



Національний університет
водного господарства
та природокористування

Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства
та природокористування
Кафедра вищої математики

04-02-14

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ
для самостійної роботи
з дисципліни **"Вища математика"** з розділу



**"ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ
ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ"**

для студентів спеціальності
133 "Галузеве машинобудування"
денної форми навчання

Рекомендовано методичною
комісією спеціальності 133
"Галузеве машинобудування"
протокол №4 від 24.02.2017 р.

Рівне - 2017



Методичні вказівки та завдання до самостійної роботи з дисципліни «Вища математика», з розділу "**Інтегральне числення функцій однієї змінної**" для студентів спеціальності 133 "Галузеве машинобудування" денної форми навчання / Іващук Я. Г., Грабова У. З. - Рівне: НУВГП, 2017. – 51 с.

Упорядники:

Іващук Я. Г., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики;

Грабова У. З., кандидат фізико-математичних наук, старший викладач кафедри вищої математики.

Відповідальний за випуск: Іващук Я. Г., кандидат фізико-математичних наук, доцент, в. о. завідувача кафедри вищої математики.

© Іващук Я. Г., 2017

© Грабова У. З., 2017

© Національний університет водного господарства та природокористування, 2017



Вступ

Одним із центральних понять математичного аналізу і всієї математики є – інтеграл. Воно виникло у зв'язку з двома основними задачами: 1) про відновлення функції за її заданою похідною; 2) про обчислення площі криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, $x \in a; b$, прямими $x = a$, $x = b$ і віссю Ox .

Ці дві задачі приводять до двох пов'язаних між собою видів інтегралів: невизначеного і визначеного. Вивчення властивостей і обчислення цих інтегралів складають основну задачу інтегрального числення.

Дані методичні вказівки містять завдання з вищої математики для самостійної роботи з розділу «Інтегральне числення функцій однієї змінної». Завдання складені та підбрані у відповідності до робочої програми з дисципліни «Вища математика» напряму підготовки 133 «Галузеве машинобудування» за різним ступенем складності, що дає можливість їх розв'язувати, як студентам денної, так і студентам заочної, заочно-дистанційної форм навчання.

При знаходженні невизначених інтегралів можна скористатися ключем (підказкою): яким методом з усіх можливих, можна знайти той, чи інший інтеграл, або до якої теми він належить. Перед розв'язанням практичних завдань рекомендується опрацювати теоретичний матеріал, що поданий у літературі, та розібрати зразки розв'язаних подібних завдань, яких там є достатньо багато.

Метою методичних вказівок є допомога студенту: 1) в організації самостійної роботи з вивчення даного розділу вищої математики; 2) в оволодінні ним основними методами інтегрального числення; 3) у вмінні застосовувати інтегральне числення до розв'язання практичних задач.

Перелік тем теоретичного матеріалу за якими складені завдання

Тема 1. Невизначений інтеграл. Основні методи інтегрування.

Поняття комплексних чисел, дії над ними. Розв'язування квадратного рівняння в комплексній області. Поняття первісної функції і



невизначеного інтеграла. Означення невизначеного інтеграла, теорема існування, геометричний зміст, основні властивості. Таблиця основних невизначених інтегралів. Безпосереднє інтегрування. Інтегрування підведенням під знак диференціала. Інтегрування підстановкою. Інтегрування частинами. Інтегрування деяких функцій, що містять квадратний тричлен.

Тема 2. Інтегрування раціональних, тригонометричних та ірраціональних функцій.

Многочлени. Ділення многочленів. Основна теорема алгебри про розклад многочлена на множники. Теорема Безу. Раціональні дроби, їх види. Розклад правильного раціонального дроби на суму найпростіших. Методи знаходження коефіцієнтів розкладу. Найпростіші раціональні дроби. Інтегрування дробово-раціональних функцій.

Інтегрування деяких тригонометричних виразів за допомогою універсальної та інших тригонометричних підстановок. Інтегрування добутків тригонометричних функцій.

Інтегрування ірраціональних виразів, які виражаються через аргумент, лінійну або дробово-лінійну функцію з дробовими показниками. Раціоналізація інтегралів з допомогою тригонометричних підстановок.

Тема 4. Поняття визначеного інтеграла. Невласні інтеграли.

Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла. Означення, теорема існування, геометричний і фізичний зміст та основні властивості визначеного інтеграла. Визначений інтеграл із змінною верхньою межею, теорема про похідну такого інтеграла. Формула Ньютона-Лейбніца. Заміна змінної та інтегрування частинами у визначеному інтегралі. Невласні інтеграли першого і другого роду.

Тема 5. Застосування визначеного інтеграла.

Площа криволінійної трапеції в декартових та параметричних координатах. Полярна система координат. Обчислення площі плоскої фігури в полярних координатах.

Довжина дуги кривої. Обчислення довжини дуги кривої в декартових, параметричних і полярних координатах.

Обчислення об'ємів тіл. Обчислення площі поверхні тіла обертання. Деякі фізичні застосування визначеного інтегралу (обчислення довжини шляху, роботи, сили тиску).



Таблиця диференціалів

- | | |
|---|--|
| 1. $d u^\alpha = \alpha u^{\alpha-1} du.$ | 2. $d\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{du}{u^2}.$ |
| 3. $d\left(\frac{a}{u}\right) = -\frac{a}{u^2} du.$ | 4. $d \sqrt{u} = \frac{du}{2\sqrt{u}}.$ |
| 5. $d \sqrt[n]{u} = \frac{du}{n \sqrt[n]{u^{n-1}}}.$ | 6. $d \sin u = \cos u du.$ |
| 7. $d \cos u = -\sin u du.$ | 8. $d \operatorname{tg} u = \frac{du}{\cos^2 u}.$ |
| 9. $d \operatorname{ctg} u = -\frac{du}{\sin^2 u}.$ | 10. $d \operatorname{arcsin} u = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$ |
| 11. $d \operatorname{arccos} u = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$ | 12. $d \operatorname{arctg} u = \frac{du}{1+u^2}.$ |
| 13. $d \operatorname{arcctg} u = -\frac{du}{1+u^2}.$ | 14. $d \ln u = \frac{du}{u}.$ |
| 15. $d \lg u = \frac{du}{u \ln 10}.$ | 16. $d \log_a u = \frac{du}{u \ln a}.$ |
| 17. $d a^u = a^u \ln a du.$ | 18. $d e^u = e^u du.$ |

Таблиця інтегралів

- | | |
|--|--|
| 1. $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C.$ | 2. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C.$ |
| 3. $\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C.$ | 4. $\int \frac{du}{u} = \ln u + C.$ |
| 5. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C.$ | 6. $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arcsin} u + C.$ |
| 7. $\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u + C.$ | 8. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{u}{a} + C.$ |



$$9. \int \frac{du}{u^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + C.$$

$$10. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C.$$

$$11. \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + C.$$

$$12. \int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| + C.$$

$$13. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a} \right| + C.$$

$$14. \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C.$$

$$15. \int e^u du = e^u + C.$$

$$16. \int \sin u du = -\cos u + C.$$

$$17. \int \cos u du = \sin u + C.$$

$$18. \int \operatorname{tg} u du = -\ln |\cos u| + C.$$

$$19. \int \operatorname{ctg} u du = \ln |\sin u| + C.$$

$$20. \int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C.$$

$$21. \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C.$$

$$22. \int \frac{du}{\cos u} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$$

$$23. \int \frac{du}{\sin u} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} \right) \right| + C.$$

Властивості невизначеного інтегралу

- а) $\int f'(x) dx = f(x) + C$; б) $d \int f(x) dx = f(x) dx$;
в) $\int df(x) = f(x) + C$; г) $\int A f(x) dx = A \int f(x) dx$, $A = \text{const}$;
д) $\int [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx$;
е) $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$, якщо $\int f(x) dx = F(x) + C$.

Ключ(підказка) до обчислення невизначених інтегралів:

Безпосереднє інтегрування - 4, 7.

Підведення під знак диференціала - 2, 10, 13, 17.

Інтегрування виразів, що містять квадратний тричлен - 5, 11, 20, 24.

Інтегрування частинами - 1, 15, 19, 25.

Заміна змінної - 16, 21, 23.

Інтегрування раціональних функцій - 6, 14.

Інтегрування ірраціональних функцій - 9, 18.

Інтегрування тригонометричних функцій - 3, 8, 12, 22.



Зразки знаходження невизначених інтегралів

1. Знайти інтеграл $\int (2 \sin x + 3^x + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}) dx$, скориставшись властивістю $\int (k_1 f_1(x) \pm k_2 f_2(x)) dx = k_1 \int f_1(x) dx \pm k_2 \int f_2(x) dx$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int (2 \sin x + 3^x + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}) dx &= 2 \int \sin x dx + \int 3^x dx + \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \\ &= -2 \cos x + \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{3x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C. \end{aligned}$$

2. Методом безпосереднього інтегрування знайти інтеграл

$$\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$$

Розв'язання. Скористаємося такою формулою тригонометрії:

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha). \text{ Тоді } \int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos x dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \sin x + C. \end{aligned}$$

3. Знайти інтеграл $\int \frac{x dx}{1+x^2}$ методом підстановки.

Розв'язання. Покладемо $t = 1 + x^2$, $dt = 2x dx$. Звідси $x dx = \frac{1}{2} dt$. Тоді

$$\int \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln |t| + C = \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C.$$

Цей же інтеграл можна знайти методом підведення під знак диференціала, враховуючи, що $d(1+x^2) = 2x dx$, тобто

$$x dx = \frac{1}{2} d(1+x^2). \text{ Тоді } \int \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C.$$

4. Методом інтегрування частинами знайти інтеграл

$$\int x + 2 \sin 3x dx.$$

Розв'язання. Запишемо формулу інтегрування частинами:

$$\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du$$

$$\int (x+2) \sin 3x dx = \left| \begin{array}{l} u = x+2, \quad du = dx \\ dv = \sin 3x dx, \quad v = -\frac{1}{3} \cos 3x \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{3}(x+2) \cos 3x - \left(-\frac{1}{3}\right) \int \cos 3x dx = -\frac{1}{3} x + 2 \cos 3x + \frac{1}{9} \sin 3x + C.$$

5. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2 + 6x + 5}}$.

Розв'язання. $\int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2 + 6x + 5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-4\left(x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{4}\right)}}$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2 - 2 \cdot \frac{3}{4}x + \frac{9}{16} - \frac{9}{16} - \frac{5}{4})}} = \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x - \frac{3}{4}\right)}{\sqrt{29 - \left(x - \frac{3}{4}\right)^2}} =$$

Скористаємося табличним інтегралом

$$= \left| \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + c, / u = x - \frac{3}{4}, / a^2 = \frac{29}{16} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{29}}{4} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \arcsin \frac{x - \frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{29}}{4}} + C = \frac{1}{2} \arcsin \frac{4x - 3}{\sqrt{29}} + C.$$

6. Знайти інтеграл $\int \frac{x-3}{x^2+2x+4} dx$.

Розв'язання. $\int \frac{x-3}{x^2+2x+4} dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2) + (-3-1)}{x^2+2x+1+3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+4} -$

$$-4 \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+3} = \frac{1}{2} \ln|x^2+2x+4| - \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{3}} + C.$$



7. Знайти інтеграл $\int \frac{x dx}{x-2 x+3}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $\frac{x}{x-2 x+3}$ є правильним алгебраїчним дробом. Розкладемо цей дріб на суму простих алгебраїчних дробів.

$$\frac{x}{x-2 x+3} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} = \frac{A x+3 + B x-2}{x-2 x+3}.$$

З рівності двох дробів випливає рівність: $A x+3 + B x-2 = x$.

