac{\omega}{2}$ ,

мы и получимъ замкнутый многоугольникъ угловыхъ скоростей. Въ случаѣ, изображенномъ на фиг. 174, который одинаково примѣнимъ и къ подшипнику и къ подпятнику, оси  $b_1 b_2$  и  $a_1 a_2$ , чтобы шарикъ не скользилъ, должны пересѣкаться въ одной точкѣ  $o$  на оси  $XX$ . Величины и направленія угловыхъ скоростей  $\omega_b$  и

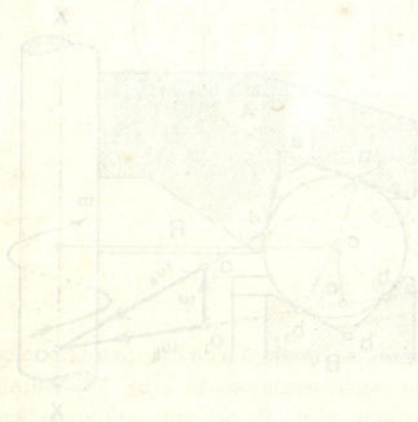


фиг. 174-я.

$\omega_a$  легко находятся построением треугольника  $o_1o_2o$ , где  $o_1o_2$  въ известномъ масштабѣ изображаетъ данную угловую скорость  $\omega$ . Направление  $\omega_b$  въ треугольникѣ, какъ скорости результирующей, должно быть встречнымъ направлениемъ двухъ другихъ скоростей. Легко также при помощи разложения скоростей  $\omega_a$  и  $\omega_b$  найти скорости качения шарика по опорамъ  $a_1a$ ,  $a_2a$ ,  $b_1b$  и  $b_2b$  и скорости вращения его около осей, нормальныхъ къ опорамъ. Угловая скорость вращения центра шарика  $\omega_0$  около оси  $XX$  выразится, очевидно, слѣдующимъ образомъ:

$$\omega_0 = \omega_b \frac{cc_1}{R} \dots \dots \dots (11),$$

гдѣ  $cc_1$ —длина перпендикуляра изъ  $c$  на  $b_1b_2$ , а  $R$ —длина перпендикуляра изъ  $c$  на  $XX$ .





## ОГЛАВЛЕНІЕ.

|  | Стр.   |
|--|--------|
| <b>Вступленіе.</b> . . . . .   | 1— 8.  |
| Прикладная механика. Машинная система. Кинематика машинъ.  |        |
| <b>Глава 1-ая.</b> Кинематика плоской неизмѣняемой системы . . . . .   | 9—41.  |
| Геометрическое представленіе движенія. Траекторія точки. Огибающая подвижной кривой. Нахожденіе огибающей. Теорема Камуса. Параллельныя кривыя. Формула Савари. Окружность перегибовъ. Особья точки. Скорость точки. Окружность перемѣны. Скорость скольженія. Центръ ускореній. Ускореніе точки. Нахожденіе полюиды и серполоиды. |        |
| <b>Глава 2-ая.</b> Плоскіе механизмы.  |        |
| ОТДѢЛЪ 1-ый. Синтезъ механизма . . . . .   | 42—57. |
| Принужденное движеніе. Кинематическія пары. Пары простыя и высшія. Кинематическая цѣпь и механизмъ. Нѣкоторыя дополненія къ предыдущему. Методъ Reuleaux. Классификація Willis'a.  |        |
| ОТДѢЛЪ 2-ой. Плоскій шарнирный четырехугольникъ и его преобразование . . . . .   | 58—88. |

Законъ Willis'a. Ускореніе центра подвижной цапфы. Точки возврата и мертвые положенія. Теорема Грасгофа. Механизмъ Сильвестра. Механизмъ Уатта. Параллелограммъ Уатта. Механизмы Эвенса. Замѣна одной вращательной пары парой поступательной. Механизмъ паровой машины. Механизмъ качающейся паровой машины. Механизмъ Витворта. Уширеніе цапфъ. Замѣна второй вращательной пары парой поступательной. Эллипсографъ. Муфта Ольдгема. Станокъ Леонардо-да-Винчи.

**ОТДѢЛЪ 3-ій. Сложные шарнирные механизмы . . . . . 89—100.**

Теорема Аронгольда. Условія, которымъ долженъ удовлетворять шарнирный механизмъ. Вѣсы Квинтенца. Гребное колесо Моргана. Механизмъ Поселье.

**ОТДѢЛЪ 4-ый. Зубчатая передача . . . 101—153.**

Отношеніе скоростей. Внешняя цилиндрическая передача. Начальныя окружности. Основныя соотношенія. Относительные размѣры зубцовъ. Построеніе профилей зубцовъ. Способъ Poncelet. Способъ Reuleaux. Зацѣпленіе по развертывающей окружности. Эпициклическое зацѣпленіе. Зацѣпленіе по двумъ точкамъ. Цѣвочное зацѣпленіе. Очерчиваніе зубцовъ по окружностямъ. Способъ Willis'a. Способъ Unwin'a. Коловратные насосы. Внутренняя цилиндрическая передача. Начальныя окружности. Очерчиваніе зубцовъ. Передача съ переменнымъ отношеніемъ скоростей. Формулы Эйлера. Постановка задачи при практическихъ примѣненіяхъ. Эллиптическія



колеса. Колеса, производимыя изъ эллиптическихъ, съ одинаковымъ и разнымъ числомъ оборотовъ. Колеса, составленныя изъ дугъ логариѳической спирали, съ одинаковымъ и разнымъ числомъ оборотовъ. Зацѣпление колеса съ рейкой съ постояннымъ и переменнымъ отношеніемъ скоростей. Эксцентрики. Эксцентрики съ двумя точками опоры.

**ОТДѢЛЪ 5-ый.** Сложные механизмы, состоящіе изъ зубчатыхъ колесъ . . . 154—162.

Рядовое соединеніе. Возвратный рядъ колесъ. Эпициклическое соединеніе.

**ОТДѢЛЪ 6-ой.** Ременная и канатная передача. . . . . 163—172.

Отношеніе угловыхъ скоростей. Передача съ постояннымъ отношеніемъ скоростей. Передача съ переменнымъ отношеніемъ скоростей.

**Глава 3-ья.** Пространственные механизмы . . . 173—204.

Цѣпь, состоящая изъ трехъ винтовыхъ паръ, и ея преобразованія. Шарниръ Гука. Коническія зубчатыя колеса. Гиперболическія колеса. Колеса Гука. Червячная передача. Винтовые колеса. Ременная передача. Движеніе шариковъ въ подшипникахъ и подпятникахъ.

## Замѣченные ошибки въ текстѣ и на фигурахъ.

Стр. 55, строка 39: написано „дальнѣйшаго“, надо „дальнѣйшаго“.

Стр. 61, строка 5: написано „ведущего“, надо „ведущаго“.

На фигурѣ 15-ой на пересѣченіи прямыхъ  $oB$  и  $M_1N_1$  пропущена буква  $R_1$ .

На фигурѣ 82-ой пропущена прямая  $RT$ .





g  
2p

w  
—  
2p