Знайдемо значення коефіцієнтів A і B :

якщо $x=2$, то $5A=2$, тобто $A = \frac{2}{5}$;

якщо $x=-3$, то $-5B=-3$, тобто $B = \frac{3}{5}$.

Таким чином, дріб $\frac{x}{x-2 x+3} = \frac{2}{5} \frac{1}{x-2} + \frac{3}{5} \frac{1}{x+3}$. Тоді

$$\int \frac{x dx}{x-2 x+3} = \frac{2}{5} \int \frac{dx}{x-2} + \frac{3}{5} \int \frac{dx}{x+3} = \frac{2}{5} \ln|x-2| + \frac{3}{5} \ln|x+3| + C.$$

8. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{2 \cos x-3 \sin x+1}$.

Розв'язання. Зведемо даний інтеграл до інтегралу від раціональної функції за допомогою так званої універсальної підстановки $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

$$\text{Звідси } dx = \frac{2 dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Тоді інтеграл

$$\int \frac{dx}{2 \cos x-3 \sin x+1} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2 \frac{1-t^2}{1+t^2}-3 \frac{2t}{1+t^2}+1} = 2 \int \frac{dt}{2-2t^2-6t+3+3t^2} =$$



$$= 2 \int \frac{dt}{t^2 - 6t + 5} = 2 \int \frac{dt}{t - 3 - 2} - 4 = 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot 2} \ln \left| \frac{t - 3 - 2}{t - 3 + 2} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t - 5}{t - 1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 5}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1} \right| + C.$$

9. Знайти інтеграл $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$.

Розв'язання.

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x dx = - \int 1 - \cos^2 x \cos^2 x d \cos x =$$

$$= \left. \begin{array}{l} \text{застосуємо} \\ \text{підстановку} \end{array} \right| = - \int 1 - t^2 \cdot t^2 dt = \int t^4 - t^2 dt =$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos x = t \\ t^5 - \frac{t^3}{3} + C = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C. \end{array} \right|$$

10. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x} \sqrt{x}}$.

Розв'язання. Змінна x у підінтегральній функції стоїть у степені $1/3$ і $1/2$. Спільним знаменником цих дробів є число 6. Тому тут застосуємо підстановку $x = t^6$. Тоді $dx = 6t^5 dt$, $\sqrt[3]{x} = t^2$, $\sqrt{x} = t^3$, $t = \sqrt[6]{x}$. Підставляємо знайдені величини в інтеграл.

Маємо

$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x} \sqrt{x}} = \int \frac{6t^5 dt}{1 + t^2 \cdot t^3} = 6 \int \frac{t^2 dt}{t^2 + 1} = 6 \int \frac{t^2 + 1 - 1}{t^2 + 1} dt =$$

$$= 6 \int \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt = 6 t - \operatorname{arctg} t + C = 6 \sqrt[6]{x} - \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + C.$$



Варіант 1

1. $\int x \arctg x dx.$
2. $\int x 7^{x^2} dx.$
3. $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}.$
4. $\int \frac{x^3-5x^2+1}{\sqrt{x}} dx.$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+2}}.$
6. $\int \frac{x+2}{x^3-1} dx.$
7. $\int \frac{2-x}{x(x^2+1)} dx.$
8. $\int \sin^4 x dx.$
9. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx.$
10. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin^3 x}}.$
11. $\int \frac{2x dx}{\sqrt{x^2-x+1}}.$
12. $\int \sin 2x \cos 3x dx.$
13. $\int \frac{e^{\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2x-1}} dx.$
14. $\int \frac{x^3+1}{x^2-x} dx.$
15. $\int (-3x)^{-3x} dx.$
16. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}.$
17. $\int \frac{\arctg^3 x dx}{1+x^2}.$
18. $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x} dx.$
19. $\int x \cos 2x dx.$
20. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}.$
21. $\int \sin \sqrt{x} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$
22. $\int \frac{dx}{\cos x \sin x}.$
23. $\int \frac{dx}{x(x+\ln x)}.$
24. $\int \frac{x-1}{x^2+6x-5} dx.$
25. $\int x^{10} \ln x dx.$

Варіант 2

1. $\int \arctg \sqrt{x} dx.$
2. $\int \frac{e^x}{x^2} dx.$
3. $\int t g^7 x dx.$
4. $\int \left(\sqrt{t^3} + \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} \right) dx.$
5. $\int \frac{x-1}{x^2-4x+8} dx.$
6. $\int \frac{t^2+1}{(t-1)(t+3)} dx.$
7. $\int \sin^2 x dx.$
8. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx.$
9. $\int \sqrt{1-x^2} dx.$



$$10. \int \frac{5x^4 - 6}{x^5 - 6x} dx.$$

$$13. \int \frac{e^x dx}{3 - e^{2x}}.$$

$$16. \int 3^{\sin^2 x} \sin 2x dx.$$

$$19. \int (\sqrt{x} + 1) \sin 4x dx.$$

$$22. \int \frac{dx}{\sin^4 x}.$$

$$25. \int x 5^x dx.$$

$$11. \int \frac{x dx}{\sqrt{1 - 2x - x^2}}.$$

$$14. \int \frac{3x^3 + 1}{x^3 - 1} dx.$$

$$17. \int \frac{\sqrt{\ln z}}{z} dz.$$

$$20. \int \frac{dx}{3x^2 - 7x + 9}.$$

$$23. \int \frac{\sqrt{x} dx}{x(\sqrt{x} + 1)}.$$

$$12. \int \cos 3x \cos 5x dx.$$

$$15. \int \ln(x^2 + 1) dx.$$

$$18. \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$$

$$21. \int 2^{x^5+1} x^4 dx.$$

$$24. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 12x - 4}}.$$

$$1. \int \arccos x dx.$$

$$4. \int \sin^2 \frac{x}{2} dx.$$

$$7. \int \frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3} dx.$$

$$10. \int \frac{dx}{\sin^2 x (\sqrt{3} + \operatorname{ctg} x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$13. \int \frac{\operatorname{ctg} x dx}{\ln \sin x}.$$

$$16. \int e^{\sqrt{x}} dx$$

Варіант 3

$$2. \int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx.$$

$$5. \int \frac{(x+5) dx}{\sqrt{x^2 + 3x + 7}}.$$

$$8. \int \frac{dx}{3 + 5 \cos x}$$

$$11. \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 13}.$$

$$14. \int \frac{x+3}{x^3 - 4x^2} dx.$$

$$17. \int \sqrt{3x+5} dx$$

$$3. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$$

$$6. \int \frac{x dx}{x^3 + 1}.$$

$$9. \int \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x^2}} dx.$$

$$12. \int \cos^4 x \sin^3 x dx.$$

$$15. \int x^2 \cos 3x dx.$$

$$18. \int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x} dx$$



$$19. \int (x+4)e^{3x} dx$$

$$20. \int \frac{x dx}{\sqrt{x-x^2}}$$

$$21. \int \frac{dx}{2x-3}.$$

$$22. \int tg^4 x dx$$

$$23. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1} \sqrt{\arctg x + 1}}$$

$$24. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$$

$$25. \int x^4 \ln x dx.$$

Варіант 4

$$1. \int (x-2) \cos 2x dx$$

$$2. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^3}}$$

$$3. \int \frac{dx}{\sin^6 x}$$

$$4. \int \frac{d\varphi}{\sqrt{16-\varphi^2}}$$

$$5. \int \frac{x-2 dx}{3x^2+5x+6}$$

$$6. \int \frac{x^2+x-1}{(x-1)(x+2)} dx$$

$$7. \int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$$

$$8. \int \frac{dx}{3+5\sin^2 x}$$

$$9. \int \frac{\sqrt{x} dx}{1+\sqrt{x}}$$

$$10. \int e^{-(x^2+4x-7)} (x+2) dx$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x}}$$

$$12. \int \frac{dx}{1+\cos x + \sin x}$$

$$13. \int \frac{e^x dx}{3+4e^x}$$

$$14. \int \frac{2x^3+5}{x^2-x-2} dx$$

$$15. \int x^2 \cos x dx$$

$$16. \int e^x \left(1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right) dx$$

$$17. \int 4^{3x+7} dx$$

$$18. \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x^2}$$

$$19. \int \ln (x+2) dx$$

$$20. \int \frac{dx}{x^2-3x-1}$$

$$21. \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2} \arcsin x}$$

$$22. \int tg^3 x dx$$

$$23. \int x e^{\sqrt{x}} dx$$

$$24. \int \frac{x-1}{\sqrt{5x^2+4x+6}} dx$$

$$25. \int \arcsin x dx.$$



Варіант 5

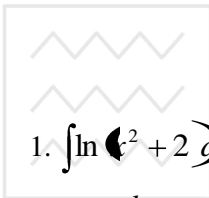
1. $\int x \ln x dx$
2. $\int \frac{2x dx}{\sqrt{x^4 - 1}}$
3. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$
4. $\int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx$
5. $\int \frac{dx}{5x^2 + 10x - 2}$
6. $\int \frac{x^2 dx}{(x-1)^2(x+1)}$
7. $\int (y\sqrt{y} + \frac{1}{y+2}) dy$
8. $\int \operatorname{ctg}^3 x dx$
9. $\int \frac{x dx}{(x+1)^{\frac{1}{2}} + (x+1)^{\frac{2}{3}}}$
10. $\int \frac{\operatorname{arctg} x dx}{1+x^2}$
11. $\int \frac{3x+6}{2x^2+5x+6} dx$
12. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x \cos 2x}$
13. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{1+\operatorname{tg} x}}$
14. $\int \frac{(2x^3-1) dx}{x^2+x-6}$
15. $\int (-16x) \sin 4x dx$
16. $\int (-2x) dx$
17. $\int \frac{\ln(x+\sqrt{x})}{x+\sqrt{x}} dx$
18. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}$
19. $\int \arcsin \sqrt{x} dx$
20. $\int \frac{x+4}{\sqrt{5+2x-x^2}} dx$
21. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2-5}}$
22. $\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$
23. $\int \sqrt{4-x^2} dx$
24. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-4}}$
25. $\int x^2 e^{-x} dx$

Варіант 6

1. $\int (x^2 + 2x + 3) \cos x dx$
2. $\int \frac{x^3 dx}{5x^4 + 7}$
3. $\int \sin^{\frac{5}{7}} x \cos^3 x dx$
4. $\int \frac{x-16}{\sqrt{x+4}} dx$
5. $\int \frac{4-3x}{5x^2+6x+18} dx$
6. $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$
7. $\int \frac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x}$
8. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$
9. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[4]{4x^4-1}}$



10. $\int e^x \operatorname{cose}^x dx$ 11. $\int \frac{3x-4}{\sqrt{x^2+5x+6}} dx$ 12. $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$
13. $\int \frac{2x^3+x}{x^4+x^2} dx$ 14. $\int \frac{3x^3+25}{x^2+3x+2} dx$ 15. $\int (-3) \sin 2x dx$
16. $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} dx$ 17. $\int \frac{\ln x}{x} dx$ 18. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$
19. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$ 20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-1}}$ 21. $\int \frac{5\cos x - \operatorname{ctg} x}{\sin^2 x} dx$
22. $\int \frac{dx}{2-3\cos x}$ 23. $\int x^5 \sqrt[5]{2+3x^6} dx$ 24. $\int \frac{dx}{x^2-4x}$
25. $\int x e^{-x} dx$



1. $\int \ln(x^2+2) dx$ 2. $\int \frac{x^2 dx}{x^6+4}$ 3. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^4 x}$
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$ 5. $\int \frac{x dx}{2x^2+2x+5}$ 6. $\int \frac{dx}{(x+1)(x-3)}$
7. $\int \frac{\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx$ 8. $\int \frac{dx}{5+4\sin^2 x}$ 9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$
10. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1+2e^x}}$ 11. $\int \frac{dx}{x^2-3x+1}$ 12. $\int \operatorname{ctg}^3 x dx$
13. $\int \frac{u du}{\cos^2 u^2}$ 14. $\int \frac{x^3+2x^2+3}{(x-1)(x-2)} dx$ 15. $\int (-6x) e^{2x} dx$
16. $\int \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}} dx$ 17. $\int \frac{\sin \ln x}{x} dx$ 18. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$



$$19. \int x^2 e^{-x} dx$$

$$20. \int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$$

$$21. \int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x \sqrt{\cos x}}$$

$$22. \int \frac{dx}{1+3\cos x}$$

$$23. \int \frac{5^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

$$24. \int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}} dx.$$

$$25. \int x \cos 2x dx.$$

Варіант 8

$$1. \int (x+2) \sin 3x dx$$

$$2. \int 2^{\sin^2 x} \sin 2x dx$$

$$3. \int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx$$

$$4. \int \frac{e^x - 1}{e^{\frac{x}{2}}} dx$$

$$5. \int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+13}} dx$$

$$6. \int \frac{dx}{x(x^2-1)}$$

$$7. \int \cos^2 \frac{x}{5} dx$$

$$8. \int \cos^7 x \sin x dx$$

$$9. \int \frac{x dx}{\sqrt[3]{x+3}}$$

$$10. \int \frac{\arcsin \ln x}{\sqrt{1-\ln^2 x}} \frac{dx}{x}$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$$12. \int \frac{dx}{2+3\sin x}.$$

$$13. \int \frac{dx}{25\cos^2 x + 9\sin^2 x}$$

$$14. \int \frac{3x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 - 4} dx$$

$$15. \int x^2 3^x dx.$$

$$16. \int \frac{dx}{e^x + 5}$$

$$17. \int \frac{x dx}{\sin^2 x^2}$$

$$18. \int \frac{x-2}{\sqrt{x+2}} dx$$

$$19. \int \ln x \frac{dx}{x^3}$$

$$20. \int \frac{x+1}{x^2+4x-2} dx$$

$$21. \int \frac{(x-1) dx}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$$22. \int \frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x} dx$$

$$23. \int \frac{dx}{\sqrt[7]{\operatorname{tg}^5 x \sin^2 x}}$$

$$24. \int \frac{dx}{x^2+2x+3}.$$

$$25. \int x \cos 3x dx.$$



Варіант 9.

$$1. \int \frac{x \cos x}{\sin^2 x} dx.$$

$$2. \int \frac{\cos 2x dx}{1 + \sin x \cos x}.$$

$$3. \int \frac{dx}{3 \cos x + 4 \sin x}.$$

$$4. \int \frac{dx}{16x^2 - 9}.$$

$$5. \int \frac{8x - 11}{\sqrt{5 + 2x - x^2}} dx.$$

$$6. \int \frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)} dx.$$

$$7. \int \frac{x^2}{x\sqrt{x}} dx.$$

$$8. \int \frac{\cos x + \sin x}{\sin 2x} dx.$$

$$9. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$10. \int \sin^6 x \cos x dx.$$

$$11. \int \frac{dx}{3x^2 + 5x + 4}.$$

$$12. \int \frac{dx}{7 - 3 \sin^2 x}.$$

$$13. \int \frac{1 + \ln x}{x} dx.$$

$$14. \int \frac{x^3 dx}{(x-1)(x+2)}$$

$$15. \int x^2 e^x dx.$$

$$16. \int e^{-x^3} x^2 dx.$$

$$17. \int \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^4}}.$$

$$18. \int \frac{\sqrt{x} dx}{x+1}.$$

$$19. \int \arcsin 2x dx.$$

$$20. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 10}}.$$

$$21. \int \frac{3^x dx}{7 + 3^{2x}}.$$

$$22. \int \frac{dx}{\operatorname{ctg}^5 x}.$$

$$23. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{\arccos^2 x - 4}}.$$

$$24. \int \frac{x-4}{x^2+x-3} dx.$$

$$25. \int \ln x dx.$$

Варіант 10.

$$1. \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx.$$

$$2. \int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx.$$

$$3. \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}.$$

$$4. \int \frac{2^x + 3^x}{6^x} dx.$$

$$5. \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x-x^2}} dx.$$

$$6. \int \frac{x dx}{x^3 - 1}.$$



$$7. \int \frac{dx}{\sqrt{1+3x^2}}.$$

$$8. \int \frac{dx}{3-2\sin x}.$$

$$9. \int \frac{\sqrt[3]{x+4}}{1+\sqrt[3]{x+4}} dx.$$

$$10. \int \frac{dx}{\sqrt{1-4x}}.$$

$$11. \int \frac{2x-3}{3x^2+2x+6} dx.$$

$$12. \int \frac{dx}{1+\sin^2 x}.$$

$$13. \int \sqrt{1+4\sin x} \cos x dx.$$

$$14. \int \frac{x+4}{x^2-4x} dx.$$

$$15. \int (-2) \sin 3x dx.$$

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}.$$

$$17. \int x^2 (x^3)^{\frac{2}{3}} dx.$$

$$18. \int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x})^y}.$$

$$19. \int \ln x \frac{dx}{x^2}$$

$$20. \int \frac{dx}{x^2-x-1}.$$

$$21. \int \frac{\sin 2x dx}{\sin^2 x + 5}.$$

$$22. \int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x - 1}.$$

$$23. \int \frac{dx}{x\sqrt{9-\ln^2 x}}.$$

$$24. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}.$$

$$25. \int x e^{-2x} dx.$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Варіант 11

$$1. \int x^2 \cos^2 x dx.$$

$$2. \int x \cdot 2^{-x^2} dx.$$

$$3. \int \sin^2 3x \cdot \cos 3x dx.$$

$$4. \int 5^{x-1} \cdot e^x dx.$$

$$5. \int \frac{(3x+2)dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}.$$

$$6. \int \frac{dx}{(x^2+1)x}.$$

$$7. \int \cos^2 5x dx$$

$$8. \int \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x}.$$

$$9. \int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-4}} dx.$$

$$10. \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$11. \int \frac{x dx}{7x^2+15x+6}.$$

$$12. \int \frac{dx}{\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x}.$$

$$13. \int \sqrt[3]{1-5x^6} x^5 dx.$$

$$14. \int \frac{(3x^2-12)dx}{(x-4)(x-3)}$$

$$15. \int \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} dx.$$

$$16. \int \frac{1-2\sin x}{\cos^2 x} dx.$$

$$17. \int \frac{dx}{x\sqrt{1-4\ln^2 x}}.$$

$$18. \int \frac{\sqrt{5x+4}}{2+\sqrt{5x+4}} dx.$$



$$19. \int x \ln \sqrt{x+1} dx. \quad 20. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 6}}. \quad 21. \int \sqrt{1-x^2} dx.$$

$$22. \int \frac{dx}{\sin^3 x}. \quad 23. \int \frac{e^x dx}{(e^x + 11)^2}. \quad 24. \int \frac{dx}{x^2 - x - 2}.$$

$$25. \int x e^{-3x} dx.$$

Варіант 12

$$1. \int x \cdot 5^x dx. \quad 2. \int \sqrt{1-e^{2x}} \cdot e^{2x} dx. \quad 3. \int \cos^5 x dx.$$

$$4. \int (3^x - 2)(3^x + 2) dx \quad 5. \int \frac{2x+5}{4x^2 + 2x+5} dx. \quad 6. \int \frac{dx}{x^3 - 1}$$

$$7. \int t g^2(2x+3) dx. \quad 8. \int \frac{dx}{4-3\cos^2 x + 5\sin^2 x} \quad 9. \int \frac{\sqrt{x^2-2}}{x} dx$$

$$10. \int e^x \sin e^x dx. \quad 11. \int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}} \quad 12. \int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx.$$

$$13. \int \frac{\arccos \frac{x}{2} dx}{\sqrt{4-x^2}}. \quad 14. \int \frac{x^2+2}{x(x-1)(x-2)} dx. \quad 15. \int e^{-2x}(4x-3) dx$$

$$16. \int \frac{\sin \frac{x}{2}}{\sqrt{\cos^3 \frac{x}{2}}} dx. \quad 17. \int e^{5\sin x - 2} \cos x dx. \quad 18. \int \frac{\sqrt{x} dx}{x - \sqrt[3]{x}}.$$

$$19. \int x \ln(x^2 + 4) dx. \quad 20. \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}. \quad 21. \int \frac{x^3 dx}{9 - 4x^8}.$$

$$22. \int t g^3 7x dx. \quad 23. \int \frac{3^x dx}{9 + 3^{2x}}. \quad 24. \int \frac{dx}{x^2 - 5x}.$$

$$25. \int (2x-1) \cdot \cos x dx.$$



Варіант 13

1. $\int \sqrt{x} \ln x dx$; 2. $\int \cos(7-3x^2) x dx$; 3. $\int \sin^4 2x dx$;
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1}}$; 5. $\int \frac{dx}{3x^2 + 5x - 1}$; 6. $\int \frac{x dx}{x^3 + 1}$;
7. $\int \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x} dx$; 8. $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$; 9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2} \sqrt[4]{x}}$;
10. $\int e^{2x} \cos(e^{2x}) dx$; 11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x+5x^2}}$; 12. $\int \sin x \cdot \sin 5x dx$;
13. $\int \sin \ln x \frac{dx}{x}$; 14. $\int \frac{3x^3 - 2}{x^3 - x} dx$; 15. $\int (x+2) \cos 3x dx$

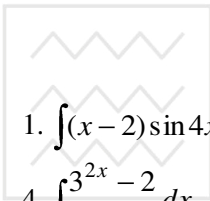
16. $\int \frac{dx}{\arcsin^2 x \sqrt{1-x^2}}$; 17. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} \cos^2 \sqrt[3]{x}}$; 18. $\int \frac{\sqrt{x+1} + 2}{\sqrt[3]{x+1} + 1} dx$;
19. $\int (x^2 - 1) e^{-x} dx$; 20. $\int \frac{x+4}{3x^2 + 2x + 4} dx$; 21. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$;
22. $\int \frac{1 - \sin x}{\cos x} dx$; 23. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x-2}}$; 24. $\int \frac{2x-4}{\sqrt{x^2 - 2x - 4}} dx$;
25. $\int (x+1) \sin x dx$.

Варіант 14

1. $\int x^2 \ln x dx$; 2. $\int 3^{\ln x + 5} \frac{dx}{x}$ 3. $\int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x} dx$
4. $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx$ 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 3x + 5}}$ 6. $\int \frac{(1-x^2) dx}{x(x^2 + 4)}$
7. $\int \frac{\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^2}} dx$ 8. $\int \operatorname{ctg}^5 x dx$ 9. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x+3}}$



10. $\int e^{x+x} dx$ 11. $\int \frac{17x+6}{3x^2+15x+4} dx$ 12. $\int \sin 8x \cdot \sin 5x dx$.
13. $\int \frac{x^4+1}{x^5+5x-8} dx$ 14. $\int \frac{x^3-12}{x(x-1)(x-4)} dx$ 15. $\int (x-3) \sin 2x dx$.
16. $\int \frac{dx}{2^x+2}$ 17. $\int \frac{x dx}{\sqrt{5-x^2}}$ 18. $\int \frac{dx}{5+\sqrt{x}}$
19. $\int x^2 e^{-x} dx$ 20. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-2x+2}} dx$ 21. $\int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x}$
22. $\int \sqrt[5]{\sin x} \cdot \cos^3 x dx$ 23. $\int \frac{x^2 dx}{\cos^2(x^3)}$ 24. $\int \frac{x dx}{3x^2-11x+2}$
25. $\int x \cdot 2^x dx$.



Варіант 15
Національний університет
водного господарства
та природокористування

1. $\int (x-2) \sin 4x dx$ 2. $\int \sqrt{\sin^5 x} \cdot \cos x dx$ 3. $\int \sin^4 x dx$
4. $\int \frac{3^{2x}-2}{\sqrt{3^x}} dx$ 5. $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+3}} dx$ 6. $\int \frac{x^4}{x^2-3} dx$
7. $\int \frac{x^2}{3+x^2} dx$ 8. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x + \cos^2 x}$ 9. $\int x\sqrt{3-x} dx$
10. $\int \frac{3x-4}{x^2-4} dx$ 11. $\int \frac{x dx}{2x^2-3x-2}$ 12. $\int \frac{dx}{\operatorname{ctg}^5 x}$
13. $\int \frac{(\cos x + \sin x)^2}{\sin x} dx$ 14. $\int \frac{x^2+2}{x(x^2-4)} dx$ 15. $\int \ln(1-5x) dx$
16. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{25-x^2}}$ 17. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$ 18. $\int \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$
19. $\int (x^2+1) e^{-x} dx$ 20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}$ 21. $\int x^3 \sqrt[4]{5x^4-3} dx$



$$22. \int \cos 4x \cdot \cos 2x dx$$

$$23. \int \operatorname{tg} 2x dx$$

$$24. \int \frac{dx}{3x^2 - 4x + 1}$$

$$25. \int x \cdot 3^x dx .$$

Варіант 16

$$1. \int x \arcsin x dx$$

$$2. \int x^2 \cdot 5^{x^3} dx$$

$$3. \int \frac{\cos^4 x dx}{\sin^2 x}$$

$$4. \int \frac{x^4 dx}{x^2 + 1}$$

$$5. \int \frac{4x + 7}{\sqrt{3x^2 - 5x + 4}} dx$$

$$6. \int \frac{x^2 dx}{(x^2 - 4)(x + 1)}$$

$$7. \int \frac{x + 1}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx$$

$$8. \int \frac{dx}{3 + \sin x + \cos x}$$

$$9. \int \frac{\sqrt{3 + x}}{x} dx$$

$$10. \int \cos(1 + 4x) dx$$

$$11. \int \frac{x dx}{2x^2 - 3x - 2}$$

$$12. \int \frac{dx}{1 + 2 \sin 2x + \cos^2 x}$$

$$13. \int \frac{\operatorname{tg}^4 x dx}{\cos^2 x}$$

$$14. \int \frac{x^5 + 3x^3 - 1}{x^2 + x} dx$$

$$15. \int (x^2 + 1) \sin 2x dx .$$

$$16. \int e^{-3x^3} \cdot x^2 dx$$

$$17. \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^7 x}}$$

$$18. \int \frac{\sqrt{x} dx}{2x - \sqrt[3]{x^2}}$$

$$19. \int \ln x \frac{dx}{x^2}$$

$$20. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 6}}$$

$$21. \int \frac{dx}{x \sqrt{1 - \ln x}}$$

$$22. \int \sin^5 x dx$$

$$23. \int \frac{x dx}{1 + 2x^2}$$

$$24. \int \frac{dx}{1 + x + x^2}$$

$$25. \int x \cdot e^{2x} dx$$

Варіант 17

$$1. \int \arccos x dx$$

$$2. \int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1 - x^2}} dx$$

$$3. \int \frac{dx}{\sin^3 x}$$



4. $\int \frac{x^3 - 1}{x - 1} dx$

5. $\int \frac{3x + 4}{7x^2 - 4x + 5} dx$

6. $\int \frac{x dx}{(x^2 - 1)(x + 2)}$

7. $\int \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 4} dx$

8. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^4 x}$

9. $\int \frac{dx}{2 + \sqrt{3 + x}}$

10. $\int e^{2x^2 + \ln x} dx$

11. $\int \frac{2x - 8}{\sqrt{1 - 2x - x^2}} dx$

12. $\int \frac{dx}{\sin x + 2 \cos x}$

13. $\int \frac{3^x dx}{4 + 3^{2x}}$

14. $\int \frac{3 dx}{(x + 1)(x^2 + 1)}$

15. $\int \frac{\ln \operatorname{arctg} x dx}{1 + x^2}$

16. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{3 + \sin x}}$

17. $\int \frac{\ln^2 x + 1}{x} dx$

18. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x} - 4}$

19. $\int x \sin 5x dx$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}}$

21. $\int \frac{\ln x - 3}{x \sqrt{\ln x}} dx$

22. $\int \sin x \cos 3x dx$

23. $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{3 - \cos^2 x}}$

24. $\int \frac{dx}{5x^2 + 10x - 2}$

25. $\int x e^{5x} dx$

Варіант 18

1. $\int \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx$

2. $\int \ln(x^3 + 1) \frac{3x^2 dx}{x^3 + 1}$

3. $\int \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 7}$

4. $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$

5. $\int \frac{5x - 7}{\sqrt{8x^2 + x + 1}} dx$

6. $\int \frac{dx}{(x^2 + 4)x}$

7. $\int \left(3 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$

8. $\int \operatorname{ctg}^3 x dx$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x - 1} + 1}$

10. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^{10} - 2}}$

11. $\int \frac{3x - 1}{x^2 - x + 1} dx$

12. $\int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x} dx$



13. $\int \frac{e^{2x}}{e^{4x} - 9} dx$ 14. $\int \frac{3x^5 - 12x^3 - 7}{x^2 + 2x} dx$ 15. $\int \log_2 x dx$.
16. $\int \frac{x dx}{\sqrt{16 + x^2}}$ 17. $\int \frac{e^{\arcsin x} + x + 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ 18. $\int x \sqrt{5 - x} dx$
19. $\int \operatorname{arccotg} \sqrt{x} dx$ 20. $\int \frac{dx}{3x^2 + x - 1}$ 21. $\int (2 \sin x + 3)^2 \cos x dx$.
22. $\int \sin^2 3x \cdot \cos^2 3x dx$ 23. $\int \sqrt{3 - \cos x} \sin x dx$.
24. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x - 1}}$ 25. $\int (3x - 2) \cos 5x dx$.

Варіант 19

1. $\int \cos 2x dx$ 2. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{tg x + 4}}$ 3. $\int \sin^2 x \cos^5 x dx$
4. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$ 5. $\int \frac{x + 1}{x^2 + x + 1} dx$ 6. $\int \frac{x dx}{x^2 + 1 \sqrt{x - 4}}$
7. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$ 8. $\int \cos^4 x dx$ 9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \sqrt{x + 1}}$
10. $\int \cos \sqrt{9x^2 + 1} dx$ 11. $\int \frac{8x + 11}{\sqrt{5 + 3x - x^2}} dx$ 12. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos x \sqrt[4]{\cos x}}$
13. $\int \frac{(\arccos x)^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ 14. $\int \frac{dx}{x^3 - 8}$ 15. $\int \ln \sqrt{x + 5} dx$
16. $\int \frac{x^2 e^{\sqrt{x^3 + 1}}}{\sqrt{x^3 + 1}} dx$ 17. $\int 1 + x^{99} x dx$ 18. $\int \frac{x - 1}{\sqrt[3]{x}} dx$
19. $\int (x^2 + 3x) e^{-x} dx$ 20. $\int \frac{dx}{3x^2 + 4x - 6}$ 21. $\int e^{x^3 + \ln x^2} dx$



$$22. \int \frac{dx}{5 + \sin x}$$

$$23. \int \frac{dx}{5 + e^x}$$

$$24. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x - 4}}$$

$$25. \int \operatorname{arccot} x \, dx.$$

Варіант 20

$$1. \int x^2 \operatorname{arctg} x \, dx$$

$$2. \int \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{\sin^2 x} \, dx$$

$$3. \int \frac{dx}{3 \sin x + 2 \cos x + 5}$$

$$4. \int \operatorname{ctg}^2 x \, dx$$

$$5. \int \frac{3x - 4}{\sqrt{-x^2 + 6x - 8}} \, dx$$

$$6. \int \frac{x \, dx}{x^3 + 8}$$

$$7. \int \sqrt{x} \sqrt{x} \sqrt{x} \, dx$$

$$8. \int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x} \, dx$$

$$9. \int \frac{\sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} \, dx$$

$$10. \int \ln^2 \left(\sqrt[3]{x^3 + 5} \right) \frac{x^2 \, dx}{x^3 + 5}$$

$$11. \int \frac{dx}{3x^2 + 7x + 10}$$

$$12. \int \frac{dx}{\sin^4 x}$$

$$13. \int \frac{5 - 3 \operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} \, dx$$

$$14. \int \frac{-x^5 + 25x^3 + 1}{x^2 + 5x} \, dx$$

$$15. \int \left(e^{2-x} - x \right) e^x \, dx$$

$$16. \int e^x \sqrt[3]{4 + e^x} \, dx$$

$$17. \int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{9 - 3x^6}}$$

$$18. \int \frac{dx}{\sqrt{x+2} + 2}$$

$$19. \int \ln \left(e^{2+1} \right) \, dx$$

$$20. \int \frac{x \, dx}{x^2 + 6x + 8}$$

$$21. \int \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$22. \int \frac{dx}{\sin^2 x + \sin 2x}$$

$$23. \int \frac{x \, dx}{\left(e^{2+2} \right) \sqrt{x^2 + 2}}$$

$$24. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x}}$$

$$25. \int x \cos 3x \, dx$$

Варіант 21.

$$1. \int \frac{x \, dx}{\cos^2 x}.$$

$$2. \int e^{\sqrt[5]{x}} \frac{dx}{\sqrt[5]{x^4}}.$$

$$3. \int \sin 5x \sin 2x \, dx.$$



$$4. \int \frac{5 - \cos x}{\cos x} dx.$$

$$5. \int \frac{3x - 1}{2x^2 - 3x + 5} dx.$$

$$6. \int \frac{dx}{x^2 + 2x}.$$

$$7. \int (\operatorname{ctg} x - 1) \operatorname{ctg} x dx.$$

$$8. \int \frac{dx}{\sin x \cos x}.$$

$$9. \int \frac{\sqrt[3]{x} dx}{2 + \sqrt[3]{x}}.$$

$$10. \int \frac{x^3 dx}{x^4 + 3}.$$

$$11. \int \frac{dx}{3x^2 - 4x + 1}.$$

$$12. \int \frac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x}.$$

$$13. \int \frac{dx}{\cos^2 x \operatorname{tg} x + 1}.$$

$$14. \int \frac{x^3 + 5x dx}{x^2 - 1}.$$

$$15. \int \arcsin \sqrt{x} dx.$$

$$16. \int \frac{e^x \sqrt{\arcsin e^x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}} dx.$$

$$17. \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{9 - \cos^2 x}}.$$

$$18. \int x \sqrt{1 + x} dx.$$

$$19. \int x^2 e^{-x} dx.$$

$$20. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 3x + 6}}.$$

$$21. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{x^4 + 1}}.$$

$$22. \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^3 x}.$$

$$23. \int \frac{e^x dx}{3 + e^x}.$$

$$24. \int \frac{x + 5}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} dx.$$

$$25. \int x^3 \log_2 x dx.$$

Варіант 22.

$$1. \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 3} \ln x dx.$$

$$2. \int \frac{x dx}{\sqrt{25 - x^4}}.$$

$$3. \int \frac{dx}{\sin x - 3 \cos x}.$$

$$4. \int \frac{\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^4}} dx.$$

$$5. \int \frac{3x - 2}{x^2 - 7x + 12} dx.$$

$$6. \int \frac{dx}{x^3 + 27}.$$

$$7. \int \frac{e^{2x} - 4}{e^x + 2} dx.$$

$$8. \int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx.$$

$$9. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2 - x^2}}.$$

$$10. \int \frac{7 \arctg 2x}{1 + 4x^2} dx.$$

$$11. \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}}.$$

$$12. \int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx.$$



$$13. \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^4}}$$

$$16. \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx.$$

$$19. \int \arctg 2x dx.$$

$$22. \int \cos 9x \cos 11x dx.$$

$$25. \int x \sin 3x dx.$$

$$14. \int \frac{dx}{x(x^2+1)}$$

$$17. \int 2^{-x^2+4} x dx.$$

$$20. \int \frac{dx}{3x^2-5x+6}$$

$$23. \int x^3 (x^4 + 3x^4)^{\frac{7}{2}} dx.$$

$$15. \int (e^{-3x})^2 dx.$$

$$18. \int \frac{dx}{10+\sqrt{x}}$$

$$21. \int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^{2x}+4}}$$

$$24. \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+4x+8}}$$

Варіант 23.

$$1. \int x \arctg 2x dx.$$

$$4. \int \frac{dx}{\sin^2 x + \cos 2x}$$

$$7. \int \frac{x^2-4}{x-1} dx.$$

$$10. \int \frac{1-2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx.$$

$$13. \int \frac{3^x dx}{1+3^{2x}}$$

$$16. \int x \operatorname{ctg} (x^2+3) dx.$$

$$19. \int \ln x \frac{dx}{x^2}$$

$$22. \int \frac{dx}{1-5\sin^2 x}$$

$$2. \int x 5^{4x^2} dx.$$

$$5. \int \frac{2x-8}{\sqrt{x^2+x+1}} dx.$$

$$8. \int \frac{dx}{\operatorname{tg} x \cos 2x}$$

$$11. \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x - 6\sin x + 9}$$

$$14. \int \frac{dx}{(x - \operatorname{ctg} 5x) \sin^2 5x}$$

$$17. \int \frac{x dx}{2x^4-1}$$

$$20. \int \frac{x+6}{4x^2-8x+5} dx.$$

$$23. \int \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}$$

$$3. \int \cos^2 x \sin^4 x dx.$$

$$6. \int \frac{dx}{(x+5)(x-2)}$$

$$9. \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$12. \int \operatorname{ctg}^4 3x dx.$$

$$15. \int x^2 e^{-3x} dx.$$

$$18. \int \sqrt{\frac{2+x}{x-2}} dx.$$

$$21. \int \frac{dx}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}$$

$$24. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+4}}$$



25. $\int x \sin 2x dx$.

Варіант 24.

1. $\int x^2 \cos 2x dx$.

2. $\int \frac{dx}{x \cos^2 x + \ln x}$.

3. $\int \operatorname{tg}^5 x dx$.

4. $\int \frac{1-5x^2}{x^2-x^2} dx$.

5. $\int \frac{4x+3}{x^2+3x+4} dx$.

6. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$.

7. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^2 x}$.

8. $\int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x}$.

9. $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}} dx$.

10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt[3]{1+\operatorname{ctg} x}}$.

11. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-2x+3x^2}}$.

12. $\int \cos 5x \sin 3x dx$.

13. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{10+x^5}}$.

14. $\int \frac{2x^5+6x^3+1}{x^3+3x^2} dx$.

15. $\int \ln(x-1) dx$.

16. $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}}$.

17. $\int x^2 \sqrt[5]{x^3+2} dx$.

18. $\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$.

19. $\int x^2 e^{-x} dx$.

20. $\int \frac{dx}{2x^2+4x+5}$.

21. $\int \frac{e^{3x} dx}{e^{2x}+1}$.

22. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$.

23. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^2 x + 4 \cos x + 1}}$.

24. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x-1}}$.

25. $\int \operatorname{arccot} x dx$.

Варіант 25.

1. $\int x \cos 5x dx$.

2. $\int \sqrt{8-2x} dx$.

3. $\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x}$.

4. $\int \frac{-\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{x+2} \sqrt{x+4}}$.

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x}}$.

6. $\int \frac{5x^2-1}{x^3-1} dx$.



$$7. \int \frac{3^{2x} - 5}{\sqrt{3^x}} dx.$$

$$10. \int \frac{\ln(x^3 + 4)}{x^3 + 4} x^2 dx.$$

$$13. \int \sin(-4x^2) dx.$$

$$16. \int \frac{\ln(x + \sqrt{x})}{x + \sqrt{x}} dx.$$

$$19. \int \operatorname{arccotg} x dx.$$

$$22. \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^3 x}.$$

$$25. \int x \log_3 x dx.$$

$$8. \int \sqrt{\cos^5 x} \sin x dx. \quad 9. \int x^3 \sqrt{4-x} dx.$$

$$11. \int \frac{x+2}{3x^2-6x+1} dx.$$

$$12. \int \frac{dx}{\sin 2x \cos 2x}.$$

$$14. \int \frac{x dx}{(x^2-4)(x+1)}.$$

$$15. \int (x^2 + x) e^x dx.$$

$$17. \int \frac{e^x dx}{(x+10)^2}.$$

$$18. \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx.$$

$$20. \int \frac{3x-4}{\sqrt{x^2+5x+7}} dx.$$

$$21. \int \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}} dx.$$

$$23. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}}.$$

$$24. \int \frac{dx}{3x^2+9x-4}.$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Варіант 26.

$$1. \int \ln^2 x dx.$$

$$2. \int x^3 10^{x^4} dx.$$

$$3. \int \cos^4 x \sin^6 x dx.$$

$$4. \int e^{-x} (x+5) dx.$$

$$5. \int \frac{x-3}{x^2+4x-1} dx.$$

$$6. \int \frac{x^2}{x^3-4x} dx.$$

$$7. \int (\sqrt{x}+1)^2 dx.$$

$$8. \int \frac{dx}{5+\sin x}.$$

$$9. \int \frac{dx}{\sqrt{x}+4\sqrt{x}}.$$

$$10. \int \frac{3^x dx}{1-9^x}.$$

$$11. \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2-2x+3}}.$$

$$12. \int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx.$$

$$13. \int \sqrt{1-2x^3} x^2 dx.$$

$$14. \int \frac{x^3}{x^2+16} dx.$$

$$15. \int (x^2+2x) \cos 2x dx.$$

$$16. \int \sqrt{\operatorname{tg} x} \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

$$17. \int \frac{dx}{x \sin^2(x+1)}.$$

$$18. \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}}.$$



$$19. \int (x-5)e^{-x} dx.$$

$$20. \int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}.$$

$$21. \int \frac{x dx}{(x^2-1)^3}.$$

$$22. \int \sin^3 x \cos^2 x dx.$$

$$23. \int \sin \sqrt{x} dx.$$

$$24. \int \frac{dx}{5x^2-10x+4}.$$

$$25. \int x \sin x dx.$$

Варіант 27.

$$1. \int \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

$$2. \int \frac{\ln^4 x}{x} dx.$$

$$3. \int \frac{dx}{4-3\sin^2 x}.$$

$$4. \int (\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}) dx.$$

$$5. \int \frac{4x+5}{5x^2+6x+18} dx.$$

$$6. \int \frac{x dx}{1-x^4}.$$

$$7. \int \frac{1+2\sin^2 x}{1+\cos 2x} dx.$$

$$8. \int \frac{\cos x dx}{2+\cos x}.$$

$$9. \int \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}} dx.$$

$$10. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{4-x^4}}.$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}.$$

$$12. \int \cos^4 3x dx.$$

$$13. \int \frac{x^2 dx}{\sin^2 (x^3+1)}.$$

$$14. \int \frac{dx}{x(x^2+4)}.$$

$$15. \int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx.$$

$$16. \int \operatorname{tg} (6x) dx.$$

$$17. \int \frac{\arcsin^3 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx.$$

$$18. \int \frac{x dx}{\sqrt{2x+3}}.$$

$$19. \int (x^2-3x)e^x dx.$$

$$20. \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2-4x-5}}.$$

$$21. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2+x^6}}.$$

$$22. \int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{\cos x}}.$$

$$23. \int (x-x^2)^{20} dx.$$

$$24. \int \frac{2x-3}{x^2-3x+10} dx.$$

$$25. \int \arccos x dx.$$



Варіант 28

1. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

2. $\int \frac{x dx}{5x^2 - 4}$

3. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$

4. $\int (\operatorname{ctg} x - 1)(\operatorname{ctg} x + 1) dx$

5. $\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 2}$

6. $\int \frac{x^2 dx}{(x-3)(x^2+4)}$

7. $\int \frac{x^4 dx}{x^3 + 2}$

8. $\int \operatorname{ctg}^4 x dx$

9. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+2}}$

10. $\int \sqrt[5]{2+7x} dx$

11. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 2}}$

12. $\int \sin^2 3x \cdot \cos^2 3x dx$

13. $\int \sqrt{\frac{\arccos x}{1-x^2}} dx$

14. $\int \frac{(2x-3)dx}{x^3+8}$

15. $\int (3x-4)e^{-x} dx$

16. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4x^3 - 1}}$

17. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x}$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+4}}$

19. $\int x^2 \cos 2x dx$

20. $\int \frac{x+2}{x^2-2x} dx$

21. $\int \cos(\ln x) \frac{dx}{x}$

22. $\int \cos^3 5x dx$

23. $\int (x+6)^{10} x dx$

24. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}$

25. $\int x \cdot 4^x dx$

Варіант 29

1. $\int (x^2 + x)e^x dx$

2. $\int 2^{-x^2} \cdot x dx$

3. $\int \frac{dx}{7+3\cos x}$

4. $\int \frac{1+2\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx$

5. $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 3}$

6. $\int \frac{(x-1) dx}{x^3 + 27}$

7. $\int \operatorname{tg}^2 x dx$

8. $\int \sin^6 x \cdot \cos^3 x dx$

9. $\int \frac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} dx$



$$10. \int \frac{\sqrt{\arctg x}}{1+x^2} dx$$

$$13. \int \cos \sqrt{x} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$16. \int e^{\sqrt[5]{x}} \frac{dx}{\sqrt[5]{x^4}}$$

$$19. \int \arcsin 2x dx$$

$$22. \int \frac{dx}{\cos^4 x}$$

$$25. \int x^2 \ln x dx.$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x}}$$

$$14. \int \frac{dx}{x(x^2 + 1)}$$

$$17. \int \frac{\ln(x^2 + 1)x}{x^2 + 1} dx$$

$$20. \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 6}}$$

$$23. \int \frac{dx}{e^x + 4}$$

$$12. \int \frac{dx}{2 \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x}$$

$$15. \int \frac{x dx}{\sin^2 x}$$

$$18. \int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$$

$$21. \int \cos \sqrt{x} dx$$

$$24. \int \frac{(2x-3)dx}{x^2 - x + 2}$$

$$1. \int (2x+5)e^{-x} dx$$

$$4. \int \sqrt[3]{x}(1+\sqrt{x})^2 dx$$

$$7. \int \sqrt{x} \sqrt{x} \sqrt{x} dx$$

$$10. \int \frac{e^x dx}{\cos^2 e^x}$$

$$13. \int \sqrt[3]{1-2x^2} \cdot x dx$$

$$16. \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)^{\frac{2}{3}} - (x+1)^{\frac{1}{2}}}$$

Варіант 30

$$2. \int e^{2x} \operatorname{cose}^{2x} dx$$

$$5. \int \frac{(4-x)dx}{\sqrt{x^2 + 4x - 4}}$$

$$8. \int \frac{dx}{5 - \cos x}$$

$$11. \int \frac{4x dx}{x^2 - 3x + 2}$$

$$14. \int \frac{3x+4}{x(x^2+9)} dx$$

$$17. \int \frac{x dx}{(1-5x^2)^2}$$

$$3. \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^2 x}$$

$$6. \int \frac{x dx}{x^3 - 8}$$

$$9. \int \frac{(x+5)dx}{\sqrt{x-1}}$$

$$12. \int \cos^5 x \cdot \sin^3 x dx$$

$$15. \int \frac{\ln x}{x^3} dx$$

$$18.$$



$$19. \int x^2 \sin 3x \, dx$$

$$20. \int \frac{dx}{3x^2 + 6x + 4}$$

$$21. \int \sin(\ln x) \frac{dx}{x}$$

$$22. \int \frac{dx}{\cos^4 2x}$$

$$23. \int \sqrt{16 - x^2} \, dx$$

$$24. \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 8x + 12}}$$

$$25. \int x \cdot 2^{-x} \, dx.$$

Визначений інтеграл і його застосування

Зразки розв'язування завдань

1. Обчислити невластний інтеграл першого роду $\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$, або

встановити його розбіжність.

Розв'язання. За означенням, маємо

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg x \Big|_1^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg b - \arctg 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Отже, інтеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ збігається.

2. Обчислити невластний інтеграл другого роду $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$, або

встановити його розбіжність.

Розв'язання. Підінтегральна функція $y = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ має розрив в

точці $x=1$, тому за означенням

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} &= \lim_{b \rightarrow 1-0} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = - \lim_{b \rightarrow 1-0} 2\sqrt{1-x} \Big|_0^b = \\ &= -2 \lim_{b \rightarrow 1-0} \sqrt{1-b} - 1 = -2 \cdot 0 - 1 = 2. \end{aligned}$$

3. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої параболою



$$y = \frac{1}{4}x^2 - 2 \text{ і прямою } x + 2y - 14 = 0.$$

Розв'язання. Знайдемо точки перетину даних ліній. З рівняння прямої $x + 2y - 14 = 0$ знаходимо $y = 7 - \frac{x}{2}$. Складаємо систему рів-

нянь
$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 - 2, \\ y = 7 - \frac{x}{2}. \end{cases}$$
 Підставляємо в перше рівняння системи за-

мість y різницю $7 - \frac{x}{2}$, отримаємо $7 - \frac{x}{2} = \frac{1}{4}x^2 - 2, \Rightarrow$

$$28 - 2x = x^2 - 4x + 4, \Rightarrow x^2 - 2x - 24 = 0.$$

За теоремою Вієта знаходимо корені квадратного рівняння:

$$x_1 = -4, x_2 = 6. \text{ Відповідно, } y_1 = 7 - \frac{-4}{2} = 9, \text{ а } y_2 = 7 - \frac{6}{2} = 4.$$

Таким чином, парабола і пряма перетинаються в точках $A(-4; 9)$ і $B(6; 4)$.

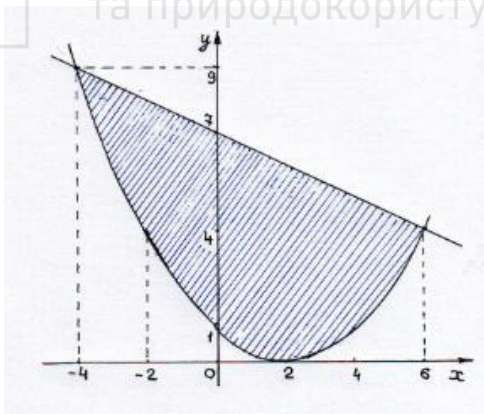


Рис. 1

Площа плоскої фігури, обмеженої зверху неперервною кривою $y = f(x)$, знизу – неперервною кривою $y = \varphi(x)$, зліва – прямою $x = a$ і справа – прямою $x = b$, обчислюється за формулою



$$S = \int_a^b f(x) - \varphi(x) dx.$$

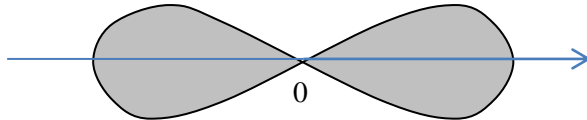
Оскільки зверху плоска фігура обмежена прямою $y = 7 - \frac{x}{2}$, а знизу – параболою $y = \frac{1}{4}x - 2x^2$, то за формулою площі отримаємо:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-4}^6 \left(7 - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}x - 2x^2 \right) dx = \int_{-4}^6 \left(7 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + x - 1 \right) dx = \\ &= \int_{-4}^6 \left(6 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} \right) dx = \left(6x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{12} \right) \Big|_{-4}^6 = 36 + 9 - 18 + 24 - 4 - \frac{16}{3} = \\ &= 41 \frac{2}{3} \text{ (кв. од.)}. \end{aligned}$$

4. Знайти площу фігури, обмеженої кривою $\rho = a \cos 2\varphi$.

Розв'язання. Дана плоска фігура симетрична відносно полярної осі і відносно полюса, складається з чотирьох рівновеликих частин, тому площа згідно формули $S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\varphi$ дорівнює:

$$\begin{aligned} S &= 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos^2 2\varphi d\varphi = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 4\varphi) d\varphi = \\ &= a^2 \left(\varphi + \frac{1}{4} \sin 4\varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi a^2}{4} \text{ (кв. од.)}. \end{aligned}$$



5. Знайти довжину дуги кардіоїди $\rho = a(1 + \cos \varphi)$.

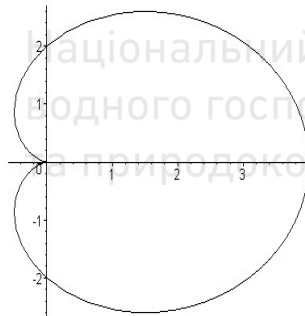


Розв'язання. Оскільки крива симетрична відносно полярної осі і $\rho' = -a \sin \varphi$, то довжину дуги, обчислимо за формулою:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi.$$

Вся крива, складається з двох частин, рівних за довжиною, тому довжина дуги

$$\begin{aligned} L &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{a^2 (+\cos \varphi)^2 + (-a \sin \varphi)^2} d\varphi = \\ &= 2a \int_0^{\pi} \sqrt{1 + 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} d\varphi = \\ &= 2\sqrt{2} a \int_0^{\pi} \sqrt{2} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 4a \left[2 \sin \frac{\varphi}{2} \right]_0^{\pi} = 8a \text{ (лін. од.)}. \end{aligned}$$



На рисунку зображено кардіоїду з параметром $a = 2$.

6. Знайти центр маси однорідної плоскої фігури обмеженої параболою $y = \sqrt{2x}$, прямою $x = 2$ і віссю Ox .

Розв'язання. Координати центра маси однорідної криволінійної трапеції, що прилягає до осі Ox , знаходять за формулами:

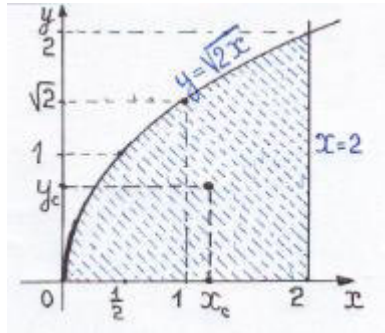
$$x_c = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{M_x}{m},$$

де $m = \int_a^b f(x) dx$ - маса плоскої фігури; $M_y = \int_a^b x y dx$ - статичний



момент плоскої фігури відносно осі Oy ; $M_x = \frac{1}{2} \int_a^b f(x)^2 dx$ - стати-

чний момент плоскої фігури відносно осі Ox . Зробимо рисунок криволінійної трапеції.



Знаходимо величини m , M_y , M_x :

$$m = \int_0^2 \sqrt{2x} dx = \frac{\sqrt{2} \cdot 2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = \frac{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}{3} = \frac{8}{3},$$

$$M_y = \int_0^2 x \sqrt{2x} dx = \frac{\sqrt{2} \cdot 2}{5} x^{\frac{5}{2}} \Big|_0^2 = \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 4}{5} = \frac{16}{5},$$

$$M_x = \frac{1}{2} \int_0^2 \sqrt{2x}^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^2 2x dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^2 = 2.$$

Отже, координати центра маси будуть такі:

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{16}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{6}{5} = 1,2, \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{2 \cdot 3}{8} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

Завдання 1. Обчислити визначені інтеграли.

1. а) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin x dx$; в) $\int_0^1 x^2 \sqrt{1+x^3} dx$.

2. а) $\int_{-1}^5 x^5 dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos x dx$; в) $\int_0^1 \frac{x^9}{1+x^{10}} dx$.



3. а) $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{5x}}$; б) $\int_1^e \ln x dx$; в) $\int_1^{\frac{1}{3}} \frac{e^x}{x^2} dx$.
4. а) $\int_0^1 (4x^3 - 2x + 1) dx$; б) $\int_0^1 x e^{-x} dx$; в) $\int_1^e \frac{\cos \ln x}{x} dx$.
5. а) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$; б) $\int_0^1 \arctg x dx$; в) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x dx$.
6. а) $\int_1^8 \frac{1 + 2\sqrt[3]{x}}{x^3} dx$; б) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x dx}{\sin^2 x}$; в) $\int_1^e \frac{dx}{x(\ln x)^{1,5}}$.
7. а) $\int_0^1 e^{2x} dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos 3x dx$; в) $\int_0^1 x^2 \sin(x^3) dx$.
8. а) $\int_1^2 2^x dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x dx$; в) $\int_1^e x^2 \ln x dx$.
9. а) $\int_0^2 3^{2x} dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x \cos 4x dx$; в) $\int_0^1 x \arctg x dx$.
10. а) $\int_0^1 x e^x dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \sin 7x dx$; в) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{1 - e^{-2x}} dx$.
11. а) $\int_1^2 (x^2 - 2x + 1) dx$; б) $\int_0^1 \arcsin x dx$; в) $\int_0^1 \sqrt{1+x} dx$.
12. а) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$; б) $\int_1^e \ln 2x dx$; в) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$.



13. а) $\int_0^1 (e^x - 1) e^x dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$; в) $\int_0^1 \frac{x dx}{1 + \sqrt{x}}$.

14. а) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2 + x}$; б) $\int_0^1 x 2^{-x} dx$; в) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} dx$.

15. а) $\int_0^1 \frac{x dx}{(x^2 + 1)^2}$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \cos x dx$; в) $\int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5 - 4x}}$.

16. а) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x dx$; б) $\int_0^1 x^2 e^{2x} dx$; в) $\int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{x+4}}$.

17. а) $\int_0^{\frac{\pi}{16}} \cos 4x dx$; б) $\int_1^e x \ln^2 x dx$; в) $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{x^4 + 1}$.

18. а) $\int_0^{\frac{\pi}{12}} \sin 6x dx$; б) $\int_0^3 \ln(x+3) dx$; в) $\int_1^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} dx$.

19. а) $\int_1^2 (3x^2 - x + 1) dx$; б) $\int_0^1 x^2 e^{3x} dx$; в) $\int_1^5 \frac{x dx}{\sqrt{2x-1}}$.

20. а) $\int_1^4 \left(4x^3 - \frac{8}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x^2} \right) dx$; б) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arcsin x dx$; в) $\int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{x+1}}$.

21. а) $\int_0^1 4^{3x+1} dx$; б) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2 + x}$; в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$.

22. а) $\int_1^6 \frac{dx}{\sqrt{3x-2}}$; б) $\int_1^e x \ln x dx$; в) $\int_1^4 \frac{x dx}{\sqrt{2x+1}}$.

23. а) $\int_0^1 \left(3x^2 - \frac{4}{x+1} - 1 \right) dx$; б) $\int_1^e x \ln x dx$; в) $\int_1^4 \frac{x dx}{\sqrt{2x+1}}$.



24. а) $\int_1^4 \left(2x - \frac{3}{\sqrt{x}} + 1 \right) dx$; б) $\int_1^{\sqrt{3}} \arctg x dx$; в) $\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$.

25. а) $\int_{-1}^5 x^5 + 3 dx$; б) $\int_0^1 x e^x dx$; в) $\int_0^1 \arctg^3 x \frac{dx}{1 + x^2}$.

Завдання 2. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність.

1. а) $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$; б) $\int_2^3 \frac{x dx}{\sqrt[4]{x^2 - 4}}$.

2. а) $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{x^2 + 3}$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$.

3. а) $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^3} dx$; б) $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^2}}$.

4. а) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ctg x dx$.

5. а) $\int_0^{\infty} \frac{\arctg x}{1 + x^2} dx$; б) $\int_3^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 7x + 10}}$.

6. а) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}}$; б) $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$.

7. а) $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x \ln^5 x}$; б) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{-x^2}}$.

8. а) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} e^{\frac{-1}{x}} dx$; б) $\int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{x + 2}}$.



9. а) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$;

10. а) $\int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{x dx}{x^4 + 9}$;

11. а) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x-1}$;

12. а) $\int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{x^2 + 1}$;

13. а) $\int_2^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^4 + 1}}$;

14. а) $\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{x^8 + 1}$;

15. а) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$;

16. а) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$;

17. а) $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$;

18. а) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$;

19. а) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x+2}$;

20. а) $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x \ln^5 x}$;

б) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}}$.

б) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2 + 2x - 3}$.

б) $\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{4-x}}$.

б) $\int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

б) $\int_0^3 \frac{dx}{x-3}$.

б) $\int_0^1 \frac{x dx}{x^2 - 1}$.

б) $\int_1^5 \frac{dx}{x \ln x}$.

б) $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$.

б) $\int_3^4 \frac{dx}{x-3}$.

б) $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$.

б) $\int_3^4 \frac{dx}{3-x}$.

б) $\int_4^6 \frac{dx}{x-4}$.



21. а) $\int_1^{\infty} \frac{\arctg^2 x}{x^2 + 1} dx$;

б) $\int_2^3 \frac{dx}{x-2}^2$.

22. а) $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{1+x^4}$;

б) $\int_{-1}^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$.

23. а) $\int_1^{\infty} \frac{2x dx}{x^2 + 1}$;

б) $\int_1^2 \frac{dx}{x-1}^3$.

24. а) $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{x^2 + 4}$;

б) $\int_1^e \frac{dx}{x \ln^3 x}$.

25. а) $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;

б) $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$.

Завдання 3. З допомогою визначеного інтеграла обчислити площу фігури, обмеженої параболою і прямою, рівняння яких задані. Зробити рисунок та заштрихувати плоску область.

1. $y = \frac{1}{3}(x-1)^2$, $y = x + 5$. 2. $y = -x^2 - 4x$, $y = -2x$.

3. $y = -x^2 - 4x - 1$, $y = -x - 1$. 4. $y = -x^2 - 2x + 2$, $y = -2x + 1$.

5. $y = -x^2 + 2x + 3$, $y = 2x + 2$. 6. $y = x^2 + 4x + 1$, $y = x + 1$.

7. $y = x^2 + 2x - 2$, $y = 2x - 1$. 8. $y = x^2 - 2x - 3$, $y = x - 3$.

9. $y = -x^2 - 4x$, $y = -x$. 10. $y = -x^2 - 4x - 1$, $y = -3x - 3$.

11. $y = -x^2 - 2x + 2$, $y = x + 2$. 12. $y = -x^2 + 2x + 3$, $y = -2x + 6$

13. $y = x^2 + 4x$, $y = -x$. 14. $y = x^2 + 4x + 1$, $y = -x - 3$.

15. $y = x^2 + 2x - 2$, $y = 3x$. 16. $y = x^2 - 2x - 3$, $y = 2x - 6$.

17. $y = -x^2 - 4x$, $y = x$. 18. $y = -x^2 - 4x - 1$, $y = x + 3$.

19. $y = -x^2 - 2x + 2$, $y = -3x$. 20. $y = -x^2 + 2x + 3$, $y = x + 1$.

21. $y = x^2 + 4x$, $y = 3x + 2$. 22. $y = -x^2 - 4x$, $y = -3x - 2$.

23. $y = -x^2 - 4x - 1$, $y = 2x + 7$. 24. $y = -x^2 - 2x + 2$, $y = -x$.



25. $y = -x^2 + 2x + 3$, $y = 3 - x$. 26. $y = x^2 + 4x$, $y = 2x + 3$.

Завдання 4. Зробити рисунок кривої і обчислити за допомогою визначеного інтеграла довжину дуги

1. кривої $\rho = 2 \sin \varphi$;

2. кардіоїди $\rho = 2a (-\cos \varphi)$;

3. кривої $y = \ln x$ від $x_1 = 1$ до $x_2 = 2\sqrt{2}$;

4. астроїди $x = 2 \cos^3 t$, $y = 2 \sin^3 t$;

5. логарифмічної спіралі $\rho = e^\varphi$ для $\varphi \in [0, 2\pi)$;

6. спіралі Архімеда $\rho = 5\varphi$, яка лежить всередині кола $\rho = 10\pi$;

7. кардіоїди $\rho = 1 + \sin \varphi$;

8. параболи $y = 2\sqrt{x}$, що лежить між прямими $x = 0$ і $x = 4$;

9. однієї арки циклоїди $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$;

10. кривої $y = e^x$ від точки $(0; 1)$ до точки $(e; e)$;

11. логарифмічної спіралі $\rho = \sqrt{2} e^\varphi$ для $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$;

12. кардіоїди $\rho = 2 (+\cos \varphi)$;

13. кривої $\rho = 6 \cos \varphi$;

14. напівкубічної параболи $y = x^{\frac{3}{2}}$ від $x = 0$ до $x = 5$;

15. кардіоїди $\rho = 2 (-\sin \varphi)$;

16. напівкубічної параболи $y = \sqrt{x - 4}^3$ від точки $A(4; 0)$ до точки $B(5; 1)$.

17. кривої $\rho = \varphi^2$ від $\varphi = 0$ до $\varphi = \pi$.

18. кривої $x = 4 \cos^2 t$, $y = 3 \sin^2 t$ від $t = 0$ до $t = \frac{\pi}{4}$.

19. кривої $\rho = \varphi^4$ від $\varphi = 0$ до $\varphi = \pi$.



20. кривої $\rho = \sin^3 \frac{\varphi}{3}$ від $\varphi = 0$ до $\varphi = \frac{3}{2}\pi$.

21. кривої $\rho = \sin^4 \frac{\varphi}{4}$ від $\varphi = 0$ до $\varphi = \pi$.

22. параболи $y = \frac{x^2}{2}$ на відрізку $0; 1$.

23. кривої $y = \ln x$ на відрізку $[\sqrt{3}; \sqrt{8}]$.

24. кривої $\rho = 3 \cos^3 \frac{\varphi}{3}$.

25. кардіоїди $\rho = 2(1 - \cos \varphi)$.

Завдання 5. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox плоскої фігури, обмеженої лініями. Зробити рисунок плоскої фігури, або тіла обертання.

1. параболою $y = 2x - x^2$ і прямою $y = x$;

2. параболою $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$;

3. еліпсом $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$;

4. кривою $y = \cos x$ і прямими $y = x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$;

5. параболою $y = \frac{x^2}{2}$ і кривою $y = \frac{x^3}{8}$;

6. прямими $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$;

7. параболою $y = \frac{x^2}{4}$, прямою $x = 4$ і віссю Ox ;

8. параболою $y = x^2$ і $y = -x^2 + 8$;

9. параболою $y = x^2$ і $y = 2 - x^2$;

10. параболою $y = 2x - x^2$ і віссю Ox ;



11. гіперболою $xy = 4$, прямими $x = 1$, $x = 4$ і віссю Ox ;

12. параболою $y = 2\sqrt{x+1}$, $y = \sqrt{4-2x}$ і віссю Ox ;

13. гіперболою $x^2 - y^2 = 4$ і прямою $x = 4$;

14. кривою $y = x^3$, прямими $x = 1$, $x = 2$ і віссю Ox ;

15. кривою $y = e^x$ і прямими $x = 0$, $y = 0$;

16. параболою $y = 4 - x^2$ і прямою $2x + y - 4 = 0$.

17. параболою $y^2 = 4x$ і прямою $x = 1$.

18. параболою $y = \frac{x^2}{2}$ і прямою $2x + 2y - 3 = 0$.

19. параболою $y - 1^2 = x$ і прямими $x = 0$, $y = 2$.

20. синусоїдою $y = \sin x$ і прямою $y = \frac{2}{\pi}x$ $x \geq 0$.

21. кривою $y = e^x$ і прямими $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$.

22. параболою $y = x^2$ і прямою $y = 1$.

23. параболою $y = x^2$, гіперболою $y = \frac{1}{x}$ і прямою $x = \frac{1}{2}$.

24. синусоїдою $y = \sin x$ і прямими $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$.

25. колом $x^2 + y^2 = 1$, параболою $y = \sqrt{\frac{3}{2}}x$ і віссю Oy .

Завдання 6.

1. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v \stackrel{?}{=} (t + a)$ м/с. Знайти значення a , якщо відомо, що шлях пройдений тілом за 2 с від початку руху, дорівнює 48 м.

2. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v \stackrel{?}{=} (t^2 + 3)$ м/с. Знайти шлях пройдений тілом за перші 5 с від початку руху.



3. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю

$v = 4t^2 + 4t - 2$ м/с. Знайти шлях, пройдений тілом за 10-у секунду.

4. Два тіла одночасно виходять із однієї точки: одне - зі швидкістю $v_1 = 5t$ м/с, друге - зі швидкістю $v_2 = 3t^2$ м/с. Яка віддаль буде між ними через 20 с, якщо вони рухаються по прямій в одному напрямку?

5. Швидкість руху точки виражається формулою

$v = 8t - 3t^2$ м/с. Знайти шлях, пройдений точкою від початку руху до зупинки.

6. Тіло кинуто вертикально вгору зі швидкістю

$v = 49 - 9,8t$ м/с. Знайти найбільшу висоту підйому.

7. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v = t + a$ м/с. Знайти значення a , якщо відомо, що за перші 2 с тіло пройшло 40 м.

8. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю

$v = t^2 - 2t - 3$ м/с. Знайти шлях, пройдений тілом за 4-у секунду.

9. Швидкість руху точки виражається формулою

$v = 2t - 3t^2$ м/с. Знайти шлях, пройдений точкою від початку руху до зупинки.

10. Тіло кинуто вертикально вгору зі швидкістю

$v = 49,4 - 9,8t$ м/с. На яку максимальну висоту підніметься тіло?

11. Знайти шлях, пройдений точкою від початку руху до зупинки, якщо швидкість її прямолінійного руху змінюється за законом

$v = 5t - 5t^2$ м/с.

12. Два тіла одночасно почали прямолінійно рухатися з деякої точки в одному напрямку. Перше тіло рухається за законом

$v_1 = t^2 + 2t$ м/с, друге - за законом $v_2 = t + 5$ м/с. Яка віддаль буде між ними через 5 с.

13. Два тіла одночасно почали прямолінійно рухатися з деякої точки в одному напрямку зі швидкостями $v_1 = t^2 + 4t$ м/с і



$v_2 = 4t$ м/с. Через скільки секунд віддаль між ними буде дорівнювати 250 м ?

14. Тіло кинуто вертикально вгору зі швидкістю

$v = 9,2 - 9,8t$ м/с. Знайти найбільшу висоту підйому.

15. Швидкість руху точки $v = 0,1 e^{-0,02t}$ м/с. Знайти шлях, пройдений точкою від початку руху до зупинки.

16. Матеріальна точка рухається прямолінійно зі швидкістю

$v = tg t$ м/с. Знайти шлях, пройдений точкою за $\frac{\pi}{4}$ секунди від початку руху.

17. Швидкість прямолінійного руху тіла виражається формулою

$v = 3t^2 - 2t$ м/с. Знайти шлях, пройдений тілом за 5 с від початку руху.

18. Швидкість тіла задається формулою $v = \sqrt{1+t}$ м/с. Знайти шлях пройдений тілом за перші 10 с після початку руху.

19. Швидкість руху точки $v = 0,1 e^{-0,01t}$ м/с. Знайти шлях, пройдений точкою від початку руху до зупинки.

20. Швидкість точки змінюється за законом $v = 100 + 8t$ м/с.

Який шлях пройде точка за проміжок часу $0;10$?

21. Швидкість руху точки $v = 4t^3 - 2t + 1$ м/с. Знайти шлях, що пройде точка за проміжок часу $0;4$ м/с.

22. Швидкість точки змінюється за законом $v = 3t^2 + 1$ м/с. Знайти довжину шляху, що пройде тіло за 3-ю секунду його руху.

23. Швидкість руху тіла змінюється за законом $v = \sqrt{2t}$ м/с. Який шлях пройде тіло за другу та восьму секунди руху?

24. Швидкість прямолінійного руху тіла змінюється за законом $v = 2t + 3t^2$ м/с. Знайти шлях пройдений тілом за 5 с від початку руху.



25. Швидкість точки $v = 0,2t^2$ м/с. Знайти шлях, пройдений точкою за 9 с від початку руху. Чому дорівнює середня швидкість руху за цей проміжок?

26. Швидкість тіла задається формулою $v = \sqrt{t+4}$ м/с. Знайти шлях пройдений тілом за перші 5 с після початку руху.

Завдання 7.

1. Яка робота виконається під час стискання гвинтової пружини на 10 см, якщо для стискання пружини на 1 см витрачається сила 2 Н?

2. Сила 40 Н розтягує пружину на 4 см. Яку роботу треба виконати, щоб розтягнути її на 2 см?

3. Пружину довжиною 14 см сила 60 Н розтягає на 2 см. Яку роботу треба виконати, щоб розтягнути пружину на 20 см.

4. Для розтягу пружини на 5 см затрачається робота 29,43 Дж. На скільки розтягнеться пружина, якщо буде затрачено роботу 9,81 Дж?

5. Яку роботу виконає сила 10 Н при розтягу пружини на 2 см?

6. Яку роботу виконає сила 8 Н при розтягу пружини на 6 см?

7. Пружина в спокійному стані має довжину 20 см. Сила 50 Н розтягує її на 1 см. Яку роботу треба виконати, щоб розтягнути пружину від 22 см до 32 см?

8. Для стиску пружини на 3 см необхідно виконати роботу 16 Дж. На яку довжину стиснеться пружина, якщо виконати роботу рівну 144 Дж?

9. Обчислити роботу, яка виконується під час стиску гвинтової пружини на 4 см, якщо для стиску пружини на 1 см треба прикласти силу в 9,8 Н?

10. Пружина в спокійному стані має довжину 20 см. Сила в 9,8 Н розтягує її на 2 см. Яку роботу треба виконати, щоб розтягнути пружину від 25 см до 35 см?

11. Обчислити роботу, яка виконається під час розтягу каучукової мотузки на 20 см, якщо сила в 2,6 Н видовжує мотузку на 2 см.



12. Яку роботу треба виконати, щоб викачати воду з басейну, що має форму вертикального циліндра висотою 2 м і радіусом основи 5 м?

13. Яку роботу треба виконати, щоб викачати мастило через верхній отвір цистерни, яка має форму циліндра з горизонтальною віссю, якщо питома вага мастила $\gamma = 0,9$, довжина цистерни $H = 6$ м і радіус основи $R = 2$ м?

14. Яку роботу треба виконати, щоб викачати воду із напівсферичного казана радіуса $R = 1$ м?

15. Обчислити роботу, яку треба виконати, щоб викачати рідину з питомою вагою γ із резервуара, який має форму повернутого вершиною вниз конуса, висота якого дорівнює H , а радіус основи R .

16. Яку роботу треба виконати, щоб розтягнути пружину на 3 см, якщо відомо, що від сили в 1 Н вона розтягується на 1 см?

17. Знайти координати центра ваги плоскої фігури, обмеженої параболою $y^2 = 2x$, віссю Ox і прямою $x = 2$.

18. Знайти момент інерції дуги кола $x^2 + y^2 = 4$, яка лежить у першому квадранті, відносно осі Oy .

19. Знайти центр маси плоскої фігури, обмеженої віссю Ox і однією гілкою синусоїди $y = \sin x$.

20. Знайти центр маси плоскої фігури, обмеженої параболою $x^2 + 4y - 16 = 0$ і віссю Ox .

21. Знайти центр маси плоскої фігури, обмеженої параболою $y^2 = 20x$ і $x^2 = 20y$.

22. Знайти центр маси плоскої фігури, обмеженої параболою $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$.

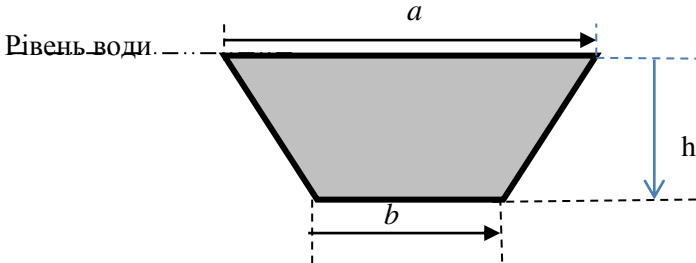
23. Знайти статичні моменти відносно осей Ox і Oy трикутника, обмеженого прямими $4x + 3y - 12 = 0$, $x = 0$, $y = 0$.

24. Знайти масу стержня довжиною 100 см, якщо лінійна густина стержня змінюється за законом $\gamma = 20x + 0,15x^2$ г/см, де x - відстань від одного з кінців стержня.

25. Знайти роботу, яку потрібно затратити, щоб викачати воду з резервуара, який має форму вертикального циліндра, радіус основи якого R , а висота H .



Завдання 8. Обчислити силу тиску води на греблю, яка має форму рівнобічної трапеції з основами a і b , та висотою h . Густина води $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, прискорення вільного падіння $g \approx 10 \text{ м/с}^2$.



- | | | |
|----------------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1. $a = 6,6 \text{ м}$, | $b = 4,5 \text{ м}$, | $h = 3,0 \text{ м}$; |
| 2. $a = 7,8 \text{ м}$, | $b = 5,1 \text{ м}$, | $h = 3,0 \text{ м}$; |
| 3. $a = 9,0 \text{ м}$, | $b = 5,7 \text{ м}$, | $h = 4,0 \text{ м}$; |
| 4. $a = 10,2 \text{ м}$, | $b = 6,3 \text{ м}$, | $h = 4,0 \text{ м}$; |
| 5. $a = 11,4 \text{ м}$, | $b = 6,9 \text{ м}$, | $h = 5,0 \text{ м}$; |
| 6. $a = 7,2 \text{ м}$, | $b = 4,8 \text{ м}$, | $h = 3,0 \text{ м}$; |
| 7. $a = 8,4 \text{ м}$, | $b = 5,4 \text{ м}$, | $h = 3,0 \text{ м}$; |
| 8. $a = 9,6 \text{ м}$, | $b = 6,0 \text{ м}$, | $h = 4,0 \text{ м}$; |
| 9. $a = 10,8 \text{ м}$, | $b = 6,6 \text{ м}$, | $h = 4,0 \text{ м}$; |
| 10. $a = 12,0 \text{ м}$, | $b = 7,2 \text{ м}$, | $h = 5,0 \text{ м}$; |
| 11. $a = 5,6 \text{ м}$, | $b = 4,2 \text{ м}$, | $h = 3,0 \text{ м}$; |
| 12. $a = 6,5 \text{ м}$, | $b = 4,5 \text{ м}$, | $h = 4,0 \text{ м}$; |
| 13. $a = 7,6 \text{ м}$, | $b = 5,2 \text{ м}$, | $h = 2,0 \text{ м}$; |
| 14. $a = 8,6 \text{ м}$, | $b = 4,8 \text{ м}$, | $h = 5,0 \text{ м}$; |
| 15. $a = 4,8 \text{ м}$, | $b = 4,0 \text{ м}$, | $h = 3,0 \text{ м}$; |
| 16. $a = 5,0 \text{ м}$, | $b = 3,6 \text{ м}$, | $h = 3,0 \text{ м}$; |
| 17. $a = 5,4 \text{ м}$, | $b = 3,8 \text{ м}$, | $h = 3,2 \text{ м}$; |
| 18. $a = 5,8 \text{ м}$, | $b = 4,0 \text{ м}$, | $h = 3,2 \text{ м}$; |
| 19. $a = 4,8 \text{ м}$, | $b = 3,4 \text{ м}$, | $h = 3,4 \text{ м}$; |
| 20. $a = 5,2 \text{ м}$, | $b = 4,2 \text{ м}$, | $h = 3,4 \text{ м}$; |



21. $a = 6,0$ м, $b = 4,0$ м, $h = 3,0$ м ;
22. $a = 6,2$ м, $b = 4,2$ м, $h = 3,6$ м ;
23. $a = 6,4$ м, $b = 4,0$ м, $h = 3,1$ м ;
24. $a = 6,3$ м, $b = 4,1$ м, $h = 2,8$ м ;
25. $a = 6,0$ м, $b = 3,0$ м, $h = 3,0$ м .

Список літератури

1. Шкіль М.І., Колесник Т.В., Котлова В.М. Вища математика. Аналітична геометрія з елементами алгебри. Вступ до математичного аналізу. Книга 1. - К.: Либідь, 1994. – 391 с.
2. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика: Визначений інтеграл, функції багатьох змінних, диференціальні рівняння, ряди. Книга 2. – К.: Вища школа, 1986. – 512 с.
3. В.Пак, Ю.Носенко Вища математика, - К., “Либідь”, 1996 р.
4. Антонюк Р.А. Вища математика: Навчальний посібник. – Рівне: НУВГП, 2005. – 246с.
4. Брушковський О.Л. Вища математика: Навчальний посібник. Частина 2 – Рівне: НУВГП, 2008. – 266 с.
5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. Навчальний посібник. – К. ”А.С.К.”, 2006. – 648 с.
6. Мізюк В.Г. Вища математика – Рівне: НУВГП, 2008. – 298 с.
7. Мізюк В.Г. Вища математика – Рівне: НУВГП, 2009, – 212 с.
8. Водяна С.П. Вища математика. Частина 2. Навчальний посібник. – Рівне: НУВГП, 2012. – 92 с.